

Teorija polja i valova

Muharem Mehmedović
Stjepan Štefanko



ETFOS
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET OSIJEK



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Osijek, 2010.

UDŽBENICI
SVEUČILIŠTA JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

MANUALIA
UNIVERSITATIS STUDIORUM IOSEPHI GEORGII STROSSMAYER OESSEKIENSIS



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Elektrotehnički fakultet Osijek

TEORIJA POLJA I VALOVA

Muharem Mehmedović
Stjepan Štefanko

Osijek, 2010.

TEORIJA POLJA I VALOVA

Glavni i odgovorni urednik:

Prof. dr. sc. Radoslav Galić

Autori:

Muharem Mehmedović

Stjepan Štefanko

Recenzenti:

Prof. dr. sc. Goran Erceg

Dr. sc. Pavel Omahen

Lektor:

Zdravka Vranješ, prof.

Kontakt:

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET OSIJEK

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA

Kneza Trpimira 2b, 31000 Osijek

Telefon: 031 224 600, fax: 031 224 605

www.etfos.hr, etfos@etfos.hr

Tisak:

Grafika, Osijek

Naklada:

200 primjeraka

ISBN/ISMIN 978-953-6032-74-7

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem
121128061

Osijek, 2010.

SADRŽAJ

PREDGOVOR	vii
1 UVOD	1
2 ELEKTROSTATIKA	5
2.1 ELEKTROSTATIČKO POLJE	5
2.1.1 Jakost električnog polja i potencijal	6
2.1.2 Gaussov zakon	8
2.1.3 Implikacije Gaussovog zakona.....	11
2.1.4 Primjena Gaussovog zakona	12
2.1.5 Greenov teorem recipročnosti (uzajamnosti)	19
2.1.6 Koeficijenti potencijala	23
2.1.7 Kapacitivni koeficijenti.....	24
2.1.8 Parcijalni kapaciteti	25
2.1.9 Primjeri	26
2.2 OPĆE RJEŠENJE POISSONOVE JEDNADŽBE	31
2.2.1 Silocijev	32
2.2.2 Energija elektrostatičkog polja	35
2.3 METODE RJEŠAVANJA ELEKTROSTATIČKIH PROBLEMA ODSLIKAVANJEM	39
2.3.1 Točkasti naboj i vodljiva ravnina	39
2.3.2 Slučaj naboja i dvije beskonačne tanke ploče pod kutom	42
2.3.3 Točkasti naboj između dvije tanke beskonačne paralelne ploče	43
2.3.4 Točkasti naboj i vodljiva kugla	44
2.3.5 Linijski naboj i vodljivi cilindar	47
2.3.6 Kapacitet dvaju beskonačno dugih cilindara	51
2.3.7 Dvodimenzionalni problemi potencijala (konjugirane funkcije).....	53
2.3.8 Konformno preslikavanje.....	58
2.3.9 Schwarz – Christoffelov teorem	61

2.3.10	Dielektrična sredstva. Dipol.....	62
2.3.11	Moment i sila na dipol u vanjskom električnom polju.....	65
2.3.12	Polje mnoštva dipola	66
2.3.13	Polarizacija (vektor polarizacije $\vec{P}$).....	68
2.3.14	Ponašanje vektora gustoće električnog pomaka $\vec{D}$ i jakosti elektrostatičkog polja $\vec{E}$ na granici dvaju sredstava	72
2.3.15	Mehaničke sile u elektrostatičkom polju. Mehaničke sile na površini vodiča	74
2.3.16	Thomsonov teorem	78
2.3.17	Naprezanje u dielektričnom sredstvu	79
2.3.18	Odslikavanje na dielektričnoj ravnini	86
2.3.19	Dielektrična kugla u homogenom električnom polju	93
2.3.20	Zaštitno uže	97
2.3.21	Kratki linijski naboj	100
2.3.22	Degeneracije rotacijskog elipsoida.....	104
3	SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI I MAGNETSKA INDUKCIJA.....	109
3.1	UVODNI DIO	109
3.1.1	Galilejeva transformacija	110
3.1.2	Michelson - Morleyev pokus.....	111
3.2	LORENTZOVE TRANSFORMACIJE	114
3.2.1	Transformacije vremena	117
3.2.2	Transformacija duljine štapa i vremenskog intervala.....	118
3.2.3	Prostor Hermanna Minkowskog.....	119
3.2.4	Slaganje brzina	120
3.2.5	Varijacija mase s brzinom.....	121
3.2.6	Masa i energija	123
3.3	TRANSFORMACIJA JEDNADŽBI ZA SILU	126
3.3.1	Magnetska indukcija.....	134
4	MAGNETOSTATIKA.....	139
4.1	BIOT-SAVARTOV I AMPÈREOV KRUŽNI ZAKON	139
4.2	MAGNETSKI SKALARNI I VEKTORSKI POTENCIJAL.....	140
4.2.1	Magnetski dipol i polarizacija	144
4.2.2	Magnetska polarizacija.....	148
4.3	MEĐUINDUKTIVITET I SAMOINDUKTIVITET	150
4.3.1	Uzajamna energija dviju petlji.....	151
4.3.2	Energija magnetskog polja	153
4.4	ULANČANI TOK.....	156

4.4.1	Ulančani tok i unutarnji induktivitet beskonačno dugog okruglog vodiča radijusa R_0	158
4.4.2	Energija dvaju magnetski spregnutih strujnih krugova	161
4.4.3	Linijaska struja	164
4.4.4	Realni dvožični vod	165
4.4.5	Energija dvožičnog voda.....	173
4.4.6	Induktivitet prstena kružnog presjeka.....	174
4.4.7	Induktivitet prstena pravokutnog presjeka:.....	177
4.4.8	Međuinduktivitet dvaju prstenova	178
4.4.9	Sile u magnetostatičkom polju	179
4.5	UVJETI NA GRANICI	181
4.5.1	Odslikavanje u magnetskom poluprostoru.....	184
5	MAXWELLOVE JEDNADŽBE I VALNE JEDNADŽBE.	
	ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI. RAVNI VAL	187
5.1	OHMOV ZAKON I JOULEOV ZAKON. RELAKSACIJA NABOJA	188
5.1.1	Strujni krug istosmjernje struje.....	188
5.1.2	Jouleov zakon.....	189
5.1.3	Relaksacija naboja	191
5.2	FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE	193
5.2.1	Pomaćne struje	194
5.2.2	Pregled Maxwellovih jednadžbi.....	196
5.3	VALNE JEDNADŽBE	198
5.4	ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI	199
5.4.1	Lorentzovo baždarenje	202
5.4.2	Coulombovo baždarenje	205
5.4.3	Hertzov potencijal i Hertzov vektor	207
5.5	POYNTINGOV VEKTOR	211
5.5.1	Primjeri	213
5.6	NAPREZANJA U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU	216
5.6.1	Elektromagnetski impuls.....	219
5.6.2	Primjeri	220
5.7	RAVNI VAL.....	226
5.7.1	Rješenje valnih jednadžbi.....	231
5.7.2	Val u sredstvu bez gubitaka	235
5.7.3	Brzina čela vala.....	236
5.7.4	Harmonijski val.....	237
5.7.5	Harmonijski val u sredstvu bez gubitaka	238
5.7.6	Harmonijski val u sredstvu s gubicima	240

5.7.7	Polarizacija	244
5.7.8	Podjela na vodiče i izolatore	245
5.7.9	Strujanje energije	248
5.8	POLJE NA GRANICI DVAJU SREDSTAVA	250
5.8.1	Refleksija (odbijanje) i refrakcija (lom).....	250
5.8.2	Val na granici dvaju dielektričnih sredstava	256
5.8.3	Granica izolator-vodič	260
5.9	PRIJENOSNICI ENERGIJE	266
5.9.1	Prijenosni vod	266
5.9.2	Sekundarne konstante voda	271
5.9.3	Putujući val na vodu	283
5.9.4	Val u čvorištu u vodu	284
5.9.5	Jednostavni prijelazi u vodu.....	286
6	SKIN EFEKT.....	293
6.1	VODLJIVA PLOČA	297
6.2	LIM U MAGNETSKOM POLJU	304
6.3	SKIN EFEKT OKRUGLOG VODIČA.....	310
7	HERTZOV DIPOL	319
7.1	ENERGIJA ISIJAVANJA.....	326
7.2	ŠTAPNA ANTENA	330
7.2.1	Napajanje antene.....	341
8	MATEMATIČKI PRILOG.....	343
8.1	KOORDINATNI SUSTAVI I MATEMATIČKI PROSTORI	344
8.2	TRANSFORMACIJA KOORDINATA I KRIVOLINIJSKE POOPĆENE KOORDINATE	345
8.2.1	Ortogonalne krivolinijske koordinate	345
8.2.2	Sustavi krivolinijskih koordinata i jedinični vektori	346
8.2.3	Vektorske funkcije u krivolinijskom ortogonalnom sustavu	349
8.2.4	Primjena na pravokutni Kartezijev koordinatni sustav.....	352
8.2.5	Primjena na cilindrični sustav ($\rho \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$)	360
8.2.6	Primjena na sferni sustav ($r \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$)	362
8.3	TENZORI.....	365
8.4	GAUSSOV STAVAK (TEOREM).....	371
8.5	STOKESOV STAVAK.....	371
8.6	HELMHOLTZOV TEOREM	371
8.7	RJEŠENJE POISSONOVE JEDNADŽBE.....	372
8.7.1	Fourierova transformacija	373

8.7.2	Slučaj točkastog naboja	376
8.7.3	Greenov teorem	378
8.7.4	Drugo rješenje Poissonove jednadžbe	378
8.7.5	Dokaz o jedinstvenosti rješenja.....	382
8.7.6	Tait i McAulayev teorem	383
8.8	OSNOVE VARIJACIJSKOG RAČUNA.....	384
8.8.1	Primjeri	387
9	LITERATURA	395
10	KAZALO.....	397

PREDGOVOR

Prezentirani materijal odgovara približno sadržaju kolegija Teorijska elektrotehnika koji se predavao na Elektrotehničkom fakultetu Sveučilišta Josip Juraj Strossmayer u Osijeku u periodu od 1991. do 2007. i to u ljetnom semestru treće godine studija na svim smjerovima u opsegu 60 sati predavanja te 30 sati auditornih vježbi. Zaključno s 2003. godinom predavanja je izvodio prof. dr. sc. Stjepan Štefanko, 2004/05. prof. dr. sc. Sead Berberović te prof. dr. sc. Željko Štih.

Materijal je u rukopisu u najvećem opsegu pripremio prof. dr. sc. Stjepan Štefanko. Tekst je uglavnom u tom opsegu i usvojen te uređen i djelomice dopunjavan tijekom predavanja u školskim godinama 2005/06.- 2008/09.

Prva generacija studenata po Bolonjskom procesu koja je upisala prvu godinu preddiplomskog studija školske godine 2005./06. trajanja 3 godine nije slušala ovaj kolegij u tom dijelu studija. Studenti koji su po Bolonjskom procesu upisali 2008./09. šk. god. prvu godinu diplomskog studija, smjer Komunikacije bili su obvezni u zimskom semestru upisati kolegij pod imenom Teorija polja i valova u opsegu 45 sati predavanja i 30 sati vježbi. Studentima smjera Elektroenergetika ovaj je kolegij bio izborni. S obzirom na značajno smanjenje fonda sati predavanja u školskoj 2008/09. godini tijekom izvođenja nastave korigiran je i skraćen opseg uglavnom iz područja elektrostatičke. U školskoj 2008./09. godini nije bilo studenata sa smjera Elektroenergetika koji su upisali kolegij tako da je u toj školskoj godini program tijekom nastave bio dodatno modificiran. Tijekom zimskog semestra 2008./09. predavanja su uređivana, ispravljana i izdavana na elektroničkim stranicama Elektrotehničkog fakulteta kao predlošci predavanja u 13 odvojenih separata. Verzija koja je približno i konačna završena je na samom kraju kalendarske 2008. godine te manje prepravke i dopune načinjene su tijekom siječnja 2009. godine.

Načelno, slijed izlaganja materijala u skripti odgovara približno i slijedu predavanja. Približno i zato što je bilo uobičajeno da se ponavljanje potrebnog gradiva iz vektorske analize načini na uvodnom predavanju. Dio tog uvodnog predavanja smješten na samom kraju skripte pod nazivom Matematički prilog.

U oblikovanju ovog priloga, pored rukopisa autora, a posebice prof. dr. sc. Stjepana Štefanka korišteni su i materijali pod [3], [5], [6], [7], [11], [16], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [32] i [33].

Na kraju ovog predgovora spomenut ću osobe bez kojih predloženi materijal ne bi bilo moguće načiniti.

Prof. dr. sc. Zijadu Haznadaru se zahvaljujem na vrijednim i vrlo detaljnim uputama i podukama glede sadržaja kolegija te tematskih preferencija kolegija i to još 2005. godine, dakle prije nego sam uopće počeo predavati ovaj kolegij na Elektrotehničkom fakultetu u Osijeku.

Zahvaljujem se i kolegi Željku Hederiću na savjesnom iščitavanju izloženog materijala te vrijednim sugestijama kao i prof. dr. sc. Borivoju Rajkoviću na moralnoj podršci tijekom spremanja kolegija i pisanju ovog materijala.

Ovom bih se prigodom također zahvalio i studentima generacije u školskoj godini 2006/07. koji su mi pomogli pri prijepisu i obradi materijala u okviru svojih seminarskih radova.

Osijek – Zagreb, siječnja 2009. godine

Muharem Mehmedović

1 UVOD

Za razliku od udžbenika [3], [5], [6] i [7] koji su izgrađeni uglavnom na tematsko-deduktivnom načelu, ovaj je materijal koncipiran približno povijesno-kronološkim slijedom. U istom su se povijesno-kronološkom konceptu razvijale i spoznaje o elektromagnetizmu: od statičkih i stacionarnih pojava ka kvazistacionarnim i prijelaznim pojavama. Glavni dio sadržaja kolegija ipak je utemeljen u dobro poznatom raspravi o elektricitetu i magnetizmu Jamesa Clerka Maxwella u [1] i [2].

Pored predgovora i uvoda materijal sadrži još sedam poglavlja: elektrostatiku, specijalnu teoriju relativnosti, magnetostatiku, Maxwelllove jednačbe i valne jednačbe, skin efekt, Hertzov dipol te Matematički prilog.

Izučavanja elektrostatičkih pojava počinje Coulombovim zakonom sila između naboja. Veliki dio teorijskih podloga i praktičnih primjera (na primjer rješavanje elektrostatičkih problema metodama odslikavanja) s izvodima u ovom području preuzet je uglavnom od prof. dr. sc. Tome Bosanca [3], [34] te Nunzia Trallija [4]. Pritom se nezaobilaznim smatra poznavanje osnovnih matematičkih teorema (Greenov odnosno Gaussov i Stokesov) te zakona kao što su Gaussov zakon s implikacijama opisanim u teoremima Earnshawa i Thomsona i stanovitu razinu načina rješavanja Poissonove jednačbe.

Područje elektrostatike nije toliko prevažno samo po sebi koliko za dublje svladavanje koncepta sila i prijelaz ka konceptu skalarnih i vektorskih polja i shvaćanju osnovnih veličina polja (naboj, jakost električnog polja, vektor električnog pomaka, potencijal, dielektričnost) te energetske odnosa u polju općenito. U ovom su području posebice istaknuti pojmovi influencije, polarizacije i dipola kao i ponašanje polja (normalnih i tangencijalnih komponenti vektora električnog polja) na granici dvaju sredstava te energetske odnosi u elektrostatičkom polju.

Prijelaz ka magnetizmu i pojmu magnetske indukcije odnosno Ampèreovom zakonu načinjen je na temelju specijalne teorije relativnosti, a glavne podloge sadržane su u knjigama [4], [9], [16] i [18]. Pritom se u razjašnjenju pojmova koriste i konzultiraju udžbenici [8] i [9]. Posebice je u materijalu priložen cjelovit izvod Lorentzove transformacije sile s posebnim osvrtom na transformaciju elektrostatičke sile koju registrira mirujući promatrač u sustavu gibajućeg naboja. U magnetizmu se ekspliciraju odmah Ampèreov i Biot-Savartov zakon te se uvodi pojam magnetskog dipola, skalarnog i vektorskog potencijala, magnetskog toka te magnetske polarizacije i koncepta jakosti magnetskog polja te permeabilnosti. Izložen je općeniti pristup proračunima samo i međuinduktiviteta odnosno pojma ulančenog magnetskog toka, te unutarnjih i vanjskih induktiviteta. Izveden je opći postupak izračuna energije magnetskog polja. Također je i ovdje obrađeno ponašanje magnetskog polja na granici dvaju sredstava odnosno ponašanje tangencijalnih i normalnih komponenti jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije. U nizu konkretnih primjera izračuna korišten su izvori [3], [34] te [11] i [12].

U posebnoj se cjelini tretiraju stacionarne, prijelazne i kvazistacionarne elektromagnetske pojave postupnom razradom Maxwellovih jednačbi u diferencijalnom i integralnom obliku kao općim fizikalno matematičkim okvirom. Prethodno je uveden Faradayev zakon elektromagnetske indukcije. Pritom je tumačenje pojmova prijelaznih, stacionarnih i kvazistacionarnih stanja odnosno pojava vrlo osjetljive naravi. Temeljni aspekt za pojašnjenje ovih pojmova jest razlučivanje pojava po njihovoj brzini odvijanja odnosno njihovim vremenskim skalama. Za stabilne linearne dinamičke sustave s koncentriranim parametrima formalni matematički postupci razlučivanja pojava po njihovim vremenskim skalama (barem dvjema) izvršno su opisani već krajem dvadesetog stoljeća, [36], [37]. Ako se komponente u nekom prijelaznom procesu razlikuju već samo nekoliko puta, a od interesa je na primjer spora komponenta tad se uz određene pretpostavke i matematički može načiniti zanemarenje brze komponente te dalje računati samo s dinamikom spore komponente. U tom se slučaju smatra da je dinamika brze komponente prijelaznog procesa praktično završena. Ako je objekt odnosno sustav izložen harmonijskoj pobudi tad se u sustavu, uz zanemarenje pojava utitravanja koja ovise o njegovim vlastitim svojstvima, uspostavljaju periodički procesi definirani postojanim amplitudnim i faznim odnosima fizikalnih veličina u njemu. Ti odnosi odgovaraju kvazistacionarnom stanju.

Naravno, pri formalnom razlučivanju pojava uveden je niz pretpostavki, a jedna od njih je i matematički opis (model) takvih sustava s koncentriranim parametrima. Pretpostavka koncentriranih parametara podrazumijeva da takav model ne obuhvaća valne pojave što je dopušteno za određene omjere prostorne dimenzije sustava/objekta u smjeru propagacije pojave u odnosu na valnu duljinu pojave, ako je riječ o pojavama koje se mogu podvesti pod kvazistacionarne značajke. Propagacija pojava kroz sustav trenutna je, dakle bez kašnjenja. Realno zbog konačno velike brzine propagacije valnog efekta postojat će uvijek kašnjenje. Zbog elektromagnetskog karaktera promatranih pojava ta konačno velika brzina je jednaka brzini svjetlosti. Za objekte koji su približno veći od nekoliko postotaka valne duljine pojave trebalo bi sustav opisivati s raspodijeljenim parametrima odnosno valnim jednadžbama. U slučaju da se pojave ne mogu podvesti pod kvazistacionarne nužno je razmatranje cijelog spektra, a pritom uzeti u obzir najnižu frekvenciju u spektru. Matematički će se opisi u cijelosti zamrsiti ako se u igru uvedu i realno postojeći nelinearni odnosi između veličina polja. Materijal uglavnom tretira linearne odnose s određenim opaskama glede nelinearnosti.

Na temelju Maxwellovih jednadžbi izvode se valne jednadžbe pri čemu se intenzivno koriste podloge iz [3], [5], [6], [7], [17] te djelomice i [10], [14], [15], [19], [20], [21], [22] i [23]. Uvodi se i pojam valnog operatora i valne konstante te valne impedancije. U poglavljima o postupcima rješavanja valnih jednadžbi, a posebice o elektromagnetskim potencijalima (Lorentzovi i Coulombovi potencijali te Hertzov potencijal) intenzivnije se koristi literatura [4], [5], [6] i [7]. U ovom se dijelu uvodi Poyntingov vektor te općenito tretiraju energetske odnose u promjenljivom izmjeničnom elektromagnetskom polju te se posebno ističe njegovo svojstvo asimetrije (glede smjera) u odnosu na njegove sastavne komponente jakosti električnog i magnetskog polja. U tretiranju naprežanja u elektromagnetskom polju te pojam elektromagnetskog impulsa dotiče se i pojam tenzora.

U razvoju matematičkog modela propagacije valnih pojava izvodi se pojam ravnog vala te geometrijskog odnosa jakosti električnog i magnetskog polja u ravnom valu u odnosu na smjer njegove propagacije. Izložena je metodologija rješavanja valnih jednadžbi, [7], a posebice se tretira rješavanje valnih jednadžbi harmonijskog vala odnosno valna pojava uzrokovana harmonijskom, sinusnom pobudom i Helmholtzov tip jednadžbe i usko u vezi s tim fazni odnosi između jakosti električnog i magnetskog polja za različite materijale glede gubitaka odnosno prigušenja (vodiči odnosno dielektrici).

U izučavanju svojstava elektromagnetskog vala na granici dvaju sredstava na temelju ponašanja pojedinih komponenti (tangencijalnih i normalnih) veličina polja uvode se Fresnelove jednadžbe, izvode Snelliusovi zakoni loma i refleksije te odgovarajući faktori refleksije i transmisije. Posebice su istražena svojstva harmonijskog vala na granici između vodiča i izolatora. Ovdje se ukratko uvodi i pojam polarizacije. U demonstraciji matematičkog modela pojave pritom se je koristio i materijal pod [31].

Pri tretiranju prijenosnika energije izveden je model prvo dugog, a zatim i kratkog voda kao osnovnog prijenosnika energije i to na temelju rješenja telegrafskih jednadžbi po naponu i struji umjesto po jakosti električnog i magnetskog polja. Ukazuje se na relativnost odnosa veličina valne duljine i objekta promatranja glede frekvencije izmjeničnog polja. Ovdje je također obrađena refleksija i transmisija putujućih valova na mjestima diskontinuiteta za različite tipove i konfiguracije diskontinuiteta.

U jedinici o površinskom učinku odnosno skin efektu rješavaju se dva problema ponašanja izmjeničnog polja u pločastom vodiču: jedanput je to izrazito električki vodljiv materijal sa zadanom ukupnom strujom po svom presjeku, a drugi put je to feromagnetski materijal sa zadanom jakošću odnosno indukcijom magnetskog polja s modelom za vrtložne struje. Pritom se obrađuju i osnovni površinski učinci izmjeničnog polja putem razmatranja energetskih odnosa: porast djelatnog otpora prema onom za istosmjernu struju kao i pad induktiviteta prema onom za istosmjernu struju. U ovom se poglavlju još obrađuje i površinski učinak izmjeničnog sinusnog polja u okruglom vodiču i postupak rješenja jednostavnijeg modela u obliku Besselove diferencijalne jednadžbe te osnove o Besselovim funkcijama, [11], [25].

U sedmom se poglavlju izlaže matematički model Hertzovog dipola i štapne antene, izvode osnovni odnosi između pojedinih komponenti jakosti električnog i magnetskog polja te pojmovi emisijskog

dijagrama i otpora isijavanja. Posebice se je to načinilo za izmjeničnu sinusnu pobudu za nekoliko osnovnih geometrijskih razdioba jakosti struja duž štapne antene, [5], [6], [24] i [31].

Posljednje poglavlje materijala je Matematički prilog. U oblikovanju ovog priloga, pored rukopisa autora korišteni su i materijali pod [3], [5], [6], [7], [11], [16], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [32] i [33]. Tu se uvode transformacije koordinata i krivolinijski koordinatni sustavi, izvode vektorski operatori u poopćenim koordinatama, a zatim se izvodi specijaliziraju na često korištene ortogonalne sustave kao što su: Kartezijev, sferni i cilindrični sustav. Također se tom prigodom uvode i neophodni pojmovi potrebni pri definiranju tenzora. U točki o tenzorima uvode se osnovni pojmovi kao što su: invarijantnost o izboru koordinatnog sustava, zapis, rang, kovarijantni i kontravarijantni tenzori, simetrija, kosa simetrija te njihov odnos prema skalarima, vektorima i matricama.

Gaussov i Stokesov stavak te Helmholtzov i Greenov teorem s identitetima također su dio ovog poglavlja. Posljedično, u vezi s Helmholtzovim teoremom izložena su dva postupka rješavanja Poissonove jednadžbe: pomoću Fourierove transformacije te pomoću Greenovih funkcija.

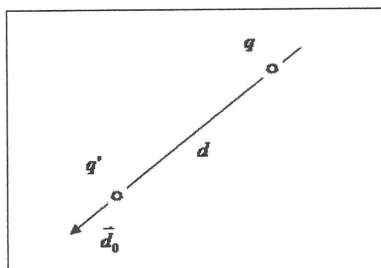
Na samom kraju ovog priloga izvedene su osnove varijacijskog računa, navedeno više uobičajenih primjera njegove praktične primjene. Jedan od takvih primjera je i alternativni izvod drugog Snelliusovog zakona (loma). Također je na jednostavni i poznati slučaj iz elektrostatike primijenjen postupak više kao ideja nego kao napatuk o promišljanju alternativnih načina numeričkog rješavanja problema elektromagnetskih polja.

2 ELEKTROSTATIKA

2.1 ELEKTROSTATIČKO POLJE

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) je 1785. godine otkrio, kao rezultat pokusa s torzijskom vagom, da je sila između bilo koja dva naboja q i q' u homogenom izotropnom mediju izravno proporcionalna njihovom produktu, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti i djeluje na pravcu koji ih spaja, [3], [4], [5], [6], [7], slika 2.1.

$$\vec{F} \propto \frac{qq'}{d^2} \vec{d}_0. \quad (2.1)$$



Slika 2.1 Dva točkasta naboja

Da bi se od znaka proporcionalnosti prešlo na jednadžbu potrebno je uvesti konstantu proporcionalnosti. Danas je uobičajeno uzeti za tu konstantu $\frac{1}{4\pi\epsilon}$, gdje je ϵ dielektričnost sredstva.

Tad je:

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon d^2} \vec{d}_0. \quad (2.2)$$

U zraku i vakuumu je:

$$\vec{F}_0 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{d}_0 \quad (2.3)$$

gdje je dielektričnost vakuuma u međunarodnom sustavu mjernih jedinica $\epsilon_0 = 8,854188 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8,854188 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$. Količina naboja q (q') mjeri se u kulonima ($1\text{As}=1\text{C}$).

Kvocijent sila u vakuumu i bilo kojem drugom električnom sredstvu je:

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \quad (2.4)$$

gdje je ε_r relativna dielektričnost materijala i izražena je kao bezdimenzionalni broj.

Sila između naboja u homogenom izotropnom dielektričnom sredstvu je manja nego bi bila između tih naboja u vakuumu, a za vakuum je: $\varepsilon_r = 1$

Vrijedi, dakle, da je:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0. \quad (2.5)$$

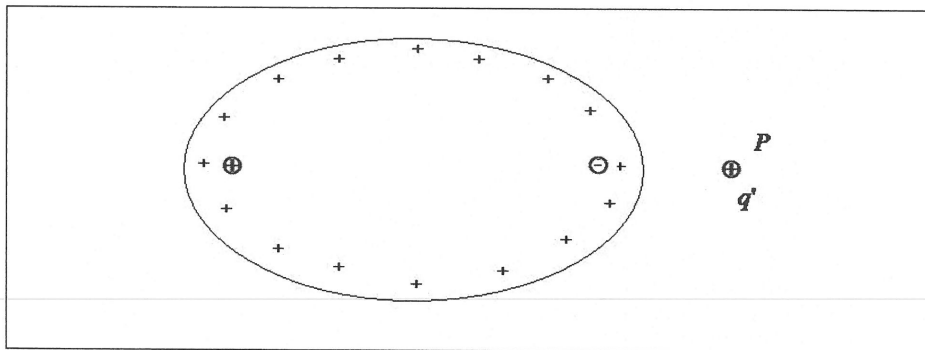
U CGS sustavu koji se danas više ne koristi jedinica postavljalo se $\varepsilon = \frac{1}{4\pi}$, pa je **Coulombov zakon** u tom sustavu glasio:

$$\vec{F} = \frac{qq'}{d^2} \vec{d}_0.$$

Mjerna jedinica za silu (2.2) u međunarodnom sustavu mjernih jedinica je $1N = 1Nm/m = 1VAs/m$.

2.1.1 Jakost električnog polja i potencijal

Električno polje postoji u dijelu prostora, ako na statički naboj u tom prostoru djeluje sila. Ako se probni naboj q' unese u prostor u neku točku P (slika 2.2), a ostali naboji drže čvrsto u ranijem položaju, sila na naboj $\vec{F}$ je mjera intenziteta i smjera elektrostatičkog polja u točki P . Kako je sila proporcionalna naboju q' , jakost elektrostatičkog polja ili električno polje u točki P je sila na pozitivni jedinični naboj u toj točki, dok se ostali naboji drže čvrsto u ranijem položaju (prije unošenja naboja q').



Slika 2.2 Unošenje pozitivnog probnog naboja q' u elektrostatičko polje

Mjerna se jedinica jakosti električnog polja izvodi iz: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$, $[E] = N/C = V/m$.

Da bi se uzelo u obzir da ostale nabojke treba držati u ranijem položaju, postoji i definicija jakosti električnog polja:

$$\vec{E} = \lim_{q' \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q'} \quad (2.6)$$

s obzirom da vrlo mali probni naboj q' ne mijenja raniju razdiobu naboja.

Iz Coulombova zakona slijedi:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon d^2} \vec{d}_0$$

kao jakost električnog polja na udaljenosti $\vec{d}$ od naboja q .

Smjesti li se točkasti naboj q u ishodište koordinatnog sustava polje je:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}_0 \quad (2.7)$$

Vrijedi da je:

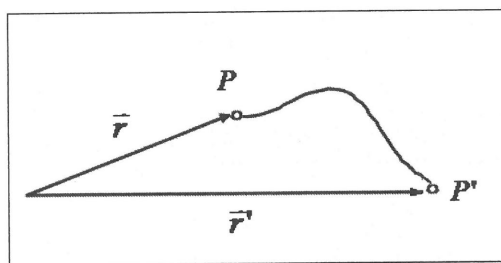
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \text{rot } \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{3}{r^4} \nabla r \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \times \vec{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dakle, postoji funkcija potencijala takva da je:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.9)$$

Razlika potencijala između dvije točke P i P' u elektrostatičkom polju je (slika 2.3):

$$\varphi(P) - \varphi(P') = \int_{\vec{r}'}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} = - \int_{\vec{r}'}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} = \int_{\vec{r}'}^{\vec{r}} \text{grad } \varphi d\vec{s} \quad (2.10)$$



Slika 2.3 Potencijal između dvije točke

Razlika potencijala između P i P' čija je mjerna jedinica volt [V] je rad, koji treba uložiti da se jedinični naboj iz točke P' premjesti u točku P .

Za točkasti naboj u ishodištu je:

$$\begin{aligned}
 \varphi(P) - \varphi(P') &= - \int_{r'}^r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}_0(-\vec{r}_0)(-dr) = - \int_{r'}^r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r'}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Ako se uzme da je točka P' beskonačno udaljena ($r' \rightarrow \infty$), dobiva se:

$$\varphi(P) = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon r}.
 \tag{2.12}$$

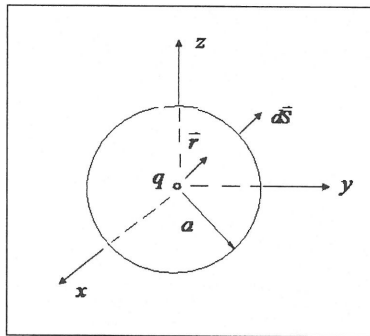
Potencijal u bilo kojoj točki P je rad potreban da se jedinični naboj donese iz beskonačnosti u točku P , a da se pritom naboji koji stvaraju polje drže čvrsto na mjestu.

2.1.2 Gaussov zakon

Promatra li se volumen V s ukupnim nabojem Q , a element površine koja zatvara volumen V homogenog sredstva je $d\vec{S}$, tad je:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}.
 \tag{2.13}$$

Integral električnog polja po graničnoj (zatvorenoj) plohi S jednak je ukupnom naboju obuhvaćenom tom plohom, podijeljenim s dielektričnošću prostora, slika 2.4.



Slika 2.4 Točkasti naboj u središtu kugle polumjera a

Umjesto (2.13) Gaussov se zakon danas definira s vektorom električnog pomaka $\vec{D}$ koji je vezan isključivo za slobodne naboje tako da se umjesto (2.13) piše:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

U ovom obliku Gaussov zakon vrijedi sasvim općenito bez obzira na vrstu i svojstva materijala u električnom polju.

Primjer: točkasti naboj u ishodištu, ploha je kugla radijusa a .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon a^2} a d\vartheta a \sin\vartheta d\alpha &= \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d(-\cos\vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} 2\pi \cdot 2 = \frac{q}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.14)$$

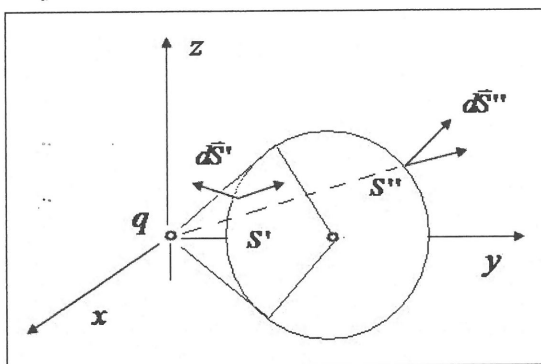
Za plohu koja obuhvaća n točkastih naboja $q_1, q_2, \dots, q_n$ Gaussov zakon daje:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} (q_1 + q_2 + \dots + q_n). \quad (2.15)$$

Pokazalo se da za naboj u ishodištu vrijedi **Gaussov zakon**, (slika 2.5).

Za naboj u ishodištu i kuglinu plohu izvan ishodišta po **Gaussovom je zakonu**:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (2.16)$$



Slika 2.5 Uz Gaussov zakon

Formira li se ploha S' kao vanjski dio plohe kugle, a S'' kao dio unutarnje plohe kugle van naboja i izračunaju li se plošni integrali (tokovi vektora $\vec{E}$) prema (2.16) po S' i S'' bit će jednaki ali suprotnog predznaka (prostorni kutovi koji se vide iz ishodišta jednaki su i suprotnog smjera, vidi točku 2.1.4.5) pa će i njihov ukupni zbroj biti jednak nuli.

Čak što više, ako se za plohe S' i S'' pretpostavi da su zatvorene plohe te se svaka tretira na netom spomenuti način opet će biti:

$$\oint_{S'} \vec{E} d\vec{S} + \oint_{S''} \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (2.17)$$

U slučaju n naboja, oko svakog se naboja može zamisliti kugla odgovarajućeg radijusa, pa je tok vektora $\vec{E}$ (pomnoženog s ϵ) po svih n kugli jednak zbroju n naboja. Formira li se jedna zatvorena ploha tako da obuhvati svih n točkastih naboja, dobiva se isti rezultat.

Dosad je dokazano da **Gaussov zakon** vrijedi za točkaste naboje. Za kontinuiranu prostornu razdiobu naboja može se ρdV zamijeniti s ekvivalentnim točkastim nabojem, pa i u tom slučaju vrijedi **Gaussov zakon**. U tom slučaju **Gaussov zakon** glasi:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho dV, \quad (2.18)$$

gdje zatvorena ploha S obuhvaća volumen V .

Prema Gaussovom teoremu je:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (2.19)$$

pa je:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV &= \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho dV \text{ odnosno:} \\ \iiint_V (\operatorname{div} \vec{E} - \rho / \varepsilon) dV &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pošto se može uzeti proizvoljne elemente volumena dV vrijedi:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.21)$$

U literaturi je izraz poznat kao diferencijalni oblik Gaussovog zakona za homogeno sredstvo.

Uvrsti li se u tu jednadžbu izraz za jakost električnog polja izraženu pomoću potencijala $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, dobiva se Poissonova jednadžba:

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = -\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

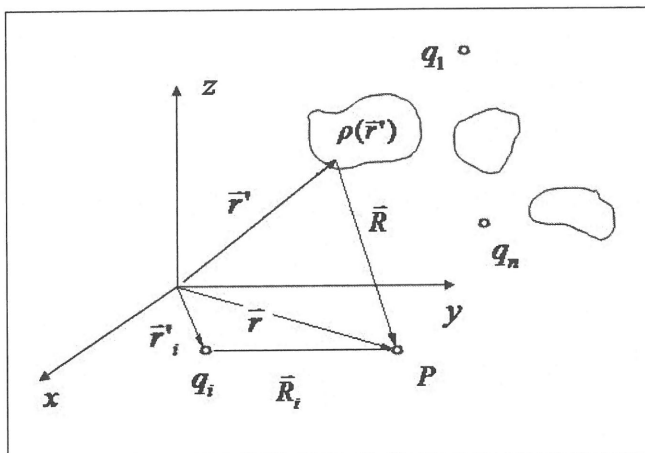
odnosno:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.22)$$

Zasad se poznaje rješenje Poissonove jednadžbe za prostornu razdiobu naboja i točkaste naboje, (slika 2.6):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{r}_i')}{R_i}. \quad (2.23)$$

O detaljima nekoliko načina rješavanja Poissonove jednadžbe pogledati više u Matematičkom prilogu, točka 8.7.



Slika 2.6 Prostorna razdioba naboja i točkasti naboji

2.1.3 Implikacije Gaussovog zakona

a) Iz $\Delta\varphi = \text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ slijedi da elektrostatički potencijal ne može imati ekstrem, osim u točkama gdje je pozitivni (negativni) naboj. Za točku gdje je ekstrem funkcije, usmjerena derivacija u bilo kojem smjeru mora biti 0.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi \cdot \vec{a}_s = 0 \quad (2.24)$$

gdje je $\vec{a}_s$ jedinični vektor (proizvoljno orijentiran).

Iz (2.24) slijedi:

$$\nabla\varphi = 0, \text{ odnosno } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad (2.25)$$

ali je i za proizvoljni smjer:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0. \quad (2.26)$$

Za maksimum treba pak biti:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} < 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} < 0, \quad (2.27)$$

odnosno općenito:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} < 0 \text{ ili } \nabla^2\varphi = \Delta\varphi < 0, \quad (2.28)$$

a to je u skladu s Poissonovom jednačbom moguće samo ako je u toj točki $\rho > 0$. Slično se za minimum može utvrditi da mora biti $\rho < 0$ (negativni naboj).

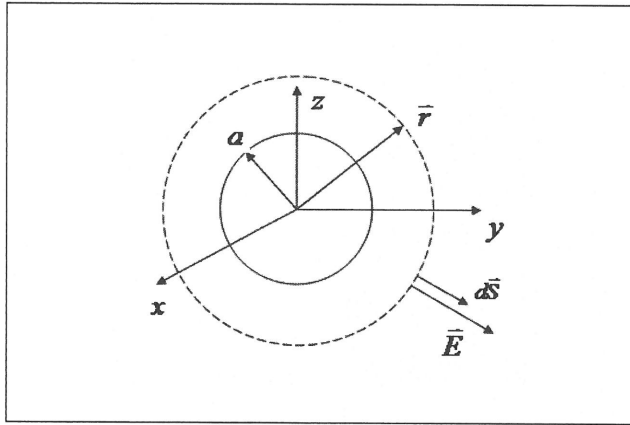
b) Iz Gaussovog zakona slijedi da nijedan naboj ne može biti u stabilnom položaju samo pod utjecajem električnih sila (teorem Earnshawa).

Potencijalna energija pokretnog naboja je $q\varphi$ iz definicije potencijala. Stabilni položaj naboja q u točki P pretpostavlja da $q\varphi$ ima minimum u P . Prije je pokazano da za minimum u točki P treba biti negativan naboj, a ovdje je $q > 0$.

2.1.4 Primjena Gaussovog zakona

2.1.4.1 Vodljiva kugla

Ukupni naboj Q na kugli je simetrično raspoređen. Zbog odbojnih sila on se nalazi na površini kugle. Radijus kugle neka je a , (slika 2.7).



Slika 2.7 Vodljiva kugla

Zbog uvjeta simetrije je:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E dS = E \oiint dS = 4\pi a^2 E \quad (2.29)$$

Po Gaussovom je zakonu:

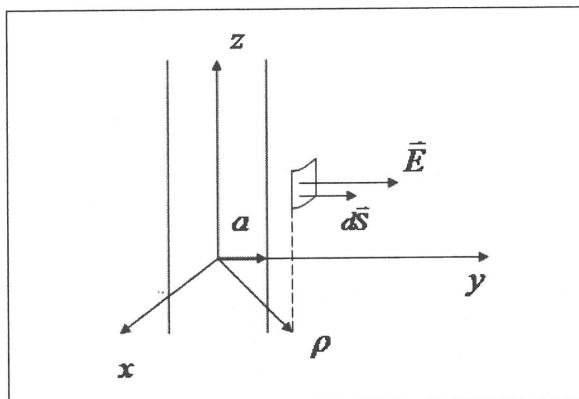
$$4\pi r^2 E = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon} & \text{za } r \geq a \\ 0 & \text{za } r = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Dakle, polje izvan kugle $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}_0$ jednako je polju kao i za slučaj da je točkasti naboj smješten u središtu kugle.

Električno polje u kugli (metalnoj) jednako je nuli. Isto vrijedi za metalnu kuglastu ljusku.

2.1.4.2 Beskonačno dugi cilindrični vodič

Neka je radijus vodiča a , (slika 2.8) postavljen aksijalno duž osi z , a naboj na njemu je linijske gustoće: $\lambda[C/m] = \text{const}$.



Slika 2.8 Cilindrični vodič

Iz razloga simetrije, silnice idu radijalno (okomito na os z).

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{plašt cilindra}} E dS = E \int_{z_1}^{z_1+h} \int_0^{2\pi} \rho d\alpha dz = Eh\rho 2\pi. \quad (2.31)$$

Iz Gaussovog je zakona:

$$2\pi h\rho E = \begin{cases} \frac{\lambda h}{\epsilon} & \text{za } \rho \geq a \\ 0 & \text{za } \rho < a. \end{cases} \quad (2.32)$$

Dakle, za $\rho \geq a$ (van vodiča) jakost polja je:

$$E = E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} \quad (2.33)$$

odnosno potencijal:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \rho + \text{const}. \quad (2.34)$$

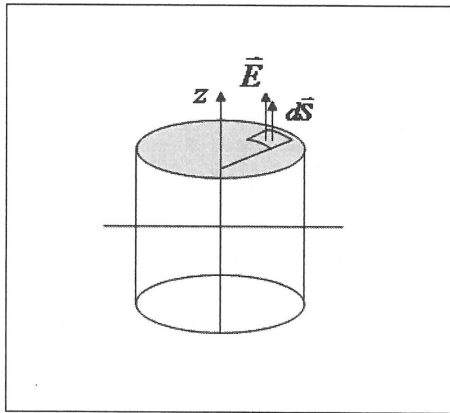
Potencijal ima singularnost za $\rho = \infty$, što je posljedica toga što naboj, po pretpostavci, postoji u beskonačnosti. Zbog toga se potencijal ne može definirati u odnosu na beskonačnost, kao za slučaj točkastog naboja nego s obzirom na potencijal za neke referentne udaljenosti od vodiča ρ_{ref} . Naime, izraz (2.34) formalno je matematički uredi, međutim izraz u tom obliku ne treba ostavljati već treba

odmah uvrstiti donju granicu ρ_{ref} i ukloniti konstantu („const“) te izraz napisati tako da se pojavi logaritam kvocijenta imenovanih fizikalnih veličina odnosno polumjera ($\ln(\rho_{ref}/\rho)$). Za pozitivni naboj λ potencijal $\varphi > 0$ za $\rho < \rho_{ref}$ te $\varphi < 0$ za $\rho > \rho_{ref}$.

Slučaj beskonačno dugog linijskog naboja dobiva se ako polumjer cilindričnog vodiča teži k nuli: $a \rightarrow 0$.

2.1.4.3 Tanka beskonačna ploča

Neka je naboj po jedinici površine odnosno plošna gustoća naboja $\sigma [C/m^2] = const$.



Slika 2.9 Kratki cilindar

Za kratki cilindar, prema slici 2.9, po Gaussovom zakonu vrijedi:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{baza cilindra}} E \, dS = E 2S, \quad (2.35)$$

odnosno:

$$2SE = \frac{\sigma S}{\epsilon}. \quad (2.36)$$

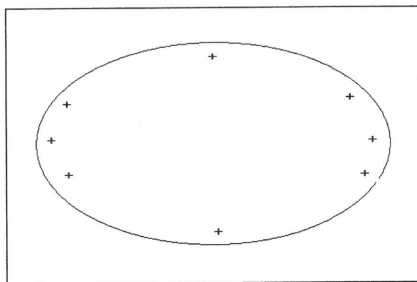
Odavde je:

$$E = E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \text{ ili:} \quad (2.37)$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon} z + const. \quad (2.38)$$

Za $z \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\infty$ pa vrijedi kao i za slučaj beskonačno dugog nabijenog cilindra, da se potencijal ne može definirati u odnosu na beskonačnost već samo u odnosu na potencijal referentne ravnine z_{ref} .

2.1.4.4 Nabijeni vodič proizvoljnog oblika



Slika 2.10 Razdioba naboja po vodiču proizvoljnog oblika

Zbog odbojnih sila između istoimenih naboja naboji se nastoje što je moguće više udaljiti jedan od drugog, (slika 2.10).

Zbog toga:

- naboji završe na površini vodiča,
- naboji su jače koncentrirani u šiljcima (kutovima vodiča).

Na površini vodiča ne može postojati tangencijalna komponenta jakosti električnog polja, jer bi se naboji premještali sve dok ta komponenta polja ne bi postala jednaka nuli.

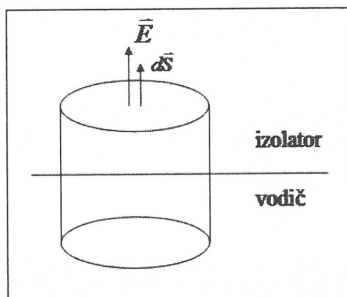
Dakle, na površini vodiča postoji samo normalna komponenta jakosti električnog polja koja je za pozitivni naboj na vodiču, usmjerena od vodiča prema van.

Kod nabijene metalne kugle je jasno da je, zbog simetrije, polje unutar kugle jednako nuli.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha = E 4\pi r^2 = 0 \rightarrow E = 0. \quad (2.39)$$

Kasnije će se pokazati da se naboji na vodičima smještaju tako da je energija vanjskog elektrostatičkog polja minimalna (**Thomsonov teorem**).

Energija polja unutar vodiča je minimalna kad je polje jednako nuli.



Slika 2.11 Elementarni valjak na granici vodič - izolator

Za elementarni valjak na granici vodič - izolator, visine dh , površine baze dS , prema slici 2.11 vrijedi:

$$\oiint_{\text{baze cilindra}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{baze cilindra}} E \, dS = E \, dS. \quad (2.40)$$

Prema Gaussovom zakonu je:

$$E dS = \frac{\sigma}{\epsilon} dS \quad (2.41)$$

pa je polje na površini vodiča:

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (2.42)$$

Ranije je pokazano da je tangencijalna komponenta polja u vodiču jednaka nuli. Znači, ako se pomiče po površini vodiča u bilo kojem smjeru (po proizvoljnoj krivulji), potencijal se ne mijenja. Stoga je površina vodiča ekvipotencijalna ploha.

2.1.4.5 Razdioba naboja po vodiču

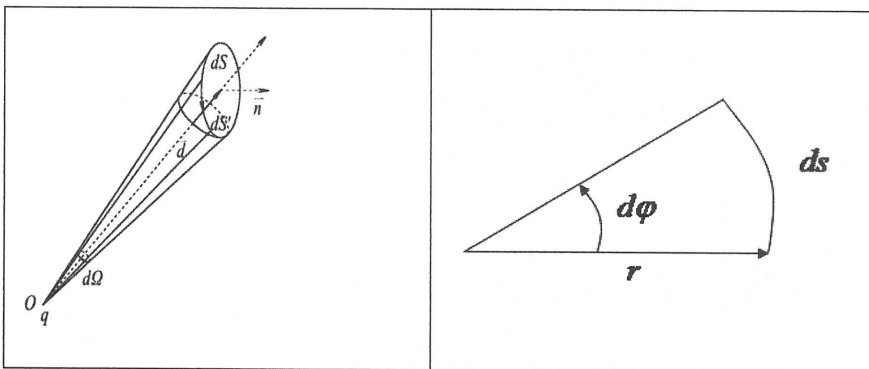
Prije razmatranja razdiobe naboja po vodiču razmotrimo detaljnije pojam prostornog kuta. Već pri računu toka vektora jakosti električnog polja $\vec{E}$ (izraz 2.13) za opći međusobni položaj elementa površine $d\vec{S} = \vec{n} dS$ i samog vektora $\vec{E}$ u skalarnom produktu:

$$\vec{E} d\vec{S} = \vec{E} \vec{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon d^2} \vec{d}_0 \vec{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon d^3} \vec{d}_0 \vec{n} dS \quad (2.43)$$

javlja se veličina:

$$d\Omega = \frac{1}{d^2} \vec{d}_0 \vec{n} dS = \frac{1}{d^2} \cos(\vec{d}_0, \vec{n}) dS. \quad (2.44)$$

Ova je veličina poznata kao diferencijal prostornog kuta Ω koji se kao bezdimenzionalna veličina mjeri u steradianima (slika 2.12, lijevo).



Slika 2.12 Uz definiciju prostornog kuta (lijevo) i kuta u ravnini (desno)

Veličina $dS' = \cos(\vec{d}_0, \vec{n})dS$ numerički je jednaka projekciji elementa površine dS na plohu okomitu na vektor $\vec{d}$ odnosno njegov jedinični vektor $\vec{d}_0$. Pritom je dS apsolutni iznos elementarne plohe. Međutim element dS' može biti pozitivan i negativan ovisno o smjerovima jediničnih vektora $\vec{d}_0$ i $\vec{n}$ odnosno predznaku kosinusa kuta između njih. Ako se dS gleda iznutra kosinus tog kuta je pozitivan.

Ako se za plohu S odabere cijela kuglina ploha tad se iz izraza (2.44) vrlo jednostavno dobiva iznos punog prostornog kuta ($\cos(\vec{d}_0, \vec{n}) = 1$, $d = \text{const}$):

$$\Omega = \iint_S \frac{1}{d^2} \cos(\vec{d}_0, \vec{n}) dS = \iint_S \frac{1}{d^2} dS = \frac{4\pi d^2}{d^2} = 4\pi. \quad (2.45)$$

Za proizvoljnu plohu prostorni kut nije uvijek jednostavno izračunati s obzirom da sve veličine u plošnom integralu:

$$\Omega = \iint_S \frac{1}{d^2} \cos(\vec{d}_0, \vec{n}) dS \quad (2.46)$$

moгу općenito biti složene funkcije koordinata u odabranom sustavu iako je izlazni rezultat uvijek jednostavno neki broj (steradiana). Tako će (2.46) u kuglinim koordinatama glasniti:

$$\Omega = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (2.47)$$

Ilustracije radi, podsjetimo se da je kut u ravlini (slika 2.12, desno) definiran kao kvocijent duljine luka s kružnice i njenog polumjera r tako da je puni kut u ravlini jednak:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{\int ds}{r} = \frac{\int r d\varphi}{r} = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi \quad (2.48)$$

Iznos se, također kao bezdimenzionalni broj, izražava u radijanima.

Razmotrimo dalje razdiobu naboja po vodiču.

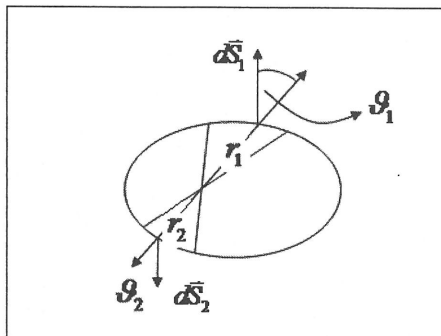
Da bi polje unutar vodiča proizvoljnog oblika bilo jednako nuli mora vrijediti za odabranu točku unutar vodiča prema slici 2.13 odnosno:

$$\frac{\sigma_1 dS_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_2 dS_2}{r_2^2}, \quad (2.49)$$

a prema (2.44) i:

$$dS_1 \cos \vartheta_1 = r_1^2 d\Omega_1 = r_1^2 d\Omega, \quad (2.50)$$

$$dS_2 \cos \vartheta_2 = r_2^2 d\Omega_2 = r_2^2 d\Omega. \quad (2.51)$$



Slika 2.13 Razdioba naboja po vodiču

Dakle, mora vrijediti:

$$\frac{\sigma_1 r_1^2 d\Omega}{\cos \vartheta_1 r_1^2} = \frac{\sigma_2 r_2^2 d\Omega}{\cos \vartheta_2 r_2^2} \quad (2.52)$$

odnosno:

$$\frac{\sigma_1}{\cos \vartheta_1} = \frac{\sigma_2}{\cos \vartheta_2} \quad (2.53)$$

Znači, ako je poznat ukupni naboj vodiča i njegova geometrija, načelno se može odrediti razdioba naboja σ .

Dalje, iz ovog razmatranja slijedi da, ako na isti vodič dovedemo naboj Q' umjesto Q , na istim će mjestima na površini vodiča vrijediti sljedeći odnos za plošne gustoće naboja:

$$\frac{\sigma'_1}{\cos \vartheta_1} = \frac{\sigma'_2}{\cos \vartheta_2} \quad (2.54)$$

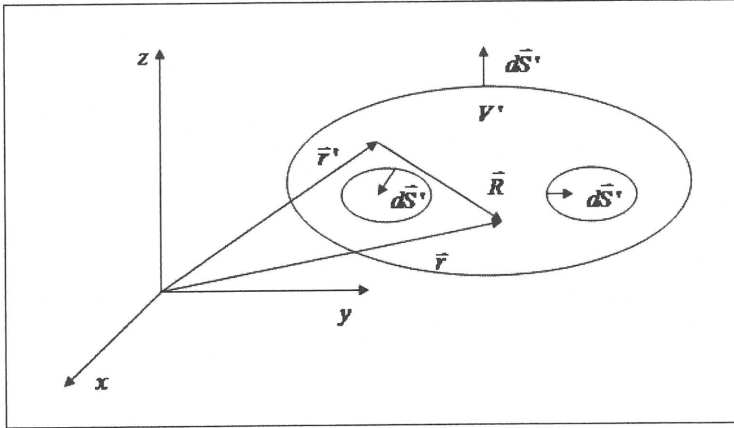
ili:

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma_2} \quad (2.55)$$

Znači, relativna razdioba naboja na vodljivom tijelu proizvoljnog oblika neovisna je o ukupnom naboju tijela.

2.1.5 Greenov teorem recipročnosti (uzajamnosti)

Prema Greenovu teoremu za prostornu gustoću naboja $\rho(\vec{r}')$ u volumenu V' prema slici 2.15 vijedi izraz za potencijal (vidi Matematički prilog, točka 8.7.4, Drugo rješenje Poissonove jednadžbe):



Slika 2.15 Uz Greenov teorem recipročnosti

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\nabla' \varphi d\vec{S}'}{R} - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \varphi \nabla' \frac{1}{R} d\vec{S}'. \quad (2.56)$$

Pretpostavi li se sad da se ploha S' sastoji od vanjske plohe i n površina vodiča (na slici su nacrtane dvije). Ako vanjska ploha $\rightarrow \infty$, doprinos dva plošna integrala $\rightarrow 0$. Ostaje odrediti doprinos plošnih integrala po površini vodiča.

Doprinos prvog plošnog integrala (po svih n vodiča) $\frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\nabla' \varphi d\vec{S}'}{R}$ je:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{R}, \quad (2.57)$$

jer je:

$$\nabla' \varphi d\vec{S}' = \vec{E} d\vec{S}' = E_n(\vec{r}') dS' = \frac{\sigma(\vec{r}')}{\epsilon} dS'. \quad (2.58)$$

Preostaje odrediti doprinos drugog plošnog integrala $\frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \varphi \nabla' \frac{1}{R} d\vec{S}'$. U tu svrhu treba prvo odrediti:

$$\nabla' \frac{1}{R} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.59)$$

Po definiciji je:

$$\nabla' \frac{1}{R} = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}. \quad (2.60)$$

Neka se sad izračuna derivacija po x' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} &= -\frac{1}{2} \frac{2(x-x')(-1)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{x-x'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Vrijedi dakle:

$$\begin{aligned} \nabla' \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} &= \frac{\bar{i}(x-x') + \bar{j}(y-y') + \bar{k}(z-z')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \\ &= \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\bar{R}}{R^3} = \frac{1}{R^2} \bar{R}_0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Iz prethodnog se postupka odmah vidi da je:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} &= \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = \\ &= -\frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\frac{1}{R^2} \bar{R}_0 = -\nabla' \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \end{aligned} \quad (2.63)$$

što je u skladu s već poznatom činjenicom:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \vec{r}_0.$$

Na površini vodiča je potencijal konstantan pa je:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \varphi \nabla' \frac{1}{R} d\bar{S}' = \frac{+\varphi}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\bar{R}_0}{R^2} d\bar{S}'. \quad (2.64)$$

Prema slici 2.16:

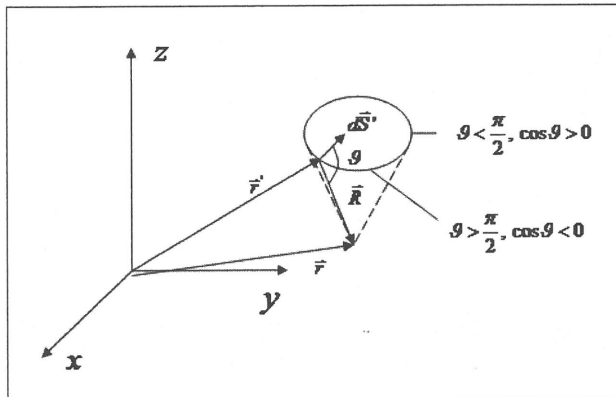
$$\bar{R}_0 \cdot d\bar{S}' = dS' \cos \vartheta,$$

pa je integral (2.61):

$$\frac{+\varphi}{4\pi} \oint_{S'} \frac{dS' \cos \vartheta}{R^2}, \quad dS' \cos(\pi - \vartheta) = -dS' \cos \vartheta = R^2 d\Omega \quad (2.65)$$

što vodi do:

$$\frac{+\varphi}{4\pi} \oint \frac{dS' \cos \vartheta}{R^2} = -\frac{\varphi}{4\pi} \int d\Omega = 0. \quad (2.66)$$



Slika 2.16 Prostorni kut nabijenog vodiča

Potencijal u prostoru s n nabijenih vodiča i prostornom razdiobom naboja $\rho(\vec{r}')$ je dakle:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS'. \quad (2.67)$$

Slično, potencijal u $\varphi(\vec{r})$ za neku drugu prostornu razdiobu naboja $\rho_1(\vec{r}_1)$ i drugu plošnu gustoću naboja $\sigma_1(\vec{r}_1)$ na n (istih) vodiča je:

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_1(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{S'} \frac{\sigma_1(\vec{r}')}{R} dS'. \quad (2.68)$$

Greenov teorem recipročnosti (uzajamnosti) postavlja da je:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \varphi_1(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \oint_S \varphi_1(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS = \\ & = \iiint_V \varphi(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}) dV + \oint_S \varphi(\vec{r}) \sigma_1(\vec{r}) dS. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Pomnoži li se prvo jednačbu (2.64) za potencijal $\varphi(\vec{r})$ s $\rho_1(\vec{r}) dV$, a zatim integrira po volumenu V dobiva se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_V \varphi(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \rho_1(\vec{r}) \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' dV + \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \rho_1(\vec{r}) \oint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS' dV. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Uzme li se da je $V=V'$ i $S=S'$, tad je:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \rho(\vec{r}') \iiint \frac{\rho_1(\vec{r})}{R} dV dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oiint \sigma(\vec{r}') \iiint \frac{\rho_1(\vec{r})}{R} dV dS'. \quad (2.71)$$

Slično, množenjem $\varphi(r)$, (2.64) s $\sigma_1(\vec{r})dS$ i integriranjem po S dobiva se:

$$\oiint \varphi(\vec{r}) \sigma_1(\vec{r}) dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \rho(\vec{r}') \oiint \frac{\sigma_1(\vec{r})}{R} dS dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oiint \sigma(\vec{r}') \oiint \frac{\sigma_1(\vec{r})}{R} dS dS'. \quad (2.72)$$

Zbrajanjem posljednjih dviju jednadžbi (2.70) i (2.72) te grupiranjem oko $\rho(\vec{r}')$ te $\sigma(\vec{r}')$ dobiva se:

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}) dV + \oiint \varphi(\vec{r}) \sigma_1(\vec{r}) dS = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \rho(\vec{r}') \left[\iiint \frac{\rho_1(\vec{r})}{R} dV + \oiint \frac{\sigma_1(\vec{r})}{R} dS \right] dV' + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon} \oiint \sigma(\vec{r}') \left[\iiint \frac{\rho_1(\vec{r})}{R} dV + \oiint \frac{\sigma_1(\vec{r})}{R} dS \right] dS' = \\ &= \iiint \varphi_1(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \oiint \varphi_1(\vec{r}') \sigma(\vec{r}') dS' = \\ &= \iiint \varphi_1(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \oiint \varphi_1(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Za elektrostatičko polje koje uzrokuje *samo* n nabijenih vodiča je:

$$\sum_{i=1}^n \oiint_{S_i} \varphi_i(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS = \sum_{i=1}^n \oiint_{S_i} \varphi(\vec{r}) \sigma_i(\vec{r}) dS. \quad (2.74)$$

Ta se jednadžba dalje može pisati:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{1i}(\vec{r}) \oiint_{S_i} \sigma(\vec{r}) dS = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\vec{r}) \oiint_{S_i} \sigma_i(\vec{r}) dS, \quad (2.75)$$

odnosno:

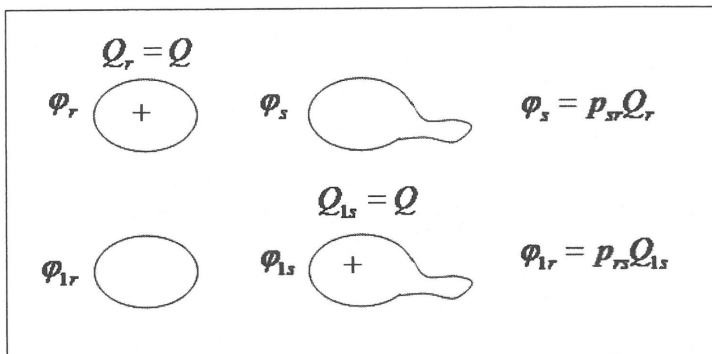
$$\sum_{i=1}^n \varphi_{1i} Q_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_{1i}, \quad (2.76)$$

gdje je Q_i ukupni naboj na vodiču i .

Uzme li se da je $Q_r = Q_{1s} = Q$, a svi ostali naboji su nula, tad je:

$$\varphi_{1r} Q_r = \varphi_s Q_{1s},$$

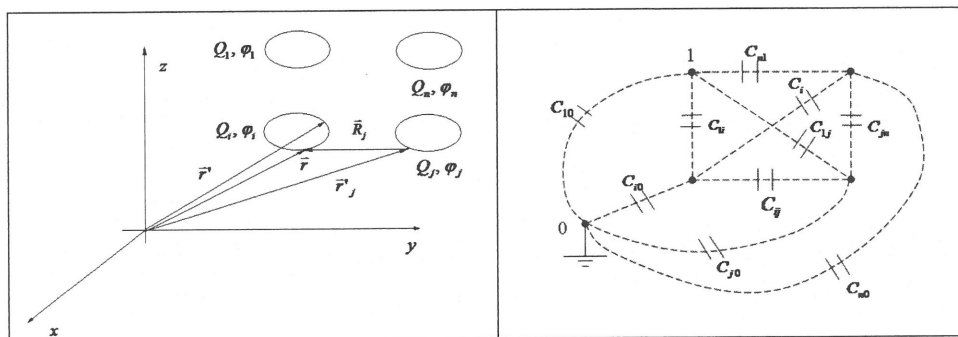
odnosno $\varphi_{1r} = \varphi_s$ (slika 2.17).



Slika 2.17 Uz Gaussov teorem uzajamnosti

Dakle, potencijal φ_s (s - tog vodiča), ako se na r - ti vodič stavi naboj Q , isti je kao i potencijal r - tog vodiča φ_{1r} , ako se na s - ti vodič stavi ista količina naboja Q .

2.1.6 Koeficijenti potencijala



Slika 2.18 Koeficijenti potencijala, kapacitivni koeficijenti i parcijalni kapaciteti

Potencijal i - tog vodiča je iz:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\vec{r}_i') dS_i'}{R} \quad (2.77)$$

jednak:

$$\varphi_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^n \oint_{S_j} \frac{\sigma_j(\vec{r}_j') dS_j'}{R_j}, \quad (2.78)$$

ili:

$$\varphi_i(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.79)$$

Koeficijent p_{ij} ovisi o dielektričnoj konstanti ϵ i geometrijskim dimenzijama.

Prema Greenovom teoremu uzajamnosti (recipročnosti) je $p_{ij} = p_{ji}$, gdje je p_{ij} potencijal i -tog vodiča, ako se na j -ti vodič stavi jedinični naboj, a svi ostali vodiči su nenabijeni. Stavljanje pozitivnog naboja na jedan vodič uzrokuje pozitivne potencijale na drugim vodičima, pa je p_{ij} uvijek veći od nule odnosno:

$$p_{ij} = p_{ji} \geq 0.$$

U matricnoj je notaciji:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

2.1.7 Kapacitivni koeficijenti

Rješenje gornjeg sustava jednadžbi:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.81)$$

po nabojima daje:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.82)$$

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{D}, \quad (2.83)$$

gdje je A_{ji} adjunkt (minor s predznakom) determinante D , a D je determinanta sustava odnosno:

$$Q = \mathbf{P}^{-1} \varphi = \mathbf{B} \varphi. \quad (2.84)$$

Vandijagonalni elementi b_{ij} , $i \neq j$ matrice $\mathbf{B}$ su kapacitivni koeficijenti. Brojčano b_{ij} je naboj induciran na i -tom vodiču, kad je j -ti vodič na jediničnom potencijalu, a svi ostali vodiči (i i -ti) na potencijalu 0. Kako je inducirani naboj uvijek suprotnog predznaka (od naboja koji ga inducira) b_{ij} ($i \neq j$) ≤ 0 .

Dijagonalni elementi b_{ii} su vlastiti kapacitivni koeficijenti. Oni su omjeri naboja na i -tom vodiču prema potencijalu i -tog vodiča, kad su svi ostali vodiči na potencijalu jednaki 0 odnosno uzemljeni. Svi koeficijenti b_{ij} ovise o ϵ i geometriji sustava.

Sumarno:

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= b_{ji}, \\
 b_{ii} &> 0, \\
 b_{ij} &\leq 0, \quad i \neq j, \\
 \sum_{j=1}^n b_{ij} &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

2.1.8 Parcijalni kapaciteti

Jednadžbe koje vežu naboje i potencijale:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 + \dots + b_{1n}\varphi_n \\
 Q_2 &= b_{21}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2 + \dots + b_{2n}\varphi_n \\
 &\vdots \\
 Q_n &= b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \dots + b_{nn}\varphi_n
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

moгу se napisati i u obliku:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{j=1}^n b_{1j}\varphi_1 - b_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - \dots - b_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n) = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_{12} + \dots + c_{1n}\varphi_{1n} \\
 Q_2 &= -b_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + \sum_{j=1}^n b_{2j}\varphi_2 - \dots - b_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n) = c_{21}\varphi_{21} + c_{22}\varphi_2 + \dots + c_{2n}\varphi_{2n} \\
 &\vdots \\
 Q_n &= -b_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) - b_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) - \dots + \sum_{j=1}^n b_{nj}\varphi_n = c_{n1}\varphi_{n1} + c_{n2}\varphi_{n2} + \dots + c_{nn}\varphi_n,
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

gdje su sad elementi matrice **C**:

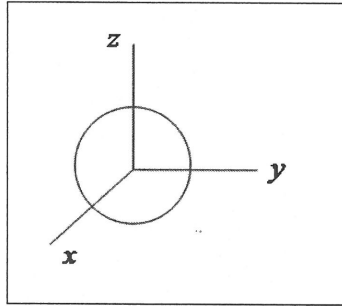
- dijagonalni $c_{ii} = \sum_{j=1}^n b_{ij}$,
- vandijagonalni $c_{ij} = -b_{ij} (i \neq j)$.

Svi elementi (parcijalni kapaciteti) matrice **C** nenegativni su brojevi. Parcijalni kapacitet c_{ii} vlastiti je kapacitet i - tog vodiča prema beskonačnosti, a $c_{ij} (i \neq j)$ zajednički je kapacitet između i - tog i j - tog vodiča.

2.1.9 Primjeri

2.1.9.1 Izolirana kugla

Na slici 2.19 simbolički je prikazana izolirana odnosno usamljena kugla.



Slika 2.19 Izolirana kugla

Silnice električnog polja kugle (za $r > a$) su radijalne, a jakost električnog polja je:

$$\vec{E} = \vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}_0 = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{r}_0. \quad (2.88)$$

odakle je potencijal:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + const. \quad (2.89)$$

Za $r \rightarrow \infty$, uzima se da je $\varphi(r) = 0$, pa je gore navedena konstanta $const. = 0$.

Potencijal na površini kugle, a i cijele kugle je:

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon a}, \quad (2.90)$$

čemu odgovara naboj:

$$Q = 4\pi\epsilon a \varphi = C \varphi, \quad (2.91)$$

dakle, kapacitet usamljene kugle (prema beskonačnosti) je:

$$C = 4\pi \epsilon a. \quad (2.92)$$

2.1.9.2 Dvije udaljene metalne kugle ($r_1 \ll d$, $r_2 \ll d$)

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon d} = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \quad (2.93)$$

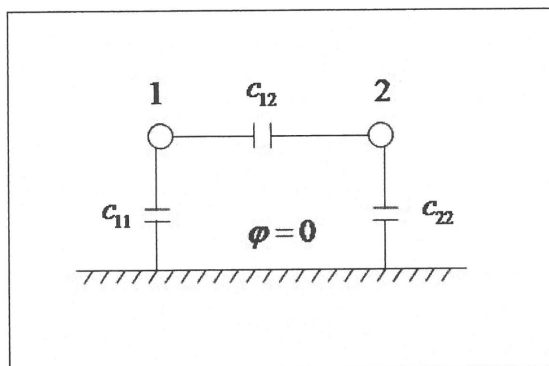
$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon d} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2} = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \quad (2.94)$$

$$b_{11} = \frac{(4\pi\epsilon)^2}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \frac{1}{4\pi\epsilon r_2} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \frac{1}{r_2}, \quad b_{12} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \left(-\frac{1}{d}\right) \quad (2.95)$$

$$b_{21} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \left(-\frac{1}{d}\right), \quad b_{22} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \frac{1}{r_1} \quad (2.96)$$

$$c_{11} = b_{11} + b_{12} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{d}\right), \quad c_{12} = -b_{12} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \frac{1}{d} \quad (2.97)$$

$$c_{21} = -b_{21} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \frac{1}{d} = c_{12}, \quad c_{22} = b_{22} + b_{21} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d}\right). \quad (2.98)$$

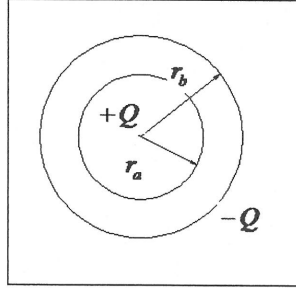


Slika 2.20 Dvije udaljene kugle, parcijalni i pogonski kapacitet

1. Napon između 1 i 2 je U pa je kapacitet koji se mjeri: jednak: $C_1 = c_{12} + \frac{c_{11}c_{22}}{c_{11} + c_{22}}$ i naziva se još i pogonskim kapacitetom između točaka 1 i 2. Slično je:
2. $\varphi_2 = 0 \quad C_2 = c_{11} + c_{12},$
3. $\varphi_1 = 0 \quad C_3 = c_{22} + c_{12}.$

2.1.9.3 Dvije koncentrične kugle

Na slici 2.21 simbolički su prikazane dvije koncentrične kugle.



Slika 2.21 Dvije koncentrične kugle

Jakost električnog polja između kugli je po Gaussovom zakonu:

$$E = E_r = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad r_a \leq r \leq r_b \quad (2.99)$$

Razlika potencijala je:

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} -d\varphi = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right), \quad (2.100)$$

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}. \quad (2.101)$$

Kapacitet je:

$$C = \frac{Q}{\varphi_a - \varphi_b} = 4\pi\epsilon \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}. \quad (2.102)$$

Uz oznake $S_a = 4\pi r_a^2$, $S_b = 4\pi r_b^2$, $r_b - r_a = d$, kapacitet je:

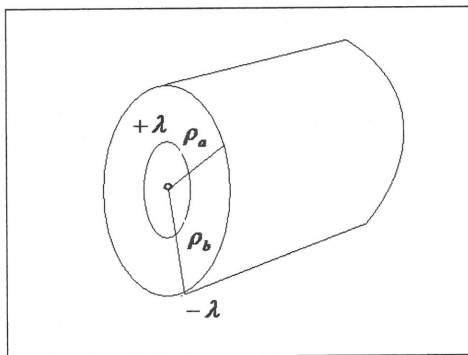
$$C = \epsilon \frac{\sqrt{S_a S_b}}{d}. \quad (2.103)$$

2.1.9.4 Paralelne ploče

Uzme li se u izrazu za kapacitet koncentričnih kugli (2.103) da $S_a \rightarrow S_b = S$, a pritom zadržava $d = \text{const}$, dobiva se izraz za kapacitet pločastog kondenzatora $C = \varepsilon \frac{S}{d}$.

2.1.9.5 Koaksijalni beskonačno dugi cilindri

Na slici 2.22 simbolički je prikazan suosni (koaksijalni) kabel.



Slika 2.22 Koaksijalni kabel

Električno polje između dva cilindra po Gaussovom je zakonu uz konstantnu linijsku gustoću naboja λ [C/m]:

$$E = -\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}, \quad (2.104)$$

a razlika potencijala cilindra je:

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} -d\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} \quad (2.105)$$

ili:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a}. \quad (2.106)$$

Kapacitet po jedinici duljine je:

$$C = \frac{\lambda}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} \right)}. \quad (2.107)$$

Približni izračun kapaciteta koaksijalnog (suosnog) beskonačno dugog kabela prikazan je u Matematičkom prilogu, točka 8.8.1.6. Tamo je eksploatiran uvjet minimuma elektrostatičke energije pa se problem na kraju svodi na traženje minimalnog kapaciteta uz određena numerička ograničenja koja su tamo detaljno obrazložena. Pritom je pretpostavljena polinomska ovisnost potencijala između cilindara o normiranoj veličini $r - r_1$ s razmakom između cilindara $r_2 - r_1$ (to jest: $\rho = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$). Pri odabiru polinoma n -tog reda kao moguće zakonitosti za potencijal zakonitost promjene jakosti električnog polja bit će polinom $(n-1)$ -og reda. U konkretnom je slučaju odabran polinom trećeg reda kao moguća zakonitost za potencijal.

2.2 OPĆE RJEŠENJE POISSONOVE JEDNADŽBE

Fourierovom se transformacijom može odrediti rješenje Poissonove jednadžbe za zadanu prostornu razdiobu naboja (gustoća naboja $\rho(\vec{r}')$) i za skupinu točkastih naboja $\sum_{i=1}^n q_i(\vec{r}_i')$. Iz drugog rješenja Poissonove jednadžbe Greenovim teoremom (vidi Matematički prilog, točka 8.7) izdvojen je, pri izvođenju Greenovog teorema recipročnosti, rješenje Poissonove jednadžbe za zadanu gustoću naboja $\rho(\vec{r}')$ i sustav od više (metalnih) vodiča. Iz navedenih se rješenja može napisati opće rješenje Poissonove jednadžbe:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \dots$$

doprinos potencijalu od prostorne gustoće naboja,

$$\dots + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^m \oint_{S_i'} \frac{\sigma_i(\vec{r}')}{R_i} dS_i' + \dots$$

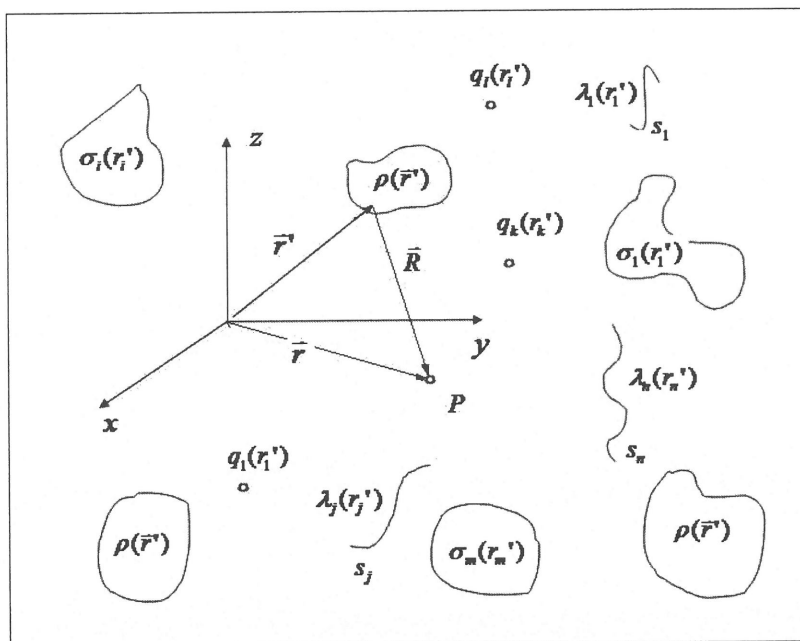
doprinos potencijalu za slučaj plošne gustoće naboja na nizu od m vodiča,

$$\dots + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \frac{\lambda_j(\vec{r}')}{R_j} d\vec{s}_j + \dots$$

doprinos potencijalu od linijske gustoće naboja, n vodiča,

$$\dots + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^l \frac{q_k(\vec{r}_k')}{R_k}.$$

doprinos potencijalu od skupine točkastih naboja, l točkastih naboja.



Slika 2.23 Različite razdiobe naboja u prostoru

2.2.1 Silocijev

Silnice su linije kod kojih je tangenta u svakoj točki u smjeru jakosti polja. Na ekvipotencijalnoj plohi je skalarni produkt $\vec{E}d\vec{s}$ u bilo kojem smjeru jednak nuli pa su silnice okomite na ekvipotencijalne plohe, [3].

Tok vektora $\vec{F}$

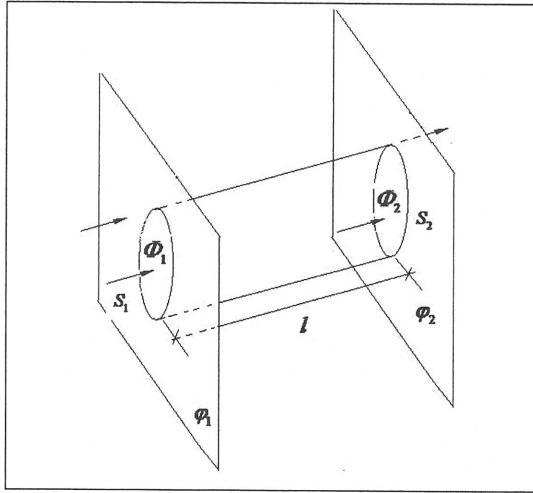
Kao što je već poznato tok vektora $\vec{F}$ općenito je plošni integral:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \Phi. \quad (2.108)$$

Za tok vektora (pomaka) električnog polja vrijedi:

$$\oiint_S \epsilon \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = Q, \quad (2.109)$$

gdje je $\vec{D}$ vektor gustoće električnog polja odnosno pomaka.



Slika 2.24 Cilinadr kao silocijev

Formira li se cilindar dovoljno malen da se veličine polja mogu smatrati konstantnima unutar njega (prema slici 2.24) s bazama krnjeg stošca S_1 i S_2 , koje leže na ekvipotencijalnim plohama $\phi_1 = const.$ i $\phi_2 = const.$, i plaštom kojeg čine silnice na takav način da ga niti jedna ne probada, može se pisati za tokove i razliku potencijala:

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \epsilon \vec{E}_1 d\vec{S}_1 = \Phi_2 = \iint_{S_2} \epsilon \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = \Phi = \iint_S \epsilon \vec{E} d\vec{S} = \epsilon E S, \quad (2.110)$$

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = El. \quad (2.111)$$

Provod ili vodljivost G silicijevi definirana je kvocijentom toka i napona:

$$G = \frac{\Phi}{u} = \frac{\varepsilon ES}{El} = \varepsilon \frac{S}{l} \quad (2.112)$$

što u biti predstavlja električni kapacitet silicijevi.

Za elektrostatičko, strujno električno te magnetsko polje vrijedi:

$$\Phi = DS, \quad u = El, \quad D = \varepsilon E, \quad (2.113)$$

$$\Phi = JS = i, \quad u = El, \quad J = \kappa E, \quad (2.114)$$

$$\Phi = BS, \quad u = Hl, \quad B = \mu H. \quad (2.115)$$

Ovdje je J gustoća struje u A/m^2 , a B gustoća magnetskog polja (magnetska indukcija) u teslama (T) odnosno u Vs/m^2 .

Vodljivosti za strujno električno i magnetsko polje su:

$$G_e = \kappa \frac{S}{l} \quad (2.116)$$

za strujno električno polje te:

$$G_m = \mu \frac{S}{l} \quad (2.117)$$

za magnetsko polje.

Otpor silicijevi općenito je jednak kvocijentu napona i toka, to jest: $R = \frac{1}{G} = \frac{u}{\Phi}$, a ti su otpori:

$$R_{es} = \frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{l}{S} \quad (2.118)$$

za elektrostatičko polje, a:

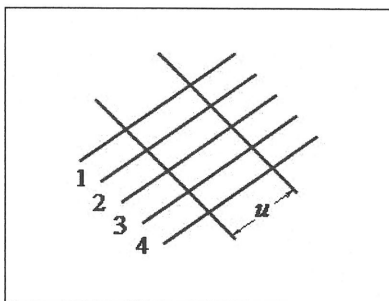
$$R_e = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{S} \quad (2.119)$$

za strujno električno polje te:

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \quad (2.120)$$

za magnetsko polje.

Zbog analogije između elektrostatičkog polja i strujnog električnog polja, rješenje za kapacitet nekog kondenzatora ujedno je rješenje za vodljivost u strujnom električnom polju, samo treba dielektričnost ε zamijeniti sa specifičnom vodljivošću κ .

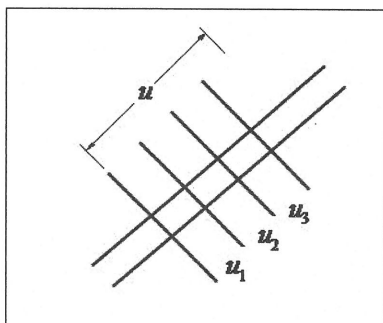


Slika 2.25 Paralelno spojene silocijevi

Pri paralelno spojenim silocijevima, (slika 2.25) zbrajaju se tokovi: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$, a zatim je i:

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$$

$$\frac{\Phi}{u} = \frac{\sum \Phi_k}{u} = \sum G_k = G \quad (2.121)$$



Slika 2.26 Serijski spojene silocijevi

Pri serijski spojenim silocijevima zbrajaju se naponi, (slika 2.26):

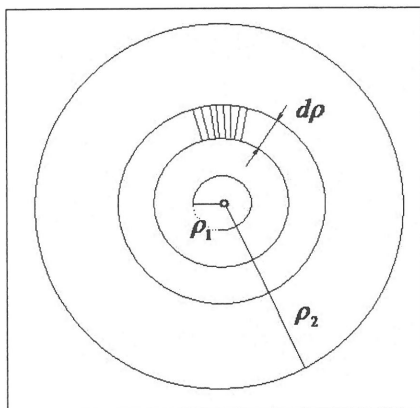
$$u = \sum u_i, \quad (2.122)$$

$$\Phi = \text{const.}, \quad (2.123)$$

$$\frac{u}{\Phi} = \frac{\sum u_i}{\Phi} = \sum \frac{1}{G_i} = \frac{1}{G}. \quad (2.124)$$

Primjer:

Loša izolacija susosnog (koaksijalnog) kabela, (slika 2.27):



Slika 2.27 Loša izolacija koaksijalnog kabela

$$dG = \kappa \frac{2\pi\rho l}{d\rho} \quad (2.125)$$

$$\frac{1}{G} = \int d\left(\frac{1}{G}\right) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{2\pi\rho l} = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (2.126)$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.127)$$

$$G = \frac{2\pi\kappa l}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (2.128)$$

Uzme li se $l = 1\text{ m}$ i zamijeni li se κ (specifična vodljivost) s ε (dielektrična konstanta) dobiva se kapacitet koaksijalnog kabela po jedinici duljine, a koji je već ranije bio određen na drugi način:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}. \quad (2.129)$$

2.2.2 Energija elektrostatičkog polja

Neka se opet promotri električno polje koje potječe samo od prostorne gustoće naboja $\rho(\vec{r}')$ i plošne gustoće naboja $\sigma(\vec{r}')$ na površini vodiča, [4]. Potencijal u bilo kojoj točki određenoj vektorom $\vec{r}$ je:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oiint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad \vec{r} \neq \vec{r}'. \quad (2.130)$$

Neka se pretpostavi da je polje nastalo postupno, korak po korak, tako da je kvocijent ρ i σ pritom bio uvijek stalan. Tako su, u nekom koraku ovi naboji poprimili iznose $\lambda\rho$ odnosno $\lambda\sigma$, gdje je $0 \leq \lambda \leq 1$.

Odgovarajući bi potencijal u tom slučaju iznosio:

$$\lambda\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\lambda\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \oiint_{S'} \frac{\lambda\sigma(\vec{r}')}{R} dS'. \quad (2.131)$$

Neka se sad naboj prostorne gustoće ρ poveća za $\delta\lambda$, a također i plošni naboj σ za $\delta\lambda$. Pri tom se uloži rad:

$$dW = \iiint_V [\rho(\vec{r})\delta\lambda] \lambda\varphi(\vec{r}) dV + \oiint_S [\sigma(\vec{r})\delta\lambda] \lambda\varphi(\vec{r}) dS, \quad (2.132)$$

gdje je volumen $V=V'$, odnosno ploha $S=S'$. Ukupni je rad za izgradnju polja:

$$W = \int_0^1 \lambda d\lambda \left[\iiint_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV + \oiint_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dS \right], \quad (2.133)$$

ili:

$$W = \frac{1}{2} \left[\iiint_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV + \oiint_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dS \right]. \quad (2.134)$$

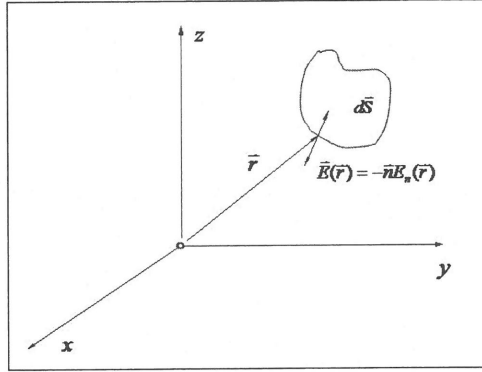
Tako se došlo do izraza za energiju elektrostatičkog polja. Neka se sad ta energija izrazi pomoću jakosti elektrostatičkog polja $\vec{E}$.

Kako je: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ ($\rho = \epsilon \text{div } \vec{E}$) te $\nabla(\varphi\vec{E}) = \vec{E}\nabla\varphi + \varphi\nabla\vec{E} = \vec{E} \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \vec{E}$ odnosno: $\varphi \text{div } \vec{E} = \nabla(\varphi\vec{E}) - \vec{E} \text{grad } \varphi$ to vrijedi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon\varphi(\vec{r}) \text{div } \vec{E}(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon [\text{div}(\varphi\vec{E}) - \vec{E} \text{grad } \varphi] dV = \frac{1}{2} \oiint_S \epsilon\varphi(\vec{r}) \vec{E} d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon\vec{E}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) dV. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Plošni integral na kugli u beskonačnosti nestaje, pa ostaje doprinos na površinama vodiča. Na površini vodiča, (slika 2.28) vrijedi:

$$\vec{E} d\vec{S} = -E_n(\vec{r}) dS = -\frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon} dS \quad (2.136)$$



Slika 2.28 Smjer jakosti električnog polja na površini vodiča

pa je:

$$\frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV = -\frac{1}{2} \oint_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS + \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV, \quad (2.137)$$

te je ukupna energija:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon E^2 dV. \quad (2.138)$$

Veličina $\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$ naziva se prostornom gustoćom energije elektrostatičkog polja. U slučaju električnog polja koje potječe samo od n nabijenih vodiča tj. prostorna je gustoća naboja: $\rho = 0$ pa je energija elektrostatičkog polja:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) \varphi(\vec{r}_i) dS_i. \quad (2.139)$$

Površina svakog električnog vodiča ekvipotencijalna je ploha ($\varphi = const$), pa je:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \oint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i, \quad (2.140)$$

gdje je Q_i ukupni naboj na i -tom vodiču.

Energija n nabijenih vodiča može se izraziti i samo preko naboja te koeficijenta potencijala p_{ij} :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_i Q_j, \quad (2.141)$$

ili pak samo preko potencijala i koeficijenata c_{ij} :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i . \quad (2.142)$$

Izvedeni izraz za energiju n nabijenih vodiča u obliku:

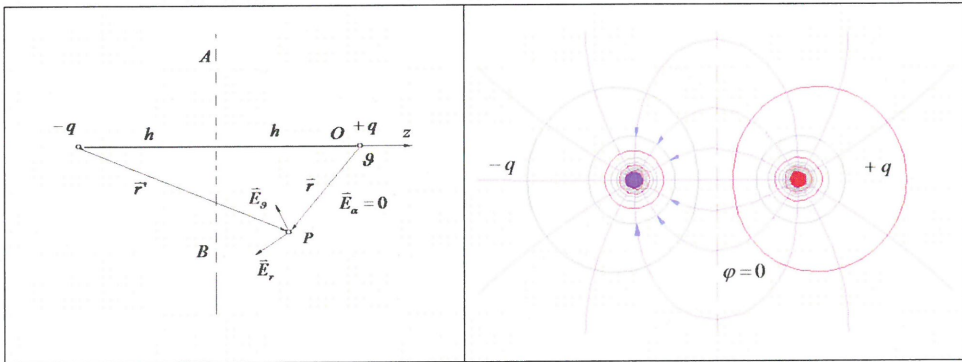
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i . \quad (2.143)$$

vrijedi i za n točkastih naboja, jer se sažimanjem volumena vodiča (u odnosu na promatrani prostor) dolazi do točkastog naboja.

2.3 METODE RJEŠAVANJA ELEKTROSTATIČKIH PROBLEMA ODSLIKAVANJEM

2.3.1 Točkasti naboj i vodljiva ravnina

Neka se sad promotre dva naboja q i $-q$ na udaljenosti $2h$ u sredstvu dielektričnosti ϵ prema slici 2.29 (sferni koordinatni sustav).



Slika 2.29 Dva točkasta naboja

Potencijal u bilo kojoj točki P prostora je:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right). \quad (2.144)$$

Jasno je da je na simetrali AB razmaka naboja $2h$: $r = r'$ i $\varphi = 0$.

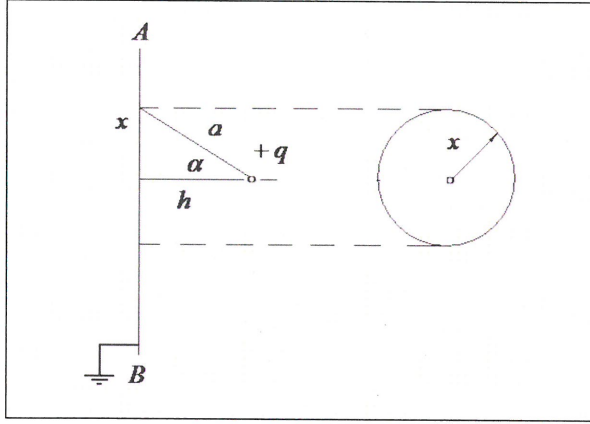
Gornja jednadžba za potencijal:

- daje potencijal nula u beskonačnoj ravnini AB ,
- teži u beskonačnost kao $\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$ za $r \rightarrow 0$,
- teži prema nuli za $r \rightarrow \infty$.

Neka se sad promotri uzemljena (tanka) metalna ploča i naboj $+q$ na udaljenosti h od ravnine, (slika 2.30).

Funkcija potencijala za taj slučaj zadovoljava sva tri uvjeta iz prethodnog slučaja dva naboja $\pm q$ na udaljenosti $2h$.

Znači, može se reći da je za naboj i uzemljenu tanku beskonačnu ploču (ili poluprostor), potencijal u prostoru desno od AB isti kao u slučaju da se ploču AB ukloni i stavi naboj $-q$ na udaljenosti h od AB i na okomici iz q na AB .



Slika 2.30 Točkasti naboj i tanka uzemljena metalna ploča

Također se može reći da je naboj $-q$ slika naboja $+q$ na ravni AB .

Za potencijal, s nabojima kao na slici 2.29, može se pisati:

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \vartheta}} \right). \quad (2.145)$$

Komponente jakosti električnog polja dobivaju se iz potencijala prema:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{r + 2h \cos \vartheta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \vartheta)^{3/2}} \right], \quad (2.146)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2h \sin \vartheta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \vartheta)^{3/2}}, \quad (2.147)$$

$$E_\alpha = 0. \quad (2.148)$$

Polje u smjeru osi z je:

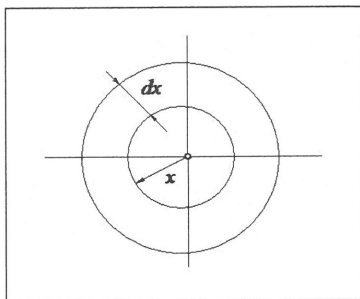
$$\begin{aligned} E_z &= E_r \cos \vartheta - E_\vartheta \sin \vartheta = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\cos \vartheta}{r^2} - \frac{r \cos \vartheta + 2h \cos^2 \vartheta + 2h \sin^2 \vartheta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \vartheta)^{3/2}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\cos \vartheta}{r^2} - \frac{r \cos \vartheta + 2h}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \vartheta)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Za točku na vodljivoj ravni je: $r' = r = a$ pa je:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\cos \vartheta}{a^2} - \frac{a \cos \vartheta + 2h}{a^3} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2h}{a^3}. \quad (2.150)$$

Na površini vodiča vrijedi $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon}$ pa je:

$$\sigma = -\frac{h}{2\pi a^3} q. \quad (2.151)$$



Slika 2.31 Površina integracije na tankoj ploči

Ukupni naboj na ploči po uvrštenju gornjeg izraza za σ u integral (slika 2.31):

$$\int_0^{\infty} 2\pi x \sigma dx = -hq \int_0^{\infty} \frac{x dx}{a^3}. \quad (2.152)$$

Međutim, dalje vrijedi:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + h^2 \\ 2ada &= 2x dx \end{aligned} \quad (2.153)$$

pa je:

$$\int_0^{\infty} 2\pi x \sigma dx = -hq \int_h^{\infty} \frac{ada}{a^3} = -hq \int_h^{\infty} \frac{da}{a^2} = -hq \left(-\frac{1}{a} \right) \Big|_h^{\infty} = -hq \left(-0 + \frac{1}{h} \right) = -q. \quad (2.154)$$

Dakle, naboj na vodljivoj ploči, očekivano je jednak odslikanom naboju.

Sila na naboj je:

$$F_z = \int_0^{\infty} (\sigma 2\pi x dx) \frac{q}{4\pi\epsilon a^2} \cos \alpha = \int_0^{\infty} \left(\frac{-hq}{2\pi a^3} \right) q \cos \alpha \frac{2\pi x dx}{4\pi\epsilon a^2} = \frac{-hq^2}{4\pi\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{(\cos \alpha) x dx}{a^5}, \quad (2.155)$$

Pošto je $\cos \alpha = \frac{h}{a}$, sila je:

$$F_z = \frac{-h^2 q^2}{4\pi\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{x}{a^6} dx. \quad (2.156)$$

Integral je:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{a^6} = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^3} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(x^2 + h^2)}{(x^2 + h^2)^3} = \int_{h^2}^{\infty} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) y^{-2} \Big|_{h^2}^{\infty} = -\frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{h^4} \right) = \frac{1}{4h^4}.$$

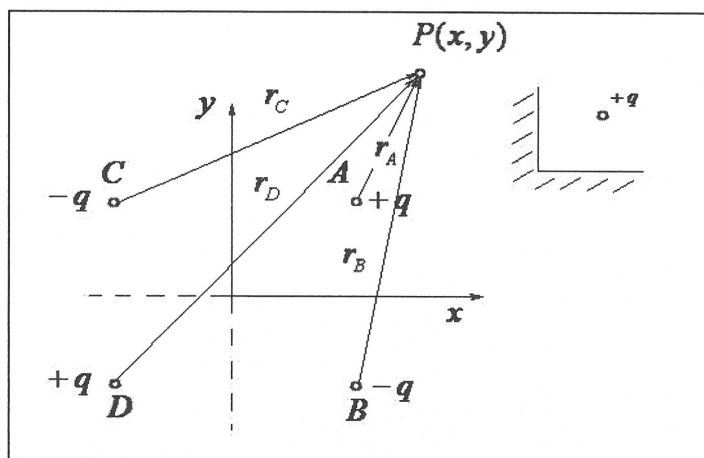
pa je konačno sila:

$$F_z = \frac{-h^2 q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{4h^4} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(2h)^2}. \quad (2.157)$$

Dakle, sila na ploču jednaka je sili između dva točkasta naboja q i $-q$ na udaljenosti $2h$.

2.3.2 Slučaj naboja i dvije beskonačne tanke ploče pod kutom

Naboj q smješten je između dvije beskonačne tanke vodljive ploče, (slika 2.32) koje su pod kutom od 90° . Odslikani negativni naboji nalaze zrcale se simetrično s obzirom na ploče.



Slika 2.32 Naboj i dvije beskonačne tanke ploče pod 90° i odslikani naboji

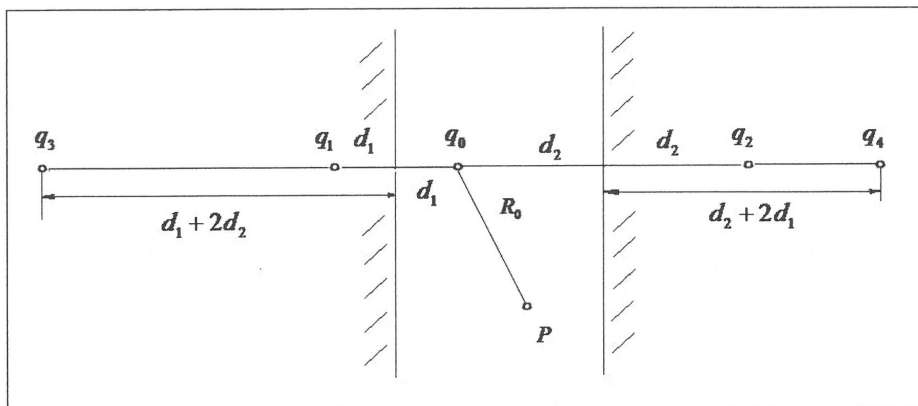
Odslikani pozitivni naboj u točki D jednostrukog je iznosa ($+q$). Potencijal u točki $P(x, y)$ bi se računao pomoću izraza:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D} \right), \quad (2.158)$$

a jakost električnog polja:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\vec{r}_{A0}}{r_A^2} - \frac{\vec{r}_{B0}}{r_B^2} - \frac{\vec{r}_{C0}}{r_C^2} + \frac{\vec{r}_{D0}}{r_D^2} \right). \quad (2.159)$$

2.3.3 Točkasti naboj između dvije tanke beskonačne paralelne ploče



Slika 2.33 Točkasti naboj između dvije tanke beskonačno ploče

U sljedećoj je tablici dana shema preslikavanja naboja nekoliko prvih slika iz koje je moguće odrediti opći izraz za preslikavanja u nizu do beskonačnosti, (slika 2.33).

Tablica 2.1 Shema preslikavanja točkastog naboja između dvije beskonačno tanke naboja za nekoliko prvih slika

		udaljenost	
		od 1	od 2
q_0		d_1	d_2
q_1	$-q_0$	d_1	-
q_2	$-q_0$		d_2
q_3	$+q_0$	$d_1 + 2d_2$	-
q_4	$+q_0$		$2d_1 + d_2$
q_5	$-q_0$	$3d_1 + 2d_2$	-
q_6	$-q_0$		

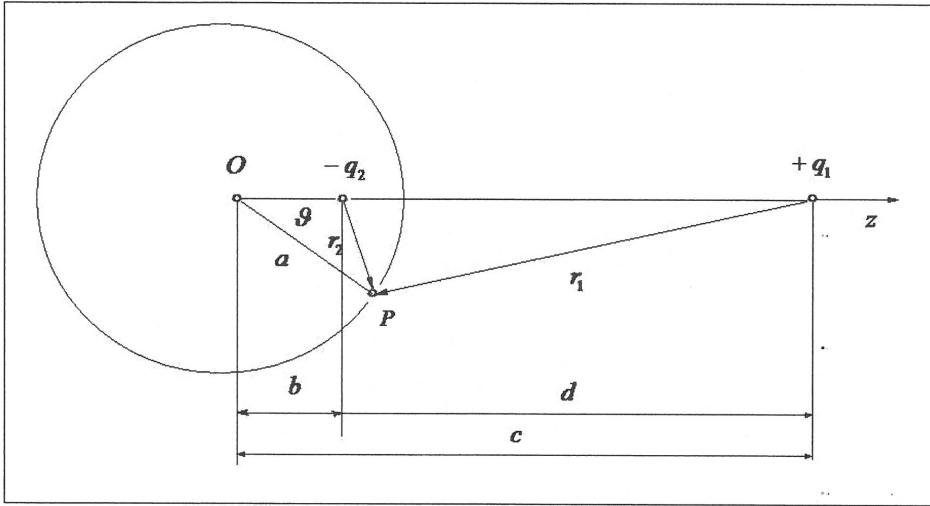
Prema gornjoj tablici moguće je zaključiti na opći izraz za potencijal neke točke prostora P od samog naboja između dviju beskonačnih tankih ploča i njegovih slika:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_0}{R_0} + \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q_i}{R_i} + \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} \frac{q_i}{R_i} \right] = \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{R_{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{R_{2n}} \right]. \end{aligned} \quad (2.160)$$

2.3.4 Točkasti naboj i vodljiva kugla

U prethodnom je primjeru (dva točkasta naboja q i $-q$) riješen slučaj naboja i vodljive beskonačne ploče (ili vodljivog poluprostora), [3], [4].

Neka se sad razmotri slučaj za dva, po iznosu nejednaka točkasta naboja, q_1 i $-q_2$, (slika 2.34).



Slika 2.34 Točkasti naboj i vodljiva kugla

Kut ϑ je kut što ga zatvara spojnica središta kugle i naboja s polumjerom kugle a prema slici 2.34.

Potencijal u bilo kojoj točki P koji potječe od dva naboja suprotnog predznaka q_1 (pozitivni naboj) i q_2 (negativni naboj):

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right). \quad (2.161)$$

Pritom udaljenost naboja q_1 od točke P iznosi r_1 , a naboja q_2 od iste točke iznosi r_2 . S ishodištem sfernog koordinatnog sustava u točki O je:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta, \\ r_2^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Za potencijal $\varphi=0$ treba biti zadovoljena konstantnost kvocijenta odnosno:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta} = \frac{c}{b} \frac{\frac{a^2}{c} + c - 2a \cos \vartheta}{\frac{a^2}{b} + b - 2a \cos \vartheta} = \text{const}. \quad (2.163)$$

Lako se utvrđuje da je taj uvjet ispunjen za svaki kut ϑ , ako je:

$$1. \quad a^2 = cb, \quad (2.164)$$

$$2. \quad \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{c}{b}. \quad (2.165)$$

Pošto to vrijedi za svaki kut ϑ , a $a = \text{const.}$, ekvipotencijalna ploha za $\varphi=0$ je kuglina ploha. Iz odnosa veličina u (2.165) utvrđuje se da kugla potencijala $\varphi=0$ obuhvaća naboj manjeg apsolutnog iznosa (ovdje q_2).

Promotri li se sad kugla radijusa a na potencijalu nula (uzemljena kugla) i naboj q_1 na udaljenosti c od središta kugle, jasno je da je polje isto, ako se kugla ukloni i stavi naboj iznosa:

$$-q_2 = -\sqrt{\frac{b}{c}} q_1 = -\frac{a}{c} q_1 \text{ na udaljenosti } b = \frac{a^2}{c} \text{ od središta kugle na spojnici s nabojem } q_1.$$

Potencijal u bilo kojoj točki P izvan kugle je:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{(a/c)}{r_2} \right) \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \vartheta)^{1/2}} - \frac{a/c}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \vartheta)^{1/2}} \right] = \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \vartheta)^{1/2}} - \frac{a/c}{\left[r^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2r \frac{a^2}{c} \cos \vartheta \right]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Komponente jakosti električnog polja su:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{c \cos \vartheta - r}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{a/c \left[(a^2/c) \cos \vartheta - r \right]}{\left[r^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2r \frac{a^2}{c} \cos \vartheta \right]^{3/2}} \right\} \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{-rc \sin \vartheta}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \vartheta)^{3/2}} + \frac{r \frac{a^3}{c^2} \sin \vartheta}{\left[r^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2r \frac{a^2}{c} \cos \vartheta \right]^{3/2}} \right\}. \\ E_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

Na površini kugle je $r=a$, pa je:

$$(E_r)_a = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{c \cos \vartheta - a}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{c} \left[\left(\frac{a^2}{c} \right) \cos \vartheta - a \right]}{\left[a^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2a \frac{a^2}{c} \cos \vartheta \right]^{3/2}} \right\}. \quad (2.168)$$

Nazivnik drugog člana u vitičastoj zagradi gornjeg izraza za E_r je:

$$\begin{aligned} \left(a^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2a \frac{a^2}{c} \cos \vartheta \right)^{3/2} &= \left[\frac{a^2}{c^2} (a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta) \right]^{3/2} = \\ &= \frac{a^3}{c^3} (a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Također se poslije množenja brojnika u istom izrazu s c^3 / a^2 dobiva:

$$\frac{c^3}{a^2} \left(\frac{a^3}{c^2} \cos \vartheta - \frac{a^2}{c} \right) = ac \cos \vartheta - c^2 \quad (2.170)$$

pa je poslije zbrajanja oba člana:

$$(E_r)_a = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{ac \cos \vartheta - a^2 - ac \cos \vartheta + c^2}{a(a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta)^{3/2}} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{c^2 - a^2}{a(a^2 + c^2 - 2ac \cos \vartheta)^{3/2}}. \quad (2.171)$$

Kako je dalje:

$$-a^2 c \sin \vartheta + \frac{c^3}{a^2} \frac{a^4}{c^2} \sin \vartheta = 0, \quad (2.172)$$

to je:

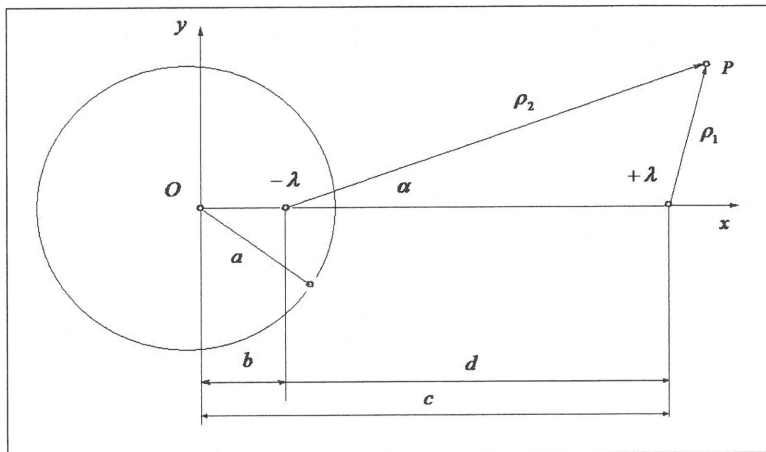
$$(E_\vartheta)_a = 0. \quad (2.173)$$

Najjače polje na kugli fizikalno je za $\vartheta = 0$:

$$[(E_r)_a]_{\max} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{c^2 - a^2}{a(c - a)^3} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{c + a}{a(c - a)^2}. \quad (2.174)$$

2.3.5 Linijski naboj i vodljivi cilindar

Neka se sad razmotre dva paralelna linijska naboja $+\lambda$ i $-\lambda$ na udaljenosti d , [3], [4].



Slika 2.35 Linijski naboj i vodljivi cilindar

Uz oznake kao na slici 2.35 potencijal u točki P je:

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \rho_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \rho_2 + C \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + C,\end{aligned}\quad (2.175)$$

gdje je C neka konstanta.

Jasno je da je zbog simetrije: $\varphi=0$ za $\rho_1=\rho_2$. Iz tog uvjeta proizlazi da je i: $C=0$.

Potencijal je konstantan na plohamo za koje vrijedi $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 = \text{const.}$ odnosno $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 = \text{const.}$

Iz geometrijskih odnosa slijedi:

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 = \frac{\rho_2^2 + d^2 - 2\rho_2 d \cos \alpha}{\rho_2^2} = \text{const} = m^2 \text{ pri } 0 < m < \infty. \quad (2.176)$$

Da se odredi koje su to plohe odnosno krivulje, neka je:

$$\begin{aligned}x &= \rho_2 \cos \alpha, \\ y &= \rho_2 \sin \alpha,\end{aligned}\quad (2.177)$$

tad je:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^2 &= \rho_2^2 + d^2 - 2xd = m^2 \rho_2^2, \\
 \rho_2^2(1 - m^2) - 2xd &= -d^2(-1), \\
 \rho_2^2(m^2 - 1) + 2xd &= d^2(m^2 - 1), \\
 \rho_2^2 + 2xd \frac{1}{m^2 - 1} &= \frac{d^2}{m^2 - 1}.
 \end{aligned} \tag{2.178}$$

te:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 2xd \frac{1}{m^2 - 1} &= \frac{d^2}{m^2 - 1}, \\
 x^2 + \frac{2xd}{m^2 - 1} + \frac{d^2}{(m^2 - 1)^2} + y^2 - \frac{d^2}{(m^2 - 1)^2} &= \frac{d^2}{m^2 - 1}, \\
 \left(x + \frac{d}{m^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \frac{d^2}{m^2 - 1} + \frac{d^2}{(m^2 - 1)^2} = \frac{d^2(m^2 - 1) + d^2}{(m^2 - 1)^2} = \frac{m^2 d^2}{(m^2 - 1)^2},
 \end{aligned} \tag{2.179}$$

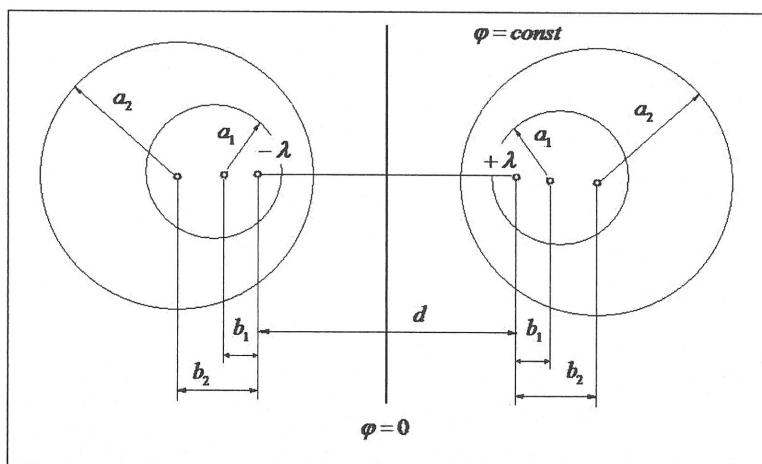
a to su jednadžbe (Apollonijeve) kružnice s radijusom:

$$a = \frac{md}{m^2 - 1} \tag{2.180}$$

na udaljenosti b lijevo od ishodišta:

$$-x_0 = b = \frac{d}{m^2 - 1}, \quad y_0 = 0. \tag{2.181}$$

Na sljedećoj su slici 2.36 prikazane dvije kružnice oko svakog naboja i pravac nultog potencijala $\varphi = 0$.



Slika 2.36 Linijski naboj i vodljivi cilindar – ekvipotencijalne plohe

Sa slike 2.35 (geometrijske dimenzije) i provedenih razmatranja proizlaze odnosi:

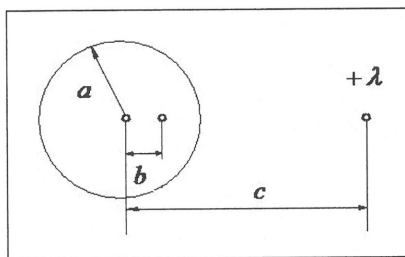
$$\begin{aligned} c &= d + b = d + \frac{d}{m^2 - 1} = \frac{m^2 d}{m^2 - 1} = ma, \\ b &= \frac{d}{m^2 - 1} = \frac{a}{m} = \frac{a^2}{c}. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Provjere:

$$\left. \begin{aligned} a &\rightarrow \infty \\ m &\rightarrow 1 \\ b &\rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \text{nulti potencijal } \varphi = 0 \text{ (pravec).}$$

Za $m > 1$ parametar $b = \frac{d}{m^2 - 1} = \frac{a}{m} < a$, pa kružnice uvijek obuhvaćaju naboj.

Promatra li se beskonačno dugi cilindar radijusa a , koji je na potencijalu φ i linijski naboj λ , na udaljenosti c od središta cilindra, polje izvan cilindra može se odrediti tako da se umjesto cilindra uzme linijski naboj $-\lambda$ na udaljenosti $d = c - b$ od naboja $+\lambda$. Udaljenost b se odredi iz $b = \frac{a^2}{c}$ (slika 2.37).



Slika 2.37 Odslikavanje na vodljivom cilindru

• Električno polje

Uvede li se nova oznaka $\rho_2 = \rho$, tad je potencijal:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha)^{1/2}} \quad (2.183)$$

odakle se mogu računati pojedine komponente jakosti električnog polja:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha}}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha} - \frac{\rho(2\rho - 2d \cos \alpha)}{2(\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha)^{1/2}}}{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha - \rho^2 + d\rho \cos \alpha}{(\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$E_\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d^2 - d\rho \cos \alpha}{\rho(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha)}, \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha}}{\rho} \cdot \frac{-\rho \frac{1}{2} \frac{-2\rho d(-\sin \alpha)}{(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha)^{1/2}}}{(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha)} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{-\rho^2 d \sin \alpha}{\rho^2(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (2.186)$$

ili konačno:

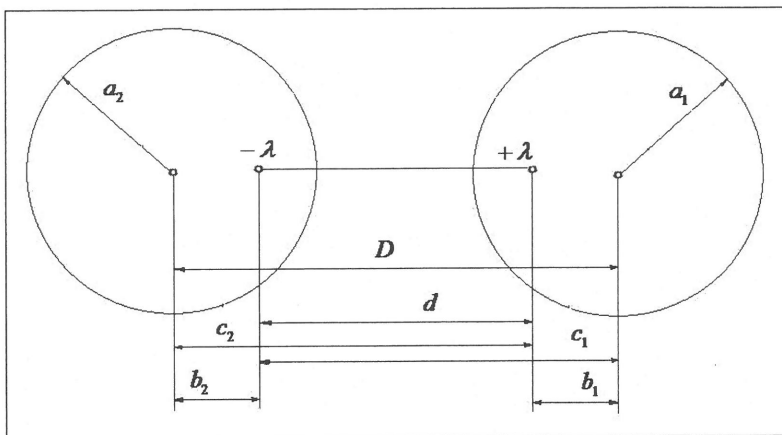
$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d \sin \alpha}{(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \alpha)}, \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Najjače je polje na ekvipotencijalnoj kružnici radijusa a i to za $\alpha=0$ odnosno:

$$\begin{aligned} (E_\rho)_{\max} &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d^2 - (a-b)d}{(a-b)[(a-b)^2 + d^2 - 2(a-b)d]} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d^2 - (a-b)d}{(a-b)[d - (a-b)]^2} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d[d - (a-b)]}{(a-b)[d - (a-b)]^2} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{d}{(a-b)[d - (a-b)]} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{c-b}{(a-b)[c-b-a+b]} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{c - \frac{a^2}{c}}{\left(a - \frac{a^2}{c}\right)(c-a)} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{c^2 - a^2}{(ca - a^2)(c-a)} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{(c-a)(c+a)}{a(c-a)(c-a)} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{c+a}{a(c-a)}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$E_\alpha = 0. \quad (2.189)$$

2.3.6 Kapacitet dvaju beskonačno dugih cilindara



Slika 2.38 Dvožični vod

Potencijal lijevog cilindra sa slike 2.38 izračunava se na temelju izraza (2.175) pri čemu je najzgodnije ρ_2 i ρ_1 računati na točki plohe lijevog cilindra koja se nalazi na sjecištu spojnice naboja i plohe cilindra (lijevi linijski naboj je negativan) :

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a_2 - b_2}{c_2 - a_2}. \quad (2.190)$$

Na sličan je način potencijal desnog cilindra (desni linijski naboj je pozitivan):

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{c_1 - a_1}{a_1 - b_1} \quad (2.191)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_2^2}{c_2}, \quad c_2 = d + b_2, \\ b_1 &= \frac{a_1^2}{c_1}, \quad c_1 = d + b_1, \\ D &= d + b_1 + b_2. \end{aligned} \quad (2.192)$$

Razlika potencijala $U = \varphi_1 - \varphi_2$ jednaka je:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{c_1 - a_1}{a_1 - b_1} \frac{c_2 - a_2}{a_2 - b_2} \right) > 0. \quad (2.193)$$

Iz $Q = C \cdot U$ slijedi:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{c_1 - a_1}{a_1 - b_1} \frac{c_2 - a_2}{a_2 - b_2}\right)} [F/m] \quad (2.194)$$

Za jednake polumjere vodiča ($a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = c$) kapacitet iznosi:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{2\ln\frac{c-a}{a-b}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{c-a}{a-\frac{a^2}{c}}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{c(c-a)}{a(c-a)}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{c}{a}}. \quad (2.195)$$

Za praktične proračune ponekad je zgodno c izraziti pomoću D (razmak između osi cilindara). S posljednje slike 2.38 slijedi:

$$\begin{aligned} 2b + d &= D, \\ 2\frac{a^2}{c} + d &= D, \\ d &= c - b = c - \frac{a^2}{c}, \end{aligned} \quad (2.196)$$

pa je:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{c} + c - \frac{a^2}{c} &= D, \\ \frac{a^2}{c} + c &= D, \\ a^2 + c^2 &= Dc, \\ c^2 - Dc + a^2 &= 0 \\ c_{1,2} &= \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2}, \quad c = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Kapacitet jednakih beskonačnih cilindara po metru duljine je:

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{D + \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2a}}, \text{ a za } D \gg 2a: C \cong \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{D}{a}}. \quad (2.198)$$

2.3.7 Dvodimenzionalni problemi potencijala (konjugirane funkcije)

U slučaju da je potencijal funkcija samo dviju pravokutnih koordinata (recimo x i y), Laplaceova se jednačba ($\Delta\varphi = 0$) reducira na:

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.199)$$

Za rješenje potencijala treba riješiti gornju jednačbu za zadane rubne uvjete, [3], [4].

Za rješenje gornje jednačbe, neka se razmotri analitička¹ funkcija $f(z)$ kompleksne varijable $z = x + jy$, gdje je $j = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica.

Dakle, funkcija $f(z)$ može se prikazati:

$$f(z) = f(x + jy) = \varphi(x, y) + j\psi(x, y). \quad (2.200)$$

Dalje uz $\partial z / \partial x = 1$, $\partial z / \partial y = j$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = j \frac{df}{dz}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Deriviraju li se gornji izraz još jedanput, dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{dz^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{d^2 f}{dz^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.202)$$

¹ Funkcija $f(z)$ kompleksne varijable $z = x + jy$ je analitička u području kompleksne ravnine onda i samo onda ako vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

- Funkcija $f(z)$ ima derivaciju u svakoj točki područja P : $\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$,
- Funkcija $f(z)$ se može razviti u Taylorov red po potencijama za svaku točku z_0 u P ,
- Linijski integral po zatvorenoj krivulji $\oint f(z)dz$ u P jednak je nuli,
- Funkcija $f(\bar{z})$ se može izraziti i kao $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, a u i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ u Kartezijevom sustavu, odnosno $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$, $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ u polarnom sustavu.

Znači, bilo koja analitička funkcija kompleksne varijable $z = x + jy$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu **za dvije** dimenzije:

$$\nabla^2 f = 0. \quad (2.203)$$

Razdvoji li se realni od imaginarnog dijela dobiva se:

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \Delta \varphi = 0 \quad (2.204)$$

$$\nabla^2 \psi(x, y) = \Delta \psi = 0. \quad (2.205)$$

Dakle, φ i ψ zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu i uzimaju se konjugiranim funkcijama od x i y . Iz definicije prve derivacije slijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = j \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.206)$$

pa je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + j \frac{\partial \psi}{\partial y} = j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.207)$$

odnosno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.208)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.209)$$

Neka se sad utvrdi što je produkt $\nabla \varphi \cdot \nabla \psi$ (u sljedećim izrazima $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nisu imaginarne jedinice već jedinični vektori !):

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \nabla \psi &= \vec{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \nabla \varphi \cdot \nabla \psi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.210)$$

i porodice krivulja:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \text{const} \\ \psi(x, y) &= \text{const} \end{aligned} \quad (2.211)$$

Može se φ tretirati kao funkciju potencijala, a ψ kao funkciju strujanja (silnica). Tad su krivulje $\varphi(x, y) = \text{const}$ ekvipotencijalne linije, a $\psi(x, y) = \text{const}$ su jednadžbe silnica.

Iz prvih jednadžbi deriviranjem se dobiva:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\Re \left\{ \frac{df}{dz} \right\}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Im \left\{ \frac{df}{dz} \right\}. \end{aligned} \quad (2.212)$$

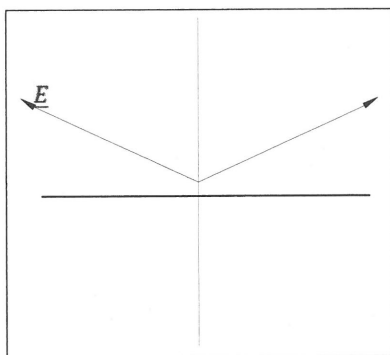
Primjer:

$$f(z) = 2x - y + j(x + 2y) = 2(x + jy) + j(x + jy)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -1 \quad (2.213)$$

$$\frac{df}{dz} = 2 + j1$$



Slika 2.39 Prikaz vektora kompleksnim brojem

Dakle, vrijedi:

$$|\vec{E}| = |\nabla \varphi| = \left| \frac{df}{dz} \right| \quad (2.214)$$

i električno polje s osi x čini kut $\left(\pi - \arg \operatorname{tg} \left(\frac{df}{dz} \right) \right)$, te se ono (električno polje) izravno može odrediti iz funkcije $f(z)$.

2.3.7.1 Određivanje funkcije $f(z)$ za homogeno polje.

Homogeno električno polje ima sljedeće jednačbe:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{const.}, \\
 E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{const.}, \\
 \varphi &= -E_x x - E_y y + a, \\
 \psi &= E_y x - E_x y + b,
 \end{aligned} \tag{2.215}$$

gdje su a i b konstante integracije. Funkcija $f(z)$ je oblika:

$$f(z) = -\varepsilon z + (a + jb). \tag{2.216}$$

U gornjoj je jednačbi :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= E_x - jE_y \\
 z &= x + jy,
 \end{aligned} \tag{2.217}$$

budući da je:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -(E_x - jE_y)(x + jy) + (a + jb) \\
 &= -E_x x - E_y y + a + j(E_y x - E_x y + b)
 \end{aligned} \tag{2.218}$$

Za funkciju $f(z)$ se dalje može pisati:

$$f(z) = -Ee^{-j\alpha}(z - z_0), \tag{2.219}$$

gdje su:

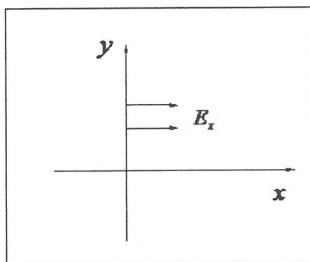
- $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$,
- α - kut što ga polje čini s osi x ,
- a z_0 određuje jednačba:
- $a + jb = Ee^{-j\alpha} z_0$.

Poseban je slučaj tanka metalna ploča s plošnim nabojem σ u osi y .

$\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -E(z - z_0) = -E[(x - x_0) + j(y - y_0)] \\
 &= -E(x - x_0) - jE(y - y_0) = \\
 &= \varphi(x) + j\psi(y)
 \end{aligned} \tag{2.220}$$

- $\varphi(x) = -E(x - x_0)$ ekvipotencijalne linije (pravci paralelni s osi y),
- $\psi(y) = -E(y - y_0)$ silnice (pravci paralelni s osi x), slika 2.40.



Slika 2.40 Tanka metalna ploča s plošnim nabojem σ

Iz Gaussovog se zakona dobiva:

$$2E_x h_y h_z = \frac{\sigma}{\epsilon} h_y h_z, \quad (2.221)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon},$$

pa je:

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon}(x - x_0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon}x + C. \quad (2.222)$$

Zbog jednostavnosti, za konstantu C se može uzeti da je nula.

Primjer:

$$E_x = -\Re\left\{\frac{df}{dz}\right\} = -\Re\{-E(\cos\alpha - j\sin\alpha)\} = E\cos\alpha, \quad (2.223)$$

$$\alpha = 0, \quad E_x = E.$$

$$E_y = \Im\left\{\frac{df}{dz}\right\} = \Im\{-E(\cos\alpha - j\sin\alpha)\} = E\sin\alpha, \quad (2.224)$$

$$\alpha = 0, \quad E_y = 0.$$

2.3.8 Konformno preslikavanje

Uočeno je da se dvodimenzionalni elektrostatički problemi lako rješavaju ako je poznata prava funkcija:

$$f(z) = \varphi + j\psi \quad (2.225)$$

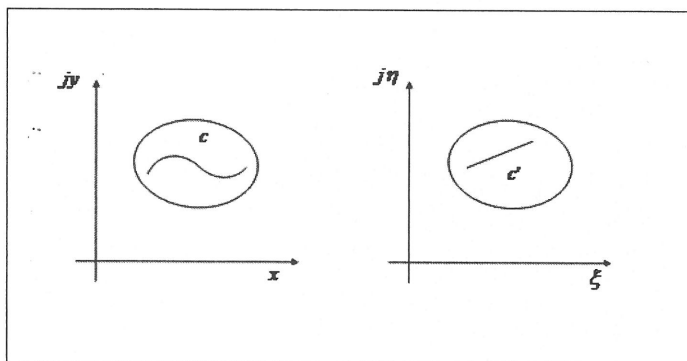
Za svaki problem treba odrediti funkciju $f(z)$. Metoda konformnog preslikavanja, [3], [4] ponekad je vrlo učinkovita za traženje funkcije $f(z)$. Neka su $z = x + jy$ i $\zeta = \xi + j\eta$ dvije kompleksne varijable, tako da je:

$$\zeta = g(z) \quad (2.226)$$

gdje je $g(z)$ analitička funkcija.

Funkcijska veza prema gornjoj jednadžbi povezuje točke $z = x + jy$ u kompleksnoj z ravnini i točke $\zeta = \xi + j\eta$ u kompleksnoj ζ ravnini.

Neka je R područje u z ravnini, gdje je funkcija $g(z)$ analitička. Tad, ako je c krivulja u području R i z se pomiče po c , ζ se pomiče po krivulji c' u ζ ravnini, slika 2.41.



Slika 2.41 Preslikavanje iz $z = x + jy$ ravnine u $\zeta = \xi + j\eta$ ravninu

Krivulja c' se zove slika od c , a cijeli proces *preslikavanje*.

Kako je $d\zeta = g'(z)dz$, gdje je $g'(z) = \frac{dg}{dz}$ vrijedi:

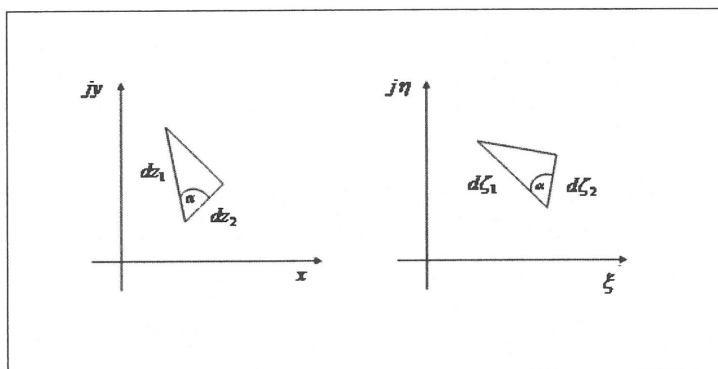
$$|d\zeta| = |g'(z)| \cdot |dz| \quad (2.227)$$

$$\arg(d\zeta) = \arg(g'(z)) + \arg(dz). \quad (2.228)$$

Veličina elementa $|d\zeta|$ u ζ ravnini je $|g'(z)|$ puta veća od veličine elementa $|dz|$. Druga jednačba govori da je kut u ravnini ζ za $\arg(g'(z))$ zaokrenut u odnosu na kut u ravnini z , dakle kutovi ostaju isti, slika 2.42.

Također oblici ostaju diferencijano jednaki, (slika 2.42). Zato se preslikavanje zove konformno (suoblično).

Ukoliko postoji $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{g'(z)}$ onda je i inverzna transformacija od ζ kao funkcija od z također kontinuirana.



Slika 2.42 Konformno preslikavanje

Primjer:

Problem linijskog naboja $+\lambda$ (po jedinici dužine), koji je smješten u točki (r_0, ϑ_0) paralelno dvjema beskonačnim ravninama smještenim u $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ (n ne treba biti cijeli broj) na potencijalu $\varphi = 0$, slika 2.43.

Transformacije:

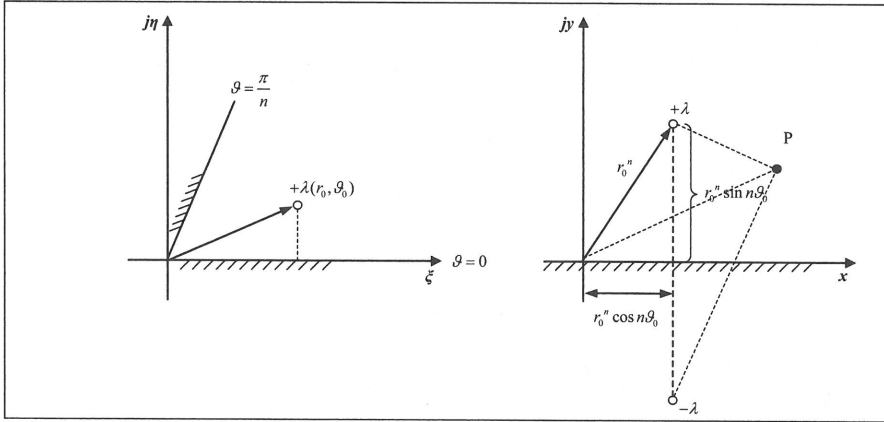
$$\zeta = re^{j\vartheta} = z^{\frac{1}{n}} = (x + jy)^{\frac{1}{n}},$$

$$g(\bar{z}) = \sqrt[n]{\bar{z}},$$

$$x = r^n \cos n\vartheta,$$

$$y = r^n \sin n\vartheta$$

transformiraju prostor između ravnina $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ u ζ ravnini u poluprstor iznad osi x u z ravnini.



Slika 2.43 Transformacija prostora između dvije ravnine (ζ ravnina) u poluprostora iznad osi x u z ravnini

Rješenje za potencijal u (x, y) ravnini je poznato (slika 2.43, desno):

$$\varphi(P) = \varphi(x, y) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} \quad (2.229)$$

pa je rješenje u (ζ, η) ravnini:

$$\varphi(r, \vartheta) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(r^n \cos n\vartheta - r_0^n \cos n\vartheta_0)^2 + (r^n \sin n\vartheta - r_0^n \sin n\vartheta_0)^2}{(r^n \cos n\vartheta - r_0^n \cos n\vartheta_0)^2 + (r^n \sin n\vartheta + r_0^n \sin n\vartheta_0)^2} \quad (2.230)$$

gdje su:

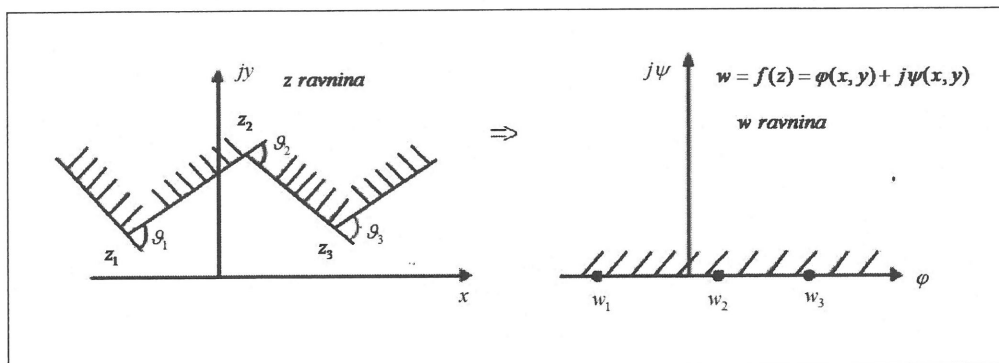
$$\zeta = \xi + j\eta; \quad \xi = r \cos \vartheta; \quad \eta = r \sin \vartheta. \quad (2.231)$$

Funkcija $f(z)$ je dakle:

$$f(z) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|. \quad (2.232)$$

2.3.9 Schwarz – Christoffelov teorem

Schwarz – Christoffelova (S-C) transformacija preslikava poligon u jednoj kompleksnoj ravnini (slika 2.44 lijevo) $z = x + jy$ u gornju poluravninu u kompleksnoj ravnini: $w = f(z) = \varphi(x, y) + j\psi(x, y)$ (slika 2.44, desno).



Slika 2.44 Uz Schwarz-Christoffelovu transformaciju

$$\frac{dz}{dw} = C_1 (w - w_1)^{-\frac{g_1}{\pi}} \cdot (w - w_2)^{-\frac{g_2}{\pi}} \cdots (w - w_n)^{-\frac{g_n}{\pi}} \quad (2.233)$$

$$z = C_1 \int \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\frac{g_k}{\pi}} dw + C_2 \quad (2.234)$$

gdje su C_1 i C_2 integracijske konstante.

• Pravila primjene teorema Schwarz – Christoffela

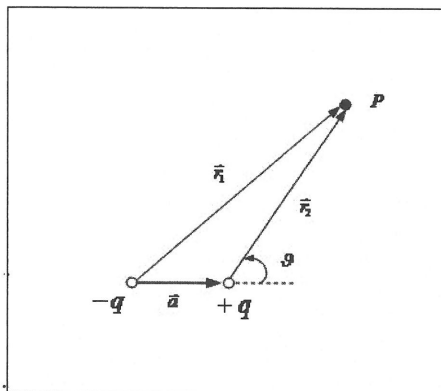
- Poligon se obilazi tako da promatrano područje ostaje s lijeve strane (i u z i u w ravnini).
- Redni broj vrha poligona z_k mora odgovarati rednom broju w_k .
- Kutovi g_k u z ravnini broje se pozitivno pri prijelazu sa stranice na stranicu poligona suprotnim smjerom od kazaljke na satu inače negativno.
- Tri od w_k točaka odabiru se proizvoljno, a jedna može biti u beskonačnosti.
- Ako je neka od točaka w_k u beskonačnosti, tad se njen faktor u izrazu za dz/dw niti ne pojavljuje.
- Zbroj svih kutova $\sum_{k=1}^n g_k = 2\pi$ ili $\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n g_k = 2$.
- Ako neki od $z_i \rightarrow \infty$ pripadne su stranice paralelne na razmaku d_i , a w_i je na konačnoj

udaljenosti. Tad je razmak između stranica $d_i = -j\pi C_1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (w_i - w_k)^{-\frac{g_k}{\pi}}$.

- Ako $z_i \rightarrow \infty$ i $w_i \rightarrow \infty$ onda je razmak između stranica $d_i = -j\pi C_1$.

- i) Ukupno ima $n + 2$ konstanti, a ako se odbiju 3 w_i koje se odabiru po volji (jedna je obično u beskonačnosti) ostane $n - 1$ relacija za određivanje ostalih konstanti.
- j) Funkcija preslikavanja u vrhovima nije analitička.

2.3.10 Dielektrična sredstva. Dipol



Slika 2.45 Električni dipol

Neka je naboj $+q$ smješten u ishodištu koordinatnog sustava, (slika 2.45). Vektor $\vec{a}$ usmjeren je od negativnog prema pozitivnom naboju. Za potencijal dva naboja $+q$ i $-q$ u točki P vrijedi:

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1}. \quad (2.235)$$

Ukoliko je točka promatranja jako udaljena od naboja vrijede približni odnosi:

$$r_1 r_2 \cong r^2, \quad r_1 - r_2 \cong a \cos \vartheta \quad (2.236)$$

pa je potencijal približno:

$$\varphi \cong \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\arccos \vartheta}{r^3} = \frac{q \vec{a} \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (2.237)$$

pri čemu je $\vec{p}$ dipolni moment i iznosi $q\vec{a}$. Konstantnost iznosa dipolnog momenta $\vec{p}$ može se održati, na primjer, pri smanjenju razmaka a između naboja recipročnim povećanjem količine naboja. Potencijal izražen pomoću dipolnog momenta sad glasi:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad (2.238)$$

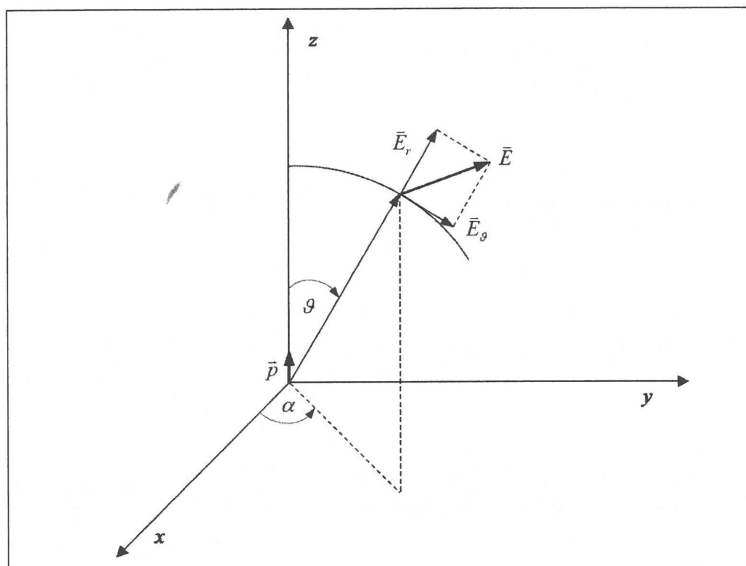
dakle pada s kvadratom udaljenosti od dipola.

Komponente jakosti električnog polja dipola (slika 2.46) u cilindričnim koordinatama su:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{-2p \cos \vartheta}{r^3} = \frac{p \cos \vartheta}{2\pi\epsilon r^3}, \quad (2.239)$$

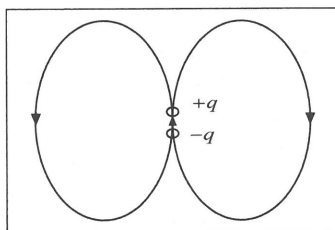
$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{-p \sin \vartheta}{r^3} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon r^3}, \quad (2.240)$$

$$E_\alpha = 0. \quad (2.241)$$



Slika 2.46 Uz električni dipol

Silnice elektrostatičkog polja u okolišu dipola simetrične su krivulje (slika 2.47).



Slika 2.47 Silnice električnog dipola u njegovu okolišu

Može se uspostaviti i drugačiji oblik jakosti električnog polja dipola smještenog u ishodištu. Polazi se od potencijala:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon r} \right), \quad (2.242)$$

a jakost električnog polja dipola je:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right). \quad (2.243)$$

Gradijent dijela gornjeg izraza u zagradi:

$$\nabla \left(\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \nabla \right) \vec{p}}_0 + \underbrace{(\vec{p} \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}}_0 + \underbrace{\vec{p} \times \left(\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)}_0 + \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3} \times \left(\nabla \times \vec{p} \right)}_0, \quad (2.244)$$

odakle se utvrđuje da ostaje samo drugi član:

$$\begin{aligned} & (p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}) \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} \right), \text{ a raspisani dio derivacije } \frac{\partial}{\partial x} \text{ je:} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^3 - x3r^2 \frac{1}{2} \frac{2x}{r}}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^3} = \frac{-y3r^2 \frac{1}{2} \frac{2x}{r}}{r^6} = \frac{-3xy}{r^5}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = \frac{-z3r^2 \frac{1}{2} \frac{2x}{r}}{r^6} = \frac{-3xz}{r^5}, \end{aligned} \quad (2.245)$$

a nakon raspisivanja i po ostale dvije derivacije $\frac{\partial}{\partial y}$ odnosno $\frac{\partial}{\partial z}$ to je:

$$\begin{aligned} p_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} \right) &= p_x \left[\vec{i} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) + \vec{j} \left(\frac{-3xy}{r^5} \right) + \vec{k} \left(\frac{-3xz}{r^5} \right) \right], \\ p_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} \right) &= p_y \left[\vec{i} \left(\frac{-3xy}{r^5} \right) + \vec{j} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right) + \vec{k} \left(\frac{-3yz}{r^5} \right) \right], \\ p_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} \right) &= p_z \left[\vec{i} \left(\frac{-3xz}{r^5} \right) + \vec{j} \left(\frac{-3yz}{r^5} \right) + \vec{k} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.246)$$

Po komponentama $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ to izgleda kao:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) &= \vec{i} \left[p_x \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) + p_y \left(\frac{-3xy}{r^5} \right) + p_z \left(\frac{-3xz}{r^5} \right) \right] + \vec{j} \left[p_x \left(\frac{-3xy}{r^5} \right) + p_y \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right) + p_z \left(\frac{-3yz}{r^5} \right) \right] + \\ & \vec{k} \left[p_x \left(\frac{-3xz}{r^5} \right) + p_y \left(\frac{-3yz}{r^5} \right) + p_z \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.247)$$

Članovi iz izraza (2.247) uz r^3 daju:

$$\frac{1}{r^3} (\bar{i} p_x + \bar{j} p_y + \bar{k} p_z) = \frac{\bar{p}}{r^3}, \quad (2.248)$$

a ostatak uz r^5 je:

$$-\frac{3x}{r^5} (xp_x + yp_y + zp_z) \bar{i} = \frac{-3x(\bar{p}\bar{r})}{r^5} \bar{i} \quad (2.249)$$

$$-\frac{3y}{r^5} (xp_x + yp_y + zp_z) \bar{j} = \frac{-3y(\bar{p}\bar{r})}{r^5} \bar{j} \quad (2.250)$$

$$-\frac{3z}{r^5} (xp_x + yp_y + zp_z) \bar{k} = \frac{-3z(\bar{p}\bar{r})}{r^5} \bar{k}, \quad (2.251)$$

odakle proizlazi da konačno vrijedi:

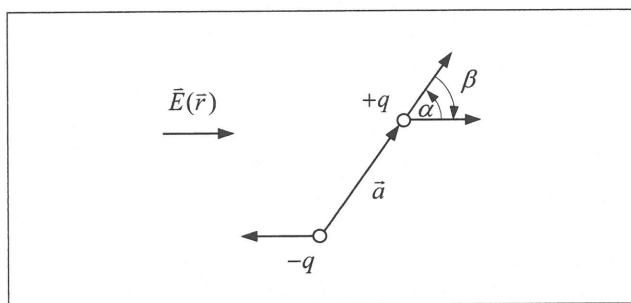
$$\nabla\left(\frac{\bar{p}\bar{r}}{r^3}\right) = \frac{\bar{p}}{r^3} - \frac{3\bar{p}\bar{r}}{r^5} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}), \quad (2.252)$$

pa je konačno:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla\left(\frac{\bar{p}\bar{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3(\bar{p}\bar{r})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{p}}{r^3} \right]. \quad (2.253)$$

2.3.11 Moment i sila na dipol u vanjskom električnom polju

Dipol $\bar{p} = q\bar{a}$ izložen vanjskom polju $\vec{E}(\bar{r})$ i pod nekim kutem α prikazan je na slici 2.48.



Slika 2.48 Moment i sila na dipol u vanjskom polju

Moment koji djeluje na dipol u polju $\vec{E}(\bar{r})$ prema slici 2.48 je:

$$\vec{M} = \bar{a} \times q\vec{E} = q\bar{a} \times \vec{E} = \bar{p} \times \vec{E} \quad (2.254)$$

i djeluje tako da nastoji dipol postaviti u smjeru vanjskog polja $\vec{E}(\bar{r})$.

Vektor $\vec{M}$ koji je prema oznakama smjerova kao na slici 2.48 orijentiran okomito u ravninu papira, ima iznos:

$$M = pE \sin \beta = -pE \sin \alpha = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (2.255)$$

odakle se dobiva energija dipola u vanjskom polju:

$$W = pE \int \sin \alpha d\alpha + C = -pE \cos \alpha + C. \quad (2.256)$$

Uzet će se da je za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ energija jednaka nuli pa je i integracijska konstanta $C = 0$.

Energija dipola u polju $\vec{E}(\vec{r})$ je dakle:

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p}\vec{E}. \quad (2.257)$$

Sila na dipol je:

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p}\vec{E}) = (\vec{p}\nabla)\vec{E}. \quad (2.258)$$

Dokaz proizlazi iz činjenice da je:

$$\nabla(\vec{p}\vec{E}) = (\vec{p}\nabla)\vec{E} + \underbrace{(\vec{E}\nabla)\vec{p}}_0 + \underbrace{\vec{p} \times (\vec{E} \times \nabla)}_0 + \underbrace{\vec{E} \times (\nabla \times \vec{p})}_0 = (\vec{p}\nabla)\vec{E}. \quad (2.259)$$

U vanjskom električnom polju sila na dipol djeluje uvijek u smjeru najjačeg vanjskog polja $\vec{E}(\vec{r})$. U općem slučaju nehomogenog vanjskog polja zakretni moment će dipol zakretati u smjeru polja, a sila prema (2.258) će ga istodobno translirati u područje najjačeg polja.

Ukoliko je jedan dipol smješten u ishodištu ($\vec{p}_1$) a drugi se nalazi na udaljenosti $\vec{r}$, tad je uzajamna energija dvaju dipola:

$$W = -\vec{p}_2\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r})}{r^5} \right]. \quad (2.260)$$

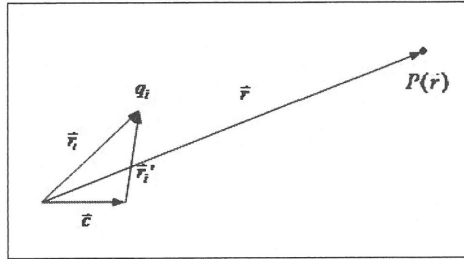
2.3.12 Polje mnoštva dipola

Promatra li se skupina točkastih naboja oko ishodišta za koju vrijedi da je: $\sum_{i=1}^n q_i = 0$, može se definirati dipolni moment kao:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i. \quad (2.261)$$

Ovo je definicija dipolnog momenta mnoštva dipola. Ovakva se situacija, između ostalog, može pojaviti i u običnoj praksi. Naime, i čestice prašine se mogu polarizirati pod utjecajem vanjskog električnog polja.

Tako, u elektrostatičkim filtrima elektrostatičko polje djeluje u prostoru s prašinom sa svrhom njenog odstranjivanja. Gomilanje čestica prašine na površinama uređaja i postrojenja također se odvija pod utjecajem polarizacije izazavne vanjskim poljem.



Slika 2.49 Uz mnoštvo dipola

Definicija dipolnog momenta prema (2.261) u slučaju dva naboja q i $-q$ daje izraz za ranije definirani dipolni moment jednog dipola.

Ako se sad promijeni ishodište, (slika 2.49) vrijedi:

$$\vec{r}_i - \vec{r}'_i = \vec{c}, \quad \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{c}, \quad (2.262)$$

pa je:

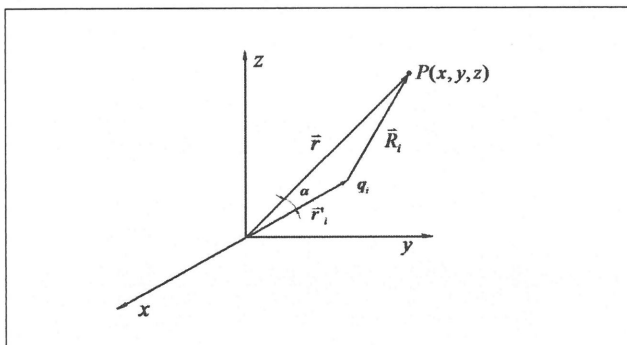
$$\vec{p}' = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i - \vec{c} \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i = \vec{p}. \quad (2.263)$$

što znači da ukupni dipolni moment ne ovisi o redefiniciji (ishodišta) koordinatnog sustava. Uz takve definicije potencijal od jednog naboja (q_i) u vakuumu u blizini ishodišta iznosi:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R_i}, \quad (2.264)$$

gdje su (slika 2.50):

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i \text{ te } R_i^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha. \quad (2.265)$$



Slika 2.50 Uz izvod potencijala mnoštva dipola

Dalje se može pisati:

$$R_i^2 = r^2 \left[1 - \frac{2\bar{r}\bar{r}_i'}{r^2} + \left(\frac{r_i'}{r} \right)^2 \right] \cong r^2 \left(1 - \frac{2\bar{r}\bar{r}_i'}{r^2} \right), \quad (2.266)$$

pa je:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\bar{r}\bar{r}_i'}{r^2}}} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\bar{r}\bar{r}_i'}{r^2} \right). \quad (2.267)$$

Sad je potencijal i -tog naboja:

$$\varphi_i(\bar{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{r}\bar{r}_i'}{r^3} \right), \quad (2.268)$$

a svih n naboja je:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sum q_i}{r} + \frac{\sum \bar{r}\bar{r}_i' q_i}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sum q_i}{r} + \frac{\sum \bar{r}\bar{p}_i}{r^3} \right) \quad (2.269)$$

što se može shvatiti i kao:

$$\varphi(\bar{r}) = \varphi_1(\bar{r}) + \varphi_2(\bar{r}) \quad (2.270)$$

pri čemu su:

$$\varphi_1(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2.271)$$

$$\varphi_2(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^n \bar{r}\bar{p}_i. \quad (2.272)$$

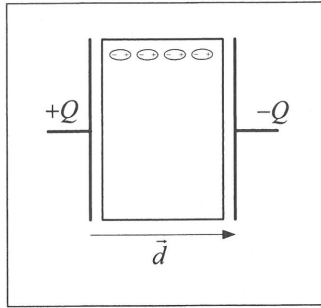
Dakle, potencijal oblaka naboja oko ishodišta u prvom je približenju jednak potencijalu ukupnog naboja smještenog u ishodištu (2.271), a u drugom približenju ovom treba pribrojiti i potencijal mnoštva dipola (za $\sum q_i = 0$, a ne ovisi o koordinatama ishodišta koordinatnog sustava, 2.272).

2.3.13 Polarizacija (vektor polarizacije $\vec{P}$)

Stavi li se u pločasti kondenzator, koji se nalazi u vakuumu, između obloga (elektroda) dielektrično sredstvo, na krajevima dielektrika pojavi se plošni naboj gustoće σ_p .

Za dipolni moment tog vezanog naboja vrijedi, (slika 2.51):

$$\vec{p} = Q_p \vec{d} = \sigma_p S \vec{d}. \quad (2.273)$$



Slika 2.51 Polarizacija dielektrika

Vektor polarizacije $\vec{P}$ definira se kao dipolni moment po jedinici volumena:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sigma_p S \vec{d}}{Sd} = \sigma_p \vec{d}_0, \quad (2.274)$$

$$P = \sigma_p = \text{const.} \quad (2.275)$$

U pločastom je kondenzatoru polje približno homogeno pa je polarizacija konstantna. Općenito je, za nehomogeno polje, polarizacija funkcija koordinata:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}'). \quad (2.276)$$

Neka se sad razmotri slučaj slobodnog naboja prostorne gustoće $\rho(\vec{r}')$ i polariziranog naboja $\vec{P}(\vec{r}_i)$ - realni dielektrik (ukupni naboj slobodni + vezani, u vakuumu).

Doprinos ukupnom potencijalu sastoji se od dva dijela:

- slobodnog naboja:
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV', \quad (2.277)$$

- vezanog naboja:
$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (2.278)$$

Poznato je da je:

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} = \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right), \quad (2.279)$$

a tako:

$$\nabla' \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) = \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\nabla' \vec{P}}{R}, \quad (2.280)$$

pa je:

$$\frac{\bar{P}\bar{R}}{R^3} = \nabla' \left(\frac{\bar{P}}{R} \right) - \frac{\nabla' \bar{P}}{R}. \quad (2.281)$$

Ukupni je potencijal $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_{V'} \frac{\rho(\bar{r}')}{R} dV' + \iiint_{V'} \frac{-\nabla' \bar{P}}{R} dV' + \iiint_{V'} \nabla' \left(\frac{\bar{P}}{R} \right) dV' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_{V'} \frac{\rho - \nabla' \bar{P}}{R} dV' + \oint_{S'} \frac{\bar{P} d\bar{S}'}{R} \right]. \quad (2.282)$$

Prema tome utjecaj dielektrika je kao da se u vakuumu pojavio prostorni (vezani) naboj:

$$\rho_p = -\nabla' \bar{P}, \quad (\rho_p = 0 \text{ u homogenom polju}).$$

Jednadžba za ukupni potencijal je rješenje Poissonove jednadžbe:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = -\nabla \cdot \bar{E} = -\text{div } \bar{E}, \quad (2.283)$$

pa je:

$$\epsilon_0 \text{div } \bar{E} = \rho - \text{div } \bar{P}, \quad (2.284)$$

$$\text{div}(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho = \text{div } \bar{D}. \quad (2.285)$$

Iz jednadžbe (2.285) slijedi druga definicija vektora $\bar{D}$ (vektor dielektričnog pomaka):

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \quad (2.286)$$

odnosno:

$$\bar{D} - \bar{P} = \epsilon_0 \bar{E}. \quad (2.287)$$

Ukoliko je polarizacija proporcionalna vanjskom polju $\bar{E}$ vrijedi:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E}, \quad (2.288)$$

pa je:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} \quad (2.289)$$

odnosno:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad (2.290)$$

gdje je parametar χ_e susceptibilnost koja ukazuje na relativnu sposobnost materijala za polarizaciju, a ϵ_r je bezdimenzionalni broj i označava dielektričnost istog materijala. Gaussov zakon sad glasi:

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \iiint_{V'} \rho \, dV' \quad (2.291)$$

gdje je ρ – prostorna gustoća slobodnog naboja. Vektor poalrizacije $\vec{P}$ sad se izravno više ne vidi.

Opća veza između vektora $\vec{D}$ i $\vec{E}$ nije skalar nego tenzor (u matematičkoj formulaciji kao matrica), pa je općenito za anizotropne materijale:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (2.292)$$

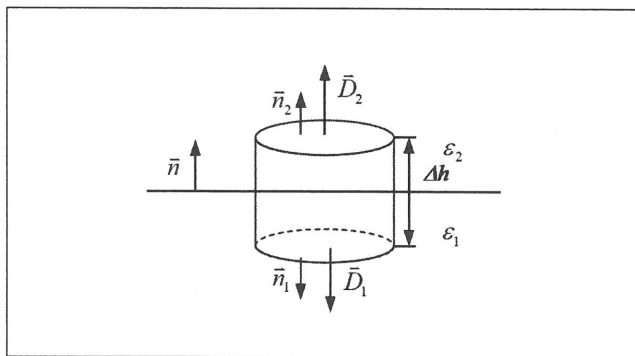
pa je svaka komponenta vektora električnog pomaka $\vec{D}$ ovisna o sve tri komponente jakosti električnog polja $\vec{E}$. To prosto znači da nema više kolinearnosti između ova dva vektora. Vrijedi da je za:

- homogeno izotropno sredstvo: $\nabla \epsilon = 0$,
- nehomogeno izotropno sredstvo: $\nabla \epsilon \neq 0$.

Tako se na primjer treba promatrati polje u kristalima. Anizotropnost je posljedica kristalne strukture materije odnosno molekularne orijentacije. Općenito anizotropnost treba uzeti u obzir samo kad je ona izražena.

2.3.14 Ponašanje vektora gustoće električnog pomaka $\vec{D}$ i jakosti elektrostatičkog polja $\vec{E}$ na granici dvaju sredstava

Primjenom Gaussovog zakona $\oint_{S'} \vec{D} d\vec{S} = \iiint_{V'} \rho dV'$ na elementarni valjak prema slici 2.52, dobiva se, kad visina valjka Δh teži k nuli.



Slika 2.52 Vektor električnog pomaka na granici dvaju sredstava

$$\begin{aligned} \vec{n} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta S' &= \sigma \Delta S' \\ \vec{n} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \sigma \end{aligned} \quad (2.293)$$

gdje je σ (slobodni) plošni naboj na granici. Ukoliko plošnog naboja nema, onda je :

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (2.294)$$

tj. normalna komponenta vektora električnog pomaka $\vec{D}$ ne mijenja se pri prijelazu iz jednog u drugo sredstvo.

Odavde se može zaključiti na ponašanje normalne komponente jakosti električnog polja na granici dvaju sredstava:

$$\begin{aligned} \vec{n} (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) &= \sigma, \\ E_{2n} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n} + \frac{\sigma}{\epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.295)$$

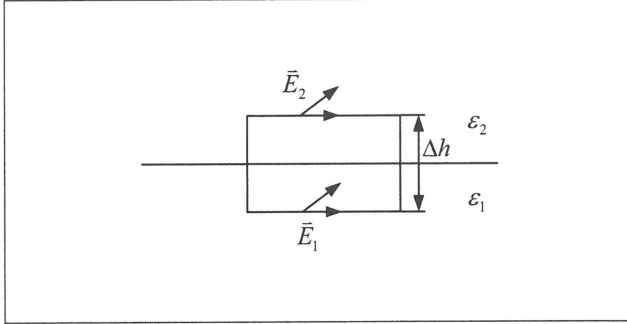
Prema (2.295) slijedi da se normalne komponente jakosti električnog polja na granici dvaju sredstava mogu skokovito promijeniti.

Uvjet za vektor $\vec{E}$ slijedi iz elementarne petlje na slici 2.53, primjenom $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ (elektrostatičko polje), kad visina petlje Δh teži k nuli (slika 2.53):

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)(-\Delta \vec{s}) = (E_{1t} - E_{2t}) \Delta s = 0, \quad (2.296)$$

odakle proizlazi neprekinutost tangencijalnih komponenti jakosti električnog polja na granici dvaju sredstava:

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (2.297)$$



Slika 2.53 Vektor jakosti električnog polja na granici dvaju sredstava

Dakle, na granici dvaju sredstava ne mijenja se tangencijalna komponenta jakosti električnog polja.

Također se odavde može zaključiti na tangencijalne komponente vektora gustoće električnog pomaka:

$$\frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1}, \quad (2.298)$$

$$D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}. \quad (2.299)$$

Iz (2.299) također slijedi da se tangencijalne komponente vektora gustoće električnog pomaka na granici dvaju sredstava mogu skokovito promijeniti.

2.3.15 Mehaničke sile u elektrostatičkom polju. Mehaničke sile na površini vodiča

Energija elektrostatičkog polja od n nabijenih vodiča je:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oiint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) \varphi(\vec{r}_i) dS_i, \quad (2.300)$$

a jednog vodiča je:

$$W = \frac{1}{2} \oiint_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS, \quad (2.301)$$

pa je energija vezana za jediničnu površinu vodiča (plošna gustoća elektrostatičke energije za jedan vodič):

$$w = \frac{1}{2} \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \quad (2.302)$$

Sila na jediničnu površinu u smjeru $\vec{s}$ je:

$$f_s = -\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2} \sigma \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2} \sigma \text{ grad } \varphi \frac{\vec{s}}{s} = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \frac{\vec{s}}{s}. \quad (2.303)$$

Vektor jakosti električnog polja na površini vodiča okomit je na površinu:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad (2.304)$$

pa je iznos jedinične sile:

$$f_n = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon}. \quad (2.305)$$

2.3.15.1 Sila i momenti na nabijene vodiče

Položaj n nabijenih vodiča određen je s m parametara a_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Parametri a_k zapravo su opće koordinate, a mogu biti dužine ili kutovi. Sila F_k neka je u smjeru a_k . Ako se parametri pod utjecajem sila (momenata) promijene s a_k na $a_k + da_k$ izvrši se rad:

$$dA = \sum_{k=1}^m F_k da_k. \quad (2.306)$$

Za izolirane vodiče, naboj ostaje konstantan, pa se rad vrši na račun energije elektrostatičkog polja odnosno:

$$dA = \sum_{k=1}^m F_k da_k = -dW, \quad (2.307)$$

pa je:

$$F_k = -\frac{\partial W}{\partial a_k}, \quad (2.308)$$

odnosno sustav nastoji smanjiti svoju energiju.
Izrazi li se energiju vodiča preko naboja:

$$W(Q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j Q_i \quad (2.309)$$

$$p_{ij} = f(a_k), \quad (2.310)$$

slijedi:

$$F_k = -\frac{\partial W(Q, p)}{\partial a_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial a_k} Q_j Q_i. \quad (2.311)$$

Ako je sustav vodiča priključen na izvore napona („neizolirani sustav“), onda potencijali ostaju konstantni, pa treba koristiti druge izraze za energiju polja:

$$W(Q, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i \quad (2.312)$$

ili:

$$W(\varphi, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i, \quad (2.313)$$

$$c_{ij} = f(a_k). \quad (2.314)$$

Da bi se odredile sile kao funkcije potencijala tvori se jednadžba:

$$K(Q, \varphi, a) = W(Q, p) + W(\varphi, c) - 2W(Q, \varphi) = 0, \quad (2.315)$$

tad je:

$$\begin{aligned} dK &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial K}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial K}{\partial \varphi_i} d\varphi_i + \sum_{k=1}^m \frac{\partial K}{\partial a_k} da_k = 0 \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j - \varphi_i}_0 + \underbrace{\sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j - Q_i}_0 + \sum_{k=1}^m \frac{\partial K}{\partial a_k} da_k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial K}{\partial a_k} da_k. \end{aligned} \quad (2.316)$$

Uz proizvoljni da_k je i:

$$\frac{\partial K}{\partial a_k} = 0. \quad (2.317)$$

Iz jednadžbe za K (2.316) slijedi:

$$\frac{\partial W(Q, p)}{\partial a_k} + \frac{\partial W(\varphi, c)}{\partial a_k} = 0 \quad (2.318)$$

odnosno:

$$\frac{\partial W(\varphi, c)}{\partial a_k} = -\frac{\partial W(Q, p)}{\partial a_k} = F_k. \quad (2.319)$$

Dakle je:

$$F_k = \frac{\partial W(\varphi, c)}{\partial a_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_{ij}}{\partial a_k} \varphi_j \varphi_i \quad (2.320)$$

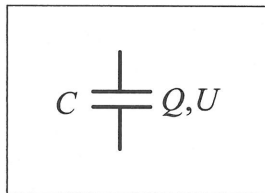
te:

$$dW(\varphi, c) = \sum_{k=1}^n F_k da_k = dA \quad (2.321)$$

pa sustav povećava energiju na račun (vanjskog) rada (energija izvora).

2.3.15.2 Primjer: Energija pločastog kondenzatora

a) Izolirani sustav, naboj konstantan



Energija pločastog kondenzatora je:

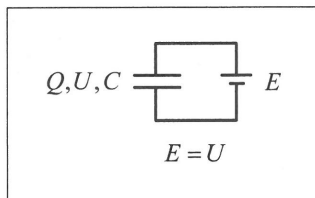
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad C = \varepsilon \frac{S}{d}, \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon S} \quad (2.322)$$

pa je sila na ploče kondenzatora:

$$F_d = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{Q^2 d}{\varepsilon S} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S}. \quad (2.323)$$

Sila je negativna. To znači da razmak između ploča, gore izračunata virtualna sila, nastoji smanjiti odnosno povećati kapacitet kondenzatora.

b) Neizolirani sustav, napon E konstantan



Iz sljedećih odnosa za slučaj neizoliranog sustava:

$$Q = CU, \quad \dots \quad (2.324)$$

i:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} U^2, \quad \dots \quad (2.325)$$

proizlazi sila na ploče kondenzatora:

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{\partial W}{\partial d} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\epsilon S}{d} U^2 \right) = -\frac{1}{2} \epsilon S U^2 \frac{1}{d^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon S}{d} U \right) \left(\frac{Q}{C} \right) \frac{1}{d} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon S d} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon S}. \end{aligned} \quad \dots \quad (2.326)$$

Ovo znači da će virtualna sila opet (i za slučaj neizoliranog sustava) nastojati povećati kapacitet kondenzatora.

2.3.16 Thomsonov teorem

Neka se opet promotri sustav n nabijenih vodiča u homogenom sredstvu dielektričnosti ε . Thomsonov teorem izriče da će se naboj rasporediti po n vodiča tako da je energija ukupnog elektrostatičkog polja minimalna.

Za dokaz teorema neka se pretpostavi da je $E(\vec{r})$ polje stvarne razdiobe naboja, a $\vec{E}(\vec{r}) + \vec{E}'(\vec{r})$, polje zbog neke druge razdiobe naboja na vodičima. Po Gaussovom je zakonu, (slika 2.54):

$$\oiint_{S_i} \vec{E} d\vec{S}_i = \frac{Q_i}{\varepsilon} = \oiint_{S_i} (\vec{E} + \vec{E}') d\vec{S}_i \quad (2.327)$$

tako da je:

$$\oiint_{S_i} \vec{E}' d\vec{S}_i = 0. \quad (2.328)$$

Postoji li naboj prostorne gustoće $\rho(\vec{r})$ diferencijalni oblik Gaussovog zakona daje:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \text{div}(\vec{E} + \vec{E}') \quad (2.329)$$

te prema (2.328) i Gaussovom zakonu slijedi:

$$\text{div } \vec{E}' = 0. \quad (2.330)$$

Neka je sad W energija polja $\vec{E}$, a $W + W'$ energija polja $\vec{E} + \vec{E}'$:

$$\begin{aligned} W' &= (W + W') - W = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon (\vec{E} + \vec{E}')(\vec{E} + \vec{E}') dV - \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon \vec{E} \vec{E} dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon (\vec{E}' \vec{E}' + 2\vec{E} \vec{E}') dV. \end{aligned} \quad (2.331)$$

U sljedećem koraku treba pokazati da je produkt $\vec{E} \vec{E}'$ jednako nuli. U tom je slučaju:

$$W' = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon \vec{E}' \vec{E}' dV > 0, \quad (2.332)$$

pa bi teorem tim bio dokazan.

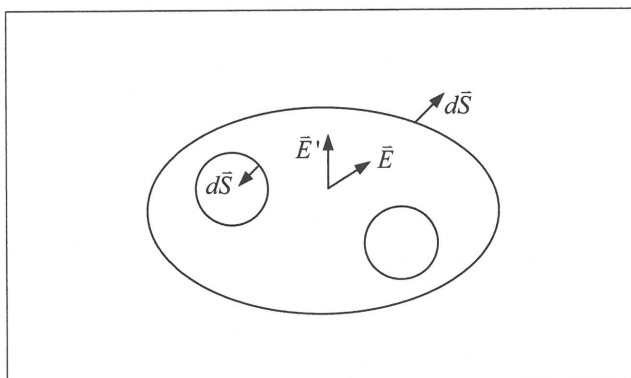
Neka je sad $\varphi(\vec{r})$ potencijal polja od $\vec{E}(\vec{r})$, pa je zbog $\nabla(\varphi \vec{E}') = \nabla\varphi \vec{E}' + \varphi \nabla\vec{E}'$ također: $\nabla\varphi \vec{E}' = \nabla(\varphi \vec{E}') - \varphi \nabla\vec{E}'$.

Zato je:

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \vec{E} \vec{E}' dV &= - \iiint_V \nabla \varphi \vec{E}' dV = \\
 &= - \iiint_V (\nabla(\varphi \vec{E}') - \varphi \nabla \vec{E}') dV = \\
 &= - \iiint_V \nabla(\varphi \vec{E}') dV.
 \end{aligned} \tag{2.333}$$

Primjena Gaussovog teorema na posljednji izraz daje:

$$\iiint_V \vec{E} \vec{E}' dV = - \oint_S \varphi \vec{E}' d\vec{S}. \tag{2.334}$$



Slika 2.54 Uz dokaz Thomsonovog teorema

Potencijal na površini vodiča je konstantan ($\varphi_i = \text{const}$) pa je prema izrazu iz uvida u ovu točku (2.328, $\oint_{S_i} \vec{E}' d\vec{S}_i = 0$), što znači da je doprinos svakog od vodiča ovom integralu nula. Također potencijal svakog konačnog sustava na plohi u beskonačnosti teži k nuli ($\varphi \rightarrow 0$, kad $\vec{r} \rightarrow \infty$) pa je konačno: $\iiint_V \vec{E} \vec{E}' dV = 0$ čime je Thomsonov teorem dokazan.

2.3.17 Naprezanje u dielektričnom sredstvu

Može se pokazati da je sila po jedinici volumena u nehomogenom izotropnom sredstvu:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E} \vec{E} \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\vec{E} \vec{E} \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right), \tag{2.335}$$

gdje je θ gustoća dielektrika. Drugi je član negativni doprinos sili zbog dielektrične nehomogenosti sredstva ($\nabla \varepsilon \neq 0$), a treći je elektrostrikcijski dio (elastična mehanička deformacija zbog primjene polja na dielektrik).

Zbog jednostavnosti neka se dalje promatra homogeno izotropno sredstvo. Tada je:

$$\vec{f} = \rho \vec{E}, \quad (2.336)$$

gdje je ρ prostorna gustoća slobodnog naboja.

Ukupna sila na volumen V je:

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f} dV. \quad (2.337)$$

Pokazat će se da se ukupna sila može izraziti putem površinskog integrala vektora plošnog naprezanja $\vec{t}$, dakle da je:

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f} dV = \oint_S \vec{t} dS. \quad (2.338)$$

Prema Gaussovom zakonu u diferencijalnom obliku za elektrostatičko polje vrijedi:

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.339)$$

te:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (2.340)$$

pa se za silu može pisati:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{E} \text{ div } \vec{D} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{D} = \\ &= \varepsilon (\vec{E} \text{ div } \vec{E} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (2.341)$$

Napiše li se dio ovog izraza u zagradi (dakle, bez ε) po komponentama, dobiva se:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) + [(\text{rot } \vec{E})_x \vec{i} + (\text{rot } \vec{E})_y \vec{j} + (\text{rot } \vec{E})_z \vec{k}] \times (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}). \quad (2.342)$$

Komponenta uz $\vec{i}$ se može dobiti iz izraza (2.342) gdje je drugi pribojnik

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (\text{rot } \vec{E})_x & (\text{rot } \vec{E})_y & (\text{rot } \vec{E})_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \text{ te da je sam rotor vektora jakosti električnog polja:}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} &= (\text{rot } \vec{E})_x \vec{i} + (\text{rot } \vec{E})_y \vec{j} + (\text{rot } \vec{E})_z \vec{k} = \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.343)$$

pa je nakon pregrupiranja:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) E_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y = \\ & = \frac{\partial E_x}{\partial x} E_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} E_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} E_z + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z), \end{aligned} \quad (2.344)$$

a kako je:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[E_x^2 - \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right] = 2E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \\ & = E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.345)$$

to je:

$$f_x = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] = \operatorname{div} \bar{T}^{(1)}, \quad (2.346)$$

a prema Gaussovom teoremu je još i:

$$\iiint_V f_x dV = \iiint_V \operatorname{div} \bar{T}^{(1)} dV = \oint_S \bar{T}^{(1)} \bar{n} dS \quad (2.347)$$

pa je:

$$\bar{T}^{(1)} = \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \bar{i} + \varepsilon (E_x E_y) \bar{j} + \varepsilon (E_x E_z) \bar{k}. \quad (2.348)$$

Slično se dobiva za ostale dvije komponente (y i z):

$$\iiint_V f_y dV = \oint_S \bar{T}^{(2)} \bar{n} dS \quad (2.349)$$

$$\iiint_V f_z dV = \oint_S \bar{T}^{(3)} \bar{n} dS, \quad (2.350)$$

gdje su $\bar{T}^{(2)}$ i $\bar{T}^{(3)}$:

$$\bar{T}^{(2)} = \varepsilon (E_x E_y) \bar{i} + \varepsilon \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \bar{j} + \varepsilon (E_y E_z) \bar{k} \quad (2.351)$$

$$\bar{T}^{(3)} = \varepsilon (E_x E_y) \bar{i} + \varepsilon (E_y E_z) \bar{j} + \varepsilon \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \bar{k}. \quad (2.352)$$

Zato je:

$$\iiint_V \vec{j} dV = \iiint_V \varepsilon (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E}) dV = \oint_S \vec{i} dS \quad (2.353)$$

$$\vec{i} = (\vec{T}^{(1)} \vec{n}) \vec{i} + (\vec{T}^{(2)} \vec{n}) \vec{j} + (\vec{T}^{(3)} \vec{n}) \vec{k} \quad (2.354)$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_x E_y & \varepsilon \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_x E_z & \varepsilon E_y E_z & \varepsilon \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (2.355)$$

odnosno:

$$\vec{i} = T \vec{n}. \quad (2.356)$$

Matrica $\vec{T}$ je matematička reprezentacija tenzora ranga odnosno reda dva, poznatog kao tenzor električnog naprezanja (vidi Matematički prilog).

Vektor $\vec{i}$ se može izraziti i kao:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \varepsilon (E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z) E_x \vec{i} + \varepsilon (E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z) E_y \vec{j} + \varepsilon (E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z) E_z \vec{k} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} E^2 (n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}) = \\ &= \varepsilon (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} E^2 \vec{n}. \end{aligned} \quad (2.357)$$

Pritom je:

$$\vec{i} = \vec{i}_1 - \vec{i}_2. \quad (2.358)$$

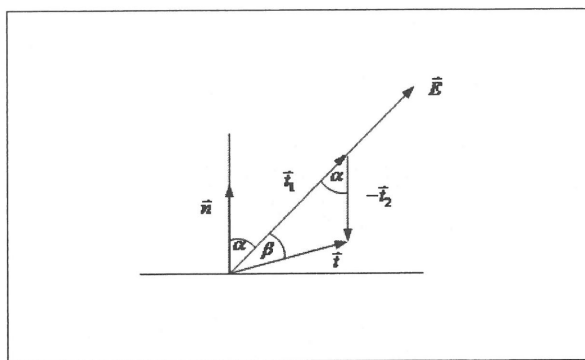
Vrijede odnosi prema slici 2.55:

$$t_1 = \varepsilon E^2 \cos \alpha, \quad (2.359)$$

i:

$$t_2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2, \quad (2.360)$$

$$t^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \cos \alpha = \varepsilon^2 E^4 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} \varepsilon^2 E^4 - 2\varepsilon E^2 \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \varepsilon^2 E^4. \quad (2.361)$$



Slika 2.55 Vektor naprezanja u elektrostatičkom polju

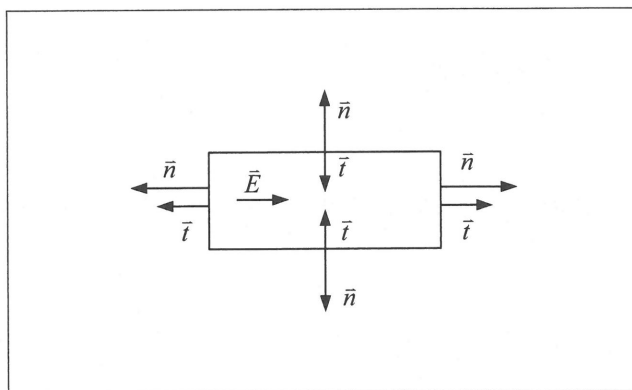
odnosno:

$$t = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = t_2 \quad (2.362)$$

pa je kut $\beta = \alpha$, odnosno vektor $\vec{E}$ raspolavlja kut između vektora $\vec{t}$ i normale $\vec{n}$ na površinu, (slika 2.55).

2.3.17.1 Primjer: silocijev s $E = \text{const}$.

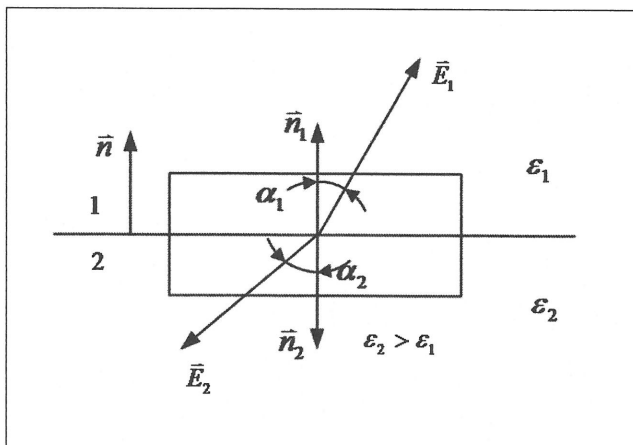
- a) ε
- b) ε_0 vakuum



Slika 2.56 Silocijev u vakuumu s $E = \text{const}$

Naznačena su naprezanja kojima okolni prostor djeluje na silocijev. Silocijev na okolni prostor djeluje suprotno – silnice se žele skratiti i raširiti, (slika 2.56).

2.3.17.2 Naprezanje na granici dvaju sredstava



Slika 2.57 Naprezanje na granici dvaju sredstava

Ukupna sila na granici dvaju sredstava je:

$$\vec{t}S = \vec{t}_1S + \vec{t}_2S, \quad (2.363)$$

a vektor ukupnog plošnog naprezanja (N/m^2) je:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{t}_1 + \vec{t}_2, \\ \vec{t} &= \varepsilon_1 \vec{E}_1 (\vec{E}_1 \vec{n}) + \varepsilon_2 \vec{E}_2 (\vec{E}_2 \vec{n}_2) - \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \vec{n}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \vec{n}_2. \end{aligned} \quad (2.364)$$

Dalje, za normale vrijedi: $\vec{n}_1 = \vec{n} = -\vec{n}_2$, (slika 2.57).

Granični uvjeti za polje, ali bez plošnog naboja na granici, su:

$$E_{t_1} = E_{t_2}, \quad \varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}, \quad (2.365)$$

$$t_n = \varepsilon_1 E_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varepsilon_2 E_2^2 \cos^2 \alpha_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \quad (2.366)$$

i:

$$t_t = \varepsilon_1 E_1^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - \varepsilon_2 E_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \quad (2.367)$$

Uz:

$$E_{t_1} = E_1 \sin \alpha_1, \quad E_{n_1} = E_1 \cos \alpha_1 \quad (2.368)$$

i:

$$E_{t_2} = E_2 \sin \alpha_2, \quad E_{n_2} = E_2 \cos \alpha_2 \quad (2.369)$$

tangencijalna je komponenta plošnog naprezanja jednaka nuli:

$$\begin{aligned} t_t &= \varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 E_{t_1} - \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 E_{t_2} = \\ &= \varepsilon_1 E_{n_1} E_{t_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} E_{t_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.370)$$

Normalna je komponenta:

$$t_n = \varepsilon_1 \underbrace{E_1^2 \cos^2 \alpha_1}_{E_{n_1}^2} - \varepsilon_2 \underbrace{E_2^2 \cos^2 \alpha_2}_{E_{n_2}^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_1 (E_{t_1}^2 + E_{n_1}^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_2 (E_{t_2}^2 + E_{n_2}^2) \quad (2.371)$$

ili:

$$t_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{n_1}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_{n_2}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{t_1}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_{t_2}^2 \quad (2.372)$$

$$t_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{n_1}^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 E_{n_2}^2}{\varepsilon_1 E_{n_1}^2} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{t_1}^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \quad (2.373)$$

što poslije pregrupiranja i zamjene $E_{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n_1}$ daje:

$$t_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{t_1}^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{n_1}^2 \left[1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n_1} \right)^2}{E_{n_1}^2} \right] \quad (2.374)$$

odnosno:

$$t_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{t_1}^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_{n_1}^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \quad (2.375)$$

ili općenito:

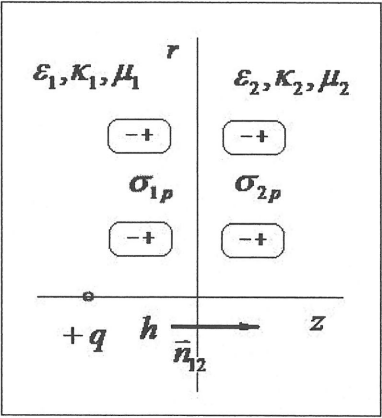
$$t_n = f \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right). \quad (2.376)$$

Posebice je za $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$: $t_n > 0$.

Općenito, naprezanje je usmjereno iz prostora veće dielektričnosti u prostor manje dielektričnosti i ima samo normalnu komponentu (tlak).

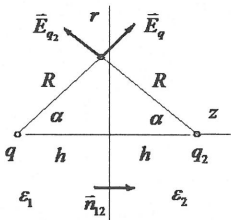
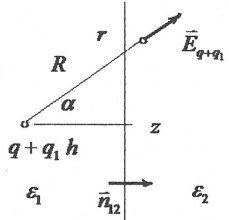
2.3.18 Odslikavanje na dielektričnoj ravnini

Ako se pozitivni točkasti naboj q nalazi u sredstvu 1 ($\epsilon_1, \kappa_1, \mu_1$) na udaljenosti h od granice dvaju dielektrika, na granici je ukupna plošna gustoća naboja polarizacije $\sigma_p = \sigma_{1p} + \sigma_{2p}$, čiji predznak ovisi o kvocijentu ϵ_1 / ϵ_2 .



Slika 2.58 Odslikavanje na dielektričnoj ravnini

Za vrijednosti kvocijenta dielektričnosti $\epsilon_1 / \epsilon_2 > 1$ ukupna plošna gustoća vezanog naboja σ_p je pozitivna, a za $\epsilon_1 / \epsilon_2 < 1$ je negativna, [3], [11]. Za proračun polja u sredstvu 1 može se pretpostaviti da se taj naboj može zamijeniti točkastim nabojem q_2 . Analogno tom, za proračun polja u sredstvu 2 ($\epsilon_2, \kappa_2, \mu_2$) naboj q_2 odslikava se u naboj q_1 . Dakle, za proračun jakosti električnog polja u jednom i u drugom sredstvu mjerodavni su naboji kao što je prikazano na slici 2.59.

a) Naboji mjerodavni za jakost električnog polje u sredstvu 1	a) Naboji mjerodavni za jakost električnog polja u sredstvu 2
	

Slika 2.59 Jakost polja u sredstvu 1 određena je nabojima q i q_2 , a u sredstvu 2 nabojima q i q_1

2.3.18.1 Polje u sredstvu 1

Polje u sredstvu 1 određuju naboji q i q_2 (slika 2.59, lijevo). Jakost električnog polja je jednaka:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_q + \vec{E}_{q_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 R^2} (\vec{a}_z \cos \alpha + \vec{a}_r \sin \alpha) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_1 R^2} (-\vec{a}_z \cos \alpha + \vec{a}_r \sin \alpha) \quad (2.377)$$

odnosno:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1 R^2} [(q - q_2)\vec{a}_z \cos \alpha + (q + q_2)\vec{a}_r \sin \alpha]. \quad (2.378)$$

2.3.18.2 Polje u sredstvu 2

Polje u sredstvu 2 određuje zbroj naboja $(q + q_1)$, (slika 2.59, desno):

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{q+q_1} = \frac{q + q_1}{4\pi\epsilon_2 R^2} (\vec{a}_z \cos \alpha + \vec{a}_r \sin \alpha). \quad (2.379)$$

Na granici dvaju sredstava moraju vrijediti granični uvjeti za:

a) *Tangencijalnu komponentu jakosti električnog polja $\vec{E}$ (članovi uz $\sin \alpha$)*

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{a}_z \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.380)$$

odnosno:

$$\frac{q + q_2}{4\pi\epsilon_1 R^2} \sin \alpha = \frac{q + q_1}{4\pi\epsilon_2 R^2} \sin \alpha \quad (2.381)$$

i:

b) *Normalnu komponentu vektora gustoće $\vec{D}$ (članovi uz $\cos \alpha$):*

$$\vec{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \vec{a}_z (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma = 0, \quad (2.382)$$

odnosno:

$$\frac{q - q_2}{4\pi R^2} \cos \alpha = \frac{q + q_1}{4\pi R^2} \cos \alpha. \quad (2.383)$$

Iz jednadžbe za tangencijalne komponente jakosti električnog polja (2.381) slijedi:

$$\frac{q + q_2}{\epsilon_1} = \frac{q + q_1}{\epsilon_2}, \quad (2.384)$$

a iz druge za normalne komponente vektora gustoće električnog polja $\vec{D}$, (2.383):

$$q - q_2 = q + q_1, \quad (2.385)$$

odnosno:

$$q_1 = -q_2. \quad (2.386)$$

Uvrštenjem (2.386) u prvu jednadžbu (2.384) dobiva se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(q + q_2) &= \varepsilon_1(q - q_2), \\ q_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) &= q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ q_2 = -q_1 &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \end{aligned} \quad (2.387)$$

Iznosi odslikanih naboja neovisni su o točki promatranja na granici dvaju sredstava, te je bilo opravdano uvesti model rješenja problema polarizacije kao odslikavanje u točkaste naboje.

Uzme li se da $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ dobiva se:

$$\begin{aligned} q_2 &= -q \\ q + q_1 &= 2q \end{aligned} \quad (2.388)$$

dakle isto kao odslikavanje na vodljivoj ravnini.

Za $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ bit će:

Za sredstvo 1:

$$q_2 \cong q \quad (2.389)$$

te:

$$q + q_1 \cong 0 \quad (2.390)$$

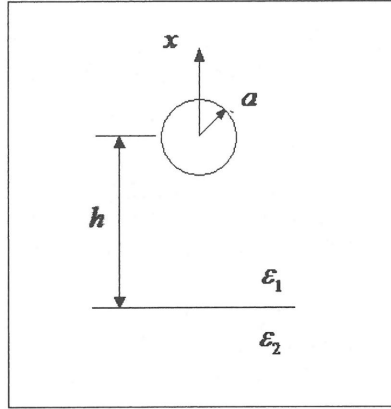
za sredstvo 2.

2.3.18.3 Primjer: Metalna kugla u sredstvu dielektričnosti ε_1 nad ravninom dielektričnosti ε_2 .

Zadan je radijus kugle $a \ll h$, gdje je h udaljenost središta kugle od ravnine s dielektričnošću ε_2 , (slika 2.60). Treba odrediti kapacitet kugle.

Polje u sredstvu 1 na osi x (za $x > a$) je:

$$E_1(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 x^2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_1 (2h+x)^2}, \quad (2.391)$$



Slika 2.60 Metalna kugla u sredstvu 1 dielektričnosti ε_1 , nad ravninom dielektričnosti ε_2

a potencijal kugle je ($k=\varepsilon_2/\varepsilon_1$) uz korištenje izraza (2.387):

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \int_a^\infty E_1(x) dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{2h+a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{2h+a} = \\ &= \frac{q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{1}{a} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{1}{2h+a} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left[\frac{1}{a} (1+k) + (1-k) \frac{1}{2h+a} \right] = \frac{q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a} \frac{2h+a+k2h+ka+a-ka}{2h+a} = \quad (2.392) \\ &= \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a} \frac{h+kh+a}{2h+a} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a} \frac{kh+kh+ka+h+a-kh-ka}{2h+a} = \\ &= \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a} \frac{k(2h+a) + (h+a)(1-k)}{2h+a} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a} \left[k + (1-k) \frac{h+a}{2h+a} \right].\end{aligned}$$

Kapacitet je sad :

$$C_1 = \frac{q}{\varphi} = \frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{h+a}{2h+a}}. \quad (2.393)$$

Primijeni li se gore izloženi izvod, tako da se umjesto s $(2h+a)$ računa s $(2h-a)$ što odgovara slučaju: ($x < a$), dobiva se vrijednost kapaciteta C_2 . C se dobiva kao srednja vrijednost tako izračunatih kapaciteta:

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{h}{2h-a}} \\ C &= \frac{C_1 + C_2}{2}.\end{aligned} \quad (2.394)$$

Za kuglu u zraku nad zemljom treba uzeti $\varepsilon_1 \cong \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 \cong \infty$.

2.3.18.4 Razdioba potencijala i jakost električnog polja u statičkom strujnom polju točkastog izvora struje

Osnovni izvodi iz prethodnih točaka u vezi s odslikavanjem u elektrostatičkom polju mogu se primijeniti na probleme odslikavanja u statičkom strujnom polju. Problem razdiobe potencijala u statičkom strujnom polju s točkastim izvorom struje rješava se jednako kao i onaj s točkastim nabojem, ali se u odgovarajućim izrazima dielektričnost ϵ mora zamijeniti sa specifičnom vodljivošću κ , a naboji sa strujama.

Dakle, struja i_2 je:

$$i_2 = -i_1 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} i. \quad (2.395)$$

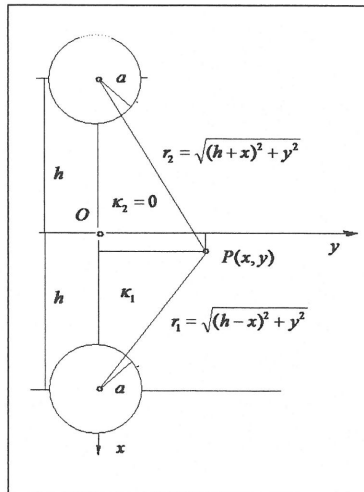
Kugla je pod površinom zemlje na udaljenosti $h \gg a$ pri čemu je, (slika 2.61):

$$\kappa_2 = 0, \quad i_2 = -i_1 = i, \quad (2.396)$$

a polje u zraku je nula.

U točki $P(x, y)$ potencijal gradi struja i i slika $i_2 = i$, analogno prema izrazu (2.144):

$$\varphi_P = \frac{i}{4\pi\kappa_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.397)$$



Slika 2.61 Kugla pod površinom zemlje

Komponente jakosti električnog polja E_x, E_y su:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi_P}{\partial x} = -\frac{i}{4\pi\kappa_1} \left(\frac{(h-x)}{r_1^{(3/2)}} - \frac{(h+x)}{r_2^{(3/2)}} \right), \quad (2.398)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi_P}{\partial y} = \frac{i}{4\pi\kappa_1} y \left(\frac{1}{r_1^{(3/2)}} + \frac{1}{r_2^{(3/2)}} \right). \quad (2.399)$$

Potencijal kugle se dobiva ako se u (2.397) uvrsti točka na površini kugle, odnosno:

$$x = h - a, \quad y = 0, \quad r_1 = a, \quad r_2 = 2h - a \quad (2.400)$$

pa je:

$$\varphi_a = \frac{i}{4\pi\kappa_1 a} + \frac{i_2}{4\pi\kappa_1 (2h - a)} = \frac{i}{4\pi\kappa_1 a} \left(1 + \frac{a}{2h - a} \right). \quad (2.401)$$

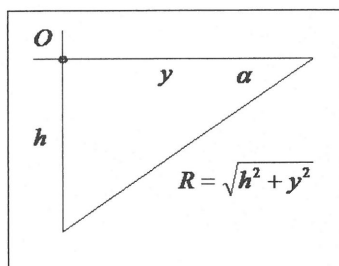
Otpor uzemljenja je kvocijent ovog potencijala i struje točkastog izvora te iznosi:

$$R_{uz} = \frac{\varphi_a}{i} = R_1 \left(1 + \frac{a}{2h - a} \right) = R_1 \frac{2h}{2h - a} \quad (2.402)$$

gdje je veličina:

$$R_1 = \frac{1}{4\pi\kappa_1 a}. \quad (2.403)$$

otpor uzemljenja bez utjecaja površine zemlje. Taj utjecaj povećava otpor uzemljenja.



Slika 2.62 Jakost električnog polja na površini zemlje

Jakost električnog polja na površini zemlje ($x = 0$) ima samo y komponentu (slika 2.62), a dobiva se tako da se u izraz (2.399) za E_y uvrsti $r_1 = r_2 = \sqrt{h^2 + y^2}$:

$$E_y = \frac{i}{4\pi\kappa_1} \frac{1}{h^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{h^2 + y^2}} 2 \quad (2.404)$$

ili:

$$E_y = \frac{i}{2\pi\kappa_1} \frac{y}{(h^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (2.405)$$

a maksimum će se naći izjednačenjem prve derivacije s nulom:

$$\frac{dE_y}{dy} = \frac{i}{2\pi\kappa_1} \frac{(h^2 + y^2)^{3/2} - y \frac{3}{2}(h^2 + y^2)^{1/2} 2y}{(h^2 + y^2)^3} = 0 \quad (2.406)$$

ili:

$$h^2 + y^2 - 3y^2 = 0, \quad h^2 = 2y^2, \quad y = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}. \quad (2.407)$$

pa je maksimalna jakost polja na površini zemlje:

$$\begin{aligned} (E_y)_{\max} &= \frac{i}{2\pi\kappa_1} \frac{\frac{h}{\sqrt{2}}}{\left(h^2 + \frac{h^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{i}{2\pi\kappa_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} h^3} = \\ &= \frac{i}{\pi\kappa_1} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{h^2} = \frac{i}{3\sqrt{3}\pi\kappa_1 h^2} \end{aligned} \quad (2.408)$$

Primjer:

Neka je konkretno:

$$i = 10 \text{ kA}, \quad h = 5 \text{ m}, \quad \kappa = 0.1 \text{ S/m}.$$

Maksimalna jakost električnog polja u točki na površini zemlje udaljene $h / \sqrt{2} = 5 / \sqrt{2} = 3.536 \text{ m}$ lijevo ili desno od okomice na zemlju iz središta kugle iznosi :

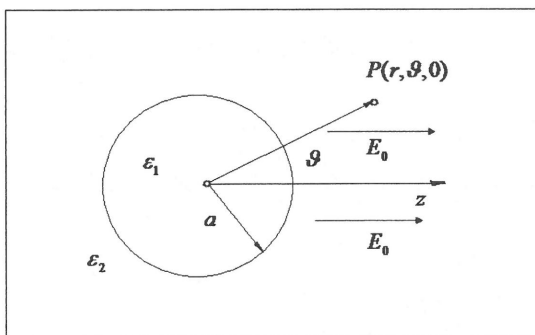
$$(E_y)_{\max} = \frac{10 \times 10^3}{3\sqrt{3}\pi \cdot 0.1 \times 5^2} \cong 245 \text{ V/m} \quad (\text{važno za napon koraka}).$$

2.3.19 Dielektrična kugla u homogenom električnom polju

Da bi se objasnio utjecaj nečistoća u dielektriku na raspodjelu polja u njemu, neka posluži primjer dielektrične kugle u homogenom električnom polju, [3]. Neka kugla ima polumjer a i dielektričnost ϵ_1 , a okolni prostor neka ima dielektričnost ϵ_2 kao što je simbolički prikazano na slici 2.63. Koordinatni sustav postaviti će se u središte kugle i primijeniti kugline koordinate. Vanjsko homogeno električno polje polarizirat će kuglu, tako da će ona postati dipol, čiji se smjer podudara sa smjerom vanjskog polja. Prema tome, nastat će polje superponirano od homogenog vanjskog polja i polja dipola te treba razlikovati prostor unutar kugle i vanjski prostor.

Potencijal u homogenom električnom polju iznosi:

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta. \quad (2.409)$$



Slika 2.63 Dielektrična kugla u vanjskom homogenom polju

gdje je E_0 jakost vanjskog homogenog električnog polja prije nego li je kugla unesena u taj prostor.

Potencijal je u prostoru izvan kugle:

$$\varphi_2 = -rE_0 \cos \vartheta + \frac{p}{4\pi\epsilon_2 r^2} \cos \vartheta, \quad r \geq a \quad (2.410)$$

gdje je p dipolni moment.

Pretpostavlja se da je u unutrašnjosti kugle polje homogeno $\vec{E}_0 + \vec{E}'_1$ i da $\vec{E}'_1$ ima isti smjer kao i $\vec{E}_0$ pa je potencijal:

$$\varphi_1 = -(E_0 + E'_1)r \cos \vartheta, \quad r \leq a. \quad (2.411)$$

Zadaća je odrediti iznose komponenti električnog polja $\vec{E}'_1$ i iznos električnog dipola (kugle) p .

Na granici sredstava trebaju biti jednake tangencijalne komponente jakosti električnog polja, a isto tako i normalne komponente vektora električnog pomaka $\vec{D}$.

To se izražava na sljedeći način :

- jednakost tangencijalnih komponenti jakosti električnog polja: $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta}\right)_{r=a}$,
- jednakost normalnih komponenti vektora električnog pomaka: $\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)_{r=a}$.

Derivacije potencijala su :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} &= +(E_0 + E'_1)r \sin \vartheta, \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} &= +E_0 r \sin \vartheta - \frac{p \sin \vartheta}{4\pi \varepsilon_2 r^2}, \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= -(E_0 + E'_1) \cos \vartheta, \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= -E_0 \cos \vartheta - \frac{p \cos \vartheta}{2\pi \varepsilon_2 r^3}.
 \end{aligned} \tag{2.412}$$

Izjednačavanje tangencijalnih komponenti jakosti polja na granici ($r=a$) daje:

$$(E_0 + E'_1)a \sin \vartheta = E_0 \sin \vartheta - \frac{p \sin \vartheta}{4\pi \varepsilon_2 a^2}, \tag{2.413}$$

a normalnih komponenti vektora električnog pomaka:

$$-\varepsilon_1(E_0 + E'_1) \cos \vartheta = -\varepsilon_2 \left(E_0 \cos \vartheta + \frac{p \cos \vartheta}{2\pi \varepsilon_2 a^3} \right). \tag{2.414}$$

Iz prve jednadžbe (2.413) nakon kraćenja sa $\sin \vartheta$ slijedi:

$$E'_1 = -\frac{p}{4\pi \alpha \varepsilon_2 a^3} \tag{2.415}$$

a iz druge (2.414) nakon kraćenja s $\cos \vartheta$ druga jednadžba glasi:

$$\varepsilon_1(E_0 + E'_1) = \varepsilon_2 \left(E_0 + \frac{p}{2\pi \varepsilon_2 a^3} \right). \tag{2.416}$$

Uzimajući u obzir izraz za E'_1 (2.415, $E'_1 = -\frac{p}{4\pi \alpha \varepsilon_2 a^3}$) dobiva se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1(E_0 + E'_1) &= \varepsilon_2(E_0 - 2E'_1), \\
 \varepsilon_1 E_0 + \varepsilon_1 E'_1 &= \varepsilon_2 E_0 - 2\varepsilon_2 E'_1,
 \end{aligned} \tag{2.417}$$

te:

$$E'_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \quad (2.418)$$

$$p = -4\pi\varepsilon_2 a^3 \left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) E_0 = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 = 3V_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \varepsilon_2 E_0$$

E'_1 i p su neovisni o točki izjednačavanja na kugli. Vektor polarizacije $\vec{P}$ u kugli određuje se na temelju njegove definicije kao iznosa dipolnog momenta po jedinici volumena:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V_0} = 3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \varepsilon_2 \vec{E}_0. \quad (2.419)$$

Za metalnu se kuglu ($\varepsilon_1 = \infty$) dobiva:

$$\vec{p} = 3\varepsilon_2 \vec{E}_0 \quad (2.420)$$

te:

$$\vec{E}'_1 = -\vec{E}_0, \quad (2.421)$$

a što je već poznato iz činjenice da je polje u kugli jednako nuli ($\vec{E}'_1 + \vec{E}_0 = 0$). Nastavlja se dalje razmatranje slučaja dielektrične kugle.

Potencijal u kugli je:

$$\varphi_1 = -(E_0 + E'_1) r \cos \vartheta = -E_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) r \cos \vartheta = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \vartheta, \quad r \leq a, \quad (2.422)$$

a izvan kugle:

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \vartheta + 4\pi\varepsilon_2 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \frac{\cos \vartheta}{4\pi\varepsilon_2 r^2} = -\left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_0 r \cos \vartheta, \quad r \geq a. \quad (2.423)$$

Jakost električnog polja unutar kugle je:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \vartheta = E_{1r}, \\ -\frac{\partial \varphi_1}{r \partial \theta} &= -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \sin \vartheta = E_{1\vartheta}, \\ E_1 &= \sqrt{E_{1r}^2 + E_{1\vartheta}^2} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \\ \vec{E}_1 &= \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{E}_0. \end{aligned} \quad (2.424)$$

Za polarizaciju vrijedi:

$$\begin{aligned} P &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E_1 \\ D_1 - P &= \varepsilon_1 E_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E_1 = \varepsilon_2 E_1, \end{aligned} \quad (2.425)$$

što je u skladu s ranije rečenim o polarizaciji.

Jakost električnog polja izvan kugle je:

$$\begin{aligned} E_{2r} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_0 \cos \vartheta, \\ E_{2\vartheta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = - \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_0 \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (2.426)$$

Na površini kugle je:

$$\begin{aligned} (E_{2r})_{r=a} &= \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \vartheta \\ (E_{2\vartheta})_{r=a} &= -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \sin \vartheta \end{aligned} \quad (2.427)$$

Pomoću izvedenih izraza može se analizirati utjecaj nečistoće u transformatorskom ulju na njegov proboj. Relativna dielektričnost transformatorskog ulja je $\varepsilon_r = 2.3$, a dielektrična čvrstoća 18 kV/mm (efektivna vrijednost). Za dopušteno naprežanje uzima se približno 4 kV/mm . Ako se u ulju nađu kuglice vode (za destiliranu vodu $\varepsilon_r = 81.1$) na površini kuglice vode približno se može uzeti da $\varepsilon_1 \Rightarrow \infty$ pa je u tom slučaju:

$$(E_2)_{r=a} \cong 3E_0 = 12 \text{ kV/mm},$$

što znači da bi se u slabijem ulju mogao dogoditi proboj.

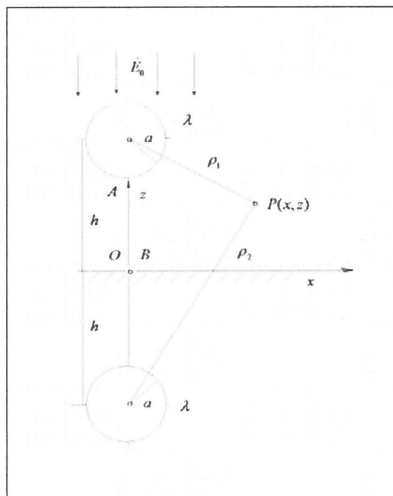
Nađu li se u ulju pak mjehurići zraka tad je polje u mjehuriću:

$$E_1 = \frac{3 \cdot 2,3}{1 + 2 \cdot 2,3} E_0 \cong 1,23 E_0 = 1,23 \cdot 4 = 4,92 \text{ kV/mm},$$

a dielektrična čvrstoća zraka, pod normalnim okolnostima, iznosi oko 3 kV/mm pa dolazi do ionizacije zraka. Pri toj ionizaciji nastaju plinovi koji nagrizažu ulje, pa može doći do probroja izolacije. Slično djeluju mjehurići zraka i u izolaciji električnih strojeva.

2.3.20 Zaštitno uže

Zemno se uže obično postavlja na vrhovima stupova koji nose dalekovod, a treba ga dobro uzemljiti, [3]. Ako se iznad dalekovoda nalazi na stanovitoj visini električno nabijeni oblak, on će prema zemlji proizvesti praktički homogeno električno polje, koje će u vodičima ispod njega inducirati naboje, pa tako i u zemnom užetu, koje se nalazi na potencijalu zemlje. Zbog toga se silnice električnog polja koncentriraju u prostoru iznad užeta, dok je polje ispod njega slabije te će vodiči, koje ono štiti, biti u slabijem polju, (slika 2.64).



Slika 2.64 Zaštitno uže

Označimo li sa z ordinatu računatu od površine zemlje, bit će potencijal u polju oblaka:

$$\varphi_0 = -\vec{E}_z \vec{z} = \vec{E}_0 \vec{z} = E_0 z, \quad (2.428)$$

gdje je E_0 jakost polja bez utjecaja dalekovoda i zemnog užeta.

Zbog induciranog naboja na užetu potencijal u točki P je:

$$\varphi_P = E_0 z - \frac{(+\lambda)}{2\pi\epsilon} \ln \rho_2 - \frac{(-\lambda)}{2\pi\epsilon} \ln \rho_1 = E_0 z + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = E_0 z - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (2.429)$$

Naboj zemnog užeta slijedi iz uvjeta da je potencijal užeta nula pri $x=0$ u točki A odnosno za $z=h-a$, $\rho_2=2h-a$, $\rho_1=a$, [3]:

$$E_0(h-a) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a}{2h-a} = E_0(h-a) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h-a}{a} = 0, \quad (2.430)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon E_0 (h-a)}{\ln \frac{2h-a}{a}} \approx \frac{2\pi\epsilon E_0 h}{\ln \frac{2h}{a}}. \quad (2.431)$$

Potencijal u točki P je dakle:

$$\varphi_p = E_0 \left[z - h \frac{\frac{\rho_2}{2h}}{\ln \frac{2h}{a}} \right] \quad (2.432)$$

Potencijal između točaka A i B je uz:

$$\rho_2 = h + z, \quad \rho_1 = h - z \quad (2.433)$$

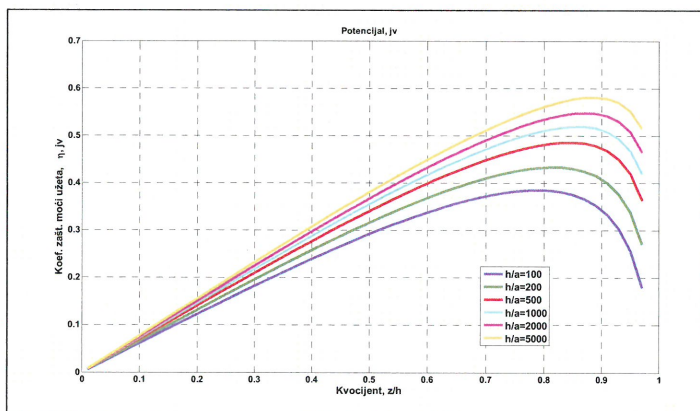
jednak:

$$\varphi = \varphi_{00} \left[\frac{z}{h} - \frac{\ln \frac{h+z}{h-z}}{\ln \frac{2h}{a}} \right] = \varphi_{00} \left[\frac{z}{h} - \frac{\ln \frac{1+z/h}{1-z/h}}{\ln(2h/a)} \right], \quad \varphi_{00} = E_0 h. \quad (2.434)$$

Neka se zaštitna moć užeta označi s η , što predstavlja relativnu razinu na koju padne potencijal (s obzirom na $\varphi_{00} = E_0 h$) pod utjecajem zemnog užeta, prema potencijalu koji postoji bez voda (i užeta) odnosno:

$$\eta = \frac{\varphi}{\varphi_{00}} = \left[\frac{z}{h} - \frac{\ln \frac{1+z/h}{1-z/h}}{\ln \frac{2h}{a}} \right]. \quad (2.435)$$

Na slici 2.65 prikazana je ovisnost $\eta = f(z/h, h/a)$ prema izrazu (2.435).



Slika 2.65 Ovisnost $\eta = f(z/h, h/a)$

Uz iste uvjete jakost električnog polja na z-osi iznosi:

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = -E_0 \left[1 - h \frac{2h}{(h-z)(h+z) \ln \frac{2h}{a}} \right] =$$

$$= -E_0 \left[1 - \frac{2h^2}{h^2(1-z^2/h^2) \ln \frac{2h}{a}} \right] = -E_0 \left[1 - \frac{2}{(1-z^2/h^2) \ln \frac{2h}{a}} \right]. \quad (2.436)$$

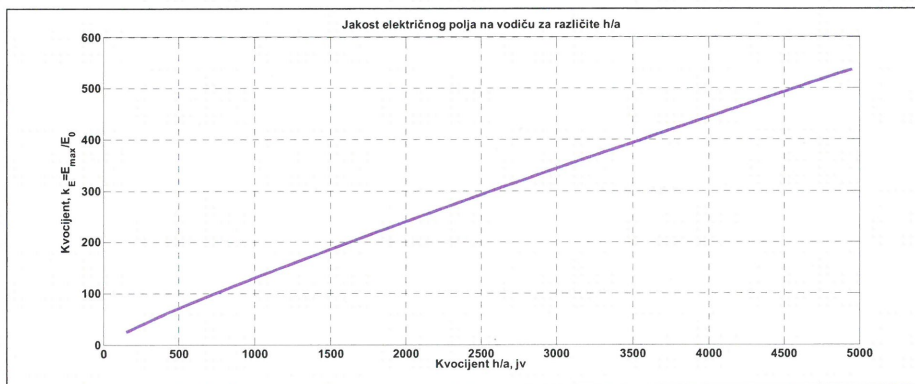
Na samom vodiču: $z = h - a$ polje je najjače pa prema (2.436) ono iznosi:

$$E_v \approx -E_0 \left[1 - \frac{h/a}{\ln \frac{2h}{a}} \right] \quad (2.437)$$

odnosno kvocijent $k_E = E_v / E_0$ kao funkcija omjera visine vodiča od zemlje i njegovog polumjera je:

$$k_E = E_v / E_0 = - \left[1 - \frac{h/a}{\ln \frac{2h}{a}} \right]. \quad (2.438)$$

Na slici 2.66 prikazana je ovisnost $k_E = E_v / E_0 = g(h/a)$ i grafički, a prema (2.438).



Slika 2.66 Ovisnost $k_E = E_v / E_0 = g(h/a)$

Tako je na primjer za $h/a = 500$, $z/h = 0.75$:

$$\eta = \frac{\varphi}{\varphi_{00}} = \left[0.75 - \frac{\ln \frac{1.75}{0.25}}{\ln(2 \cdot 500)} \right] = 0.468.$$

Ako oblak ima potencijal prema zemlji $100 \times 10^6 V$ i udaljen je od zemlje $1000m$, srednja jakost električnog polja je:

$$E_0 = \frac{U}{d} = \frac{100 \cdot 10^6}{10^3} = 100 kV/m.$$

Na visini $20m$ potencijal je:

$$\varphi_{00} = 20 \cdot 100 = 2000 kV.$$

Djelovanjem užeta, taj se potencijal smanji na:

$$\varphi_{00} \cdot \eta \cong 2000 \cdot 0.468 = 936 kV.$$

Jakost polja na zemnom užetu prema slici 2.66 (gdje je prikazano područje omjera h/a od 200 do 5000) iznosi približno:

$$E \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon a} = \frac{E_0 h}{a \ln(2h/a)} = (33 - 543) E_0.$$

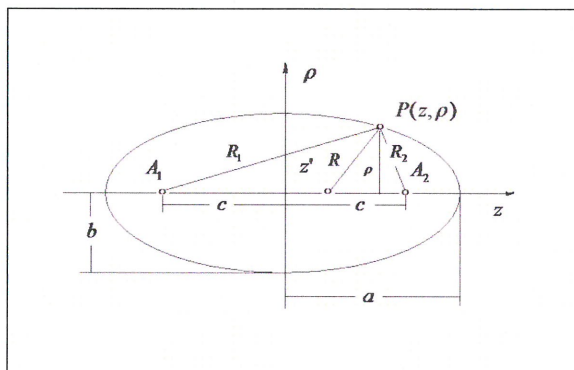
Za iznos polja $E = 100 E_0$ je:

$$E = 100 \times 100 kV/mm = 10000 kV/m = 10 kV/mm.$$

pa dolazi do izbijanja oblaka na zemno uže što i jest njegova zadaća. Naime, udarci gromova u aktivne vodiče voda se sprječavaju na način da se izboji dogode preko zaštitnog užeta.

2.3.21 Kratki linijski naboj

Kratki linijski naboj prikazan je na slici 2.67. R_1 je udaljenost od lijevog kraja, a R_2 od desnog kraja, a ρ je okomica od točke P do osi z .



Slika 2.67 Kratki linijski naboj

Prema općem izrazu za potencijal kratkog naboja prema slici 2.67 za slučaj konstantne linijske gustoće naboja ($\lambda = \text{const.}$), [3]:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-c}^c \frac{\lambda dz'}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-c}^c \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-c}^c \frac{d(z-z')}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}}, \quad (2.439)$$

nakon rješenja integrala:

$$\varphi(P) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left[z - z' + \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2} \right]_{-c}^c \quad (2.440)$$

dobiva se njegov konačni izraz:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}}{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}. \quad (2.441)$$

Ekvipotencijalne linije su elipse odnosno ekvipotencijalne plohe su rotacijski elipsoidi s osi rotacije u samom kratkom linijskom vodiču.

Dokaz:

$$\begin{aligned} A_1 P &= R_1, \quad A_2 P = R_2, \\ (z+c)^2 + \rho^2 &= R_1^2, \quad (z-c)^2 + \rho^2 = R_2^2, \\ R_1^2 - R_2^2 &= 4zc, \\ \varphi = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{z+c+R_1}{z-c+R_2} &= k. \end{aligned} \quad (2.442)$$

Dalje je prema (2.442):

$$z = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4c} \quad (2.443)$$

te:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{R_1^2 - R_2^2}{4c} + c + R_1}{\frac{R_1^2 - R_2^2}{4c} - c + R_2} &= k, \quad \frac{R_1^2 - R_2^2 + 4c^2 + 4cR_1}{R_1^2 - R_2^2 - 4c^2 + 4cR_2} = k, \\ \frac{(R_1 + 2c)^2 - R_2^2}{R_1^2 - (R_2 - 2c)^2} &= k, \quad \frac{(R_1 + 2c - R_2)(R_1 + 2c + R_2)}{(R_1 - R_2 + 2c)(R_1 + R_2 - 2c)} = k, \\ \frac{R_1 + R_2 + 2c}{R_1 + R_2 - 2c} &= k, \quad R_1 + R_2 + 2c = k(R_1 + R_2 - 2c), \\ (R_1 + R_2)(k-1) &= 2c(1+k), \quad R_1 + R_2 = 2c \frac{k+1}{k-1}. \end{aligned} \quad (2.444)$$

a to je elipsa s duljom poluosi:

$$a = c \frac{k+1}{k-1}. \quad (2.445)$$

Za elipsu vrijede odnosi među duljinama poluosi a i b te žarišnom duljinom c :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ b &= c \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - 1} = c \frac{\sqrt{k^2 + 2k + 1 - k^2 - 2k - 1}}{k-1} = c \frac{2\sqrt{k}}{k-1}. \\ b &= 2c \frac{\sqrt{k}}{k-1} \end{aligned} \quad (2.446)$$

Ako je zadana poluos a tad je:

$$\begin{aligned} a(k-1) &= c(k+1), \\ ak - a &= ck + c, \\ k(a-c) &= a+c, \\ k &= \frac{a+c}{a-c}. \end{aligned} \quad (2.447)$$

Ako je zadan potencijal za $z = a, \rho = 0$:

$$\varphi|_{(z=a, \rho=0)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{a+c}{a-c} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln k = \varphi_0, \quad (2.448)$$

tad se može izračunati naboj prema:

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon\varphi_0}{\ln k}, \quad Q = 2c\lambda. \quad (2.449)$$

Polje u smjeru osi z je prema konačnom izrazu za potencijal (2.441) kratkog naboja:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}} \frac{\left(1+\frac{(z+c)}{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}}\right)(z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2})}{(z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2})^2} + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}} \frac{(z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2})\left(1+\frac{z-c}{\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}\right)}{(z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2})^2} \end{aligned} \quad (2.450)$$

odnosno:

$$E_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(z+c)^2 + \rho^2}} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + \rho^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+c)^2 + \rho^2}} \right). \quad (2.451)$$

Za $\rho=0, z=a$:

$$\begin{aligned} E_z|_{z=a} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{(a-c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+c)^2}} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{a+c-a+c}{(a-c)(a+c)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{2c}{a^2-c^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{2c}{b^2} = \\ &= \frac{4\pi\epsilon\varphi_0}{4\pi\epsilon \ln k} \frac{2c}{b^2} = \frac{2c}{b^2 \ln \frac{a+c}{a-c}} \varphi_0, \quad (2.452) \end{aligned}$$

a za $z=0, \rho=b$:

$$E_\rho|_{\rho=b} = \frac{b}{a} (E_z)_{z=a} = \frac{2c}{ab \ln \frac{a+c}{a-c}} \varphi_0. \quad (2.453)$$

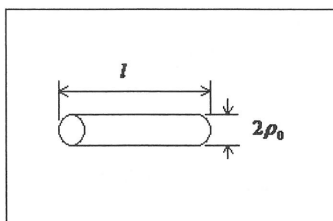
Kapacitet rotacijskog elipsoida je prema izrazima (2.448) i (2.449):

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{2c\lambda}{\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{a+c}{a-c}} = \frac{8\pi\epsilon c}{\ln \frac{a+c}{a-c}} = \frac{8\pi\epsilon \sqrt{a^2-b^2}}{\ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}}. \quad (2.454)$$

2.3.22 Degeneracije rotacijskog elipsoida

Razmotrit će se tri slučaja degeneracije rotacijskog elipsoida: kratki štap, ravna ploča i okomita štapna antena.

2.3.22.1 Kratki štap



Slika 2.68 Kratki štap

Za kratki štap (slika 2.68) geometrijski su odnosi:

$$\begin{aligned}
 a &\cong \frac{l}{2}, \quad b = \rho_0, \\
 c &= \frac{l}{2}, \quad a^2 = c^2 + b^2, \quad a = c \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_0}{l}\right)^2} = \frac{l}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\rho_0}{l}\right)^2}, \\
 a - c &= a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{l}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\rho_0}{l}\right)^2} - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\rho_0}{l}\right)^2} - 1 \right) \cong \\
 &\cong \frac{l}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\rho_0}{l} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\rho_0^2}{l}.
 \end{aligned} \tag{2.455}$$

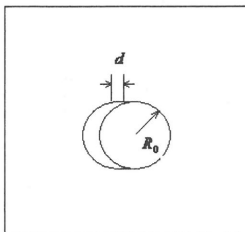
S obzirom da je još $a + c = a + \sqrt{a^2 - b^2} \approx l$ to je:

$$\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \approx \ln \left(\frac{l}{\rho_0} \right)^2 = 2 \ln \frac{l}{\rho_0} \tag{2.456}$$

pa je kapacitet prema (2.454):

$$C = \frac{4\pi\epsilon l}{2 \ln \frac{l}{\rho_0}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{l}{\rho_0}} = \frac{4\pi\epsilon c}{\ln \frac{2c}{\rho_0}}. \tag{2.457}$$

2.3.22.2 Ravna ploča polumjera R_0



Slika 2.69 Ravna ploča

Ovdje su geometrijski odnosi takvi da je, (slika 2.69):

$$a = \frac{d}{2}, \quad b = R_0, \quad R_0 \gg d, \quad (2.458)$$

Dalje slijedi:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \cong \sqrt{-b^2} = +jR_0, \quad \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \approx \ln \frac{\frac{d}{2} + jR_0}{\frac{d}{2} - jR_0}, \quad (2.459)$$

$$\frac{d}{2} + jR_0 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R_0^2} e^{j\varphi} = A e^{j\varphi}, \quad \frac{d}{2} - jR_0 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R_0^2} e^{-j\varphi} = A e^{-j\varphi}.$$

što na kraju daje:

$$\ln \frac{\frac{d}{2} + jR_0}{\frac{d}{2} - jR_0} = \ln \frac{A e^{j\varphi}}{A e^{-j\varphi}} = \ln e^{j2\varphi} = j2\varphi. \quad (2.460)$$

Za $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$:

$$\ln \frac{\frac{d}{2} + jR_0}{\frac{d}{2} - jR_0} \cong \ln(e^{j2\varphi}) = j\pi, \quad (2.461)$$

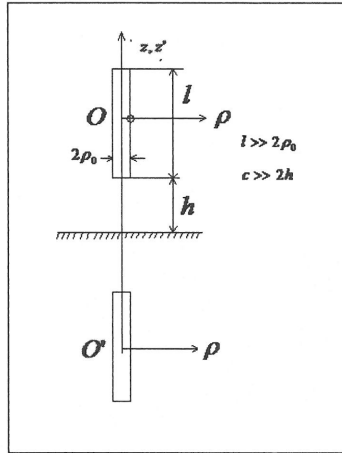
pa je kapacitet prema izrazu (2.454):

$$C \cong \frac{8\pi jR_0}{j\pi} = 8\epsilon R_0. \quad (2.462)$$

2.3.22.3 Kapacitet okomite štapne antene

Funkcija potencijala prema izrazu (2.441), a za geometrijske odnose kao na slici 2.70 je:

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z+c+\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}}{z-c+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}, \quad (2.463)$$



Slika 2.70 Okomita štapna antena

a za $z=0$ i $\rho=\rho_0$:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{c+\sqrt{c^2+\rho_0^2}}{-c+\sqrt{c^2+\rho_0^2}}, \quad (2.464)$$

$$z' = l + 2h = 2(c+h), \quad \rho = \rho_0,$$

te:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{2(c+h)+c+\sqrt{(2(c+h)+c)^2+\rho_0^2}}{2(c+h)-c+\sqrt{(2(c+h)-c)^2+\rho_0^2}} \cong \\ &\cong \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{3c+2h+3c+2h}{c+2h+c+2h} = \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{3c+2h}{c+2h}. \end{aligned} \quad (2.465)$$

Ukupni je potencijal od linijskog naboja i njegove slike:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \cong \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}}{-c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{3c + 2h}{c + 2h} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}}{-c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}} \frac{c + 2h}{3c + 2h}. \quad (2.466)$$

S obzirom da je:

$$Q = 2c\lambda = \lambda l, \quad Q = CU \quad (2.467)$$

može se računati kapacitet:

$$C = \frac{2c\lambda}{\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}}{-c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}} \frac{c + 2h}{3c + 2h}}, \quad (2.468)$$

pri čemu je uz određena zanemarenja:

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + \rho_0^2} &= c \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_0}{c}\right)^2} \cong c \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{c}\right)^2\right) = c + \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{c}, \\ \frac{c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}}{-c + \sqrt{c^2 + \rho_0^2}} \frac{c + 2h}{3c + 2h} &\cong \frac{2c}{\frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{c}} \frac{c + 2h}{3c + 2h} = \left(\frac{2c}{\rho_0}\right)^2 \frac{c + 2h}{3c + 2h} \cong \left(\frac{2c}{\rho_0}\right)^2 \frac{1}{3} = \left(\frac{2c}{\rho_0 \sqrt{3}}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.469)$$

Konačno je kapacitet štapne antene:

$$C \cong \frac{4\pi\epsilon 2c}{\ln \left(\frac{2c}{\sqrt{3}\rho_0}\right)^2} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{l}{\sqrt{3}\rho_0}}. \quad (2.470)$$



3 SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI I MAGNETSKA INDUKCIJA

3.1 UVODNI DIO

Albert Einstein (1879-1955) je 1905. objavio poznatu „Specijalnu teoriju relativnosti“ (STR). Do tad, a to je bilo više od 200 godina, za jednačbe gibanja koje je definirao Isaac Newton (1642-1727) se vjerovalo da ispravno opisuju prirodu.

II. Newtonov zakon mehanike izražava se poznatom jednačbom:

$$\vec{F} = d\left(\frac{m\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

pri čemu je $\vec{p}$ impuls ili količina gibanja.

Samo po sebi se je podrazumijevalo da je masa tijela m konstantna veličina, a danas znamo da to nije tako. Tu je pogrešku uočio Albert Einstein, ali i dao popravak na način da masa tijela raste s brzinom :

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3.2),$$

pri čemu je m_0 masa tijela u mirovanju te c brzina svjetlosti: $2.998 \cdot 10^8$ m/s.

Unošenjem izraza (3.2) u (3.1) korigira se II Newtonov zakon. S obzirom da je u običnim okolnostima brzina gibanja tijela v vrlo mala, mali je tad i porast mase s brzinom. Na primjer, satelit koji se giba s $v = 8$ km/s (prva kozmička brzina) izračun prema gornjim izrazima daje male iznose za β :

$$\beta = \frac{v}{c} \approx \frac{8}{300000} = 2.67 \cdot 10^{-5} \quad \beta^2 = 7.11 \cdot 10^{-10}$$

odnosno:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + 3.56 \cdot 10^{-10},$$

što daje relativni prirast mase satelita $\Delta m / m_0 \approx 3.56 \cdot 10^{-10}$, a to normalno nije osmotrivo.

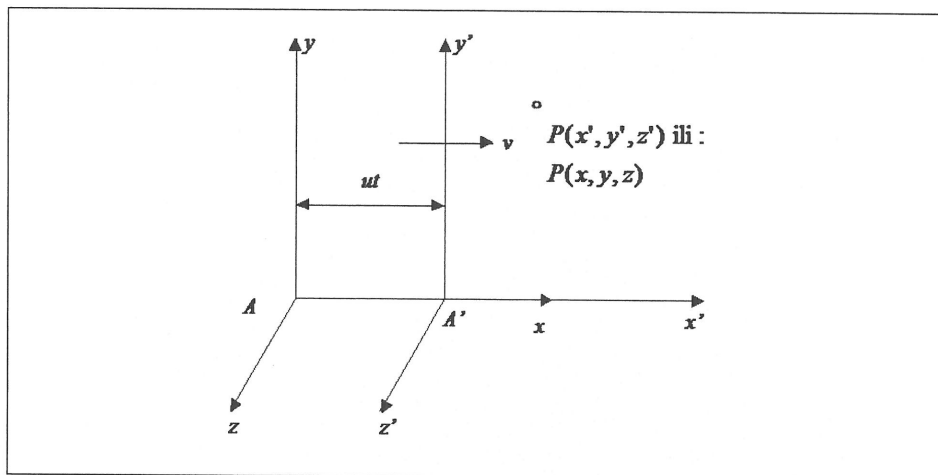
Međutim, za čestice koje se gibaju brzinama koje su značajni dio brzine svjetlosti to se mora uzeti u obzir. Valja napomenuti da je efekt u praksi potvrđen tek nakon teorijskog otkrića.

Godine 1915. Albert Einstein publicirao je i Opću teoriju relativnosti koja se bavila proširenjem STR na slučaj gravitacijskog zakona.

Prvi put je načelo relativnosti postavio Isaac Newton:

„Gibanja tijela uključenih u zadani prostor ista su za sve njih dok je taj prostor mirujući ili se giba jednoliko naprijed po ravnoj liniji.“

Na primjer, ako se svemirski brod giba jednolikom brzinom svi pokusi izvedeni u njemu i sve pojave u njemu pojavit će se na isti način kao i da se brod ne giba pri čemu se osigurava da se ne gleda van. Neka se sustav A' jednoliko giba po pravcu (slika 3.1, [4], [18]).



Slika 3.1 Dva koordinatna sustava: sustav oznake A' se giba

Sustavi A i A' u kojima vrijedi prvi Newtonov zakon (zbog jednolike relativne brzine gibanja) inercijalni su referentni sustavi.

3.1.1 Galilejeva transformacija

Galilejeve transformacije u Newtonovoj mehanici transformiraju prostorne koordinate i vrijeme iz jednog u drugi inercijalni sustav:

- put : $x' = x - ut$,
- vrijeme: $t' = t$.

Ostale veličine kao što su brzina, ubrzanje i sila transformiraju se prema:

- brzina: $v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u$,
- ubrzanje: $\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$,
- sila: $F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv'}{dt'} = F'$.

Na primjer, neka se automobil giba s brzinom u (koordinatni sistem automobila označen je s „“) za brzinu zrake svjetlosti odaslane mimo automobila bi prema Galilejevim transformacijama (deriviranjem prve gore navedene jednačbe odnosno druga jednačba) u automobilu bi bilo utvrđeno da je ta brzina mimoilazeće svjetlosti: $\frac{dx'}{dt} = v' = \frac{dx}{dt} - u = c - u$. Niti jedan pokus dosad nije pokazao da je tako.

Međutim, Lorentzove transformacije (LT):

$$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(x - u \cdot t) = \gamma(x - \beta \cdot c \cdot t), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

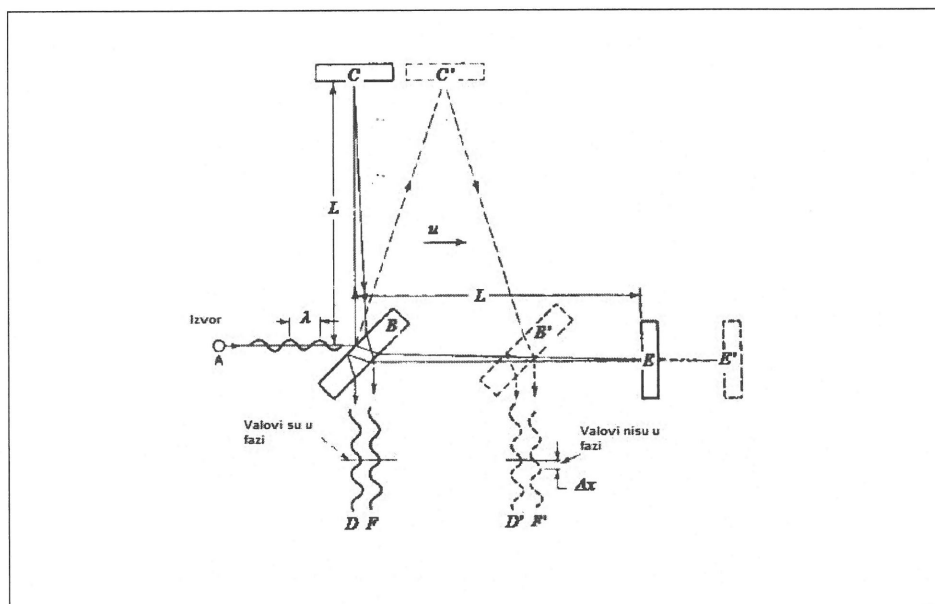
$$t' = \frac{t - \frac{u \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{u \cdot x}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta \cdot x}{c}\right) \quad (3.3)$$

uvrštena u Maxwellove jednadžbe ostavile su ih u istom obliku.

U sljedećem dijelu teksta bit će izvedene gore „ad hoc“ navedene Lorentzove transformacije.

3.1.2 Michelson - Morleyev pokus

Michelson – Morleyev pokus (1887. godine) bio je pokušaj da se odredi apsolutna brzina Zemlje kroz tzv. hipotetski eter za kojeg se pretpostavljalo da prožima cijeli prostor, [8]. Negativni rezultati eksperimenta temeljito su objašnjeni tek 18. godina poslije u već spomenutoj „Specijalnoj teoriji relativnosti“.



Slika 3.2 Michelson - Morleyev pokus

Pokus je izveden s uređajem koji je shematski grubo prikazan na slici 3.2. Sastoji se od izvora svjetla (A), djelomično posrebrene ploče B te dva zrcala C i E. Zrcala C i E su smještena na jednakim udaljenostima L od ploče B, ali pod 90 stupnjeva kao na slici. Sve je to montirano na čvrstom postolju. Ploča B rastavlja svjetlosnu zraku iz izvora u dvije međusobno okomite zrake : jedna prema zrcalu E, a drugu prema zrcalu C koje se, odbijene od zrcala (zrake D i F) vraćaju prema ploči B. Ako su trajanja puta svjetlosnih zraka od B do E (zraka D) te od B do C (zraka F) i natrag jednaka svjetlost će

se pojačati. Ako uređaj miruje u eteru vremena trajanja puta tih zraka bit će točno jednaka. Ako se, pak, uređaj giba udesno s brzinom u pojavit će se razlika u tim trajanjima. U sljedećem dijelu teksta pokazat će se zašto je to tako.

Prvo će se izračunati vrijeme potrebno da svjetlost prijeđe put od B do E (t_1) i natrag (t_2). Za vrijeme dok je svjetlost na putu od B do E uređaj je prevalio put ut_1 tako da svjetlost mora prijeći put $L+ut_1$ i to brzinom c odnosno:

$$ct_1 = L + ut_1, \quad t_1 = \frac{L}{c - u}.$$

Za vrijeme dok je ploča B s uređajem prelazi još i put ut_2 svjetlost putuje natrag, ali sad treba prevaliti put $L-ut_2$ odnosno:

$$ct_2 = L - ut_2, \quad t_2 = \frac{L}{c + u}.$$

Ukupno je vrijeme:

$$t_1 + t_2 = \frac{L}{c - u} + \frac{L}{c + u} = \frac{Lc + Lu + Lc - Lu}{c^2 - u^2} = \frac{2Lc}{c^2 - u^2} = \frac{2Lc}{c^2(1 - \frac{u^2}{c^2})} = \frac{2\frac{L}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (3.4)$$

Drugi račun načinit će se za račun trajanja puta svjetlosti od B do C . Tijekom vremena t_3 zrcalo C se pomakne na udaljenost ut_3 (C' pozicija) udesno.

U isto vrijeme svjetlost putuje po hipotenuzi BC' trokuta čije su katete $L=BC$ i $CC'=ut_3$:

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

$$L^2 = (ct_3)^2 - (ut_3)^2 = (c^2 - u^2)t_3^2$$

odnosno:

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

Treba još isto toliko za povratak pa je ukupno vrijeme $2t_3$:

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.5)$$

Neka se sad usporede vremena dviju zraka. Može se konstatirati sljedeće.

Brojnici izraza (3.4) i (3.5) su jednaki i predstavljali bi vremena putovanja zraka svjetlosti kad bi uređaj mirovao. Nazivnici nisu jednaki i predstavljaju modifikaciju vremena zbog gibanja uređaja. Prostim uvidom se vidi da nisu jednaka. Vrijeme od ploče B do zrcala C i natrag nešto je kraće od

onog vremena od ploče B do zrcala E i natrag s obzirom da je $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ nešto veće od $1 - \frac{u^2}{c^2}$ unatoč

činjenici da su zrcala čvrsto jednako udaljena od B . Naravno, iznos u^2/c^2 je mali sve dok brzina gibanja u ne postane bliska brzini svjetlosti c .

Michelson i Morley stavljali su uređaj i tako da je $B-E$ bio približno paralelno orbiti zemlje oko Sunca ($\sim 29 \text{ km/s}$), ali eterski drift zbog toga nije registriran (vremenska razlika) – brzina Zemlje kroz eter se nije mogla detektirati. Rezultat eksperimenta je bio nula.

Pokus Michelsona i Morleyja bio je vrlo zagonetan i uznemirujući. Prvu plodnu ideju izlaganja iz slijepe ulice pružio je nizozemski fizičar H. A. Lorentz (1853-1928, 1902. Nobelova nagrada za fiziku). Sugerirao je da se materijalna tijela kontrahiraju kad se gibaju, a to je **skraćenje samo u smjeru gibanja** i to tako, ako je duljina tijela u mirujućem stanju L_0 , tad je duljina $L_{||}$, duljina tijela kad se ono giba brzinom u paralelno njegovoj duljini:

$$L_{||} = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (3.6)$$

Kad se ova promjena primijeni na Michelson-Morleyev interferometar, udaljenost od B do C se ne mijenja, ali udaljenost od B do E skraćena je na $L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Stoga se izraz (3.5) ne mijenja, ali se L u (3.4) mora promijeniti u skladu s (3.6) pa kad se to načini, dobiva se:

$$t_1 + t_2 = \frac{2 \frac{L}{c} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2 \frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2t_3. \quad (3.7)$$

Tako je pretpostavka kontrakcije uspješno objasnila zašto Michelson-Morleyev pokus nije polučio traženi efekt. I u drugim pokusima traženja 'eterskog vjetera' pojavile su se slične poteškoće, a francuski matematičar i fizičar J. H. Poincare (1854-1912) je predložio da postoji takav zakon prirode da nije moguće otkriti 'eterski vjetar' bilo kojim pokusom, tj. nema načina da se odredi apsolutna brzina. Provjeravajući je li ideja kontrakcije u skladu s činjenicama u drugim pokusima izašlo je na vidjelo da je sve korektno ako se i vrijeme modificira na način kako je to načinjeno u izrazu (3.3). Na primjer, s obzirom da vrijeme t_3 za put $B-C$ i natrag nije isto kada ga računa osoba u putujućem brodu koji izvodi pokus i kada ga računa mirujući promatrač svemirskog broda.

Za čovjeka u brodu vrijeme je jednostavno $2L/c$, ali za mirujućeg promatrača to je $(2L/c)/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Znači kad vanjski promatrač vidi čovjeka u brodu da pali cigaretu sve aktivnosti se čine sporije nego normalno; dok za čovjeka u brodu sve se odvija normalnom brzinom. Tako, ne samo da se udaljenosti moraju skratiti nego se također satovi moraju prividno usporiti. Tako, kad sat u brodu zabilježi da je istekla $1s$ kao što to vidi čovjek u brodu, a za (mirujućeg) čovjeka izvana pokazuje $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ sekundi (više nego putnik u brodu). Ovo usporeenje satova u gibajućem sustavu vrlo je zagonetna pojava, a dalje slijedi objašnjenje. Da bi se ovo shvatilo mora se promotriti mehanizam sata kad se on giba. Pokazalo se da se svi prividno usporavaju (svi satovi, otkucaji srca i slično). Interesantan je primjer dezintegracije μ mezona koji umjesto $2.2 \cdot 10^{-6} s$ dočekaju i $5 \cdot 10^{-6} s$.

Tako se sad za sliku 3.1 može reći sljedeće: putnik u gibajućem sustavu A' utvrdi mjerenjem x' metara, a promatrač A u mirujućem sustavu tvrdi da je A' izmjerio $x'/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ metara. Tad, ako je sustav A' udaljen ut od sustava A , promatrač A bi rekao da je ista točka mjerena u njegovim koordinatama na udaljenosti $x = x'\sqrt{1 - u^2/c^2} + ut$ ili:

$$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.8)$$

što je prva jednačba Lorentzove transformacije (3.3).

3.1.2.1 Istodobnost

Vrijeme t' u gibajućem (A') sustavu i vrijeme t u mirujućem sustavu (A) odnose se kao:

$$t' = \frac{t - \frac{u \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.9)$$

Ako se pažljivo pogleda situacija na slici 3.1 vidi se da se događaji koji se pojave na dva različita mjesta u isto vrijeme kako vidi promatrač A' u gibajućem brodu, ne događaju istovremeno i za promatrača A u mirujućem sustavu.

Ako se jedan događaj dogodi u poziciji x_1 u trenutku t_0 , a drugi događaj u poziciji x_2 u t_0 , nalazi se da su odgovarajući trenuci t'_1 i t'_2 koji se razlikuju za:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{u(x_1 - x_2)}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.10)$$

Ova se okolnost zove 'otkaz istovremenosti na daljinu'. Neka se sad ova uvodna razmatranja sistematiziraju!

3.2 LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Trajniji zaključak Michelson-Morleyevog pokusa sastojao se u tom da je brzina svjetlosti relativno prema Zemlji neovisna o smjeru njenog prostiranja, [4].

Specijalna teorija relativnosti utemeljena je na dva postulata:

1. Načelo relativnosti jednolikog gibanja:

Fizikalni zakoni ili matematičke jednačbe koje ih definiraju imaju isti oblik u svim Cartezijevim koordinatnim sustavima koji imaju jednoliko translatorno gibanje jedan prema drugom (već spomenuti inercijalni referentni sustavi).

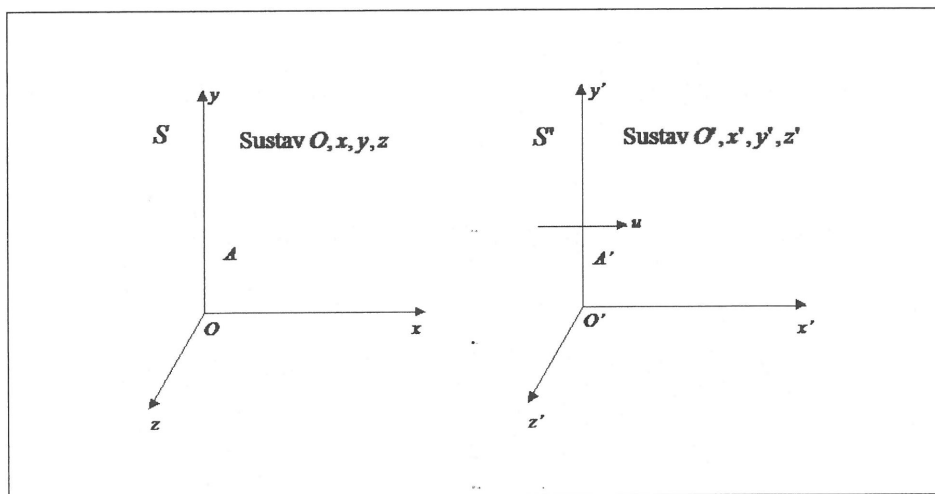
2. Načelo konstantnosti brzine svjetlosti:

Brzina svjetlosti u vakuumu u bilo kojem referentnom (inercijalnom) sustavu neovisna je o brzini izvora.

Posljedica prvog načela je da promatrač u proizvoljnom koordinatnom sustavu ne može detektirati gibanje sustava bilo kakvim promatranjem unutar sustava.

Kombinacija postulata 2 i 1 daje rezultat da je brzina svjetlosti u vakuumu neovisna o relativnoj brzini izvora i promatrača. U narednom će se izlaganju iznijeti neke dodatne implikacije ovih postulata.

Neka se ponovi slika 3.1 na sličan način: – promatrač A nalazi se u sustavu $S(Oxyz)$, a promatrač A' u sustavu $S'(O'x'y'z')$ s tim da se promatrač A' giba u smjeru osi x s brzinom u (dakle: $u_x=u$, $u_y=0$, $u_z=0$) relativno na A , (slika 3.3).



Slika 3.3 Dva koordinatna sustava: sustav oznake S' se giba s brzinom u prema sustavu S

Osi x i x' koincidiraju. U trenutku $t=t'$ dva se ishodišta poklapaju i u tom trenutku svjetlosni impuls napušta zajedničko ishodište. Navedeni postulati zahtijevaju da promatrači A i A' opažaju sferni val koji divergira od zajedničkog ishodišta s brzinom c (brzina svjetlosti u vakuumu). U bilo kojem trenutku $t>0$ promatrač A opaža sferni val čija je fronta zadana s:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (3.11)$$

a promatrač A' valnu frontu:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

što znači da (3.11) ne ovisi ni o kakvim transformacijama (pa ni Lorentzovoj, tj. desna je strana uvijek jednaka nuli).

Pa ako se pretpostavi da je za ostale dvije koordinate $y=y'$, $z=z'$, izraz (3.11) će biti zadovoljen ako je:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad (3.12)$$

Za promatrača A ishodište O' ima koordinate:

$$x=ut \quad y=0, \quad z=0 \quad \text{u trenutku } t.$$

Za promatrača A' ishodište O ima koordinate:

$$x' = -u \cdot t' \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \text{u trenutku } t'.$$

Relacije koje opisuju međusobni odnos (simetrije) dvaju promatrača najjednostavnije bi se mogle napisati kao:

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (3.13.1)$$

$$x = \gamma'(x' - ut') \quad (3.13.2)$$

Pritom se veličine γ i γ' moraju tek odrediti.

Uvrsti li se izraz (3.13.1) u (3.13.2):

$x = \gamma'[\gamma(x - ut) + ut']$, a odatle je:

$$t' = \gamma \left[t - \frac{x}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Sad se (3.13.1) i (3.14) uvrste u (3.12) na desnu stranu pa pošto se zamijene strane tako dobivenog izraza dobiva se sređeno redom po x^2 , xt i t^2 :

$$\left[\gamma^2 - \frac{\gamma^2 c^2}{u^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right)^2 \right] x^2 + \left[\frac{2\gamma^2 c^2}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right) - 2u\gamma^2 \right] xt + (\gamma^2 u^2 - \gamma^2 c^2) t^2 = x^2 - c^2 t^2. \quad (3.12.1)$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivaju se sljedeći izrazi:

$$\gamma^2 - \frac{\gamma^2 c^2}{u^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right)^2 = 1 \quad (3.15)$$

$$\frac{2\gamma^2 c^2}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right) - 2u\gamma^2 = 0 \quad (3.16)$$

$$\gamma^2 u^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2. \quad (3.17)$$

Iz (3.17) je odmah:

$$\gamma^2 (c^2 - u^2) = c^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.18)$$

pri čemu je: $\beta = \frac{u}{c}$.

Iz (3.16) nakon kraćenja s $2\gamma^2$ dobiva se:

$$1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} = \frac{u^2}{c^2} \quad (3.19)$$

odakle se dobiva:

$$\frac{1}{\gamma\gamma'} = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \quad (3.20)$$

ili konačno:

$$\gamma = \gamma'. \quad (3.21)$$

Iz (3.15) se dobiva isto što iz (3.17)!

3.2.1 Transformacije vremena

Vratimo se na izraz (3.14) za t' .

Uvrste li se izrazi (3.18), (3.19) i (3.21) za γ i γ' u (3.14) dobiva se izraz za t' :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left[t - \frac{x}{u} \cdot \frac{u^2}{c^2} \right] = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right) = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right). \quad (3.22)$$

Izraz za t dobit će se na sličan način, ali sad uvrštenjem izraza (3.13.2) u (3.13.1). Nakon sljedećih relativno laganih zamjena i grupiranja:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma[\gamma'(x' - ut') - ut] \\ \gamma ut &= \gamma^2(x' + ut') - x' = x'(\gamma^2 - 1) + \gamma^2 ut' \\ \gamma^2 - 1 &= \frac{u^2}{c^2} \gamma^2, \\ ut &= \gamma x' \frac{u^2}{c^2} + \gamma ut' \\ t &= \gamma x' \frac{u}{c^2} + \gamma t' \end{aligned} \quad (3.23)$$

dobit će se konačno izraz za t :

$$t = \gamma \left(t' + x' \cdot \frac{u}{c^2} \right) = \frac{t' + x' \cdot \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \left(t' + x' \cdot \frac{\beta}{c} \right). \quad (3.24)$$

3.2.2 Transformacija duljine štapa i vremenskog intervala

Štap se giba duž x osi. U danom trenutku kojeg je odredio promatrač A u sustavu S , promatrač A' u sustavu S' bilježi pozicije krajeva štapa: $x'(1)$ i $x'(2)$. S obzirom da je A' u „mirovanju“ u odnosu na S' on utvrđuje da je, [4]:

$$L_0 = x'(1) - x'(2). \quad (3.25)$$

Da bi promatrač A u S znao duljinu štapa koji se giba u odnosu na njega s brzinom u mora transformirati pozicije štapa iz S' $x'(1)$ i $x'(2)$ pomoću izraza (3.13.1, $t(2)=t(1)$, tj. oba se kraja štapa istovremeno mjere što je u posljednje vrijeme prilično prijeporno u četverodimenzionalnoj (4D) geometriji Minkowskog s obzirom da se vremenska komponenta dosljedno ne transformira, a proizašla kontrakcija duljine naziva se prividnom):

$$L_0 = \gamma[x(1) - ut(1)] - \gamma[x(1) - ut(2)] = \gamma[x(1) - x(2)], \quad (3.26)$$

Znači njegovu je duljinu promatrač A u sustavu S izmjerio kao:

$$\begin{aligned} L &= x(1) - x(2) = \frac{L_0}{\gamma} = \\ &= L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Promatrač A u sustavu S nalazi da je $L < L_0$!
Pripadni je naziv u literaturi „kontrakcija duljine“

Neka promatrač A' iz dane točke u gibajućem sustavu S' (gibajućem u odnosu na S , promatrač A) pošalje dva signala u trenucima t'_1 i t'_2 prema A . Taj vremenski interval promatrač A' mjeri kao:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2.$$

Odgovarajući interval u mirujućem sustavu S određuje se prema izrazu (3.24) tako ako se za svaki od trenutaka t'_1 i t'_2 transformira u mirujući sustav S odnosno:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \gamma \left(t'_1 + x' \frac{u}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_2 + x' \frac{u}{c^2} \right) = \gamma(t'_1 - t'_2) = \gamma \Delta t' \quad (3.28)$$

Promatrač A u sustavu S nalazi da je vremenski interval Δt dulji γ puta od $\Delta t'$!
Pripadni je naziv u literaturi „dilatacija vremena“

3.2.3 Prostor Hermanna Minkowskog

Sljedeći specijalnu teoriju relativnosti, Minkowski (Hermann Minkowski, njemački matematičar, 1864. – 1909.) je uveo 4D prostor s vremenskim i geometrijskim komponentama na sljedeći način. Za određeni događaj vrijeme i prostor ne postoje kao posebice odvojene veličine jedne od drugih. Događaju se pridružuju četiri koordinate vremenska ct (koja govori o tom kad se događaj odigrao) te prostorne: x , y i z (koje govore o tom gdje se događaj odigrao).

Kvadrat prostorno-vremenske duljine između dva događaja A i B po Minkovskom je:

$$l_{AB}^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2. \quad (3.29)$$

S obzirom na predznak „-“, u gornjem izrazu geometrije nije euklidska (naziva se „pseudoeuklidska“). Za naš slučaj relativnih položaja sustava S i S' kao na slikama 3.1 odnosno 3.3 koordinate jednog te istog događaja povezane su s već izloženim Lorentzovim transformacijama. Netom definirani kvadrat prostorno-vremenske duljine za taj događaj se ne mijenja bez obzira na izbor sustava što se može utvrditi izračunom razlike kvadrata u sustavu S' pomoću veličina izraženih u sustavu S :

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 (ct - u/cx)^2 - \gamma^2 (x - (u/c)ct)^2 = \\ &= c^2 t^2 - x^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

dakle neovisan je o Lorentzovim transformacijama pri čemu su ostale dvije koordinate jednake ($y'=y$, $z'=z$). Od ove se pretpostavke krenulo u Lorentzove transformacije na početku ovog teksta (izraz 3.12).

3.2.4 Slaganje brzina

Neka tijelo u gibajućem sustavu S' ima brzinu:

$v'_x = \frac{dx'}{dt'}$, a brzinu koju mjeri promatrač A u sustavu S može se odrediti na sljedeći način. Iz izraza (3.13.2) za diferencijal puta dx u sustavu S slijedi:

$$dx = \gamma(dx' + udt'), \quad (3.31)$$

a prema (3.24) diferencijal vremena dt u sustavu S je:

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2} dx'\right) = \gamma\left(dt' + \frac{b}{c} dx'\right) = \gamma\left(dt' + \frac{b}{c} \frac{dx'}{dt'} dt'\right) = \gamma(1 + \beta\beta') dt'. \quad (3.32)$$

Diobom (3.31) i (3.32) dobiva se:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + udt')}{\gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2} dx'\right)} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'}, \quad (3.33)$$

a nakon diobe i brojnika i nazivnika u gornjem izrazu s dt' dobiva se:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}}. \quad (3.34)$$

Iako je $y=y'$, a tim i $dy=dy'$ ne slijedi da je i: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}$ zbog različitih vremenskih skala u sustavima S i S' . Neka se to i pokaže. S obzirom da je:

$$dy=dy' \text{ i } dt = \gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2} dx'\right) \quad (3.35)$$

diobom dy i dt dobiva se y komponenta brzine u sustavu S , v_y :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2} dx'\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}\right)} = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}\right)}. \quad (3.36)$$

Slično se dobiva i z komponenta brzine u sustavu S :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}\right)} \quad (3.37)$$

Iz izraza (3.34) lako se utvrđuje da je c gornja granica mogućih brzina. Na primjer, neka se u sustavu pošalje zraka svjetlosti ($v_x' = c$), a i sam se sustav S' prema sustavu S giba s brzinom svjetlosti c , promatrač A u mirujućem će sustavu S utvrditi da je brzina v_x :

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{2c^2}{2c^2} = c. \quad (3.38)$$

Dakle v_x također je jednaka brzini svjetlosti c što je moguće samo uz određenu deformaciju prostorno-vremenskog kontinuuma.

3.2.5 Varijacija mase s brzinom

Neka se dvije jednake mase m s brzinama v_x' i $-v_x'$ u gibajućem sustavu S' , a što ujedno znači da je i:

$$mv_x' - mv_x' = 0. \quad (3.39)$$

Njihove brzine u mirujućem sustavu S su v_{x1} i v_{x2} , a mase m_1 i m_2 .

Zbog očuvanja količine gibanja i u mirujućem sustavu S (impulsa gibanja, mv) je:

$$m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} = (m_1 + m_2)u. \quad (3.40)$$

Iz ovog se izraza dijeljenjem s m_2 može naći kvocijent masa (m_1/m_2) u mirujućem sustavu S :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{u - v_{x2}}{uv_{x1} - u}, \quad (3.41)$$

a osim toga je još prema (3.34):

$$v_{x1} = \frac{v_x' + u}{1 + u \frac{v_x'}{c^2}}, \quad v_{x2} = \frac{-v_x' + u}{1 - u \frac{v_x'}{c^2}} \quad (3.42)$$

pa izraz (3.41) postaje:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + u \frac{v_x'}{c^2}}{1 - u \frac{v_x'}{c^2}}. \quad (3.43)$$

Još se treba pokazati da je:

$$1 - \frac{v_{x1}^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u \frac{v_x'}{c^2}\right)^2} \quad (3.44)$$

$$1 - \frac{v_{x2}'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2}\right)}{\left(1 - u \frac{v_x'}{c^2}\right)^2} \quad (3.45)$$

Dijeljenjem izraza (3.44) i (3.45) (brojnici su jednaki pa se krate), a zatim korjenovanjem tako dobivenog kvocijenta (3.43) postaje:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{x1}'^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{x2}'^2}{c^2}}} = \frac{1 - u \frac{v_x'}{c^2}}{1 + u \frac{v_x'}{c^2}} \quad (3.46)$$

ili:

$$m_1 \sqrt{1 - \frac{v_{x1}'^2}{c^2}} = m_2 \sqrt{1 - \frac{v_{x2}'^2}{c^2}} = \text{const} = m_0 \quad (3.47)$$

pa je općenito:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.48)$$

Dakle, ako je $v=0$ tad je i $m=m_0$. Stoga je m_0 masa tijela u mirovanju, a m masa kad se ono giba brzinom v . Masa m u gibanju određuje se pomoću izraza (3.48).

Može se pogledati i s druge strane ako se općenito pretpostavi da je $E=mc^2$ pri čemu je m nepoznato. Brzina promjene energije u vremenu jednaka je umnošku sile i brzine:

$$\frac{dE}{dt} = Fv \quad (3.49)$$

pri čemu je sila:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (3.50)$$

Ovdje je $p=mv$ količina (impuls) gibanja. Na taj način (3.49) postaje:

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{dp}{dt} = \frac{d(mc^2)}{dt} = v \frac{d(mv)}{dt} \quad (3.51)$$

Nakon množenja objiju strana s $2m$ dobiva se:

$$c^2(2m) \frac{dm}{dt} = 2vm \frac{d(mv)}{dt} \quad (3.52)$$

ili:

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt}. \quad (3.53)$$

odakle se izravnim integriranjem dobiva:

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C. \quad (3.54)$$

Konstanta C se dobiva iz uvjeta za $v=0$ gdje se postavlja da je $m=m_0$:

$$C = m_0 c^2,$$

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2. \quad (3.55)$$

Poslije dijeljenja sa c^2 , izlučivanja m te korjenovanja obiju strana dobiva se konačno:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.56)$$

3.2.6 Masa i energija

Impuls (količina gibanja) tijela mase m koji se giba s brzinom v je:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.57)$$

Totalni diferencijal lijeve strane gornjeg izraza za količinu gibanja je:

$$dp = m dv + v dm, \quad (3.58)$$

a to je jednako totalnom diferencijalu desne strane (3.57):

$$dp = \frac{m_0 dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.59)$$

ili:

$$\frac{m dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m dv = \frac{\frac{v^2}{c^2} m dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v dm \quad (3.60)$$

odnosno poslije množenja s $1 - \frac{v^2}{c^2}$ dobiva se:

$$mdv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{c^2}{v^2} v dm = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{c^2}{v} dm. \quad (3.61)$$

Ovo se uvrsti u (3.58) pa se konačno za diferencijal količine gibanja dp dobiva:

$$dp = \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{c^2}{v} + v \right] dm = \left[\frac{c^2}{v} - v + v \right] dm = \frac{c^2}{v} dm. \quad (3.62)$$

Diferencijal energije izražene s količinom gibanja p prema izrazu (3.51) je:

$$dE = v dp = c^2 dm, \quad (3.63)$$

a integriranjem (3.63) dobiva se:

$$E = mc^2 + C_0, \text{ a uz } C_0=0 \text{ (na primjer za: } m=m_0, \text{ energija mase } m_0 \text{ u mirovanju je } E_0 = m_0 c^2 \text{).}$$

Kinetička energija dana je s izrazom:

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = E - m_0 c^2 \quad (3.64)$$

i jednaka umnošku c^2 i razlike masa koja nastaje zbog gibanja. Nakon uvrštenja izraza za masu u gibanju prema (3.56) u ovaj izraz za kinetičku energiju dobiva se:

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (3.65)$$

Razvije li se ovaj izraz po Tayloru dobiva se:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (3.66)$$

što znači da ako je brzina gibanja tijela mnogo manja od brzine svjetlosti ($v \ll c$) tad se kinetička energija reducira približno na nerelativistički iznos: $m_0 v^2 / 2$. Također, prema (3.64) ukupna je energija tijela u gibanju:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots = \\ &= m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

odakle slijedi da je:

$$m = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right). \quad (3.68)$$

Dalje, ukupna se energija može izraziti i s impulsom sile odnosno količinom gibanja p . S obzirom da je:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2 v^2}{m^2 c^2} = \frac{p^2}{m^2 c^2}, \quad (3.69)$$

a poslije uvrštenja izraza za masu u gibanju prema (3.56) ovaj izraz, nakon neznatnih manipulacija, prelazi u:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} &= \frac{p^2}{m^2 c^2} = \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \\ \frac{v^2}{c^2} \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right) &= \frac{p^2}{m_0^2 c^2}, \\ 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + p^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}{m_0 c} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Uvrsti li se posljednji izraz u izraz za ukupnu energiju tijela (3.67) dobiva se ukupna energija u ovisnosti o količini gibanja p :

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}. \quad (3.71)$$

3.3 TRANSFORMACIJA JEDNADŽBI ZA SILU

Neka se tijelo mase m giba brzinom v u mirujućem sustavu S . Po definiciji je sila vremenska promjena (derivacija po vremenu) impulsa sile $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ odnosno količine gibanja:

$$\vec{F}_0 = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right) \quad (3.72)$$

Promatrač A' u sustavu S' opservirat će silu $\vec{F}'_0$:

$$\vec{F}'_0 = \frac{d}{dt'} \vec{p}' = \frac{d}{dt'} (m' \vec{v}') = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \vec{v}' \right), \quad (3.73)$$

a x' komponenta sile je:

$$\vec{F}'_{0x} = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \vec{v}'_x \right). \quad (3.74)$$

Izdvojimo x -komponentu sile $\vec{F}_0$ te njen izraz proširimo s dt'/dt :

$$\vec{F}_{0x} = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_x \right) = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dt'}{dt}. \quad (3.75)$$

Nakon proširenja s dt'/dt korištenjem izraza (3.22) za t' :

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right), \quad (3.76)$$

a zbog $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\beta = \frac{u}{c}$ za dt'/dt se dobiva:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) = \gamma \left(1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2} \right) \quad (3.77)$$

Sad se u taj izraz uvrsti $v_x = dx/dt$ iz (3.34) odnosno: $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}}$ pa se dobiva:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \right) = \gamma \frac{c^2 + uv'_x - uv'_x - u^2}{c^2 + uv'_x} = \gamma \frac{c^2 - u^2}{c^2 + uv'_x} = \gamma \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{\gamma \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)} \quad (3.78)$$

Prema izrazima (3.34, za v_x), (3.36, za v_y) i (3.37, za v_z):

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2} \right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2} \right)} \quad (3.79)$$

rezultirajuća brzina u sustavu S je:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2} \right)^2} \left[\gamma^2 (v'_x + u)^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \right]. \quad (3.80)$$

Pogledajmo detaljnije čemu je jednak izraz pod derivacijom $\frac{d}{dt'}$ za silu F_{0x} (3.75).

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{\gamma(v'_x + u)}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.81)$$

Kvadrira li se samo nazivnik u (3.81) dobiva se:

$$N_{s7} = \left[\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]^2 = \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 \frac{v^2}{c^2}, \quad (3.82)$$

a zatim se u ovaj izraz uvrsti izraz (3.80) za v^2 pa se dobiva: |

$$N_{s7} = \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2} \right)^2} \frac{1}{c^2} \left[\gamma^2 (v'_x + u)^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \right]. \quad (3.83)$$

Nakon oduzimanja i dodavanja $\frac{v_x'^2}{c^2}$ s ciljem nadopunjavanja na puni kvadrat brzine v' te dodavanja i oduzimanja 1 dobiva se:

$$N_{57} = \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \gamma^2 (v'_x + u)^2 - \frac{v_y'^2}{c^2} - \frac{v_z'^2}{c^2} - \frac{v_x'^2}{c^2} + \frac{v_x'^2}{c^2} + 1 - 1. \quad (3.84)$$

$$N_{57} = \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \gamma^2 (v'_x + u)^2 + 1 - \underbrace{\frac{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}{c^2}}_{1 - \frac{v'^2}{c^2}} - 1 + \frac{v_x'^2}{c^2}. \quad (3.85)$$

Nakon manjeg pregrupiranja članova (izraz $1 - \frac{v'^2}{c^2} - 1$ se postavlja na prvo mjesto, a $v_x'^2/c^2$ se pridružuje drugom članu za N_{57}) izraz postaje:

$$N_{57} = 1 - \frac{v'^2}{c^2} - 1 + \underbrace{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \frac{\gamma^2 (v'_x + u)^2 - v_x'^2}{c^2}}_A. \quad (3.86)$$

Sad treba utvrditi čemu je jednaka veličina A označena u gornjem izrazu:

$$A = -1 + \gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)^2 - \frac{\gamma^2 (v'_x + u)^2 - v_x'^2}{c^2}. \quad (3.87)$$

Izmnoži li se i sredi ovaj izraz, dobiva se:

$$A = -1 + \gamma^2 + \gamma^2 \frac{u^2 v_x'^2}{c^4} + 2\gamma^2 \frac{uv'_x}{c^2} - \frac{\gamma^2 v_x'^2}{c^2} - \frac{2\gamma^2 uv'_x}{c^2} - \frac{2\gamma^2 u^2}{c^2} + \frac{v_x'^2}{c^2}, \quad (3.88)$$

$$A = \underbrace{\gamma^2 - 1 - \gamma^2 \frac{u^2}{c^2}}_{A_1} + v'_x \underbrace{\left(\frac{\gamma^2 u^2}{c^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \right)}_{A_2} = A_1 + A_2, \quad (3.89)$$

U ovom su izrazu označeni podizrazi A_1 i A_2 koji daju zbroj:

$$A = A_1 + A_2. \quad (3.90)$$

Neka se sad pojedinačno raspišu i preurede A_1 i A_2 .

$$A_1 = \gamma^2 - 1 - \gamma^2 \frac{u^2}{c^2} = -1 + \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = -1 + \gamma^2 \frac{1}{\gamma^2} = 0!, \quad (3.91)$$

$$A_2 = v'_x \left(\frac{\gamma^2 u^2}{c^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \right) = v'_x \left[-\frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \right] = v'_x \left[-\frac{\gamma^2}{c^2} \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{c^2} \right] = 0! \quad (3.92)$$

pa je konačno u cijelosti $A = 0$, a kvadrat nazivnika izraza (3.81):

$$N_{S7} = \left[\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \right]^2 = 1 - \frac{v'^2}{c^2}, \quad (3.93)$$

Izraz (3.81) nakon vraćanja korijena na $1 - \frac{v'^2}{c^2}$ iz (3.93) postaje:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} v_x = \frac{\gamma(v'_x + u)}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (3.94)$$

Sad se može nastaviti izvođenje izraza za F_{0x} . Izraz (3.94) se uvrsti u (3.75) te imajući u vidu da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c} \text{ nije ovisno o } t', \text{ dobiva se:}$$

$$F_{0x} = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \frac{dt'}{dt} = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{\gamma(v'_x + u)}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \frac{dt'}{dt} = m_0 \gamma \frac{d}{dt'} \left(\frac{(v'_x + u)}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \frac{dt'}{dt}. \quad (3.95)$$

Nakon uvrštenja konačnog rezultata za $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)}$ iz izraza (3.77) u izraz (3.95) za F_{0x} dobiva se:

$$F_{0x} = m_0 \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)} \cdot \gamma \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x + u}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right), \quad (3.96)$$

a nakon kraćenja razlomka s γ te dodavanja i odbijanja izraza:

$$m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \text{ dobiva se izraz:}$$

$$F_{0x} = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) - m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + \frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x + u}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \quad (3.97)$$

S obzirom da je:

$$F'_{0x} = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \quad (3.98)$$

može se pisati za:

$$F_{0x} = F'_{0x} - m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + \frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x + u}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \quad (3.99)$$

Sad se posljednji član u (3.99) razvije deriviranjem po dt' kao zbroj članova $\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$ i $\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$, a

prvi se član postavlja na kraj sljedećeg izraza:

$$F_{0x} = F'_{0x} + \frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \left[u \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \right] + \frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) - m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \quad (3.100)$$

Ako se ispred posljednja dva člana u (3.100) izluči $\frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$ dobiva se:

$$F_{0x} = F'_{0x} + \frac{m_0 u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + \frac{m_0}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \right] \right\}, \quad (3.101)$$

a nakon izlučivanja $\frac{m_0 u}{c^2 + uv'_x}$ ispred oba posljednja člana u (3.101) dobiva se za silu F_{0x} :

$$F_{0x} = F'_{0x} + \frac{m_0 u}{c^2 + uv'_x} \left[\underbrace{c^2 \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)}_I - \underbrace{v'_x \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)}_{II} \right]. \quad (3.102)$$

Razmotri li se drugi član označen u izrazu (3.102) s II putem kompletnog deriviranja kvocijenta po dt' uz uvođenje oznaka za pojedine komponente ubrzanja u sustavu $S'(x',y',z')$:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = a'_x, \quad \frac{dv'_y}{dt'} = a'_y, \quad \frac{dv'_z}{dt'} = a'_z \text{ dobiva se:}$$

$$II = v'_x \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \frac{v'_x a'_x \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} - v'^2_x \frac{1}{c^2} \cdot 2(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z)}{2 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)}. \quad (3.103)$$

Budući da je: $2\bar{v}' \frac{d\bar{v}'}{dt} = 2(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z)$ to je konačno član označen s II u izrazu (3.102):

$$II = \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \frac{v'_x a'_x \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) + \frac{v'^2_x}{c^2} (v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z)}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)^{3/2}}. \quad (3.104)$$

Prvi član označen s I u (3.102) je nakon deriviranja:

$$I = \frac{d}{dt'} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \frac{-c^2 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{c^2} \right) \cdot 2(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z) \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)}, \quad (3.105)$$

$$I = \frac{v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \quad (3.106)$$

Koristeći oblik izraza (3.104) i za komponente $d \left(v'_y / \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \right) / dt'$ i $d \left(v'_z / \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \right) / dt'$ može se izračunati sljedeći zbroj:

$$v'_x \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + v'_y \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + v'_z \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_z}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) + \overbrace{\left(\frac{v_x'^2}{c^2} + \frac{v_y'^2}{c^2} + \frac{v_z'^2}{c^2}\right)}^{\frac{v'^2}{c^2}} (v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z)}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(v'_x a'_x + v'_y a'_y + v'_z a'_z)}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = I
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

što je upravo izraz (3.106) odnosno:

$$I = \frac{d}{dt'} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \tag{3.106}$$

S obzirom da je dakle:

$$v'_x \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + v'_y \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + v'_z \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_z}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt'} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \tag{3.108}$$

može se napisati:

$$\underbrace{\frac{d}{dt'} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)}_I - \underbrace{v'_x \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)}_{II} = v'_y \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) + v'_z \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_z}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \tag{3.109}$$

Dakle, umjesto razlike članova $I-II$ u izrazu (3.102) koristi se ekvivalentni zbroj članova na desnoj strani izraza (3.109), a izmnoženi s m_0 su upravo komponente sile F'_{0y} i F'_{0z} , pa je konačni izraz za x komponentu sile F_{0x} :

$$F_{0x} = F'_{0x} + \frac{uv'_y}{c^2 + uv'_x} F'_{0y} + \frac{uv'_z}{c^2 + uv'_x} F'_{0z}. \tag{3.110}$$

Za y-komponentu sile je:

$$F_{0y} = m_0 \cdot \frac{d}{dt'} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \cdot \frac{d}{dt'} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dt'}{dt} = m_0 \cdot \frac{d}{dt'} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)}. \quad (3.111)$$

Koristeći izraz za v_y iz (3.36, $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2} \right)}$) izraz u zagradi od $\frac{d}{dt'}$ u (3.111) je:

$$\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.112)$$

Pri izvođenju izraza za F_{0x} utvrđeno je da je kvadrat nazivnika ovog izraza:

$$N_{s7} = \left[\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]^2 = 1 - \frac{v'^2}{c^2} \quad (3.113)$$

pa se dobiva

$$\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \quad (3.114)$$

pa izraz (3.111) za komponentu sile u y smjeru postaje:

$$F_{0y} = m_0 \cdot \frac{d}{dt'} \left(\frac{v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{c^2}{\gamma(c^2 + uv'_x)} = \frac{c^2}{\gamma(c^2 + uv'_x)} F'_{0y}. \quad (3.115)$$

Analogno je dalje za komponentu sile u z smjeru:

$$F_{0z} = \frac{c^2}{\gamma(c^2 + uv'_x)} F'_{0z}. \quad (3.116)$$

S ovim je izvedena (mukotrpna) transformacija sila u sva tri smjera, ali za slučaj kad postoji samo relativno gibanje sustava S' prema S u x smjeru brzinom $u=u_x$.

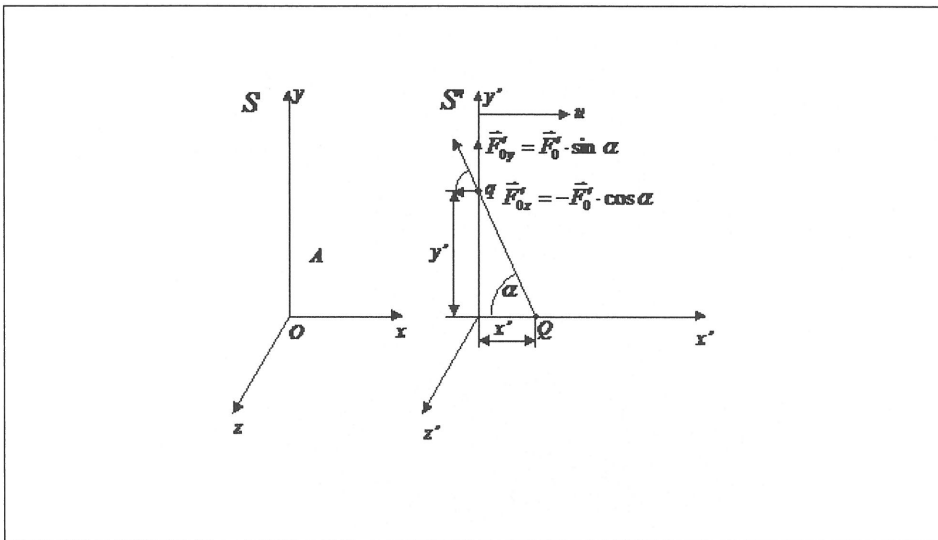
Koristeći navedene izraze koji proizlaze iz specijalne teorije relativnosti u sljedećem će se dijelu teksta izvesti izraz za magnetsku indukciju kao posljedicu relativnog odnosa gibanja promatrača i naboja.

3.3.1 Magnetska indukcija

Neka se sad razmotre 2 točkasta naboja q i Q u vakuumu i neka se pretpostavi da su iznosi naboja jednaki za oba promatrača (A i A'). Dalje, neka su naboji fiksirani u sustavu $S'(O', x', y', z')$ koji se giba brzinom u prema sustavu S , [4]. U trenutku $t=0$ za promatrača A , a u $t' = \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) = -\gamma \frac{u}{c^2} x$ promatrač A' je utvrdio koordinate:

$$(0, y', 0) \text{ za naboj } q \text{ te } (x', 0, 0) \text{ za naboj } Q.$$

U sustavu S to su koordinate: $(0, y, 0)$ i $(x, 0, 0)$, (slika 3.4).



Slika 3.4 Uz transformaciju sile

Sila na naboj q koju mjeri promatrač A' po Coulombovom zakonu ima dvije međusobno okomite komponente, a koje su definirane sljedećim izrazima, (slika 3.4):

$$F'_{0x} = -\frac{qQx'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad (3.117)$$

$$F'_{0y} = \frac{qQy'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Također su za promatranu situaciju u koordinatnom sustavu S' komponente brzine naboja u sva tri smjera (x', y', z') : $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, $v'_z = 0$.

Promatrač A u sustavu S bi prema izrazima (3.110), (3.115) i (3.116) mjerio sile i dobio bi:

$$F_{0x} = F'_{0x} = -\frac{qQx'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{0y} = \frac{F'_{0y}}{\gamma} = \frac{qQy'}{4\pi\epsilon_0\gamma(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad (3.118)$$

$$F_{0z} = F'_{0z} = 0.$$

Uvrštenjem veza između sustava S i S' (prema 3.13.1, $x' = \gamma(x - ut) = \gamma x$ za $t=0$ te: $y' = y, z' = z$) dobiva se umjesto (3.118):

$$F_{0x} = -\frac{qQ\gamma x}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$F_{0y} = \frac{qQy}{4\pi\epsilon_0\gamma(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (3.119)$$

$$F_{0z} = 0.$$

Neka se sad razmotri situacija sa silama do kraja. Q je predodčen linijskim nabojem λ (As/m) duž osi x , pri čemu se i q i λ gibaju zajedno sa sustavom S' . Podsjetimo se još i na činjenicu utvrđenu u fizici:

Naboj je invarijanta za sve referentne sustave!

To znači da je:

$$Q = \lambda dx = \lambda' dx' = \lambda' \gamma dx \quad (3.120)$$

ili:

$$\lambda = \gamma \lambda'. \quad (3.121)$$

Za promatrača A naboj je povećane linijske gustoće λ u odnosu na λ' : ($\lambda > \lambda'$)!

Pošto se (3.120) uvrsti u (3.119) dobiva se diferencijal sile dF_{0x} na naboj q :

$$dF_{0x} = -\frac{q\lambda dx \gamma x}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (3.122)$$

ili ako se prointegrira od $-\infty$ do $+\infty$:

$$F_{0x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\lambda dx \gamma x}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0\gamma} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\gamma^2 x^2 + y^2)}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0\gamma} \cdot \frac{1}{2} (-2)(\gamma^2 x^2 + y^2)^{-1/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (3.123)$$

Za y -komponentu sile F_{0y} , na isti je način (prema tablici riješenih integrala u [25] uz granične prijelaze na donjoj $x \rightarrow -\infty$ odnosno gornjoj granici $x \rightarrow \infty$):

$$F_{0y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\lambda dx}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda y}{4\pi\gamma^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\gamma x)}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda y}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\gamma x}{2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} \text{za } x \rightarrow \infty : = \frac{q\lambda y}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{1}{y^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 y} \\ \text{za } x \rightarrow -\infty : = -\frac{q\lambda y}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{1}{y^2} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 y} \end{cases}$$
(3.124)

$$F_{0y} = \frac{q\lambda y}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \cdot \frac{2}{y^2} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0\gamma^2 y} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$
(3.125)

$$F_{0z} = 0.$$
(3.126)

U slučaju da je $u = 0$ tad je to i za promatrača A u sustavu S statička odnosno elektrostatička sila:

$$F_{0ys} = qE_0 = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}.$$
(3.127)

Pri $u \neq 0$ dinamički dio sile (F_{0yd}) zbog relativnog gibanja sustava S' u odnosu na sustav S , prema izrazu (3.125) je:

$$F_{0yd} = -qu \frac{\lambda u}{2\pi\epsilon_0 c^2 y}$$
(3.128)

Neka se λu definira kao struja duž osi x :

$$\lambda u = \lambda \frac{dx}{dt} = \frac{d(\lambda x)}{dt} = \frac{dQ}{dt} = i_x.$$
(3.129)

Dalje, u (3.128) veličina $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ se treba posebice istaknuti. Ta se veličina naziva permeabilnošću vakuumu:

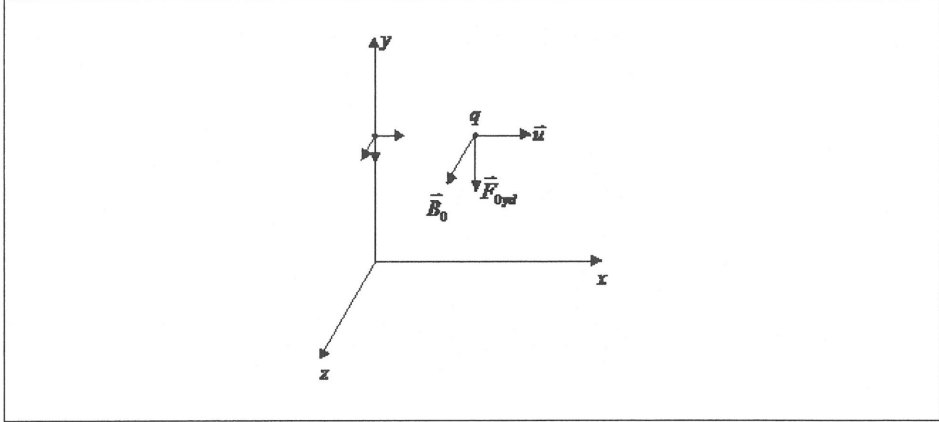
$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left(\frac{Vs}{Am} \right) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}, \quad \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{As}{Vm} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{F}{m} = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}.$$
(3.130)

Sad se dinamička komponenta sile može pisati:

$$F_{0yd} = -qu \frac{\mu_0 i_x}{2\pi y}$$
(3.131)

U vektorskoj se notaciji može pisati za opći međusobni položaj vektora $\vec{u}$ i $\vec{B}$, (slika 3.5):

$$\vec{F} = q (\vec{u} \times \vec{B}_0). \quad (3.132)$$

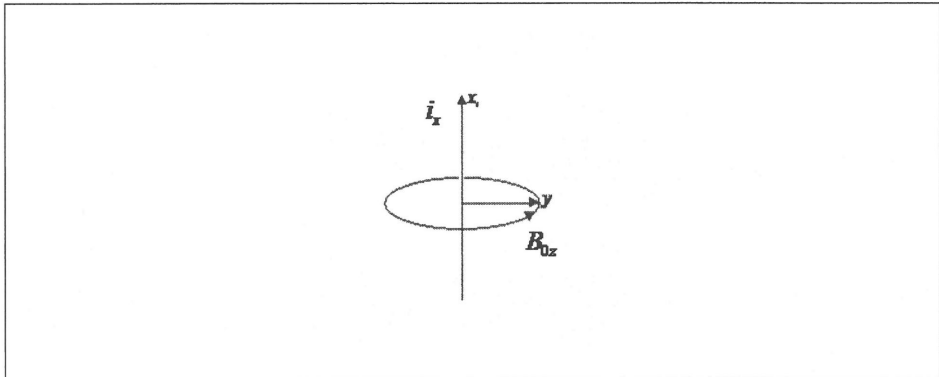


Slika 3.5 Sila na gibajući naboj i magnetska indukcija

Posebice je za naš slučaj odnos tih vektora takav da je prema slici 3.6:

$$\vec{F}_{0d}: F_{0xd} = 0, F_{0yd} = -quB_0, F_{0zd} = 0, \quad (3.133)$$

$$u_x = u, u_y = u_z = 0, B_{0x} = B_{0y} = 0, B_{0z} = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi y}, \quad (3.134)$$



Slika 3.6 Magnetska indukcija u okolišu pravčaste strujnice

Izraz:

$$B_{0z} = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi y} \quad (3.135)$$

predstavlja izraz za magnetsku indukciju u okruženju beskonačno dugog ravnog vodiča protjecanog strujom i_x , a koji se može izvesti i iz Ampèreovog kružnog zakona. Ampèreov se kružni zakon danas definira kao zatvoreni linijski integral jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ po konturi C :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_C \quad (3.136)$$

pri čemu je I_C ukupna struja obuhvaćena konturom C . Ampèreov kružni zakon za magnetsku indukciju u okruženju beskonačno pravčaste struje, (slika 3.6), a koji se, kao što će se poslije vidjeti (točka 4), može izvesti i iz Biot - Savart-ovog zakona.

Indukcija se mjeri u teslama i s ostalim elektrotehničkim mjernim jedinicama vezana je tako da je:

$$[B] = \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{A}{m} = \frac{Vs}{m^2} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1T.$$

Ukupna sila na gibajući naboj q u poljima $\vec{E}$ i $\vec{B}$ općenito je jednaka:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}_0) \quad (3.137)$$

i ova se sila zove Lorentzova sila.

4 MAGNETOSTATIKA

4.1 BIOT-SAVARTOV I AMPÈREOV KRUŽNI ZAKON

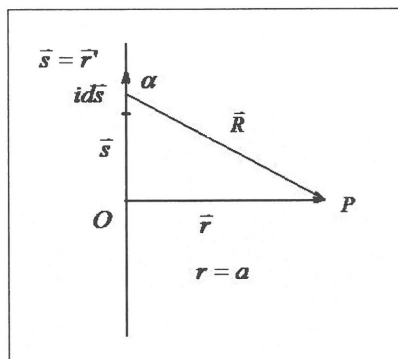
Već je bilo rečeno da se Ampèreov kružni zakon može izvesti i primjenom Biot-Savartovog zakona na pravčastu strujnicu, [3], [4], [11].

Biot-Savartov zakon definira iznos i smjer magnetske indukcije u točki P koju proizvodi linijski element struje $i d\vec{s}$ na udaljenosti $\vec{R}$ od točke promatranja P (slika 4.1):

$$d\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3}. \quad (4.1)$$

Vektor indukcije $d\vec{B}$ okomit je na ravninu koju zatvaraju vektori $d\vec{s}$ i $\vec{R}$ po pravilu desnog vijka odnosno prema definiciji vektorskog produkta $d\vec{s}$ i $\vec{R}$. Ako se $i d\vec{s}$ može interpretirati prostornim elementom struje $i d\vec{s} = \vec{J} \vec{S}' d\vec{s} = \vec{J} dV'$ tad se Biot-Savartov zakon može napisati i u obliku :

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (4.2)$$



Slika 4.1 Uz definiciju Biot-Savartovog zakona na ravni vodič protječan strujom

Iz geometrijskih odnosa sa slike 4.1 je:

$$\begin{aligned} |d\vec{B}| &= \frac{\mu i}{4\pi} \frac{\sin \alpha ds}{R^2} \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= \frac{a}{s}, \quad s = \frac{a}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = -a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ ds &= a \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ \sin \alpha &= \frac{a}{R}, \quad R = \frac{a}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (4.3)$$

pa se na kraju dobiva:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu i}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha$$

$$B = \frac{\mu i}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu i}{4\pi a} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{\mu i}{2\pi a} \quad (4.4)$$

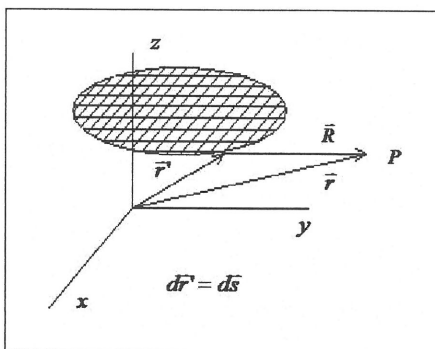
što je izraz za magnetsku indukciju koji smo već ranije dobili primjenom specijalne teorije relativnosti na transformaciju sile na gibajući naboj.

4.2 MAGNETSKI SKALARNI I VEKTORSKI POTENCIJAL

Iz Biot-Savartovog zakona za magnetsku indukciju koju proizvodi linijski diferencijalni element struje $i d\vec{s}$ zatvorene strujnice (magnetskog dipola) smješten na udaljenosti $\vec{r}'$ od ishodišta u točki promatranja u točki P , a koja je na udaljenosti $\vec{r}$ od ishodišta, (slika 4.2) slijedi:

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_s \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3} \quad (4.5)$$

gdje je: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ udaljenost točke P promatranja od elementa strujnice $i d\vec{s}$.



Slika 4.2 Uz definiciju simbola u primjeni Biot-Savartovog zakona na strujnu petlju

Koristeći teorem Taita i McAulaya, ([4] i Matematički prilog):

$$\oint_s \vec{F} \times d\vec{s} = \iint_s [(\nabla \vec{F}) \vec{n} - \nabla(\vec{F} \cdot \vec{n})] dS, \quad (\vec{F} = \frac{\vec{R}}{R^3}, d\vec{s} = d\vec{s}) \quad (4.6)$$

i činjenicu da su nabla operatori u sustavu promatrača i izvora suprotnih predznaka ($\nabla = -\nabla'$) mogu se izvesti sljedeći izrazi:

$$\vec{B} = -\frac{\mu i}{4\pi} \int_s \frac{\vec{R}}{R^3} \times d\vec{s} = \frac{\mu i}{4\pi} \iint_{s'} \left[\nabla' \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \cdot \vec{n} - \left(\nabla' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \vec{n} \right] dS'$$

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 0 \quad (R \neq 0) \quad S = S' \quad (4.7)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu i}{4\pi} \iint_s \nabla \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \vec{n} \right) dS = -\frac{\mu}{4\pi} \iint_s \nabla \left(\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{R}}{R^3} \right) dS$$

Ovdje je:

$$\vec{\tau} = i \vec{n} \quad (4.8)$$

magnetski dipolni moment po jedinici površine te:

$$\vec{p}_m = \vec{\tau} S = i S \vec{n} \quad (4.9)$$

ukupni magnetski dipolni moment.

Smanjuje li se ploha S na takav način da je $iS = \text{const}$ (to jest struja i se upravo toliko poveća koliko se S smanji) može se pisati:

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi} \nabla \left(\frac{\vec{p}_m \cdot \vec{R}}{R^3} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \left[\vec{p}_m \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \quad (4.10)$$

a jakost magnetskog polja za linearnu sredinu ($\vec{H} = \vec{B} / \mu$):

$$\vec{H} = \frac{-1}{4\pi} \nabla \left(\frac{\vec{p}_m \cdot \vec{R}}{R^3} \right) \quad (4.11)$$

Taj se izraz može usporediti s izrazom za jakost polja električnog dipola:

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \quad (4.12)$$

pri čemu je:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} \quad (4.13)$$

elektrostatički potencijal u okolišu električnog dipola smještenog u ishodištu koordinatnog sustava. ($\vec{r} = \vec{r}'$, $\vec{R} = 0$).

Analogno tom može se definirati i magnetski skalarni potencijal (ili: magnetski antipotentijal) magnetskog dipola tako da je jakost magnetskog polja:

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m \quad (4.14)$$

odnosno:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{p}_m \bar{R}}{R^3}, [A] \quad (4.15)$$

gdje je φ_m definiran za cijelo područje gdje nema struja, a to je za $R \neq 0$. Naime za $R=0$ je strujna zona. U području gdje ne teku struje vrijedi zato:

$$\text{rot } \vec{B} = 0, \quad \oint_s \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (4.16)$$

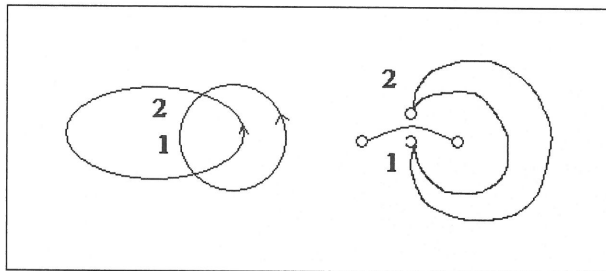
Razlika potencijala između dvije točke (s jedne i druge strane plohe S, slika 4.3) je:

$$\varphi_m(1) - \varphi_m(2) = \int_1^2 \vec{H} d\vec{s} = - \int_2^1 \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_2^1 \text{grad} \varphi_m d\vec{s} = \int_2^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial s} d\vec{s} = c. \quad (4.17)$$

Točke 1 i 2 se mogu po volji približiti, (slika 4.3), pa vrijedi:

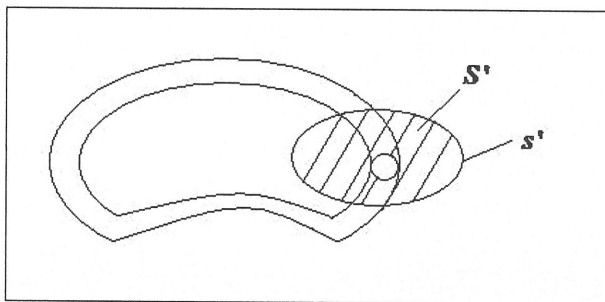
$$c = \oint \vec{H} d\vec{s} = i \quad (4.18)$$

tj. konstanta c jednaka je ukupno obuhvaćenoj struji.



Slika 4.3 Uz magnetski skalarni potencijal (antipotencijal, [6], [7])

Da bi se u razmatranje uzelo i strujno područje u obzir će se uzeti realne dimenzije vodiča kao što je to pokazano na slici 4.4.



Slika 4.4 Vodič konačno velikih dimenzija protjecan strujom

Primjenom Stokesovog teorema dobiva se:

$$\oint_{S'} \vec{B} d\vec{S}' = \iint_{S'} \text{rot } \vec{B} d\vec{S}' = \mu \iint_{S'} \vec{J} d\vec{S}' \quad (4.19)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J}$$

Ovdje je $\vec{J}$ vektor gustoće električne struje mjeren po presjeku vodiča S' (slika 4.4), a mjeri se u A/m^2 .

S obzirom da je općenito:

$\text{div rot } \vec{F} = 0$ vrijedi:

$$\text{div rot } \vec{B} = \text{div}(\mu \vec{J}) = \mu \text{div } \vec{J} = 0, \quad (4.20)$$

što znači da je za istosmjernu struju:

$$\text{div } \vec{J} = 0. \quad (4.21)$$

Neka se sad pokaže da je također i $\text{div } \vec{B} = 0$. Primjenom operatora divergencije na (4.5) dobiva se:

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_s \nabla \left(d\vec{s} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_s \left(\text{rot } d\vec{s} \frac{\vec{R}}{R^3} - d\vec{s} \text{rot } \frac{\vec{R}}{R^3} \right), \quad (4.22)$$

pri čemu je:

$$d\vec{s} = d\vec{r}', \quad \text{rot } d\vec{s} = \nabla \times d\vec{r}' = 0. \quad (4.23)$$

Već je prije pokazano da je:

$$\text{rot } \frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla \times \frac{\vec{R}}{R^3} = 0, \quad (4.24)$$

što se lako može provjeriti i prema definiciji operatora rotora:

$$\nabla \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{R_x}{R^3} & \frac{R_y}{R^3} & \frac{R_z}{R^3} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Dakle je:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.26)$$

pa se indukcija može karakterizirati pomoću magnetskog vektorskog potencijala koji se ovdje označava s $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{B} &= \text{rot rot } \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Odabere li se Coulombov uvjet baždarenja:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (4.28)$$

dobiva se:

$$\nabla^2 \vec{A} = \Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}. \quad (4.29)$$

Rješenje ove vektorske Poissonove jednadžbe je, kao što je poznato:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'.$$

U slučaju da se radi o linijskom elementu struje ($id\vec{s} = \vec{J}\vec{S}'d\vec{s} = \vec{J}dV'$) taj je izraz:

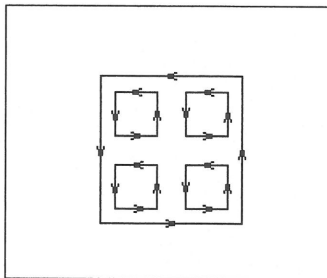
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{s'} \frac{d\vec{s}}{R}. \quad (4.30)$$

Integracija se provodi u V' odnosno preko s , dakle u strujnom području. Ovdje se veličina $\vec{A}(\vec{r})$ zove magnetskim vektorskim potencijalom u točki promatranja P o čemu će biti još riječi u sljedećem dijelu teksta. Ovdje treba samo zapaziti da ta veličina ima smjer vektora gustoće električne struje $\vec{J}$ odnosno strujnog elementa $id\vec{s}$.

4.2.1 Magnetski dipol i polarizacija

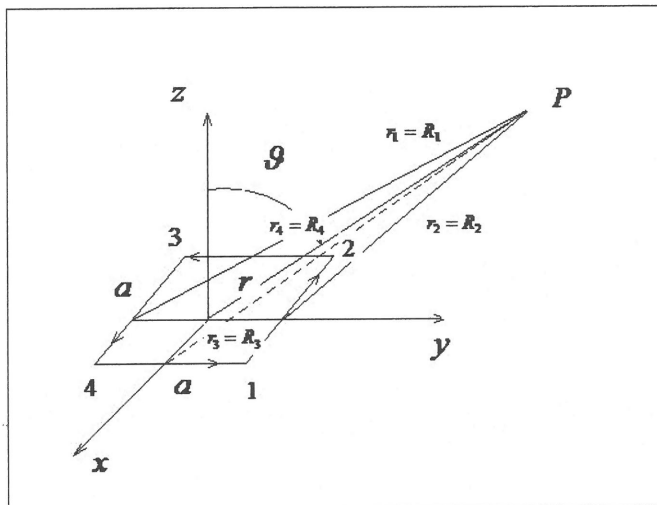
4.2.1.1 Magnetski dipol i magnetski vektorski potencijal

Djelovanje petlje oblika po volji može se nadomjestiti zbrojem djelovanja elementarnih strujnih petlji postavljenih u nekoj ravnini, (slika 4.5).



Slika 4.5 Elementarne struje u ravnini

Tako se dolazi do pojma male petlje (magnetskog dipola) u odnosu na promatrani prostor (slika 4.6), [3].



Slika 4.6 Magnetski dipol i definicija magnetskog vektorskog potencijala

U gornjoj su slici s r_1 i r_2 označene udaljenosti sredine stranice 3-4 odnosno sredine stranica 1 i 2, a s r_3 i r_4 označene su udaljenosti sredine stranice 4-1 odnosno sredine stranica 2 i 3.

Prema prethodno rečenom za magnetski vektorski potencijal vrijedi :

$$\vec{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}}{R} \quad (4.31)$$

Kad je $r \gg a$, $R \approx r$ i zbog toga što je struja u (x,y) ravnini to je:

$$A_x \neq 0, A_y \neq 0, A_z = 0.$$

Komponenta magnetskog vektorskog potencijala A_x približno je (integral duž stranica 1-2 i 3-4 male petlje u (x,y) ravnini):

$$A_x \cong \frac{\mu i}{4\pi} \left(\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2} \right) = \frac{\mu i a}{4\pi} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (4.32)$$

Dalje, vrijede također približni geometrijski odnosi:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &\cong r^2 \\ r_1^2 &= x^2 + \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 + z^2 \\ r_2^2 &= x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 + z^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

te:

$$\begin{aligned}
 r_1^2 - r_2^2 &= (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = \\
 &= x^2 + y^2 + ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + z^2 - x^2 - y^2 + ay - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = 2ay \\
 r_1 + r_2 &\cong 2r \\
 r_1 - r_2 &= \frac{2ay}{2r} = \frac{ay}{r}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

pa je:

$$A_x = \frac{\mu i a}{4\pi} \cdot \frac{-ay}{r^2} = -\frac{\mu i a^2}{4\pi} \frac{y}{r^3}. \tag{4.35}$$

Slično je integral duž stranica 4-1 i 2-3 male petlje u (x,y) ravnini):

$$A_y = \frac{\mu i}{4\pi} \left(\frac{a}{r_3} - \frac{a}{r_4} \right) = \frac{\mu i a}{4\pi} \frac{r_4 - r_3}{r_3 r_4} \tag{4.36}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned}
 r_3 r_4 &\cong r^2, \quad r_3^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2, \quad r_4^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 \\
 r_3^2 - r_4^2 &= -2ax \\
 r_3 + r_4 &\cong 2r \\
 r_3 - r_4 &= -\frac{ax}{r}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

pa je:

$$A_y = \frac{\mu i a}{4\pi} \frac{ax}{r^3} = \frac{\mu i a^2}{4\pi} \frac{x}{r^3}. \tag{4.38}$$

Magnetski vektorski potencijal je konačno:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = \frac{\mu i a^2}{4\pi r^3} (-y \vec{i} + x \vec{j}). \tag{4.39}$$

Ovdje je potrebno razlikovati simbol za struju i i simbol $\vec{i}$ za jedinični vektor u x smjeru. Iznos i smjer (za os z smjer je određen jediničnim vektorom $\vec{k}$) magnetskog dipolnog momenta su:

$$\begin{aligned}
 ia^2 &= p_m \\
 \vec{p}_m &= p_m \vec{k}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

S druge je strane:

$$\vec{p}_m \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & p_m \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(-yp_m) - \vec{j}(-xp_m) = -yp_m \vec{i} + xp_m \vec{j} \quad (4.41)$$

pa se usporedbo s gore izvedenim izrazom za magnetski vektorski potencijal (4.39) dobiva:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}. \quad (4.42)$$

Bilo koja strujna petlja ima magnetski dipolni moment:

$$\vec{p}_m = i S \vec{n}. \quad (4.43)$$

Jakost polja magnetskog dipola je:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \frac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.44)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{p}_m \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right] \\ \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(p_m \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}_m}{R^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.2.2 Magnetska polarizacija

Vektor magnetske polarizacije $\vec{P}_m$, slično kao i u elektrostatici može se definirati kao dipolni magnetski moment po jedinici volumena, [3]:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m \quad (4.46)$$

pa je:

$$\begin{aligned} \vec{B} - \vec{P}_m &= \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{B} &= \vec{P}_m + \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Magnetska susceptibilnost bezdimenzionalni je broj $\chi_m = \mu_r - 1$ gdje je μ_r permeabilnost sredstva i predstavlja reakciju na narinuto polje:

$$\vec{P}_m = (\mu_r - 1)\mu_0 \vec{H} = \chi_m \mu_0 \vec{H}. \quad (4.48)$$

Magnetska susceptibilnost predstavlja relativnu sposobnost materijala da primi vanjsko magnetsko polje (u odnosu na vakuum).

U Lorentzovu silu pored vektora $\vec{E}$ ulazi i magnetska indukcija $\vec{B}$ (očekivali bi $\vec{H}$). Zato se još vode rasprave da li je $\vec{B}$ primarno vektorsko polje ili $\vec{H}$. Stoga postoje dva pristupa magnetskoj polarizaciji. Ovdje će se uzeti da je $\vec{H}$ vektor jakosti magnetskog polja i da su jednadžbe za magnetsko polje analogne onima za električno polje što se može uočiti iz tablice 4.1:

Tablica 4.1 Odnosi pojedinih veličina za električno i magnetsko polje

Veličine električnog polja	Veličine magnetskog polja
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m$
$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$	$\vec{P}_m = \mu_0 \chi_m \vec{H}$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$	$\mu = \mu_r \mu_0$
$\varepsilon_r = 1 + \chi$	$\mu_r = 1 + \chi_m$

gdje je $\vec{P}_m$ vektor magnetske polarizacije odnosno magnetski dipolni moment po jedinici volumena.

Magnetski materijali čija je susceptibilnost $\chi_m = \mu_r - 1$ mali i negativni broj zovu se dijamagnetski materijali i reagiraju suprotstavljanjem vanjskom polju i postavljaju se poprečno na vanjsko polje. Materijali s pozitivnom susceptibilnošću zovu se paramagnetski materijali. U donjoj su tablici dane susceptibilnosti nekih dijamagnetskih i paramagnetskih materijala.

Tablica 4.2 Neki dijamagnetski i paramagnetski materijali

Dijamagnetski materijali		Paramagnetski materijali	
$\chi_m = \mu_r - 1 (\chi_m < 0)$		$\chi_m = \mu_r - 1 (\chi_m > 0)$	
Bizmut	-13.1×10^{-6}	Gadolinij	38200×10^{-6}
Germanij	-5.66×10^{-6}	Manganov klorid (MnCl ₂)	343×10^{-6}
Antimon	-5.42×10^{-6}	Tekući kisik (-183°C)	276×10^{-6}
Bakar	-0.77×10^{-6}	Mangan	69×10^{-6}
Tekuća voda (20°C)	-0.72×10^{-6}	Krom	25×10^{-6}

Paramagnetski materijali vrlo velike susceptibilnosti zovu se još i feromagnetski materijali, a glavni su predstavnici željezo, kobalt i nikalj.

4.3 MEĐUINDUKTIVITET I SAMOINDUKTIVITET

Po Stokesovu je stavku:

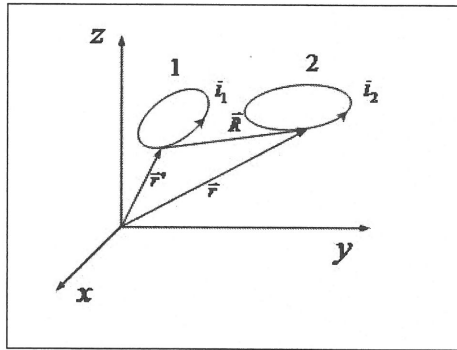
$$\oint_S \vec{A} d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi \quad (4.49)$$

magnetski tok kroz određenu površinu S .

Ako je površina S zatvorena tad je uvijek tok za vektor magnetske indukcije:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (4.50)$$

Neka se sad promotre dva strujna kruga (petlje) čiji su oblici i položaji odabrani po volji (slika 4.7).



Slika 4.7 Dvije strujne petlje, međui nduktivitet dvije strujne petlje

Za magnetski vektorski potencijal petlje 1, [3], [4], [6], [7] može se pisati je:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{s_1} \frac{d\vec{s}_1}{R}, \quad (4.51)$$

a magnetski tok kroz drugu petlju (2) od struje kroz prvu petlju je:

$$\Phi_{21} = \oint_{s_2} \vec{A}_1 d\vec{s}_2 = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{s_2} \oint_{s_1} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{R} = L_{21} i_1. \quad (4.52)$$

Neka se sad potraži magnetski tok u prvoj petlji (1) koji stvara struja kroz drugu petlju (2):

$$\Phi_{12} = \oint_{s_1} \vec{A}_2 d\vec{s}_1 = \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{d\vec{s}_2 d\vec{s}_1}{R} = L_{12} i_2. \quad (4.53)$$

U skalarnom se produktu može promijeniti redoslijed faktora, a također se može zamijeniti redoslijed integracije, pa su zato koeficijenti veze (međui nduktivnosti):

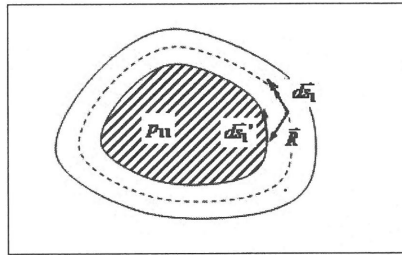
$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{d\vec{s}_2 d\vec{s}_1}{R} = L_{21}. \quad (4.54)$$

Glede međusobnih magnetskih veza (međuinuktivnosti) linearnih krugova, općenito će vrijediti uzajamnost (recipročnost) između i -te i k -te petlje

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (4.55)$$

Promotri li se tok što ga struja uzrokuje u vlastitoj petlji dolazimo do pojma *samoinduktiviteta* (slika 4.8).

Tu se, međutim moraju uzeti u obzir realne dimenzije vodiča, inače je $R = 0$.



Slika 4.8 Uz definiciju „vanjskog“ samoinduktiviteta

$$\Phi_{11} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{s_1'} \oint_{s_1} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_1'}{R} = L_{11} i_1. \quad (4.56)$$

Na taj je način moguće odrediti *vanjski samoinduktivitet*. S obzirom da realni vodiči imaju konačno velike dimenzije presjeka gore izloženim izračunom magnetskog toka neće biti moguće izračunati tzv. unutarnji induktivitet, a time ni ukupni induktivitet. O tom će još biti riječi.

Znači za sustav dva magnetski vezana kruga vrijede jednačbe:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \Phi_2 &= L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.3.1 Uzajamna energija dviju petlji

Sila na naboj q , koji se giba brzinom $\vec{v}$ u magnetskom polju indukcije $\vec{B}$ je:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.58)$$

Ako strujnim krugom 1 teče struja i_1 koja na mjestu gibajućeg naboja q stvara indukciju $\vec{B}$, (slika 4.9):

$$\vec{B} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times \vec{R}}{R^3} \quad (4.59)$$

sila na naboj je:

$$\vec{F}_m = q \left(\vec{v} \times \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times \vec{R}}{R^3} \right). \quad (4.60)$$

Neka je dalje:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}_2}{dt} \text{ i } q = \lambda ds_2 \quad (4.61)$$

pa je:

$$q\vec{v} = \lambda \vec{v} ds_2 = \lambda v d\vec{s}_2 = i_2 d\vec{s}_2. \quad (4.62)$$

Sila na strujni element $i_2 d\vec{s}_2$ je dakle:

$$\vec{F}_m \equiv d\vec{F}_{m2} = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \left(d\vec{s}_2 \times \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times \vec{R}}{R^3} \right). \quad (4.63)$$

Integriranjem i po cijeloj petlji 2 (s_2 , slika 4.9) dobiva se:

$$\vec{F}_{m2} = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \left(\oint_2 d\vec{s}_2 \times \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times \vec{R}}{R^3} \right). \quad (4.64)$$

Za dvostruki se vektorski produkt može pisati:

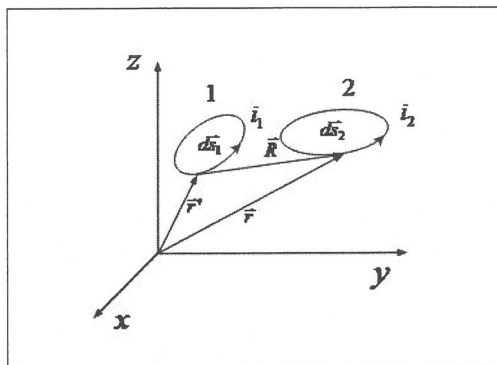
$$\vec{F}_{m2} = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \left[\frac{d\vec{s}_2 \vec{R}}{R^3} d\vec{s}_1 - (d\vec{s}_1 d\vec{s}_2) \frac{\vec{R}}{R^3} \right] \quad (4.65)$$

Prvi je član uz primjenu Stokesovog stavka:

$$\oint_2 \frac{d\vec{s}_2 \vec{R}}{R^3} = \oint_2 d\vec{s}_2 \nabla' \frac{1}{R} = \oint_2 \nabla' \frac{1}{R} d\vec{s}_2 = \underbrace{\iint_2 (\nabla' \times \nabla' \frac{1}{R}) d\vec{s}_2}_{\text{rot grad } \frac{1}{R} = 0} = 0. \quad (4.66)$$

Konačno je iznos sile F_{m2} :

$$F_{m2} = -\frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 (d\vec{s}_1 d\vec{s}_2) \frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \nabla' \frac{(d\vec{s}_1 d\vec{s}_2)}{R} = -\nabla' W_{m21} = \nabla W_{m21} \quad (4.67)$$



Slika 4.9 Dvije strujne petlje: uzajamna energija dviju petlji

gdje je uzajamna energija dviju petlji jednaka:

$$W_{m21} = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{R} = i_1 i_2 L_{21} \quad (4.68)$$

$$W_{m12} = i_1 i_2 L_{12} = W_{m21} = i_1 i_2 L_{21}$$

Formalno bi vlastita energija jednog, na primjer prvog kruga bila:

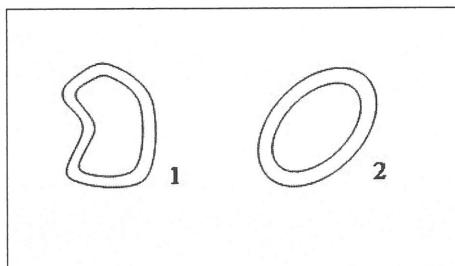
$$W_{m1} = \frac{\mu i_1^2}{4\pi} \oint_{1'} \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_1'}{R} = i_1^2 L_{11} \quad (4.69)$$

što nije točno budući da se na taj način struju i_1 postavlja i u petlju (1) i (1') pa bi tako dobiveni izraz bio dvostruko veći tako da, kao što je poznato, treba gore navedeni iznos podijeliti s dva:

$$W_{m1} = \frac{1}{2} \frac{\mu i_1^2}{4\pi} \oint_{1'} \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_1'}{R} = \frac{1}{2} i_1^2 L_{11} \quad (4.70)$$

4.3.2 Energija magnetskog polja

Neka se sad promotre dvije struje u petljama realnih dimenzija vodiča, (slika 4.10).



Slika 4.10 Dvije strujne petlje realnih dimenzija vodiča

Za struju i_1 se može pisati:

$$i_1 = \iint_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} J_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{S}_1}{ds_1}. \quad (4.71)$$

Slično se može pisati za struju i_2 petlje 2:

$$i_2 = \iint_{S_2} J_2 \frac{d\vec{s}_2 d\vec{S}_2}{ds_2} \quad (4.72)$$

gdje su $\vec{J}_1$ i $\vec{J}_2$ vektori gustoća struja kroz petlju 1 odnosno petlju 2.

Uzajamna je magnetska energija uvrštenjem gornjih izraza za struju i_1 u izraz za uzajamnu energiju

$$(W_{m21} = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{S}_1}{R}, 4.68),:$$

$$\begin{aligned} W_{m21} &= \frac{\mu i_2}{4\pi} \iint_{S_1} J_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{S}_1}{ds_1} \oint_2 \frac{d\vec{s}_2 d\vec{S}_2}{R} = \\ &= \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \iint_{S_1} J_1 \frac{d\vec{s}_1 d\vec{S}_1}{R} \frac{d\vec{s}_2 d\vec{S}_2}{ds_1} = \\ &= \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \iint_{V_1} \frac{\vec{J}_1}{R} dV_1 d\vec{s}_2 = \\ &= i_2 \oint_2 \oint_1 \iint_{V_1} \frac{\mu \vec{J}_1}{4\pi R} dV_1 d\vec{s}_2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

a s obzirom da je:

$$\vec{A}_1 = \iiint_{V_1} \frac{\mu \vec{J}_1}{4\pi R} dV_1 \quad (4.74)$$

te se, nakon što se uvrsti izraz za struju: $i_2 = \iint_{S_2} J_2 \frac{d\vec{s}_2 d\vec{S}_2}{ds_2}$ dobiva:

$$\begin{aligned} W_{m21} &= i_2 \oint_2 \vec{A}_1 d\vec{s}_2 = \\ &= \iint_{S_2} J_2 \frac{d\vec{s}_2 d\vec{S}_2}{ds_2} \vec{A}_1 d\vec{s}_2 = \\ &= \iiint_{V_2} \vec{A}_1 \vec{J}_2 (d\vec{s}_2 d\vec{S}_2) = \iiint_{V_2} \vec{J}_2 \vec{A}_1 dV_2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Slično se dobiva za W_{m12} :

$$W_{m12} = \iiint_{V_1} \vec{J}_1 \vec{A}_2 dV_1, \quad (4.76)$$

pa se za uzajamnu energiju dvaju strujnih krugova može pisati:

$$W_{m21} = W_{m12} = \frac{I}{2} \left[\iiint_{V_1} \vec{J}_1 \vec{A}_2 dV_1 + \iiint_{V_2} \vec{J}_2 \vec{A}_1 dV_2 \right]. \quad (4.77)$$

Međutim, u strujnom krugu 1 postoji magnetski potencijal zbog struje i_1 , a u strujnom krugu 2 magnetski potencijal zbog struje i_2 , pa je *ukupna magnetska energija* jednaka:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{I}{2} \left[\iiint_{V_1} \vec{J}_1 (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dV_1 + \iiint_{V_2} \vec{J}_2 (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dV_2 \right] \\ &= \frac{I}{2} \iiint_{V_1+V_2} \vec{J} \vec{A} dV. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Integraciju se s volumena vodiča 1 i 2 može proširiti na širi prostor, a to je prostor u kojem ne teku struje pa je zbog $\vec{J} = 0$ u ostalom dijelu prostora doprinos integralu jednak nuli:

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \vec{A} dV. \quad (4.79)$$

Izvedena formula daje točan iznos magnetske energije, ali nam ne pokazuje gdje je ta energija uskladištena. Zato, neka se promotri izraz:

$$\operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{A}) = \nabla(\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A}(\nabla \times \vec{H}) - \vec{H}(\nabla \times \vec{A}) = \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{A} \vec{J} - \vec{H} \vec{B} \quad (4.80)$$

odnosno:

$$\vec{J} \vec{A} = \operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \vec{B} \quad (4.81)$$

pa kad se ovaj izraz uvrsti u izraz (4.79) za energiju odnosno: $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \vec{A} dV$ može se uz primjenu

Gaussovog teorema na prvi član (uz $\operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{A})$), dakle pisati:

$$W_m = \frac{I}{2} \left[\iiint_V \operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{A}) dV + \iiint_V \vec{H} \vec{B} dV \right] = \frac{I}{2} \oint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{I}{2} \iiint_V \vec{H} \vec{B} dV. \quad (4.82)$$

Pusti li se da $V \rightarrow \infty$, doprinos konačnih struja u volumenu V u plošnom je integralu (u beskonačnosti) jednak nuli, pa je:

$$W_m = \frac{I}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{H} \vec{B} dV = \frac{\mu}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} H^2 dV = \frac{I}{2\mu} \iiint_{-\infty}^{\infty} B^2 dV. \quad (4.83)$$

Ako je sredstvo *nelinearno*, tad je:

$$W_m = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_0^B \bar{H} \, d\bar{B} \, dV. \quad (4.84)$$

Za slučaj da je permeabilnost: $\mu = \text{const.}$ dobiva se ranije izvedeni izraz za energiju magnetskog polja.

4.4 ULANČANI TOK

Vlastiti su induktiviteti L_{11} i L_{22} dosad bili nepotpuno određeni. Naime, bio je određen samo vanjski induktivitet (slika 4.8 preko magnetskog toka kroz šrafiranu površinu).

Magnetski tok kroz šrafiranu površinu ulančava ukupnu struju i . Ako povećamo površinu u područje vodiča (srednja linija), onda tok kroz tu plohu nije ulančan s cijelom strujom i već samo njenim jednim dijelom.

Ulančani tok (sveden na ukupnu struju i) definira se kao:

$$\Psi = \frac{1}{i} \iint_S \Phi \, di = \frac{1}{i} \iint_S J \oint_s \bar{A} d\bar{s} \, dS = \frac{1}{i} \iiint_V \bar{J} \bar{A} \, dV = \frac{2W_m}{i} = Li. \quad (4.85)$$

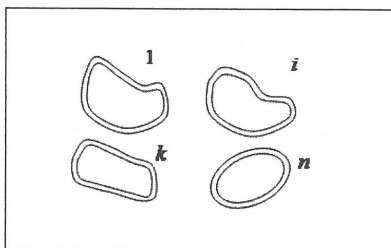
U sustavu od n strujnih krugova (petlji) može se definirati:

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{i_i} \iint_{S_i} J_i \oint_{s_i} \bar{A}_k d\bar{s}_i \, dS_i = \frac{1}{i_i} \iiint_{V_i} \bar{J}_i \bar{A}_k \, dV_i = \frac{W_{mik}}{i_i} = L_{ik} i_k. \quad (4.86)$$

i:

$$\Psi_{ii} = \frac{1}{i_i} \iint_{S_i} J_i \oint_{s_i} \bar{A}_i d\bar{s}_i \, dS_i = \frac{1}{i_i} \iiint_{V_i} \bar{J}_i \bar{A}_i \, dV_i = \frac{2W_{mii}}{i_i} = L_{ii} i_i. \quad (4.87)$$

Za n strujnih krugova, uzimajući u obzir njihove realne dimenzije (slika 4.11), vrijedi odnos između magnetskih tokova i struja:



Slika 4.11 Više međuinduktivno povezanih strujnih petlji

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= L_{11}i_1 + \dots + L_{1i}i_i + L_{1k}i_k + \dots + L_{1n}i_n \\
 &\vdots \\
 \Psi_i &= L_{i1}i_1 + \dots + L_{ii}i_i + L_{ik}i_k + \dots + L_{in}i_n \\
 \Psi_k &= L_{k1}i_1 + \dots + L_{ki}i_i + L_{kk}i_k + \dots + L_{kn}i_n \\
 &\vdots \\
 \Psi_n &= L_{n1}i_1 + \dots + L_{ni}i_i + L_{nk}i_k + \dots + L_{nn}i_n
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

ili matrično:

$$\Psi = \mathbf{L} \mathbf{i}. \tag{4.89}$$

Vektori Ψ i $\mathbf{i}$ su vektori ulančenih tokova odnosno struja, matrica $\mathbf{L}$ je matrica induktiviteta cijelog sustava međuinduktivno povezanih petlji.

Također je dalje:

$$\begin{aligned}
 &1.) \quad > 0 \quad \text{eventualno negativna jedna struja} \\
 L_{ik} = L_{ki} \quad &2.) \quad \begin{cases} > 0 & \text{ako struja } i \text{ u petlji } k \text{ stvara tok istog smjera kao i tok struje } k \\ < 0 & \text{ako struja } i \text{ u petlji } k \text{ stvara tok suprotnog smjera od toka struje } k \end{cases} \\
 &L_{ii} > 0.
 \end{aligned}$$

Samoinduktivitet strujnog kruga se može, dakle, izračunati na dva načina:

- izračunom ulančanog magnetskog toka Ψ pa je induktivitet: $L = \frac{\Psi}{i}$,
- izračunom energije akumulirane u strujnom krugu, pa je induktivitet: $L = \frac{2W_m}{i^2}$.

Često je drugi način mnogo jednostavniji.

4.4.1 Ulančani tok i unutarnji induktivitet beskonačno dugog okruglog vodiča radijusa R_0

Okrugli vodič te indukcija unutar i van vodiča prikazani su na slici 4.12.

Primjenom Ampèreovog zakona unutar vodiča je:

$$B_\alpha 2\pi r = \mu J r^2 \pi = \mu i \frac{r^2 \pi}{R_0^2 \pi}$$

$$J = \frac{i}{R_0^2 \pi}, \quad (4.90)$$

$$B_\alpha = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{r}{R_0^2} \quad r \leq R_0$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{r}{R_0^2},$$

$$A_z = -\frac{\mu i}{4\pi} \frac{r^2}{R_0^2} + C, \quad r \leq R_0. \quad (4.91)$$

Van vodiča je dalje:

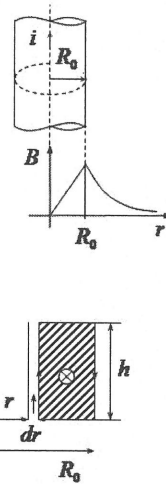
$$B_\alpha = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{1}{r} \quad r \geq R_0,$$

$$B_\alpha \bar{a}_\alpha = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}_z = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \bar{a}_\alpha =$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \bar{a}_\alpha = \frac{\mu i}{2\pi r} \bar{a}_\alpha, \quad r \geq R_0,$$

$$A_z = -\frac{\mu i}{2\pi} \ln r + C,$$

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{s}. \quad (4.92)$$



Slika 4.12 Unutarnji induktivitet beskonačno dugog okruglog vodiča

4.4.1.1 Ulančani tok - prva definicija

$$\begin{aligned}\Psi_h &= \frac{1}{i} \iint_S \Phi_r di = \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} J r d\alpha dr [A_z(r) - A_z(R_0)] h\end{aligned}\quad (4.93)$$

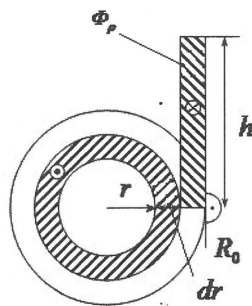
Uvrštenjem komponente magnetskog vektorskog potencijala $A_z = -\frac{\mu i}{4\pi} \frac{r^2}{R_0^2}$ te

gustoće struje $J = \frac{i}{R_0^2 \pi}$ u ovaj izraz dobiva se nakon integriranja, (slika 4.13):

$$\begin{aligned}\psi_h &= \frac{1}{i} \frac{i}{R_0^2 \pi} 2\pi \int_0^{R_0} r \frac{\mu i}{4\pi R_0^2} (R_0^2 - r^2) h dr = \\ &= \frac{\mu i h}{2\pi R_0^4} \int_0^{R_0} (R_0^2 r - r^3) dr = \\ &= \frac{\mu i h}{2\pi R_0^4} \left[R_0^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{R_0} = \\ &= \frac{\mu i h}{2\pi R_0^4} \left[\frac{R_0^4}{2} - \frac{R_0^4}{4} \right] = \\ &= \frac{\mu i h}{2\pi R_0^4} \frac{R_0^4}{4} = \frac{\mu i h}{8\pi}\end{aligned}\quad (4.94)$$

Po jedinici duljine odgovarajuće su veličine toka i induktiviteta:

$$\begin{aligned}\Psi_h &= \frac{\Psi_h}{h} = \frac{\mu i}{8\pi}, \quad L_u = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu}{8\pi} \\ [\Psi] &= \frac{Vs}{m} = \frac{Vsm}{m^2} = Tm, \quad [L_u] = \frac{H}{m}\end{aligned}\quad (4.95)$$



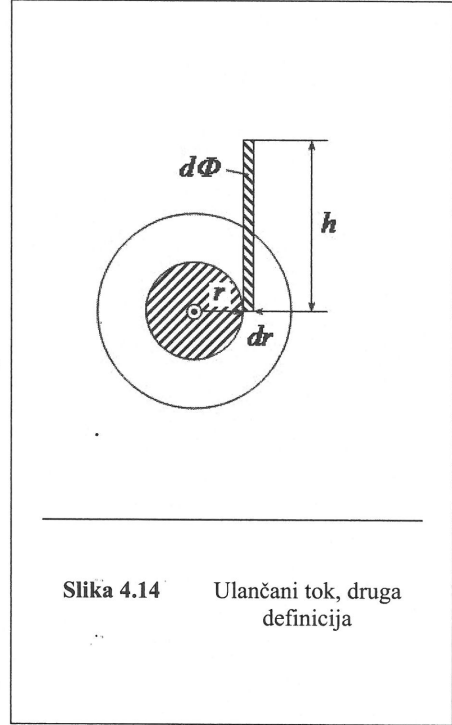
Slika 4.13 Ulančani tok

4.4.1.2 Ulančani tok - druga definicija

Tok je ulančan strujom, ali i struja ulančana tokom, (slika 4.14). Dakle:

$$\begin{aligned}\Psi_h &= \frac{1}{i} \int_0^{R_0} i_r d\Phi \\ \frac{i_r}{i} &= \frac{Jr^2 \pi}{JR_0^2 \pi} = \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \\ d\Phi &= [A_z(r) - A_z(r+dr)]h = \frac{\mu i h}{4\pi \rho_0^2} [(r+dr)^2 - r^2] = \\ &= \frac{\mu i h}{4\pi R_0^2} [r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2] \cong \frac{\mu i h}{2\pi R_0^2} r dr\end{aligned}\quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}d\Phi &= h B_\alpha dr = \frac{\mu i h}{2\pi R_0^2} r dr \\ \Psi_h &= \int_0^{R_0} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \frac{\mu i h}{2\pi R_0^2} r dr = \frac{\mu i h}{2\pi R_0^4} \int_0^{R_0} r^3 dr = \frac{\mu i h}{8\pi} \\ \Psi &= \frac{\mu i}{8\pi}, \quad L_u = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu}{8\pi}.\end{aligned}\quad (4.97)$$



4.4.1.3 Energija magnetskog polja

$$\begin{aligned}W_{mh} &= \frac{1}{2\mu} \iiint_V B^2 dV = \frac{1}{2\mu} \int_{z_0}^{z_0+h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} B_\alpha^2 r d\alpha dr dz \\ W_{mh} &= \frac{1}{2\mu} \int_{z_0}^{z_0+h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \left(\frac{\mu i}{2\pi} \frac{r}{R_0^2} \right)^2 r d\alpha dr dz = \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{\mu^2 i^2}{4\pi^2 R_0^4} h 2\pi \frac{R_0^4}{4} = \frac{1}{2} \frac{\mu h}{8\pi} i^2,\end{aligned}\quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{W_{mh}}{h} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{8\pi} i^2 = \frac{1}{2} L_u i^2, \\ L_u &= \frac{\mu}{8\pi}.\end{aligned}$$

4.4.2 Energija dvaju magnetski spregnutih strujnih krugova

Za dva kruga, prema ranije izvedenom, vrijedi:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \Psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2\end{aligned}\quad (4.100)$$

Pomnoži li se prva jednadžbu s i_1 , a druga s i_2 te se zbroje, a nakon toga ih se podijeli s 2, dobiva se:

$$W_m = \frac{1}{2}\Psi_1i_1 + \frac{1}{2}\Psi_2i_2 = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2. \quad (4.101)$$

Srednji član na desnoj strani jednadžbe je ranije izvedena uzajamna energija dvaju magnetski vezanih strujnih krugova. Prvi i treći član na desnoj strani jednadžbe predstavljaju energiju prvog odnosno drugog kruga, za slučaj da u drugom odnosno prvom krugu ne teče struja. Ukupna se energija može odrediti i pomoću izraza na lijevoj strani jednadžbe (4.101), dakle umnožaka struja i tokova.

Mjesto je da se istakne odnos samoinduktiviteta L_{11} odnosno L_{22} i međuinduktiviteta L_{12} (L_{21}). Napiše li se gornji izraz kao:

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{2}\Psi_1i_1 + \frac{1}{2}\Psi_2i_2 = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 = \\ &= \frac{1}{2}i_1^2(L_{11} + 2L_{12}\frac{i_2}{i_1} + L_{22}(\frac{i_2}{i_1})^2) = \frac{1}{2}i_1^2(L_{11} + 2L_{12}x + L_{22}x^2)\end{aligned}\quad (4.102)$$

pri čemu je:

$$x = i_2 / i_1. \quad (4.103)$$

Neka se potraži ekstrem W_m deriviranjem W_m po x te tako dobiveni izraz izjednači s nulom:

$$\begin{aligned}\frac{dW_m}{dx} &= \frac{1}{2}i_1^2(2L_{12} + 2L_{22}x) = 0, \\ x &= -\frac{L_{12}}{L_{22}}.\end{aligned}\quad (4.104)$$

S obzirom da je $\frac{d^2W_m}{dx^2} > 0$ (osim za $i_1=0$) energija je minimalna i jednaka je:

$$W_m = \frac{1}{2}i_1^2(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}), \quad (4.105)$$

a to je uvijek veće ili jednako nuli što znači da je i:

$$\begin{aligned}L_{11}L_{22} - L_{12}^2 &\geq 0, \\ L_{12}^2 &\leq L_{11}L_{22}\end{aligned}\quad (4.106)$$

što je poznato i iz samih osnova elektrotehnike.

Općenito je za n strujnih krugova:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Psi_i i_i. \quad (4.107)$$

4.4.2.1 Pregled izraza za energiju elektrostatičkog i magnetostatičkog polja

n nabijenih vodiča

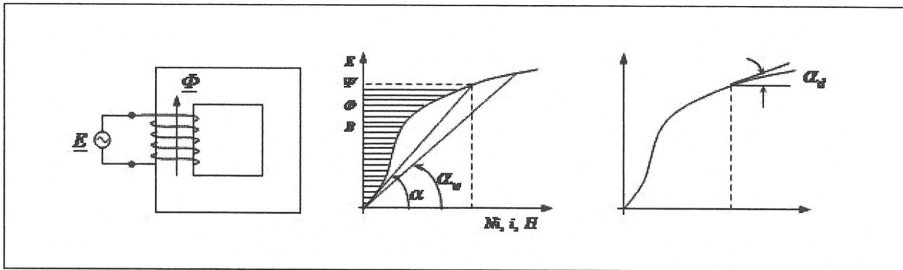
n strujnih krugova

$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i$ $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j Q_i$ $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i$ $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon E^2 dV$ $= \frac{1}{2} \iiint_V \frac{D^2}{\varepsilon} dV$	$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Psi_i i_i$ $W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} i_i$ $W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} i_j i_i$ $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV$ $= \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$
--	--

(4.108)

Za nelinearne odnose (nehomogeno izotropno sredstvo) odgovarajući su izrazi (slika 4.15):

$$W_e = \iiint_V \left(\int_0^D E dD \right) dV \quad W_m = \iiint_V \left(\int_0^B H dB \right) dV \quad (4.109)$$

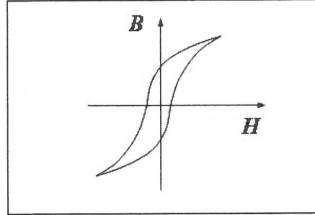


Slika 4.15 Nelinearni magnetski krug i krivulja magnetiziranja

Za nelinearno sredstvo nije više uputno pisati magnetski tok s induktivitetom na način da je $\Psi = Li$ već kao $\Psi = \Psi(i)$. Naime, pišući $\Psi = Li$ mogu se pojedine točke funkcijske ovisnosti $\Psi = \Psi(i)$ kvalificirati na čisto statički način, na primjer: $L = \frac{\Psi}{i} = \tan \alpha$, (slika 4.15, sredina).

Uputno je odmah uvesti dinamički induktivitet koji ima odgovarajuću ulogu u jednažbi za induciranu elektromotornu silu (slika 4.15, sasvim desno):

$$\begin{aligned} e_i &= -\frac{d\Psi(i)}{dt} = -\frac{di}{di} \frac{d\Psi(i)}{dt} = \\ &= -\frac{d\Psi(i)}{di} \frac{di}{dt} = -\operatorname{tg} \alpha_d(i) \frac{di}{dt} = -L_d(i) \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (4.110)$$



Slika 4.16 Histereza

U prethodnim je izrazima:

$$L_d = \operatorname{tg} \alpha_d = \frac{d\Psi}{di} \quad (4.111)$$

dinamički induktivitet.

Na taj način zapis magnetskog toka u obliku $\Psi = Li$ biva besmislen s obzirom da se općenito nelinearna funkcija prejudicira kao linearna pa se pri formalno točnom deriviranju $d\Psi/dt = L di/dt + i dL/dt$ javlja i član dL/dt za koji nitko ne zna što predstavlja iako je formalno moguće naći takav $L(t)$ koji zadovoljava jednažbu za inducirani napon ako nikako drugačije, a ono numerički.

Krivulja magnetiziranja, kakva je na primjer prikazana na slici 4.15, obično se modelira s polinomskom funkcijom bilo u H bilo u B . Za većinu aplikacija bit će dovoljno da se pri modeliranju krivulje magnetiziranja primijeni oblik:

$$B = k_1 t h k_2 H + k_3 H. \quad (4.112)$$

Za točnije modeliranje krivulje magnetiziranja pri malim iznosima jakosti polja bilo bi potrebno navedenom obliku ovisnosti dodati još jedan član koji odražava „trenje“ pri malim iznosima jakosti magnetskog polja tako da bi konačni oblik ovisnosti bio:

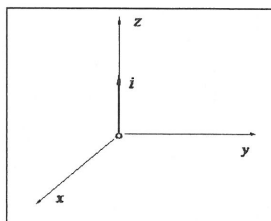
$$B = k_1 t h k_2 H + k_3 H + \frac{k_4 H}{k_5^2 + H^2}. \quad (4.113)$$

Ovisnost se je mogla modelirati i interpolatorom tipa neuronske mreže s neuronom slične (nelinearne) prijenosne funkcije tipa hiperbolnog tangensa. Pri modeliranju histereze $B=B(H)$, (slika 4.16) treba postupiti nešto drugačije. Najlakše ju je modelirati kao funkciju dvije varijable:

- jakosti magnetskog polja H te:
- smjera magnetiziranja $s = \operatorname{sign}(dH/dt)$.

Oblik funkcije s dvije varijable se može dobiti također primjenom interpolatora tipa dvoslojne neuronske mreže sa sigmoidalnim tipom prijenosne funkcije neurona. Za slučaj da se treba modelirati familija histereza za različite frekvencije treba i frekvenciju uvesti kao treću varijablu. Eventualno, četvrta bi se varijabla mogla odnositi na vrstu materijala.

4.4.3 Linijska struja



Slika 4.17 Linijska struja

U osi z (u vodiču čiji polumjer $R_0 \rightarrow 0$) teče struja i , slika 4.17. U okolišu se uspostavlja magnetsko polje indukcije:

$$B_\alpha = \frac{\mu i}{2\pi r}, \quad (4.114)$$

a z komponenta magnetskog vektorskog potencijala slijedi iz:

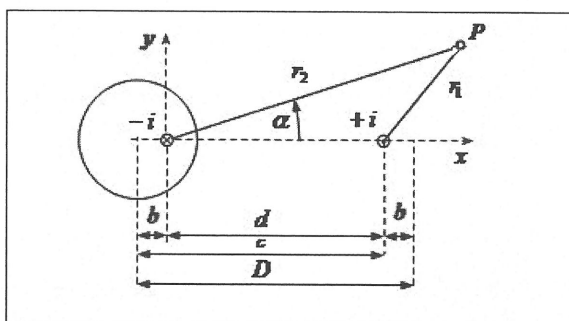
$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = B_\alpha, \quad A_z = -\frac{\mu i}{2\pi} \ln r + C. \quad (4.115)$$

U elektrostatici je skalarni potencijal linijskog naboja:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln r + C, \quad (4.116)$$

dakle rješenja su formalno matematički identična. Fizikalna je razlika da se za $r = \text{const.}$ za elektrostatičko polje dobiva kružnica kao ekvipotencijalna linija (ekvipotencijalne plohe su valjci), a za magnetostatičko polje pri $r = \text{const.}$ dobiva se jednačba silnice (kružnica).

- Dvije linijske struje istog iznosa



Slika 4.18 Dvije linijske struje

Magnetski vektorski potencijal u točki P je, [3], (slika 4.18):

$$A_z(P) = -\frac{\mu i}{2\pi} \ln r_1 + \frac{\mu i}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + C. \quad (4.117)$$

Analogno za slučaj linijskog naboja može se uzeti da je magnetski potencijal za $r_2 = r_1$ jednak nuli pa je:

$$C=0. \quad (4.118)$$

Silnice su kružnice s radijusom:

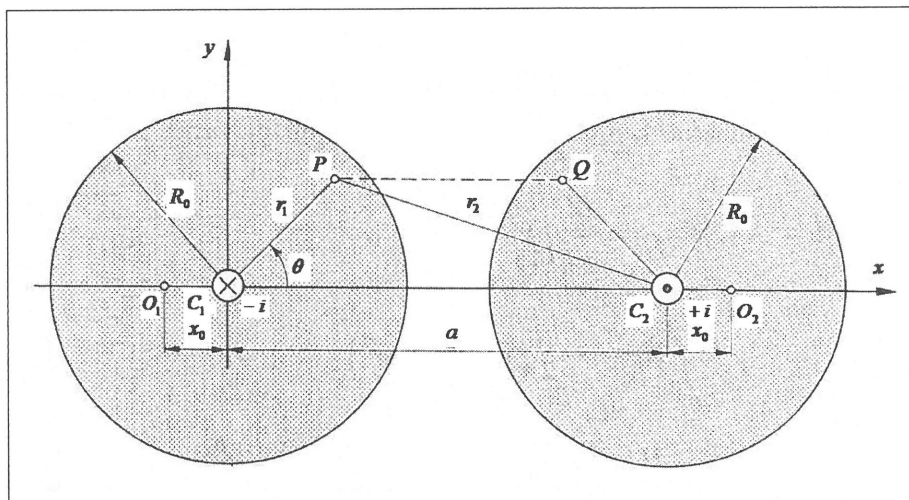
$$a = \frac{md}{m^2 - 1} \quad 0 < m < \infty \quad (4.119)$$

sa središtem na udaljenosti b lijevo od ishodišta na osi y :

$$-x_0 = b = \frac{d}{m^2 - 1} \quad (y_0 = 0). \quad (4.120)$$

4.4.4 Realni dvožični vod

Konfiguracija je slična prethodnom slučaju, ali ovdje vodiči imaju konačne polumjere R_0 , a središta su na razmaku a , (slika 4.19), [3]. Gustoća struje po presjeku vodiča je jednolika. Smjer z osi je iz ravnine papira.



Slika 4.19 Dvožični vod realnih dimenzija

Za razliku od linijskih struja gdje jakost polja odnosno indukcija za $r=0$ postaje beskonačna kod realnog dvožičnog voda prolazeći linijom središta vodiča obuhvaćena će struja biti jednaka nuli, a time će i jakost magnetskog polja biti jednaka nuli (Ampèreov zakon protjecanja).

Prvo treba odrediti magnetski vektorski potencijal jednog vodiča kojim protječe struja gustoće $-\vec{a}_z J$ (lijevi vodič):

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (4.121)$$

Simbolom J označena je gustoća struje po presjeku vodiča, a s $\vec{a}_z$ jedinični vektor u smjeru z osi.

S obzirom da postoji samo z komponenta struje, [11]:

$\vec{A} = -\vec{a}_z A(r)$ pa je:

$$\Delta \vec{A}_z = -\vec{a}_z A(r) = -\vec{a}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] = -\vec{a}_z \mu_0 J. \quad (4.122)$$

Ovisnosti o α i z u gornjem izrazu nema (cilindrični koordinatni sustav) pa unutar vodiča treba računati samo s diferencijalnom jednadžbom po z komponenti magnetskog vektorskog potencijala:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \mu_0 J. \quad (4.123)$$

Dvostrukom integracijom dobiva se magnetski vektorski potencijal unutar vodiča (područje gdje teče struja):

$$A_u = \mu_0 J \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{21}. \quad (4.124)$$

Izabere li se tako da je:

$A_u \neq \infty$, pri $r \rightarrow 0$ tad $C_{11} \rightarrow 0$ pa je:

$$A_u = \mu_0 J \frac{r^2}{4} + C_{21} = \mu_0 \frac{i}{4R_0^2 \pi} r^2 + C_{21}. \quad (4.125)$$

U prostoru van vodiča gdje nema struje je:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.126)$$

pa je:

$$A_v = C_{12} \ln r + C_{22}. \quad (4.127)$$

Na granici vodič – zrak je:

$$A_u(R_0) = A_v(R_0) \quad (4.128)$$

ili:

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi R_0^2} R_0^2 + C_{21} = C_{12} \ln R_0 + C_{22} \quad (4.129)$$

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} = C_{12} \ln R_0 + C_{22}$$

S obzirom da nema skoka strujnog obloga $\vec{K}$ na granici vodič – zrak vrijedi:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{n}_{12} \times \left(\frac{\text{rot } \vec{A}_v}{\mu_0} - \frac{\text{rot } \vec{A}_u}{\mu_0} \right) = \vec{K} = 0. \quad (4.130)$$

S obzirom da je u cilindričnim koordinatama:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{a}_\alpha + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right) \vec{a}_z = \quad (4.131)$$

$$\text{rot } \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{a}_\alpha$$

$$\text{pa } n_{12} \times \left(\frac{\text{rot } \vec{A}_v}{\mu_0} - \frac{\text{rot } \vec{A}_u}{\mu_0} \right) = 0 \text{ iz (4.130) prelazi u:}$$

$$\left. \frac{\partial A_u}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \left. \frac{\partial A_v}{\partial r} \right|_{r=R_0} \quad (4.132)$$

odnosno:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi R_0} = \frac{C_{12}}{R_0} \quad (4.133)$$

$$C_{12} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

Uvrsti li se ovaj izraz u drugu jednadžbu izraza (4.129):

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} = C_{12} \ln R_0 + C_{22} \quad (4.134)$$

dobiva se za C_{22} :

$$C_{22} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R_0. \quad (4.135)$$

Konačno je izraz za magnetski vektorski potencijal van vodiča $\vec{A}_v$ (izraz 4.127, $A_v = C_{12} \ln r + C_{22}$):

$$\vec{A}_v = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r + \frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R_0 \right) \vec{a}_z \quad (4.136)$$

ili:

$$\vec{A}_v = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r}{R_0} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} \right) \vec{a}_z = \left(-\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_{21} \right) \vec{a}_z \quad (4.137)$$

što se može pisati i kao:

$$\vec{A}_v = \left[\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R_0}{r} \right) + C_{21} \right] \vec{a}_z. \quad (4.138)$$

• **Magnetska indukcija u vodiču $r \leq R_0$:**

$$\vec{B}_u = \vec{B}_{u\alpha} = \text{rot} \vec{A}_u = -\vec{a}_\alpha \frac{\partial A_u}{\partial r} = -\vec{a}_\alpha \frac{\mu_0 i}{2\pi R_0^2} r \quad (4.139)$$

što je već ranije dobiveno (4.91), ali za pozitivno usmjerenu struju u odnosu na z os.

• **Magnetska indukcija van vodiča: $r \geq R_0$:**

$$\vec{B}_u = \vec{B}_{v\alpha} = \text{rot} \vec{A}_v = -\vec{a}_\alpha \frac{\partial A_v}{\partial r} = -\vec{a}_\alpha \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R_0}{r} \frac{1}{R_0} = -\vec{a}_\alpha \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (4.140)$$

Za dvožični vod sad treba primijeniti superpoziciju, ali sad je za desni vodič pozitivni smjer vektora gustoće struje $\vec{J}$ s obzirom na z os. Za lijevi vodič treba uzeti predznak „+“ (struja teče suprotno pozitivnom smjeru z osi), a za desni predznak „-“ (struja teče u smjeru z osi) u dobijenom izrazu za vektorski potencijal (4.137) s obzirom da je u (4.137) već uračunat predznak.

Tako je sad ukupni magnetski vektorski potencijal $\vec{A}$ van oba vodiča, [3], [11]:

$$\vec{A}_{v12} = \vec{A}_v(r_1) + \vec{A}_v(r_2) = \left[\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{R_0} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2}{R_0} + \frac{1}{2} \right) \right] \vec{a}_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \vec{a}_z. \quad (4.141)$$

U pravokutnim je koordinatama:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}, \quad (4.142)$$

$$\vec{A}_{v12} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{x^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \vec{a}_z. \quad (4.143)$$

Magnetska je indukcija van vodiča:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_{v12} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{a}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{a}_y = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y. \quad (4.144)$$

Ovdje se za jedinične vektore u x i y smjeru upotrebljavaju oznake $\vec{a}_x$ i $\vec{a}_y$ umjesto $\vec{i}$ i $\vec{j}$ kako ne bi bilo dvojbi s obzirom na oznaku struje.

Osim toga je i:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_1}{\partial y} &= \frac{y}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x} &= \frac{x}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = -\frac{a-x}{r_2} = \frac{x-a}{r_2},\end{aligned}\quad (4.145)$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r_2}{r_1} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial y} - r_1 \frac{\partial r_2}{\partial y}}{r_2^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{r_2^2} \left(r_2 \frac{y}{r_1} - r_1 \frac{y}{r_2} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r_1 r_2} \left(r_2 \frac{y}{r_1} - r_1 \frac{y}{r_2} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right)\end{aligned}\quad (4.147)$$

$$\begin{aligned}B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r_2}{r_1} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial x} - r_1 \frac{\partial r_2}{\partial x}}{r_2^2} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{r_2^2} \left(r_2 \frac{x}{r_1} - r_1 \frac{x-a}{r_2} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r_1 r_2} \left(r_2 \frac{x}{r_1} - r_1 \frac{x-a}{r_2} \right) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right)\end{aligned}\quad (4.148)$$

- **Magnetski vektorski potencijal $\vec{A}$ u vodiču 1, ($r_1 \leq R_0$) superpozicijom (C_{21} se poništi) je:**

$$\begin{aligned}\vec{A}_{u12} &= \vec{A}_u(r_1) + \vec{A}_v(r_2) = \left[\frac{\mu_0 i r_1^2}{4 R_0^2 \pi} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2}{R_0} + \frac{1}{2} \right) \right] \vec{a}_z = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2 R_0^2 \pi} \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} - R_0^2 \ln \frac{r_2}{R_0} \right) \vec{a}_z,\end{aligned}\quad (4.149)$$

$$\vec{A}_{u12} = \frac{\mu_0 i}{2 R_0^2 \pi} \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} - R_0^2 \ln \frac{r_2}{R_0} \right) \vec{a}_z. \quad (4.150)$$

Komponente indukcije B_x i B_y su :

$$B_x = \frac{\mu_0 i y}{2 R_0^2 \pi} \left(1 - \frac{R_0^2}{r_2^2} \right), \quad B_y = \frac{\mu_0 i}{2 R_0^2 \pi} \left(\frac{x-a}{r_2^2} R_0^2 - x \right). \quad (4.151)$$

Na x osi postoji samo B_y komponenta (za $y=0$).

- **Magnetski vektorski potencijal $\vec{A}$ u vodiču 2, ($r_2 \leq R_0$) je:**

$$\vec{A}_{u21} = \vec{A}_u(r_2) + \vec{A}_v(r_1) = \frac{\mu_0 i}{2R_0^2 \pi} \left(-\frac{r_2^2}{2} + \frac{R_0^2}{2} + R_0^2 \ln \frac{r_1}{R_0} \right) \vec{a}_z. \quad (4.152)$$

Međutim, postoje mjesta na x osi gdje je komponenta indukcije B_y (a i odgovarajuća komponenta jakosti magnetskog polja H_y) također jednaka nuli, a prema prije navedenom izrazu za B_y (4.151):

$$B_y = \frac{\mu_0 i}{2R_0^2 \pi} \left(\frac{x-a}{r_2^2} R_0^2 - x \right), \quad H_y = \frac{i}{2R_0^2 \pi} \left(\frac{x-a}{r_2^2} R_0^2 - x \right), \quad (4.153)$$

to se događa na mjestu:

$$\frac{x-a}{r_2^2} R_0^2 - x = 0. \quad (4.154)$$

Također je još za $y = 0$: $r_2 = a - x$ što (4.154) vodi do kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - ax - R_0^2 = 0, \quad (4.155)$$

a rješenja su:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + R_0^2}, \quad (4.156)$$

a to su točke unutar vodiča.

Iznos $x_0 = \left| \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + R_0^2} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + R_0^2} - \frac{a}{2}$, a ucrtan je i označen na slici 4.19 s x_0 lijevo od ishodišta C_1 odnosno središta lijevog vodiča (točka O_1) i desno od središta C_2 desnog vodiča (točka O_2), a također je ucrtan na istoj slici.

Na tim su mjestima iznosi magnetskog vektorskog potencijala:

- Vodič 1: O_1 , x_0 , $r_1 = x_0$, $r_2 = a + x_0$,

$$A_{u12}|_{x=x_0} = \frac{\mu_0 i}{2R_0^2 \pi} \left(\frac{x_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} - R_0^2 \ln \frac{a+x_0}{R_0} \right). \quad (4.157)$$

- Vodič 2: O_1 , $a+x_0$, $r_1 = a+x_0$, $r_2 = x_0$

$$A_{u21}|_{x=a+x_0} = \frac{\mu_0 i}{2R_0^2 \pi} \left(-\frac{x_0^2}{2} + \frac{R_0^2}{2} + R_0^2 \ln \frac{a+x_0}{R_0} \right), \quad (4.158)$$

odakle se usporedbom utvrđuje:

$$A_{u21} = -A_{u12}. \quad (4.159)$$

Ukupni magnetski tok treba izračunati po već poznatom izrazu (4.49):

$$\begin{aligned} \Phi_{l_1} &= \oint_s \vec{A} d\vec{s} = -A_{u12}l_1 + A_{u21}l_1 = -2A_{u12}l_1 = \\ &= \frac{\mu_0 i l_1}{\pi R_0^2} \left(R_0^2 \ln \frac{a+x_0}{R_0} + \frac{R_0^2 - x_0^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.160)$$

Put s će se odabrati upravo tragovima O_1-O_2 -os O_2 (po duljini vodiča 2) - O_1 - os O_1 (po duljini vodiča 1) - O_1 . U radijalnom smjeru, na primjer O_1-O_2 i obrnuto nema doprinosa integralu za magnetski tok budući da su vektori $\vec{A}$ i $d\vec{s}$ međusobno okomiti.

Uz izraz $x_0 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + R_0^2} - \frac{a}{2}$ odnosno $R_0^2 - x_0^2 = ax_0$ maksimalni se magnetski tok po jedinici duljine dobiva iz prethodnog izraza ako se Φ_{l_1} podijeli s l_1 :

$$\Phi = \frac{\Phi_{l_1}}{l_1} = -A_{u12} + A_{u21} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \left(\ln \frac{a+x_0}{R_0} + \frac{ax_0}{2R_0^2} \right). \quad (4.161)$$

Tok je najveći upravo u toj konturi s obzirom da su tu najveći iznosi magnetskih vektorskih potencijala. Na primjer, tok u konturi čiji su tragovi $P-Q$ je manji jer su i magnetski vektorski potencijali u oba vodiča tamo manji. P i Q su simetrični u odnosu na polovište O_1-O_2 .

Za induktivitet voda mjerodavan je ulančeni tok, a ne ukupni. Sad će se pokušati naći taj ulančeni tok. Ulančeni se tok dobiva integriranjem pojedinačnih tokova preko cijele površine vodiča. Oko P i Q (slika 4.19) se načini diferencijal površine $dS = r_1 d\theta dr_1$ te se izračuna ulančeni tok uvrštenjem izraza za diferencijal površine u:

$$\Psi = \iint_S \Phi \frac{dS}{S_0}, \quad (4.162)$$

gdje je $S_0 = R_0^2 \pi$ površina presjeka jednog vodiča.

$$\Psi = -2l_1 \int_{r_1} \int_{\theta} A_{u12} \frac{r_1 d\theta dr_1}{\pi R_0^2}. \quad (4.163)$$

S obzirom da je prema već izloženom (izraz 4.150):

$$A_{u12} = \frac{\mu_0 i}{2R_0^2 \pi} \left[\frac{r_1^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} - R_0^2 \ln \frac{r_2}{R_0} \right]$$

te da je prema kosinusnom poučku $r_2^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \theta$ ili:

$$\left(\frac{r_2}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 - \frac{2ar_1 \cos \theta}{R_0^2} \quad (4.164)$$

to je:

$$\Psi = \frac{\mu_0 i}{2\pi^2} \int_{r_1} \int_{\theta} \left\{ \ln \left[\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 - \frac{2ar_1}{R_0^2} \cos \theta \right] + 1 - \frac{r_1^2}{R_0^2} \right\} \frac{r_1 d\theta dr_1}{R_0^2}. \quad (4.165)$$

Ovdje se pojavljuje određeni integral čije je rješenje prema priručnicima, [3], [11], [25]:

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta) d\theta = \begin{cases} 4\pi \ln x, & x \geq y > 0 \\ 4\pi \ln y, & y \geq x > 0 \end{cases} \quad (4.166)$$

odnosno za konkretan slučaj:

$$\int_0^{2\pi} \ln \left[\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 - \frac{2ar_1}{R_0^2} \cos \theta \right] d\theta = 4\pi \ln \frac{a}{R_0} \quad (4.167)$$

pa je ulančani tok:

$$\Psi = \frac{\mu_0 i l_1}{2\pi^2} \int_{r_1=0}^{r_1=R_0} \left[4\pi \ln \left(\frac{a}{R_0} \right) + 2\pi - 2\pi \frac{r_1^2}{R_0^2} \right] \frac{r_1 dr_1}{R_0^2} = \frac{\mu_0 i l_1}{\pi} \ln \left[\left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.168)$$

Induktivitet dvožičnog voda L je sad:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln \left[\left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.169)$$

Konačno, po jedinici duljine induktivitet je:

$$L_0 = \frac{L}{l_1} = \frac{\mu}{\pi} \ln \left[\left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.170)$$

Induktivitet je izračunat uz pretpostavku jednolike razdiobe struje po presjeku vodiča (čista statika), a vrijednosti induktiviteta za neke kvocijente a/R_0 prikazane su u tablici :

Tablica 4.3 Ukupni induktivitet dvožičnog voda po jedinici duljine u ovisnosti o kvocijentu a/R_0

a/R_0	2	5	10	100	1000
$L(\mu\text{H/km})$	0.38	0.74	1.02	1.94	2.86

Ovako izračunat induktivitet sadrži i vanjski i unutarnji dio. Unutarnji dio je: $L_u = \frac{\mu}{4\pi}$ što je 2 puta više od unutarnjeg (samo)induktiviteta jednog vodiča prema računu iz primjera okruglog beskonačno dugog vodiča s obzirom da se ovdje radi o 2 vodiča.

Vanjski dio induktiviteta je:

$$L_v = \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{a}{R_0} \right). \quad (4.171)$$

Prema tome, samoinduktivitet se uvijek može predstaviti na način da je njegov ukupni iznos jednak zbroju unutarnjeg i vanjskog induktiviteta $L = L_u + L_v$.

4.4.5 Energija dvožičnog voda

S obzirom da se računalo s ukupnim magnetskim vektorskim potencijalom $\vec{A}$ poslužit će izraz $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \vec{A} dV$ za magnetsku energiju primijenjen na 1. (lijevi) vodič gdje je vektor gustoće struje $-\vec{a}_z J$ odnosno:

$$W_1 = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \vec{J}_1 \vec{A}_{u12} dV_1 = \frac{1}{2} I_1 \iint_{S_1} \vec{J}_1 \vec{A}_{u12} dS_1, \quad (4.172)$$

pri čemu je I_1 duljina vodiča.

Za izračun su potrebne sljedeće veličine:

$$\vec{J}_1 = -\vec{a}_z \frac{i}{R_0^2 \pi}, dS_1 = r_1 dr_1 d\theta, r_2^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \theta, \quad (4.173)$$

$$A_{u12} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{r_1^2}{2R_0^2} - \frac{1}{2} - \ln \frac{r_2}{R_0} \right], \quad (4.174)$$

te:

$$W_1 = \frac{i}{2R_0^2 \pi} \iint_{S_1} (-A_{u12}) dS_1. \quad (4.175)$$

Neka se s I_1 označi integral prva dva člana u A_{u12} , a s I_2 integral trećeg člana u A_{u12} . Tad je:

$$I_1 = \int_{r_1=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[-\left(\frac{r_1}{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] r_1 dr_1 d\theta = \pi \frac{R_0^2}{4} \quad (4.176)$$

$$I_2 = \int_{r_1=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{R_0} \right) r_1 dr_1 d\theta = \pi R_0^2 \ln \left(\frac{a}{R_0} \right) \quad (4.177)$$

te je energija:

$$W_1 = \frac{\mu_0 i^2 l_1}{4R_0^2 \pi^2} (I_1 + I_2) = \frac{\mu_0 i^2 l_1}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{a}{R_0} + \frac{1}{4} \right) \right], \quad (4.178)$$

a ukupna je energija :

$$W_{uk} = 2W_1 = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} l_1 \left[\ln \left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} Li^2 \quad (4.179)$$

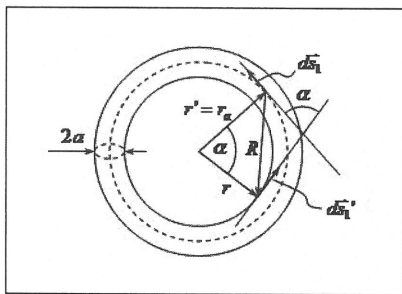
odakle je opet induktivitet L kao i u izrazu (4.169):

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln \left[\left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.180)$$

4.4.6 Induktivitet prstena kružnog presjeka

Vanjski je samoinduktivitet već prije definiran jednadžbom:

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_1'} \oint_{s_1} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_1'}{R}. \quad (4.181)$$



Slika 4.20 Prsten kružnog presjeka

Geometrijski odnosi prema slici 4.20 daju, [3]:

$$\begin{aligned} d\vec{s}_1 d\vec{s}_1' &= r_a dr_a d\alpha \cos \alpha \\ R^2 &= r_a^2 + r^2 - 2r_a r \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.182)$$

$$L_v \cong \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \alpha d\alpha}{R} \left(\int_0^{2\pi} r_a d\alpha \right) = \frac{\mu}{4\pi} (r_a 2\pi) r \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{r_a^2 + r^2 - 2r_a r \cos \alpha}}. \quad (4.183)$$

Uvede li se supstitucija:

$$\alpha = \pi + 2\beta \quad (4.184)$$

dobiva se:

$$d\alpha = 2d\beta, \quad (4.185)$$

$$\cos \alpha = \cos(\pi + 2\beta) = \cos \pi \cos 2\beta - \sin \pi \sin 2\beta = -\cos 2\beta,$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha, \quad (4.186)$$

$$\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2\sin^2 \beta - 1,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\pi/2,$$

$$\alpha = 2\pi, \quad \beta = \pi/2.$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r_a^2 + r^2 - 2r_a r (2\sin^2 \beta - 1)} = \sqrt{r_a^2 + r^2 - 4r_a r \sin^2 \beta + 2r_a r} = \\ &= \sqrt{(r_a + r)^2 - 4r_a r \sin^2 \beta} = (r_a + r) \sqrt{1 - \frac{4r_a r}{(r_a + r)^2} \sin^2 \beta} = (r_a + r) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}, \end{aligned} \quad (4.187)$$

$$k = \frac{2\sqrt{r_a r}}{r_a + r}.$$

Supstitucijom izvedenih izraza u izraz za induktivitet L_v (4.183) dobiva se:

$$L_v \cong \mu \frac{r_a r}{r_a + r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta = 2\mu \frac{r_a r}{r_a + r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta. \quad (4.188)$$

Sam integral je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}}_{K(k) - \text{potpuni eliptički integral prve vrste}}. \quad (4.189)$$

Prvi pribrojnik u gornjem izrazu je:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} &= \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2 \sin^2 \beta - 1 + 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \\ &= -\frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \beta d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} + \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \\ &= -\frac{2}{k^2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta}_{E(k) - \text{potpuni eliptički integral druge vrste}} + \frac{2}{k^2} K(k) \end{aligned} \quad (4.190)$$

Stoga je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta = \frac{2 - k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k), \quad (4.191)$$

a vanjski induktivitet:

$$\begin{aligned} L_v &\cong 2\mu \frac{r_a r}{r_a + r} \left[\frac{2 - k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \\ &= 2\mu \frac{r_a r}{r_a + r} \frac{2}{4 r_a r} \left[\frac{k^2}{2} \frac{2 - k^2}{k^2} K(k) - E(k) \right] \cdot \\ &\quad \frac{(r_a + r)^2}{(r_a + r)^2} \\ &= \mu(r_a + r) \left[\frac{2 - k^2}{2} K(k) - E(k) \right] \end{aligned} \quad (4.192)$$

Taj se izraz može preurediti s obzirom da je:

$$\frac{2 - k^2}{2} = \frac{2 - \frac{4 r_a r}{(r_a + r)^2}}{2} = \frac{(r_a + r)^2 - 2 r_a r}{(r_a + r)^2} = \frac{r_a^2 + r^2}{(r_a + r)^2}. \quad (4.193)$$

pa je:

$$\begin{aligned} L_v &\cong \mu r_a \left[\frac{r_a + r}{r_a} \frac{r_a^2 + r^2}{(r_a + r)^2} K(k) - \frac{r_a + r}{r_a} E(k) \right] = \\ &= \mu r_a \left[\frac{1 + \left(\frac{r}{r_a} \right)^2}{1 + \frac{r}{r_a}} K(k) - \left(1 + \frac{r}{r_a} \right) E(k) \right] \end{aligned} \quad (4.194)$$

za $k \cong 1$ je:

$$\begin{aligned} E(k) &\cong 1 + \left(A - \frac{1}{2} \right) (1 - k^2) + \frac{3}{16} \left(A - \frac{13}{12} \right) (1 - k^2)^2 \\ K(k) &\cong A + \frac{A - 1}{4} (1 - k^2) + \frac{9}{64} \left(A - \frac{7}{6} \right) (1 - k^2)^2 \end{aligned} \quad (4.195)$$

$$A = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}$$

U našem je slučaju:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4r_a r}{(r_a+r)^2}}} = \frac{r_a+r}{\sqrt{r_a^2+2r_a r+r^2-4r_a r}} = \frac{r_a+r}{r_a-r} = \frac{r_a+r}{a}, \quad (4.196)$$

$$E(k) \cong 1$$

$$K(k) = \ln \frac{4(r_a+r)}{a} \cong \ln \frac{8r_a}{a}. \quad (4.197)$$

$$L_v \cong \mu r_a \left(\ln \frac{8r_a}{a} - 2 \right)$$

Unutarnji je induktivitet:

$$L_u = \frac{\mu}{8\pi} 2r_a \pi = \mu r_a \frac{1}{4} \quad (4.198)$$

pa je *ukupni induktivitet prstena*:

$$L = L_v + L_u \cong \mu r_a \left[\ln \left(\frac{8r_a}{a} \right) - \frac{7}{4} \right]. \quad (4.199)$$

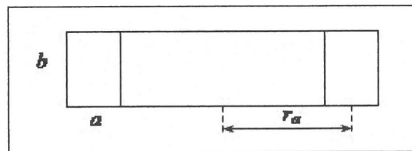
Taj izraz vrijedi za *istosmjernu struju* i *niske frekvencije izmjenične struje*.

Za izmjenične struje vrlo visoke frekvencije približno je:

$$L = L_v + L_u \cong \mu r_a \left[\ln \left(\frac{8r_a}{a} \right) - 2 \right]. \quad (4.200)$$

4.4.7 Induktivitet prstena pravokutnog presjeka:

Mjere pravokutnog prstena prikazane su na slici 4.21.



Slika 4.21 Prsten pravokutnog presjeka

Opseg i površina presjeka prstena te parametri ekvivalentnog kružnog presjeka (s polumjerom a') su:

$$\begin{aligned} 2(a+b) &= 2a' \pi, \quad a' = \frac{a+b}{\pi} \\ ab &= a'^2 \pi, \quad a' = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}. \end{aligned} \quad (4.201)$$

Uvrštavajući $a' = \frac{a+b}{\pi}$ umjesto a u izraz za induktivitet prstena kružnog presjeka (4.198):

$$L = L_v + L_u \cong \mu r_a \left[\ln \left(\frac{8r_a}{a} \right) - \frac{7}{4} \right]$$

dobiva se iz:

$$\ln \left(\frac{8r_a}{a+b} \pi \right) - \frac{7}{4} = \ln \frac{8r_a}{a+b} + \ln \pi - \frac{7}{4} \cong \ln \frac{8r_a}{a+b} + 1.148 - 1.75 = \ln \frac{8r_a}{a+b} - 0.602,$$

približno:

$$L \cong \mu r_a \left(\ln \frac{8r_a}{a+b} - 0.5 \right) \quad (4.202)$$

za istosmjernu struju i izmjeničnu struju niske frekvencije.

4.4.8 Međuinduktivitet dvaju prstenova

Međuinduktivitet dvaju prstenova prema slici 4.22 računa se prema izrazu:

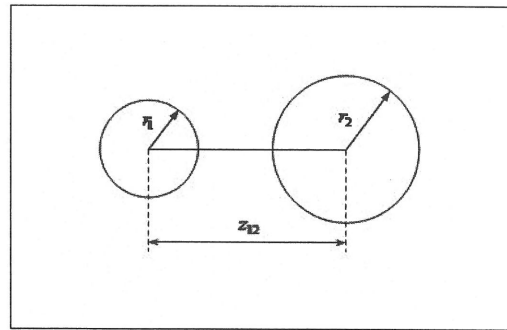
$$L_{12} = L_{21} \cong \mu \sqrt{r_1 r_2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

$$k^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + z_{12}^2},$$

$$k \cong 1,$$

$$L_{12} = L_{21} \cong \frac{\mu \sqrt{r_1 r_2}}{k} \left[\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} - 2 \right].$$

(4.203)



Slika 4.22 Dva prstena

4.4.9 Sile u magnetostatičkom polju

Razlikujemo izolirani i neizolirani sustav, [3], [5], [6], [11] kao i pri razmatranjima sila u elektrostatičkom polju. Potencijalna energija *izoliranog sustava* se nastoji smanjiti. Iznos sile jednak je promjeni energije ako se vodič u cjelini pomakne za mali dio puta u istom smjeru $\vec{s}$:

$$\vec{F}_s = - \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_{(Q, \Phi)} \vec{s}_0 \quad (4.204)$$

pri čemu će vrijediti puna analogija između elektrostatičkih i magnetostatičkih veličina na način tako da je:

- $Q \rightarrow \Phi$
- $D \rightarrow B$.

Navedeni izraz za silu vrijedi ako se naboj odnosno magnetski tok drže konstantnim.

Na primjer, u elektrostatici sila između ploča izoliranog nabijenog kondenzatora bila je jednaka:

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{C} \right) \vec{s}_0. \quad (4.205)$$

U magnetostatici za 1 strujni krug je:

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{L} \right) \vec{s}_0, \quad (4.206)$$

a za dva međuinuktivno vezana kruga je:

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{2} \Phi_{12} \Phi_{21} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{L_{12}} \right) \vec{s}_0. \quad (4.207)$$

Sustav dakle nastoji povećati kapacitet odnosno induktivitet.

Neizolirani sustav je sustav vodiča priključen na vanjski izvor. Ako je izvor dovoljno izdašan on održava razlike potencijala konstantnim i struje vodiča konstantnim. Sile djeluju u smislu povećanja energije sustava. Odgovarajući izrazi za sile su:

za kondenzator u elektrostatici:

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial s} \vec{s}_0. \quad (4.208)$$

U magnetostatici za 1 strujni krug je:

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial s} \vec{s}_0, \quad (4.209)$$

a za dva međuinaktivno vezana kruga je:

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2} i_1 i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial s} \vec{s}_0. \quad (4.210)$$

Na primjer, za slučaj dvožičnog voda inuktivitet po jedinici duljine je bio:

$$L_0 = \frac{\mu}{\pi} \left[\ln \left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.211)$$

Pri virtualnoj varijaciji razmaka između vodiča održava se struja konstantnom te je iznos sile prema izrazu (4.209):

$$F_s = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial s} \quad (s=a)$$

jednak:

$$F_s = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{a}{R_0} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \right] = \frac{\mu I^2}{2\pi a}. \quad (4.212)$$

Za vakuum je sila je jednaka:

$$F_s = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 0.2 \cdot 10^{-6} \frac{I^2}{a} \quad (N/m), \quad (4.213)$$

a to je poznati izraz za silu između dvaju vodiča protjecanih istom strujom i služi kao definicijska jednadžba za jakost struje na primjer 1A putem mjerenja te sile.

MAGNETOSTATIKA

Oдавде se može zaključiti i na normalne komponente jakosti magnetskog polja:

$$\begin{aligned}\bar{n}_{12}(\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) &= 0, \\ H_{2n} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}\end{aligned}\quad (4.218)$$

Iz (4.218) slijedi da se normalne komponente jakosti magnetskog polja na granici dvaju sredstava mogu skokovito promijeniti.

- **Tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja radi skok za iznos linijske gustoće struje (strujnog obloga)**

Iz Ampèreovog kružnog zakona protjecanja primjenom Stokesovog teorema:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{H} dS = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \vec{n} dS \quad (4.219)$$

za pravokutnik na slici 4.23 desno može se napisati:

$$\vec{H}_1 \vec{s}_{01} a + \vec{H}_2 \vec{s}_{02} a + \text{dio po } b = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \vec{n}_0 ab. \quad (4.220)$$

Neka se sad pusti da visina pravokutnika teži k nuli odnosno $b \rightarrow 0$. Dio skalarnog produkta po stranici b pravokutnika postat će nula. Također će biti i:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{n}_0 ab \rightarrow 0. \quad (4.221)$$

Prostorne će struje postati plošne struje:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \vec{J} \vec{n}_0 ab = \vec{K} \vec{n}_0 a \quad (4.222)$$

gdje je $\vec{K}$ linijska gustoća struje odnosno strujni oblog. Izraz (4.220) postat će uzimajući u obzir da je još i $\vec{s}_{01} = -\vec{s}_{02}$:

$$-\vec{H}_1 \vec{s}_{02} + \vec{H}_2 \vec{s}_{02} = \vec{K} \vec{n}_0. \quad (4.223)$$

S obzirom da je dalje i: $\vec{s}_{02} = \vec{n}_0 \times \vec{n}_{12}$ ova izraz postaje:

$$\begin{aligned}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)(\vec{n}_0 \times \vec{n}_{12}) &= \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \vec{n}_0 = \vec{K} \vec{n}_0, \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{K}\end{aligned}\quad (4.224)$$

Dakle, tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja radi skok za iznos linijske gustoće struje na granici (strujni oblog). Ako strujnog obloga nema ili se može na drugi način taj skok modelirati tangencijalne će komponente jakosti magnetskog polja na granici biti jednake:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} = 0. \quad (4.225)$$

Odavde se može zaključiti i na tangencijalne komponente magnetske indukcije. Prema (4.224) je:

$$\begin{aligned}\vec{n}_{12} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) &= \vec{K}, \\ \frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} &= K, \\ B_{2t} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} + \mu_2 K.\end{aligned}\tag{4.226}$$

Iz (4.226) slijedi da se tangencijalne komponente magnetske indukcije na granici dvaju sredstava mogu skokovito promijeniti.

Magnetski vektorski potencijali na granici dvaju sredstava također su nepromijenjeni:

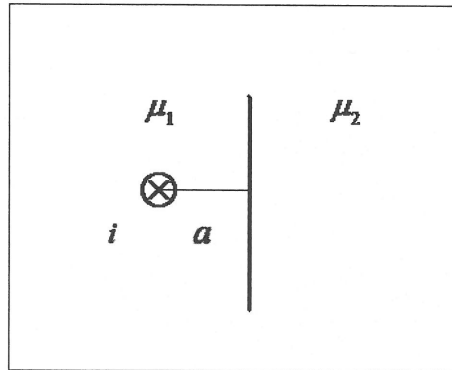
$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2.\tag{4.227}$$

Za idealni vodič vrijedi:

$$\vec{E}_2 = 0, \vec{H}_2 = 0, \vec{D}_2 = 0, \vec{B}_2 = 0.\tag{4.228}$$

4.5.1 Odslikavanje u magnetskom poluprostoru

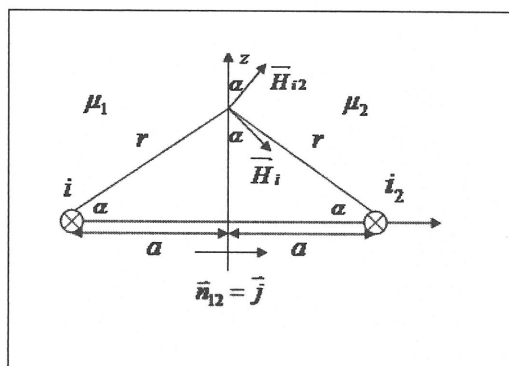
Magnetsko polje koje stvara struja i u sredstvu 1 permeabilnosti μ_1 magnetizira pored poluprostora 1 i poluprostor 2 permeabilnosti μ_2 (slika 4.24).



Slika 4.24 Odslikavanje u magnetskom poluprostoru

Na graničnoj ravni nastaje magnetizacija (magnetska polarizacija). Pri određivanju jakosti magnetskog polja u poluprostoru 1 magnetizacija se može nadomjestiti strujom i_2 koja se nalazi na udaljenosti a u drugom sredstvu (slika 4.25), [3], [11]. Pri određivanju jakosti magnetskog polja u poluprostoru 2 magnetizacija na granici nadomješta se strujom i_1 (odslikana struja i_2) točno na mjestu izvorne struje i (slika 4.26). Simboli $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su odgovarajući jedinični vektori.

4.5.1.1 Polje u sredstvu 1



Slika 4.25 Polje u sredstvu 1 određuju struje i i i_2

Polje u sredstvu 1 određuju struje i i i_2 , (slika 4. 25).

Jakost magnetskog polja je jednaka:

$$\vec{H}_1 = \frac{i}{2r\pi} (-\bar{k} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha) + \frac{i_2}{2r\pi} (\bar{k} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha) \quad (4.229)$$

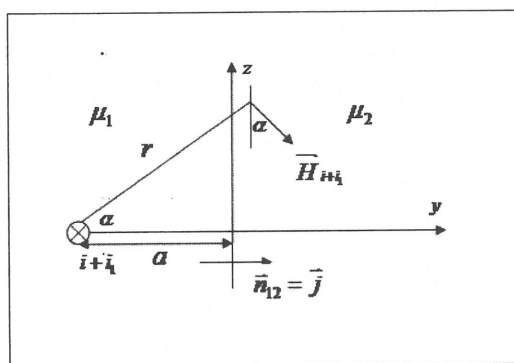
odnosno:

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{2r\pi} [\bar{k}(i_2 - i) \cos \alpha + \bar{j}(i + i_2) \sin \alpha]. \quad (4.230)$$

4.5.1.2 Polje u sredstvu 2

Polje u sredstvu 2 određuje zbroj struja $(i + i_1)$, (slika 4.26):

$$\vec{H}_2 = \frac{i + i_1}{2r\pi} (-\bar{k} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha). \quad (4.231)$$



Slika 4.26 Polje u sredstvu 2 određuje zbroj struja i i i_1

Potrebno je još primijeniti uvjete ne granici.

a) Normalne komponente magnetske indukcije (računaju se iz članova uz $\sin \alpha$)

$$\bar{n}_{12}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad (4.232)$$

a s obzirom da je: $\bar{n}_{12} = \bar{j}$ iz (4.232) prema izrazima (4.230) i (4.231) proizlazi:

$$\mu_2 \frac{i + i_1}{2r\pi} \sin \alpha - \mu_1 \frac{i + i_2}{2r\pi} \sin \alpha = 0 \quad (4.233)$$

ili:

$$\mu_2 (i + i_1) = \mu_1 (i + i_2). \quad (4.234)$$

b) *Tangencijalne komponente jakosti magnetskog polja (članovi uz $\cos \alpha$)*

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} = 0, \quad (4.235)$$

$H_{2t} = H_{1t}$ odnosno:

$$-\frac{i+i_1}{2r\pi} \cos \alpha - \frac{i_2-i}{2r\pi} \cos \alpha = 0 \quad (4.236)$$

odakle je odmah:

$$i_1 = -i_2 \quad (4.237)$$

pa kad se to uvrsti u izraz (4.234) dobiva se:

$$i_2 = -i_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} i. \quad (4.238)$$

Znači kao i za slučaj odslikavanja naboja u dielektričnom poluprostoru (elektrostatika), magnetska se polarizacija nadomješta odslikanim strujama. Ako je permeabilnost μ_2 velika tad u njemu (sredstvu 2) nema polja ($i_1 = -i$):

$$\vec{H}_2 = \frac{i+i_1}{2r\pi} (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) = 0. \quad (4.239)$$

U tom slučaju polje u sredstvu 1 određuje izvorna struja i i odslikana struja $i_2=i$ odnosno:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \frac{1}{2r\pi} [\vec{j}(i+i_2) \sin \alpha] = \\ &= \frac{1}{r\pi} \vec{j} i \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.240)$$

5 MAXWELLOVE JEDNADŽBE I VALNE JEDNADŽBE. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI. RAVNI VAL

Elektrostatičko polje za stacionarnu razdiobu naboja opisuju u potpunosti sljedeće jednačbe, [5], [17]:

Diferencijalni oblik	Integralni oblik	Relacije građe
$\text{rot } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{D} = \rho$	$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \iint_s \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0$ $\oiint_s \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$ Električni tok: $Q = \oiint_s \vec{D} d\vec{S}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

a magnetsko polje istosmjernih struja:

Diferencijalni oblik	Integralni oblik	Relacije građe
$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ $\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_s \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \iint_s \vec{J} d\vec{S}$ $\oiint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$ Magnetski tok: $\Phi = \iint_s \vec{B} d\vec{S}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \kappa \vec{E}$

te strujno stacionarno polje:

Diferencijalni oblik	Integralni oblik	Relacije građe
$\text{rot } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{D} = \epsilon \text{ div } \vec{E} = \frac{\epsilon}{\kappa} \text{ div } \vec{J} = 0$ (Nema izvora slobodnih nepokretnih naboja)	$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \iint_s \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0$ Strujni tok (struja): $I = \iint_s \vec{J} d\vec{S}$	$\vec{J} = \kappa \vec{E}$ (Ohmov zakon u elementarnom obliku)

Navedene jednačbe prerestriktivne su da bi opisale elektromagnetsko polje. Na primjer, da bi se proizvele trajne struje potrebno je nekonzervativno električno polje koje može proizvesti izdašni vanjski izvor.

5.1 OHMOV ZAKON I JOULEOV ZAKON. RELAKSACIJA NABOJA

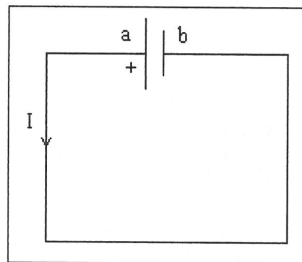
Gustoća struje u vodiču ovisi o električnom polju $\vec{E}'$ u vodiču. Ovisnost se obično izražava linearnom relacijom:

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}' \quad (5.1)$$

gdje je κ električna vodljivost koja ima mjernu jedinicu: $[\kappa] = \frac{Am}{m^2V} = \frac{S}{m}$.

Za izotropne je vodiče κ skalar, a za anizotropne je simetrični tenzor. U pretežitom se broju slučajeva može uzeti da je $\kappa = \text{const}$ odnosno $\nabla \kappa = 0$. Jednadžba $\vec{J} = \kappa \vec{E}'$ (5.1) Ohmov je zakon u elementarnom obliku.

5.1.1 Strujni krug istosmjerne struje



Slika 5.1 Strujni krug istosmjerne struje

Elektromotorna sila (ems) numerički je jednaka radu koji je potreban da se jedinični pozitivni naboj jedanput prenese po cijelom strujnom krugu, (slika 5.1), [4]:

$$e = \frac{W}{q} = \oint \vec{E}' d\vec{s} = \oint \frac{\vec{J}}{\kappa} d\vec{s} \quad (5.2)$$

gdje je $d\vec{s}$ element puta po strujnom krugu, a κ vodljivost vodiča.

Ako je struja istosmjerna (konstantna) tad je i $\vec{J} d\vec{s} \neq 0$, pa je $\oint \vec{E}' d\vec{s} \neq 0$ i električno polje ne može biti samo konzervativno polje. Zato se piše:

$$\int_a^b (\vec{E} + \vec{E}^{(i)}) d\vec{s} = 0 \quad (5.3)$$

gdje $\vec{E}$ je konzervativni dio jakosti električnog polja ($\text{rot } \vec{E} = 0$), a jakost polja $\vec{E}^{(i)}$ naziva se utisnutom silom na jedinični naboj (nekonzervativni dio polja). $\vec{E}^{(i)}$ proizvode baterije ili generatori. Izvan generatora je $\vec{E}^{(i)} = 0$.

U strujnom je krugu prema slici (vodič duljine l presjeka S vodljivosti κ i generator) struja kroz vodič :

$$I = \iint_S \vec{J} d\vec{S} = \kappa \iint_S \vec{E}' d\vec{S} = \kappa \iint_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (5.4)$$

odnosno:

$$I = \kappa E S. \quad (5.5)$$

Vrijedi da je linijski integral $\int_a^b I d\vec{s} = I l$ pa je s druge strane:

$$I l = \kappa S \int_a^b \vec{E} d\vec{s} = \kappa S \int_a^b (-\text{grad } \varphi) d\vec{s} = \kappa S \int_b^a \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \kappa S (\varphi_a - \varphi_b) \quad (5.6)$$

odakle je:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{l}{\kappa S} I \equiv R I, \quad (5.7)$$

gdje je $R = \frac{l}{\kappa S}$, otpor vodiča duljine l , presjeka S i vodljivosti κ , a mjeri se u omima:

$$[R] = m \frac{Vm}{A} \frac{1}{m^2} = \frac{V}{A} = \Omega.$$

5.1.2 Jouleov zakon

Jouleov zakon izriče da je toplinska snaga razvijena u vodiču otpora R kojim teče struja I :

$$P = R I^2 \quad (5.8)$$

Toplinska snaga po jedinici volumena (W/m^3) je prostorna gustoća snage:

$$\frac{P}{lS} = \frac{R}{lS} I^2 = \frac{l}{\kappa S} \frac{1}{lS} I^2 = \kappa \left(\frac{I}{\kappa S} \right)^2 = \kappa \left(\frac{J}{\kappa} \right)^2 = \kappa E^2. \quad (5.9)$$

Proširi li se gornji izraz i na izvor, dobiva se:

$$\kappa E'^2 = \vec{J}(\vec{E} + \vec{E}^{(i)}). \quad (5.10)$$

Vratimo se na strujni krug. Za elektromotornu se silu e prema (5.2) može pisati:

$$\begin{aligned} e &= \oint \vec{E}' d\vec{s} = \int_a^b \vec{E} d\vec{s} + \int_b^a (\vec{E} + \vec{E}^{(i)}) d\vec{s} = \oint \vec{E} d\vec{s} + \int_b^a \vec{E}^{(i)} d\vec{s}, \\ e &= \int_b^a \vec{E}^{(i)} d\vec{s} = \oint \frac{\vec{J}}{\kappa} d\vec{s}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Posljednja jednadžba ukazuje na to da struju uzrokuje samo utisnuta sila $\vec{E}^{(i)}$. Za otvoreni strujni krug $\vec{E}^{(i)}$ i elektrostatičko polje u generatoru se poništavaju:

$$\int_b^a (\vec{E} + \vec{E}^{(i)}) d\vec{s} = 0, \quad (5.12)$$

pa je:

$$e = \int_a^b \vec{E} d\vec{s}, \quad (5.13)$$

što znači da je elektromotorna sila jednaka razlici potencijala (naponu) na krajevima generatora, kad je strujni krug prekinut.

Snaga u cijelom strujnom krugu uključujući i izvor je:

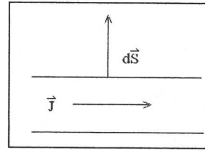
$$P = \iiint_V \vec{J}(\vec{E} + \vec{E}^{(i)}) dV. \quad (5.14)$$

Pošto je $\vec{E}$ konzervativno polje vrijedi:

$$\vec{J}\vec{E} = -\vec{J}\nabla\varphi = \varphi \operatorname{div} \vec{J} - \operatorname{div}(\varphi \vec{J}) \quad (5.15)$$

što, kao što je dobro poznato, slijedi iz izraza:

$$\nabla(\varphi \vec{J}) = \operatorname{div}(\varphi \vec{J}) = \nabla\varphi \vec{J} + \varphi \nabla \vec{J} = -\vec{E}\vec{J} + \varphi \operatorname{div} \vec{J}. \quad (5.16)$$



Slika 5.2 Odnos vektora gustoće električne struje $\vec{J}$ i elementa površine $d\vec{S}$ na površini vodiča

Za stacionarne je struje $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ pa je prema izrazu (5.16):

$$\nabla(\varphi \vec{J}) = \operatorname{div}(\varphi \vec{J}) = -\vec{E}\vec{J},$$

odakle je snaga uz primjenu Gaussovog teorema:

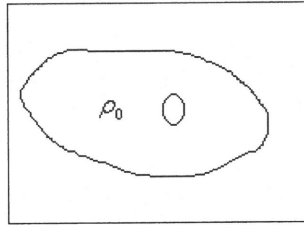
$$P = \iiint_V \vec{J}\vec{E}^{(i)} dV - \iiint_V \operatorname{div}(\varphi \vec{J}) dV = \iiint_V \vec{J}\vec{E}^{(i)} dV - \oint_S \varphi \vec{J} d\vec{S}. \quad (5.17)$$

Pošto je na površini vodiča $\vec{J} d\vec{S} = 0$ prema slici 5.2, to je snaga:

$$P = \iiint_V \vec{J}\vec{E}_i^{(i)} dV = \iiint_{V_i} \vec{J}\vec{E}^{(i)} dV_i. \quad (5.18)$$

5.1.3 Relaksacija naboja

Neka se pretpostavi da se unutar homogenog metala nalazi naboj ρ_0 u trenutku $t = 0$, (slika 5.3). Zbog električnog polja koje bi taj naboj stvorio potekla bi struja gustoće $\vec{J} = \kappa \vec{E}$, [4], [5], [6], [7]. Da bi se odredilo u kojem vremenu se naboj rasprši, treba poći od jednadžbe kontinuiteta.



Slika 5.3 U trenutku $t=0$ unutar metala nalazi se naboja prostorne gustoće ρ_0

Jednadžba kontinuiteta (zakon o održanju odnosno konzervaciji naboja) glasi:

$$i = \oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad (5.19)$$

Primjenom Gaussovog teorema, uz nepromijenjen volumen, dobiva se:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{J} dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV, \quad (5.20)$$

odnosno u diferencijalnom obliku:

$$\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho. \quad (5.21)$$

Uvrsti li se sad za gustoću struje $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ te primijeni Gaussov zakon ($\text{div} \vec{D} = \rho$) na lijevu stranu izraza (5.21), uz konstantne iznose specifične vodljivosti (κ) i dielektričnosti (ϵ), dobiva se nakon izjednačenja s desnom stranom:

$$\text{div} \vec{J} = \text{div} \kappa \vec{E} = \text{div} \kappa \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\kappa}{\epsilon} \text{div} \vec{D} = \frac{\kappa}{\epsilon} \rho = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (5.22)$$

vremenska diferencijalna jednadžba u ρ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{\kappa}{\epsilon} \rho. \quad (5.23)$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.24)$$

gdje je:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (5.25)$$

vremenska konstanta relaksacije naboja.

Dakle, u tom vremenu naboj padne na iznos $\frac{q_0}{e} = \frac{q_0}{2.73...}$. Za bakar je vremenska konstanta relaksacije:

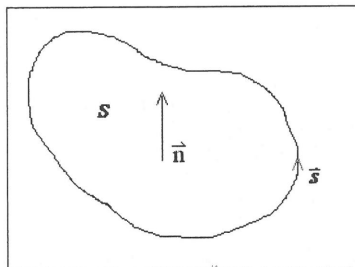
$$\tau \cong \frac{8,854 \cdot 10^{-12}}{57 \cdot 10^6} \frac{F}{m} \frac{m}{S} \cong 1,553 \cdot 10^{-19} \frac{As}{Vm} \frac{mV}{A} = 1,553 \cdot 10^{-19} s$$

Praktično za 5 do 6 vremenskih konstanti naboj nestane iz unutrašnjosti i zauzme stacionarni položaj na površini vodiča čime se uspostavlja elektrostatičko polje.

Za dobre izolatore vremenska konstanta relaksacije naboja može biti i više desetaka dana.

5.2 FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE

1831. godine otkrio je Michael Faraday (1791-1867) temeljni zakon, danas poznat pod nazivom Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, a koji izriče da promjena toka magnetske indukcije uzrokuje struju u strujnom krugu koji ulančava taj tok, [1], [2], [4], (slika 5.4).



Slika 5.4 Strujni krug zatvara površinu S kroz koju se mijenja tok magnetske indukcije

Neka je strujni krug realiziran s otporom R (slika 5.4) tad je Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$Ri = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.26)$$

gdje je $\vec{n}$ normala na element površine dS , bilo koje plohe, koja je ograničena putem s . Smjerovi plošnih $d\vec{S}$ i linijskih elemenata $d\vec{s}$ vezani su pravilom desnog vijka. Ranije je izvedena jednakost:

$$RI = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}, \text{ što se može proširiti i za slučaj općenito vremenski promjenjive struje } i: RI = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Ako nema dodatne utisnute sile $E^{(i)}$ (nema gibanja sustava pa je: $\int_b^a \vec{E}^{(i)} \cdot d\vec{s} = 0$), to iz jednadžbe za elektromotornu silu:

$$e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_b^a \vec{E}^{(i)} \cdot d\vec{s} \quad (5.27)$$

slijedi:

$$e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = RI. \quad (5.28)$$

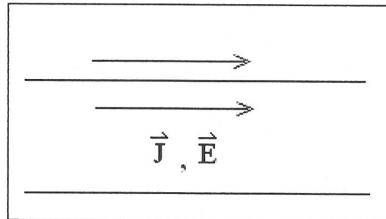
Polje $\vec{E}$ nije više konzervativno kao u elektrostatici (kao i u slučaju istosmjernih struja) pa zatvoreni linijski integral u (5.28) nije jednak nuli.

Dakle, prema Faradayu inducirana elektromotorna sila jednaka je negativnoj vremenskoj promjeni magnetskog toka kroz petlju koja ga obuhvaća:

$$e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (5.29)$$

Predznak „-“, izriče opće poznato Lenzovo pravilo „da je smjer inducirane ems takav da se protivi gibanju koje ju je izazvalo“. Ovako izražen Faradayev zakon elektromagnetske indukcije poznat je i kao 2. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku. Faraday je otkrio zakon iz pokusa sa žicom otpora R . Postavlja se pitanje, vrijedi li zakon kad se žica ukloni?

Zbog jednakosti tangencijalne komponente jakosti električnog polja na granici vodič - zrak (ili neki drugi izolator) slijedi da zakon vrijedi i bez žice.



Ta činjenica omogućava da se odmah (bez graničnih uvjeta zbog vodiča) prijeđe na diferencijalni oblik Faradayeva zakona. Za sustav (strujnu petlju) u mirovanju je:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.30)$$

pa je:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.31)$$

Pošto relacija vrijedi za bilo koju plohu S ograničenu sa s , primjena Stokesova teorema daje:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.32)$$

To je diferencijalna forma Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije i poznata je pod imenom 2. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku.

5.2.1 Pomaćne struje

Ranije je pokazano da za stacionarne struje vrijedi: $\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J}$ odnosno $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$. S obzirom da je uvijek: $\text{div rot } \vec{B} = 0$, a iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je: $\text{div } \vec{J} \neq 0$ to se mora potražiti takav oblik jednadžbe koja vrijedi i za nestacionarne struje (to jest da je uvijek zadovoljena relacija: $\text{div rot } \vec{B} = 0$).

Jednadžba kontinuiteta u diferencijalnom obliku glasi:

$$\text{div } \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.33)$$

Prema Gaussovom je zakonu $\rho = \text{div } \vec{D}$, pa je:

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.34)$$

Veličina u zagradi je nula i kad je $\text{div } \vec{J} \neq 0$ te se može prikazati rotorom nekog vektora.

Pretpostavka da je to vektor polja $\vec{H}$, dakle:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.35)$$

pokazala se ispravnom. To dokazuju elektromagnetski valovi, koji se mogu objasniti samo ako postoji

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ u posljednjoj jednažbi. Veličina $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ naziva se gustoćom pomaćnih struja. Ova je jednažba poznata i kao 1. Maxwellova jednažba u diferencijalnom obliku. S obzirom na Stokesov teorem:

$\iint_S \text{rot } \vec{H} d\vec{s} = \oint_S \vec{H} d\vec{s}$ ova se jednažba može napisati i u integralnom obliku:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}. \quad (5.36)$$

Dalje, primjenom operatora divergencije na dvije Maxwellove jednažbe u diferencijalnom obliku

(5.35, $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) odnosno (5.32, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) dobivaju se jednažbe:

$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\text{div } \vec{D})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-\rho + \text{div } \vec{D}) = 0, \quad (5.37)$$

odnosno:

$$\text{div rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{B}) = 0. \quad (5.38)$$

što znači da su veličine u zagradama izraza (5.37) i (5.38) konstantni. Ako nije bilo početne uzbude polja, konstante su nula pa se piše:

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (5.39)$$

i:

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (5.40)$$

Ove se jednažbe često nazivaju i sporednim Maxwellovim jednažbama (3. i 4.) i, kao što se vidi, mogu se izvesti iz 1. i 2. Maxwellove jednažbe.

Primjenom Gaussovog stavka one se mogu predočiti i u integralnom obliku:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV, \quad (5.41)$$

i:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.42)$$

Ponegdje se jednačba kontinuiteta u diferencijalnom obliku:

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.43)$$

odnosno integralnom obliku:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{J} dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV. \quad (5.44)$$

naziva i petom Maxwelllovom jednačbom.

5.2.2 Pregled Maxwellovih jednačbi

Dakle, cijela se teorija elektromagnetizma može skupiti u četiri temeljne jednačbe, koje se zovu Maxwellovim jednačbama za mirujuću sredinu u diferencijalnom obliku odnosno integralnom obliku s dodanom jednačbom kontinuiteta:

	Diferencijalni oblik	Integralni oblik	Relacije građe
1.	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)})$
2.	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{S}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)})$
3.	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = Q$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
4.	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
5.	$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \iiint_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$	$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)})$

Gore navedenim jednačbama valja pridružiti i definicijske jednačbe za tokove vektora električne $\Phi_e = \iint_S \vec{D} \vec{n} dS$ i magnetske indukcije $\Phi_m = \iint_S \vec{B} \vec{n} dS$ te gustoće struje $\Phi_s = I = \iint_S \vec{J} \vec{n} dS$.

U tri relacije konstitucije (građe):

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)})\end{aligned}\tag{5.45}$$

veliĉine ε , μ i κ u općem su sluĉaju tenzori. Dakle, broj jednaĉbi graĊe iznosi devet (svaka s po tri prostorne komponente). Protegnu li se vektori jakosti elektriĉnog i magnetskog polja u sve tri prostorne dimenzije dobiva se ukupno 6 skalarnih diferencijalnih odnosno integralnih jednaĉbi. Tu valja pribrojiti još jednu kao sedmu jednaĉbu i to skalarnu (jednaĉba kontinuiteta) što ukupno iznosi 16 jednaĉbi što diferencijalnih (integralnih) što algebarskih. Vektori jakosti elektriĉnog $\vec{E}$ i magnetskog polja $\vec{H}$ su vektori sile, a vektori $\vec{D}$ i $\vec{B}$ su vektori gustoće toka.

Ako se sustav giba na bilo koji naĉin, u gornjim jednaĉbama treba umjesto parcijalnih uzeti totalne vremenske derivacije.

Postoji i relativistiĉka transformacija Maxwellovih jednaĉbi, [4], [17], [35].

5.3 VALNE JEDNADŽBE

U linearnom, homogenom i izotropnom sredstvu koje miruje, skup od četiri Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom je obliku :

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\
 \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\
 \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}, \\
 \text{div } \vec{H} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Za pisanje tih jednadžbi korištene su i tzv. relacije građe:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \kappa \vec{E}. \tag{5.47}$$

Primijeni li se operacija „rotor“ na prvu Maxwellovu jednadžbu, uz zamjenu gustoće struje s $\vec{J} = \kappa \vec{E}$, te zamjene $\text{rot } \vec{E}$ s desnom stranom druge Maxwellovu jednadžbe, slijedi:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \kappa \text{rot } \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \tag{5.48}$$

Lijeva je strana jednadžbe (5.48) :

$$\text{rot rot } \vec{H} = \underbrace{\text{grad div } \vec{H}}_0 - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}, \tag{5.49}$$

pa se dobiva:

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \tag{5.50}$$

Primjena operatora „rotor“ na drugu Maxwellovu jednadžbu nakon te zamjene $\text{rot } \vec{H}$ s desnom stranom prve Maxwellovu jednadžbe, daje:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{5.51}$$

Lijeva je strana (5.51):

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} - \Delta \vec{E}, \tag{5.52}$$

pa slijedi:

$$\Delta \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (5.53)$$

Za prostor bez slobodnih naboja je: $\text{grad} \frac{\rho}{\epsilon} = 0$, dobivaju se konačno valne jednačbe:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} &= 0 \\ \Delta \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Za nevodljivo sredstvo ($\kappa=0$) odnosno sredstvo bez gubitaka nestaje član uz prvu vremensku derivaciju (5.54) pa se dobivaju diferencijalne prostorno-vremenske jednačbe:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Te se jednačbe u anglosaksonskoj literaturi nazivaju valnim jednačbama. Skalarna valna jednačba je parcijalna diferencijalna jednačba 2. reda, u općem slučaju nehomogena. Postoji opće rješenje ([25], stranice 526-539), a lakše ih je riješiti za neke posebne slučajeve. Valne jednačbe zapravo su sustav od 6 skalarnih valnih jednačbi. Ovdje valja naglasiti da iz Maxwellovih jednačbi proizlaze valne jednačbe, ali obrat ne vrijedi. Da bi se smanjio njihov broj, uvest će se pojmovi elektromagnetskih potencijala.

5.4 ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI

Neka se opet razmotri sustav Maxwellovih jednačbi u diferencijalnom obliku, [4], [5], [6], [17]:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \bar{D} &= \rho, \\ \text{div } \bar{B} &= 0, \\ \bar{D} &= \epsilon \bar{E}, \\ \bar{B} &= \mu \bar{H}, \\ \bar{J} &= \kappa \bar{E}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

koje definiraju makroskopsko elektromagnetsko polje, proizvedeno zadanim “neovisnim” gustoćama struje $\bar{J}$ i slobodnim nabojima prostorne gustoće ρ .

Uz izvore je potrebno zadati i odgovarajuće rubne i početne uvjete, koji moraju biti sukladni s već zadanim veličinama i sustavom jednažbi da bi zadaća imala smisla. Polje je određeno vektorima $\vec{E}$ i $\vec{B}$, to jest sa šest (6) skalarnih funkcija položaja i vremena, koje treba izračunati.

Potencijale će se uvesti u gornji sustav Maxwellovih jednažbi na sljedeći način. Vektor $\vec{B}$ je solenoidan, tj. bez izvora ($\text{div } \vec{B} = 0$), pa se može predstaviti rotorom drugog vektora na primjer vektora $\vec{A}$ (magnetski vektorski potencijal): $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Uvrštavanjem ovog izraza u drugu Maxwellovu jednažbu dobiva se za jakost električnog polja izraz:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\text{grad } \varphi, \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \end{aligned} \quad (5.58)$$

gdje je φ skalarna funkcija. Negativni predznak pred gradijentom je posljedica definicije skalarnog potencijala φ : želimo da u statičkom slučaju jakost električnog polja $\vec{E}$ ima smjer od većeg prema manjem potencijalu (suprotno rastu potencijala). U posljednjem se izrazu pored statičkog, dakle javlja i dinamička komponenta $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ jakosti električnog polja. Veličine $\vec{A}$ i φ su poznate kao magnetski vektorski i električni skalarni potencijal.

Nužno je da netom uvedene veličine $\vec{A}$ i φ također zadovoljavaju potpuni sustav Maxwellovih jednažbi. Razmatranje se pojednostavljuje, ako se promatranje polja ograniči na prostor čije granice nisu ovisne o vremenu i koji je ispunjen s linearnim, homogenim i izotropnim sredstvom.

Ako se umjesto jakosti magnetskog i električnog polja uvrste odgovarajući izrazi za potencijale uvrste u 1. Maxwellovu jednažbu ($\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$), a zatim i u treću ($\text{div } \vec{D} = \rho$) dobiva se redom:

- 1. Maxwellova jednažba ($\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) \\ \text{rot rot } \vec{A} + \mu \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \mu \vec{J} \end{aligned} \quad (5.59)$$

- 3. Maxwellova jednadžba ($\text{div } \vec{D} = \varepsilon \text{div } \vec{E} = \rho$) :

$$\varepsilon \text{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) = \rho, \quad (5.60)$$

$$-\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{div grad } \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Uvođenjem operatora $\Delta \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ (prema: $\text{rot rot } \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$) i $\Delta \varphi \equiv \text{div grad } \varphi$ mogu se jednadžbe (5.59) i (5.60) pomoću Laplaceovog (Δ) operatora, pisati u obliku:

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \vec{J}, \quad (5.61)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Tako se sustav od šest skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi reducira na četiri skalarne jednadžbe (jedna vektorska po magnetskom vektorskom potencijalu $\vec{A}$ i jedna skalarna po skalarnom potencijalu φ), koje su, međutim, još uvijek međusobno povezane preko:

- člana $\left(\text{div } \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$ u prvoj jednadžbi u (5.61) te:
- člana ($\text{div } \vec{A}$) u drugoj jednadžbi u (5.61).

Njihovo se razdvajanje može postići iskorištavanjem neodređenosti koja je bila uključena u definiciju potencijala. Magnetski vektorski potencijal $\vec{A}$ nije još jednoznačno propisan, jer je prema Helmholtzovom teoremu vektorska funkcija definirana jedinstveno tek pošto su joj zadani i rotor i divergencija. Naime, polje $\vec{B}$ je definirano preko $\vec{A}$ s $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, pa se k vektoru $\vec{A}$ može dodati gradijent proizvoljne skalarnе funkcije S .

Magnetska indukcija $\vec{B}$, na taj način, ostaje nepromijenjena pri transformaciji:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 - \text{grad } S \quad (5.62)$$

s obzirom da je:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}_0 - \text{rot grad } S = \text{rot } \vec{A}_0. \quad (5.63)$$

Da i električno polje $\vec{E}$ ostane nepromijenjeno, treba se skalarni potencijal istovremeno transformirati u:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (5.64)$$

odnosno prema izrazu za jakost električnog polja (5.58):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = -\frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } S - \text{grad } \varphi_0 - \text{grad } \frac{\partial S}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} - \text{grad } \varphi_0.\end{aligned}\quad (5.65)$$

Transformacije potencijala prema izrazima (5.62) i (5.64):

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}_0 - \text{grad } S \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{\partial S}{\partial t}\end{aligned}$$

nazivaju se baždarskim transformacijama (engleski: „gauge transformations“), a invarijantnost polja u ovim se pretvorbama naziva baždarskom invarijantnošću.

Zadavanjem potencijala “predodređuju” se polja i obratno: jedno te isto polje posjeduje više od jednog skupa potencijala. Pomoću proizvoljne skalarne funkcije S , moguće je, matematički korektno, za jedno polje (par $\vec{B}$ i $\vec{E}$) odabrati beskonačno mnogo odgovarajućih parova potencijala ($\vec{A}$ i φ).

U tom beskonačnom izboru mogućih potencijala, od posebnog su značaja dvije grupe potencijala, nazvanih Lorentzovi potencijali i Coulombovi potencijali. I jedni i drugi dobivaju se zadavanjem odgovarajućih dodatnih uvjeta. Pogodni su zato, jer u prvom redu daju takve matematičke modele, tj. pridružene sustave jednadžbi potencijala, kojih se rješenja u potpunosti podudaraju s realnošću i eksperimentalnim činjenicama.

Par Lorentzovih potencijala je povoljan s obzirom da vodi k valnim jednadžbama koje $\vec{A}$ i φ tretiraju na isti način i jer je taj koncept neovisan o izboru koordinatnog sustava, što je posebno prikladno u relativističkoj teoriji polja.

Par Coulombovih potencijala povoljan je zato, jer se u tom slučaju postiže najpotpunije razdvajanje potencijala $\vec{A}$ i φ i njihovih takozvanih transverzalnih i longitudinalnih polja, koje nijedan drugi izbor ne dopušta.

U posebnim se slučajevima može izabrati da φ iščezava, pa se elektromagnetsko polje može prikazati samo jednim, vektorskim potencijalom $\vec{A}$. Velika prednost sustava Coulombovih potencijala je u njihovoj jednostavnosti.

5.4.1 Lorentzovo baždarenje

S namjerom da se razdvoji par jednadžbi za potencijale neka se prepiše uvjet za razdvajanje potencijala $\vec{A}$ i φ u prvoj jednadžbi izraza (5.61):

$$\text{div } \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (5.66)$$

što je u biti jedna skalarne jednadžba. Taj se dodatni uvjet naziva Lorentzov uvjet, pa se stoga par potencijala $\vec{A}$ i φ koji ga zadovoljavaju, naziva Lorentzovim potencijalima. Rijetko se upotrebljava naziv Maxwellov uvjet. Neka se još uoči da je Lorentzov uvjet posljedica jednadžbe kontinuiteta (veza između vektora gustoće struje $\vec{J}$ i naboja ρ odnosno: $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$).

Naime, iz općeg rješenja odgovarajućih Poissonovih jednadžbi za statički slučaj magnetski vektorski i skalarni električni potencijal su:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dV', \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho}{R} dV'. \quad (5.67)$$

Neka se sad izračuna $\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A}$, a zatim pomoću jednadžbe kontinuiteta izrazi $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{\mu} \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\operatorname{div} \vec{J}}{R} dV' = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'} \frac{\rho}{R} dV' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\epsilon\varphi) = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.68)$$

što je zapravo jednadžba kontinuiteta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Proizvoljnost uključena u baždarske transformacije omogućava izbor para potencijala $\vec{A}$ i φ na takav način da Lorentzov uvjet (5.66) bude ispunjen.

To će se osigurati tako da proizvoljno odabrana skalarna funkcija S zadovoljava jednadžbu:

$$\Delta S - \mu\epsilon \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{A}_0 + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad (5.70)$$

a dobiva se uvrštavanjem baždarskih transformacija (5.62) i (5.64) u Lorentzov uvjet (5.66, $\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{A}_0 - \operatorname{grad} S) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 + \frac{\partial S}{\partial t} \right) &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{A}_0 + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} &= \Delta S - \mu\epsilon \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Par potencijala $\vec{A}_0$ i φ_0 partikularna (posebna) su rješenja jednadžbi potencijala. Naravno da posebice može vrijediti opet Lorentzov uvjet, ali sad za par $\vec{A}_0$ i φ_0 :

$$\operatorname{div} \vec{A}_0 + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = 0, \quad (5.72)$$

pa kad se ovaj uvjet za $\vec{A}_0$ i φ_0 uvrsti u (5.71) dobiva se da skalarna funkcija S koja također zadovoljava homogeni valnu jednadžbu:

$$\Delta S - \mu\epsilon \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \quad (5.73)$$

Uvođenjem Lorentzovog uvjeta (5.66) u jednačbe za potencijale (5.61), $\vec{A}$ i φ su sad jedinstveno definirani. Tim će se separirati parcijalne diferencijalne jednačbe za potencijale, pa se dobivaju dvije nehomogene valne jednačbe oblika:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{J}, \\ \Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Gornje jednačbe zajedno s Lorentzovim uvjetom čine skup jednačbi, ekvivalentan skupu Maxwellovih jednačbi po veličinama polja. Po analogiji s valovima u elastičnom mediju valovi po $\vec{A}$ nazivaju se transverzalnim, a valovi po φ longitudinalnim valovima. Ovdje je potrebno istaknuti da je, na primjer, druga jednačba građena slično kao i Poissonova jednačba u elektrostatici:

$$\Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.75)$$

s tim da se ovdje javlja dinamički (vremenski) član $\mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Koristeći D'Alembertov operator:

$$\square = \Delta - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

posljednja se jednačba može pisati i u obliku:

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Na isti bi se način mogla zapisati i jednačba za vektorski potencijal. Provedeni postupak pokazuje da, ako su zadani "neovisni" izvori polja (pobude), to jest prostorna razdioba naboja ρ i gustoća struje $\vec{J}$ u promatranom prostoru, može se elektromagnetsko polje ($\vec{E}$, $\vec{B}$) odrediti iz sustava valnih jednačbi za $\vec{A}$ i φ njihovim deriviranjem po prostornim koordinatama odnosno vremenu:

- magnetska indukcija: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ i:
- jakost električnog polja: $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$.

To je sustav od samo 4 skalarne diferencijalne jednačbe drugog reda s po jednom nepoznatom funkcijom. Rješenja tih jednačbi moraju biti podvrgnuta Lorentzovom uvjetu (5.66), tj. jednoj skalarnoj diferencijalnoj jednačbi. Za svaku posebnu zadaću rješenja trebaju biti i u skladu s posebnim rubnim i početnim uvjetima. Nakon što su jednom potencijali $\vec{A}$ i φ izračunati iz njihovih definicijskih valnih jednačbi jednoznačno se mogu odrediti vektori polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ na već izloženi način.

5.4.2 Coulombovo baždarenje

Drugi par potencijala za ista polja $(\vec{E}, \vec{B})$ dobiva se ako se primijeni Coulombovo ili transversalno baždarenje, to jest ako se umjesto Lorentzovog uvjeta izabere Coulombov dodatni uvjet:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (5.76)$$

Iz druge jednadžbe početno izvedenih jednadžbi za vektorski i skalarni potencijal:

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \vec{J}, \quad (5.61)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

može se vidjeti da skalarni potencijal u ovom slučaju zadovoljava Poissonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (5.77)$$

a koja uvijek određuje polje u stacionarnom stanju. Kako ovdje nije bilo zahtjeva da zadani naboj bude neovisan o vremenu, skalarni električni potencijal φ , kao rješenje Poissonove jednadžbe (5.77) trenutno slijedi promjenu prostorne gustoće naboja ρ bez ikakva kašnjenja, jer ta jednadžba nema

više dinamičkog člana $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, koji bi uzrokovao retardaciju (kašnjenje). Kako god, Poissonovu jednadžbu lakše je riješiti nego nehomogenu valnu jednadžbu. Dobiveni istodobni (neretardirani, nezakašnjeni) Coulombov skalarni potencijal φ uzrokovan je gustoćom “neovisnog” slobodnog naboja prostorne gustoće $\rho(x, y, z, t)$. Kad je Poissonova jednadžba riješena, jednadžba za vektorski potencijal $\vec{A}$ prelazi u oblik:

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \mu \varepsilon \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (5.78)$$

i može se bez daljnjega riješiti uz zadane rubne i početne uvjete, uzimajući skalarni potencijal φ kao poznatu funkciju i gustoću struje $\vec{J}$ kao “neovisni” zadani izvor polja. Po rješenju para potencijala $\vec{A}$ i φ deriviranjem po prostornim koordinatama odnosno vremenu, na isti način kao i u slučaju Lorentzovog baždarenja mogu se izračunati veličine polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

Rezultantno rješenje posljednje jednadžbe po $\vec{A}$, (5.78), uzrokovano je samo transversalnom strujom, tj. strujom neslobodnih naboja, pa je zato pogodno zadanu gustoću struje $\vec{J}$ rastaviti na dva dijela:

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t, \quad (5.79)$$

na longitudinalni i transversalni dio tako da za longitudinalnu komponentu bude:

$$\operatorname{rot} \vec{J}_l = 0 \quad (5.80)$$

te za transversalnu komponentu:

$$\operatorname{div} \vec{J}_t = 0. \quad (5.81)$$

Iz jednadžbe kontinuiteta je uz (5.81):

$$\operatorname{div} \vec{J} = \operatorname{div}(\vec{J}_l + \vec{J}_t) = \operatorname{div} \vec{J}_l = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5.82)$$

a koja povezuje longitudinalni dio vektora gustoće struje $\vec{J}$ s promjenom slobodnog naboja. Iz

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ slijedi:}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{J}_t, \\ \vec{J}_t &= \varepsilon \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Sad se jednadžba (5.78) u kojoj figurira $\vec{A}$ može napisati samo s transversalnim dijelom gustoće struje $\vec{J}_t$, koji nije vezan s promjenom slobodnog naboja ρ pošto se u (5.78) umjesto $\mu \varepsilon \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$ prema (5.83) uvrsti $\vec{J}_t$:

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_l - \mu \vec{J}_t + \mu \vec{J}_t \quad (5.84)$$

odnosno:

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_l. \quad (5.85)$$

Ovo je naravno izvoriste naziva “transverzalno baždarenje”. Jednadžbe (5.77) i (5.85) pokazuju da se skalarni potencijal φ računa iz slobodnog naboja, ali da on na vektorski potencijal $\vec{A}$ ne djeluje, što je posljedica uvođenja Coulombova uvjeta baždarenja.

Partikularno rješenje valnih jednadžbi po potencijalima $\vec{A}$ i φ :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{J}, \\ \Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.86)$$

uz Lorentzov uvjet je:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{R} dV' \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho\left(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{R} dV'\end{aligned}\quad (5.87)$$

gdje je $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ brzina svjetlosti u vakuumu.

Predznak “-“ u rješenjima za par potencijala $\vec{A}$ i φ znači da pojava za promatrača u točki P određenoj radijusvektrom $\vec{r}$, kasni u odnosu na točku izvora (radijusvektor $\vec{r}'$) za vrijeme $\left|\frac{R}{c}\right| = \left|\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right|$. Zbog toga se ti potencijali nazivaju retardirani odnosno zakašnjeni potencijali. Predznak “+“ nije fizikalno načelo kauzaliteta (uzročnosti), s obzirom da bi promatrač u točki P primijetio pojavu prije nego li se je dogodila. Ti se potencijali nazivaju avansirani potencijali.

5.4.3 Hertzov potencijal i Hertzov vektor

Lorentzov uvjet (5.66, $\text{div } \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$) dovodi u vezu oba potencijala $\vec{A}$ (magnetski vektorski) i φ (električni skalarni), [3], [17]. Ideja je Hertzovog potencijala da ujedini oba ova potencijala, a što je i moguće uvođenjem vektora $\vec{I}\vec{I}$ (superpotencijal) takvog da je skalarni potencijal φ :

$$\varphi = -\text{div } \vec{I}\vec{I}. \quad (5.88)$$

Lorentzov uvjet (5.66) daje vezu s magnetskim vektorskim potencijalom $\vec{A}$ (pri $\kappa = 0$):

$$\text{div } \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.66)$$

Uvrštenjem $\varphi = -\text{div } \vec{I}\vec{I}$ u Lorentzov uvjet (5.66) dobiva se:

$$\text{div } \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{I}\vec{I} = \text{div } \vec{A} - \text{div}(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{I}\vec{I}}{\partial t}) = 0 \quad (5.89)$$

ili:

$$\vec{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{I}\vec{I}}{\partial t} \quad (5.90)$$

odakle je još i:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (5.91)$$

Ovdje se $\vec{\Pi}$ zove Hertzov vektor poznat pri određivanju polja Hertzovog oscilatora. Dalje, magnetska indukcija $\vec{B}$ i jakost električnog polja $\vec{E}$ izraženi pomoću Hertzovog vektora su:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi} \quad (5.92)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad div } \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (5.93)$$

Uvrštavanjem (5.91, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}$) u prvu jednadžbu izraza (5.86):

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (5.94)$$

te (5.88, $\varphi = -\text{div } \vec{\Pi}$) u drugu jednadžbu izraz (5.86):

$$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.95)$$

dobiva se:

$$\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = -\mu \vec{J} \quad (5.96)$$

odnosno:

$$-\text{div} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (5.97)$$

Primijeni li se na prvu jednadžbu nakon dijeljenja s μ operator divergencije, a na drugu poslije množenja s ε derivacija po vremenu $\partial / \partial t$ dobiva se zapravo jedna jedinstvena jednadžba:

$$\begin{aligned} \text{div} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) \right] &= -\text{div } \vec{J}, \\ \text{div} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) \right] &= \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

S obzirom na jednakost lijevih strana ove jednadžbe očito moraju biti jednake i desne strane ovih jednadžbi. A i one moraju biti jednake prosto zato što jednakost desnih strana ovih jednadžbi slijedi iz jednadžbe kontinuiteta:

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.43)$$

Uvede li se vektor:

$$-\vec{\phi} = \Delta \vec{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (5.99)$$

iz izraza (5.96):

$$\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = -\mu \vec{J} \quad (5.96)$$

slijedi da je gustoća struje:

$$\vec{J} = \epsilon \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}, \quad (5.100)$$

a iz (5.97):

$$-\text{div} \left(\Delta \vec{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.97)$$

prostorna gustoća naboja:

$$\rho = -\epsilon \text{div} \vec{\phi}. \quad (5.101)$$

Izraz za Hertzov potencijal:

$$\Delta \vec{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\vec{\phi}$$

prostorno-vremenska je jednadžba koja je jednako građena kao i valne jednadžbe već uvedenih potencijala, (5.86):

$$\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (5.86)$$

$$\Delta \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

pa je i rješenje za vektor Hertzovog potencijala $\vec{\Pi}$ jednakog oblika odnosno:

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\phi}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.102)$$

Osvrne li se na izraz za električni skalarni (elektrostatički) potencijal dipola prema izrazu (2.242):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon r} \right) \quad (2.242)$$

može se iz $\varphi = -\text{div } \vec{I}\vec{I}$ zaključiti da je kandidat za Hertzov vektor:

$$\vec{I}\vec{I} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon r}, \quad (5.103)$$

ali da se dipolni moment $\vec{p}$ uzme kao dinamička veličina to jest kao $\vec{p}(t)$, a koja se, propagirajući se iz pozicije $\vec{r}'$ (pozicije izvora), očekuje na mjestu $\vec{r}$ nakon vremena $\left| \frac{R}{c} \right| = \left| \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c} \right|$ što se zapisuje u obliku: $p(\vec{r}) = p\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)$ odnosno kao zakašnjela („retardirana“) veličina na mjestu $\vec{r}$. O ovome će još biti riječi u poglavlju (7) o Hertzovom dipolu.

5.5 POYNTINGOV VEKTOR

Iz prve i druge Maxwellove jednadžbe:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{5.104}$$

množenjem prve Maxwellove jednadžbe s $(-\vec{E})$, a druge s $\vec{H}$ i njihovim zbrajanjem dobiva se:

$$\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J} \vec{E} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\tag{5.105}$$

pri čemu je $\vec{J}$ ukupna gustoća struje koja se općenito sastoji od dva doprinosa:

$$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)}).$$

Prvi doprinos potječe od slobodnih naboja ($\kappa\vec{E}$), a drugi je od aktivnog izvora ($\kappa\vec{E}^{(i)}$) pa je:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \vec{E}^{(i)}.\tag{5.106}$$

Uvrštenjem ovog izraza u izraz (5.105) dobiva se:

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\left(\frac{J^2}{\kappa} - \vec{J} \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}}{2}\right).\tag{5.107}$$

Pomnoži li se ovaj izraz s dV te prointegriraju li se obje strane izraza po cijelom volumenu V dobiva se:

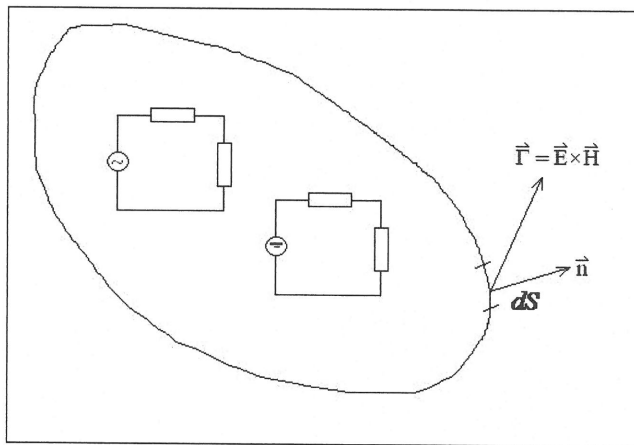
$$\iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV = -\iiint_V \frac{J^2}{\kappa} dV + \iiint_V \vec{J} \vec{E}^{(i)} dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV.\tag{5.108}$$

Primjenom Gaussovog stavka na lijevi član iz gornjeg izraza: $\iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S}$ slijedi nakon prebacivanja drugog člana s desne strane $\iiint_V \vec{J} \vec{E}^{(i)} dV$ na lijevu stranu, te množenja obje strane s (-1):

$$\iiint_V \vec{J} \vec{E}^{(i)} dV = \iiint_V \frac{J^2}{\kappa} dV + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S}.\tag{5.109}$$

Članovi ovog izraza znače sljedeće. Član na lijevoj strani: $\iiint_V \vec{J} \vec{E}^{(i)} dV$ predstavlja ukupnu snagu koju daje izvor i koja se distribuira na :

- $\iiint_V \frac{J^2}{\kappa} dV$ djelatne gubitke,
- $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV$ vremensku promjenu pohranjene energije (snagu) elektromagnetskog polja i
- $\oiint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S}$ tok snage iz promatranog volumena (isijana snaga) u okolni prostor, slika 5.5.



Slika 5.5 Uz definiciju Poyntingovog vektora

U slučaju da nema izvora: $\iiint_V \vec{J} \vec{E}^{(i)} dV = 0$, za linearnu sredinu ($D = \epsilon E$ i $B = \mu E$) bi iz (5.109) slijedilo:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) dV &= \iiint_V \frac{J^2}{\kappa} dV + \oiint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} \\
 -\frac{\partial}{\partial t} W &= P + \oiint_S \vec{F} d\vec{S}, \quad P = \iiint_V \frac{J^2}{\kappa} dV
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

što se može izreći i na sljedeći način: smanjenje pohranjene energije elektromagnetskog polja u sustavu troši se na gubitke i isijanu snagu. U literaturi (npr. [5]) gornji se izraz (5.110) bez djelatnih gubitaka naziva još i Poyntingovim teoremom u integralnom obliku koji izražava relaciju očuvanja elektromagnetske energije. Vektor:

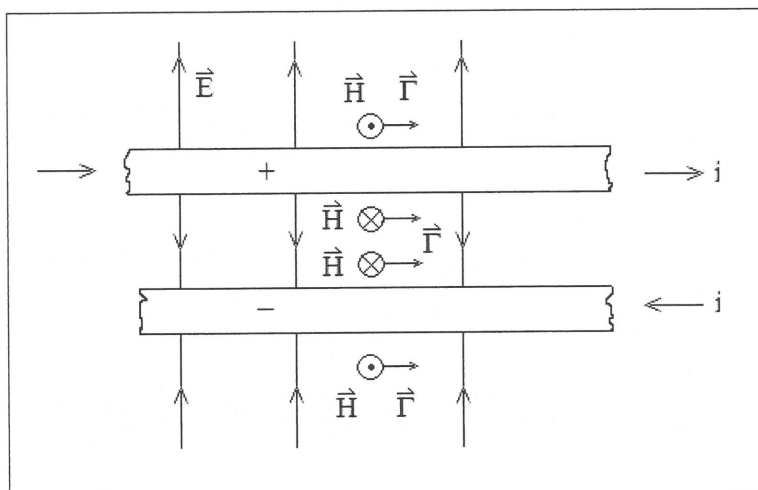
$$\vec{F} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{5.111}$$

zove se Poyntingov vektor, okomit je na ravninu u kojoj leže vektori jakosti električnog polja $\vec{E}$ i magnetskog polja $\vec{H}$, a mjeri se u VA/m^2 odnosno W/m^2 . Vektor je od posebnog značaja u određivanju smjera prostiranja elektromagnetskih valova. Glede detaljnijih karakteristika Poyntingovog vektora pogledati još i u Matematičkom prilogu.

5.5.1 Primjeri

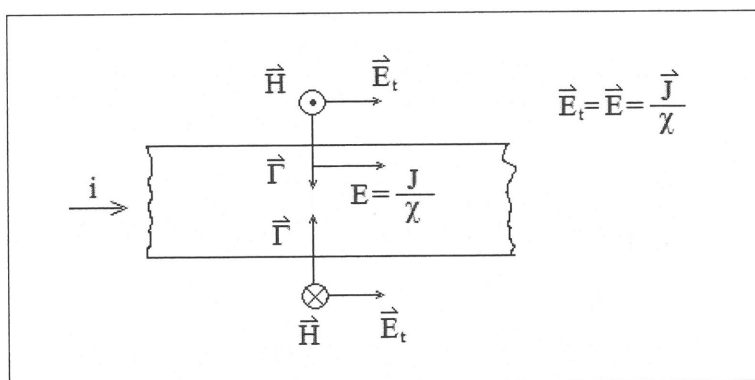
5.5.1.1 Vod istosmjerne struje

$\kappa = \infty$ vodič bez gubitaka (idealni vodič, električki supravodljivi materijal, slika 5.6)



Slika 5.6 Smjer Poyntingovog vektora za slučaj idealnog vodiča kao voda istosmjerne struje

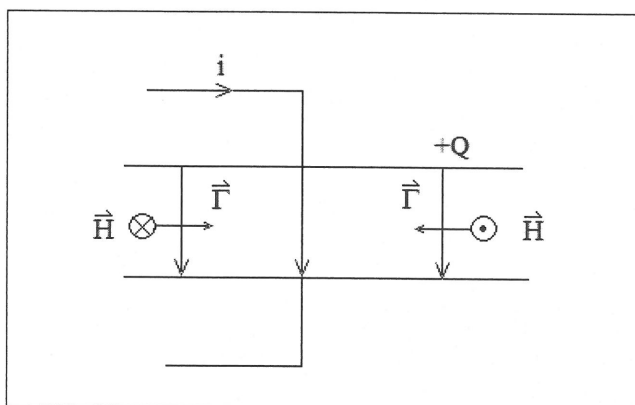
$\kappa \neq \infty$ vodič konačno velike vodljivosti, slika 5.7



Slika 5.7 Smjer Poyntingovog vektora za slučaj realnog vodiča kao voda istosmjerne struje

Vodič samo usmjerava energiju od izvora prema trošilu i stvara gubitke.

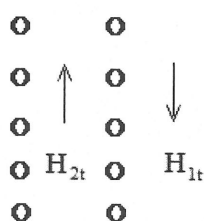
5.5.1.2 Punjenje kondenzatora (slika 5.8)



Slika 5.8 Smjer Poyntingovog vektora za slučaj punjenja kondenzatora

Ako je općenito: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, a unutar ploča kondenzatora nema provodnih struja $\vec{J}$ (slika 5.8) odnosno: $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ i ako struja i raste s vremenom raste i $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ te je u tom je slučaju $\text{rot } \vec{H} > 0$.

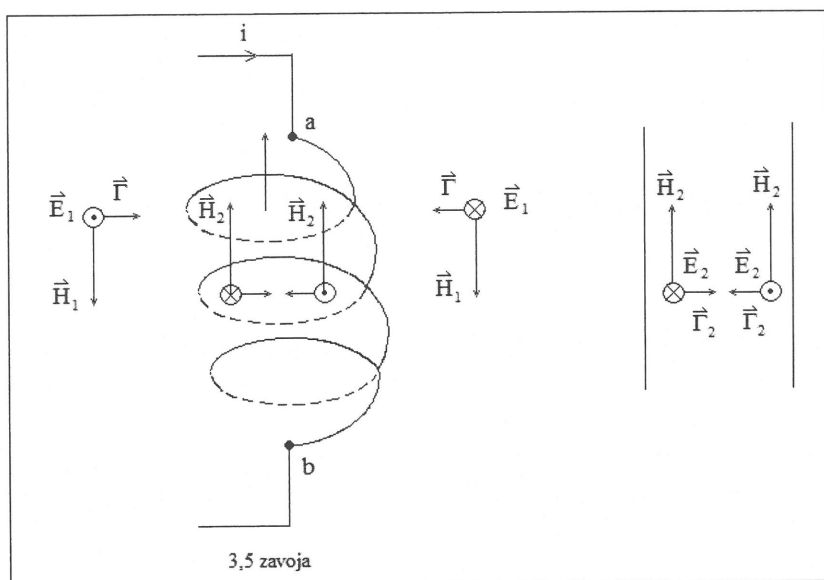
5.5.1.3 Porast struje u prigušnici



$$H_{2t} + H_{1t} = K$$

$$K = \frac{Ni}{l}, \quad (\text{slike 5.9 i 5.10}).$$

$$H_{1t} \cong 0 \quad H_{2t} \cong K$$

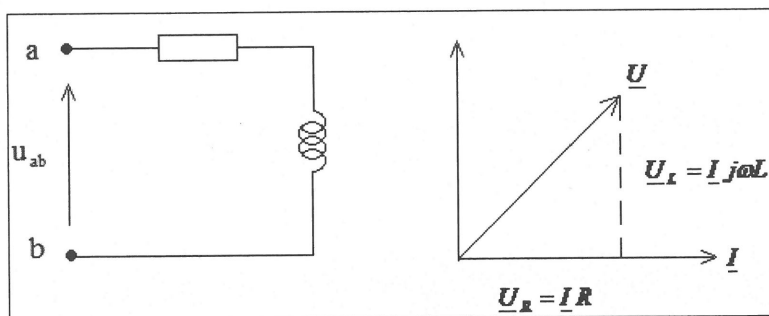


Slika 5.9 Smjer Poyntingovog vektora za slučaj porasta struje prigušnice

Ako je: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, a struja i raste s vremenom raste i $\vec{B}$ te je u tom je slučaju $\text{rot } \vec{E} < 0$.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

$$\begin{aligned} u_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b = -\int_a^b d\varphi = -\int_a^b \text{grad } \varphi d\vec{s} = \int_a^b \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) d\vec{s} = \frac{1}{\kappa} \int_a^b \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_a^b \vec{A} d\vec{s} \cong \\ &\cong \frac{1}{\kappa} \frac{l_{ab}}{s_v} i + \frac{d}{dt} \int_a^b \vec{A} d\vec{s} = iR + \frac{d}{dt} \int_a^b \vec{A} d\vec{s} = iR + \frac{d}{dt} (Li) \cong iR + \frac{d}{dt} (N\Phi) = \\ &= iR + \frac{d}{dt} \left(N\mu_0 \frac{Ni}{l} S_2 \right) \end{aligned}$$



Slika 5.10 Izmjenični strujni krug

5.6 NAPREZANJA U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU

Pomnoži li se prva Maxwelllova jednadžba vektorski s $\vec{B}$, a druga vektorski s $\vec{D}$ te nakon što se zbroje te dvije jednadžbe:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad / \times \vec{B} \quad (5.112)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \times \vec{D} \quad (5.113)$$

dobiva se:

$$\text{rot } \vec{E} \times \vec{D} + \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}). \quad (5.114)$$

Raspisat će se prvo prvi član s lijeve strane jednadžbe (5.114) te potražiti samo komponenta u x smjeru:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \vec{i} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_x \text{div } \vec{E} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_x \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Može se vidjeti odmah da je to divergencija sljedećeg vektora:

$$\vec{T}_e^{(1)} = \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \vec{i} + \varepsilon E_x E_y \vec{j} + \varepsilon E_x E_z \vec{k} \quad (5.116)$$

umanjena za $E_x \rho / \varepsilon$.

Na sličan se način može zaključiti da su izrazi $(\text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \vec{j}$ i $(\text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \vec{k}$ nakon raspisivanja divergencije sljedećih vektora:

$$\vec{T}_e^{(2)} = \varepsilon E_x E_y \vec{i} + \varepsilon \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \vec{j} + \varepsilon E_y E_z \vec{k}, \quad (5.117)$$

$$\vec{T}_e^{(3)} = \varepsilon E_x E_z \vec{i} + \varepsilon E_y E_z \vec{j} + \varepsilon \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \vec{k}. \quad (5.118)$$

umanjenih za $E_y \rho / \varepsilon$ odnosno $E_z \rho / \varepsilon$.

Komponente $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vektora $\vec{T}_e^{(1)}$, $\vec{T}_e^{(2)}$, $\vec{T}_e^{(3)}$ reci su simetričnog tenzora $\mathbf{T}_e$:

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_y E_x & \varepsilon \left(E_y^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_z E_x & \varepsilon E_z E_y & \varepsilon \left(E_z^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

Divergencija simetričnog tenzora $\mathbf{T}_e$ je vektor:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e = \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e^{(1)} \bar{i} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e^{(2)} \bar{j} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e^{(3)} \bar{k}. \quad (5.120)$$

Razvije li se u cijelosti izraz $(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{E}})$ prema (5.115) po ostale dvije komponente usporedbom s (5.119) dobiva se za :

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{E}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e - \bar{\mathbf{E}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{D}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_e - \rho \bar{\mathbf{E}}. \quad (5.121)$$

Slično se dobiva i za drugi pribrojnik u (5.114) :

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{B}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_m, \quad (5.122)$$

gdje su $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ komponente vektora:

$$\bar{\mathbf{T}}_m^{(1)} = \mu \left(H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) \bar{i} + \mu H_x H_y \bar{j} + \mu H_x H_z \bar{k}, \quad (5.123)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_m^{(2)} = \mu H_x H_y \bar{i} + \mu \left(H_y^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) \bar{j} + \mu H_y H_z \bar{k}, \quad (5.124)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_m^{(3)} = \mu H_x H_z \bar{i} + \mu H_y H_z \bar{j} + \mu \left(H_z^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) \bar{k}. \quad (5.125)$$

reci tenzora magnetskog naprezanja, ([26], [28], a pogledati i u Matematički prilog):

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \mu \left(H_x^2 - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu \left(H_y^2 - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu \left(H_z^2 - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

Tenzor ukupnog naprezanja jednak je zbroju dva tenzora:

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}_e + \bar{\mathbf{T}}_m \quad (5.127)$$

pa je:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{D}} + \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{B}} = \operatorname{div}(\bar{\mathbf{T}}_e + \bar{\mathbf{T}}_m) - \rho \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (5.128)$$

odnosno:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} = \rho \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (5.129)$$

Suglasno izrazu za ukupnu Lorentzovu silu $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ na naboj, sila u nekom prostoru općenito je:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = \iiint_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV, \quad (5.130)$$

a uz jednakost koja se izravno dobiva iz (5.129):

$$\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \text{div } \vec{T} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) \quad (5.131)$$

dobiva se:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = \iiint_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV = \iiint_V \text{div } \vec{T} dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV. \quad (5.132)$$

Primjenom Gaussovog teorema na član $\iiint_V \text{div } \vec{T} dV$ dobiva se izraz za silu:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \oint_S \vec{T} \vec{n} dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV \\ &= \iiint_S \vec{T} dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Veličina:

$$\vec{I}_{em} = \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV \quad (5.134)$$

naziva se elektromagnetskim impulsom.

Vektor $\vec{G} = \vec{D} \times \vec{B}$ predstavlja prostornu gustoću elektromagnetskog impulsa i u vezi je s Poyntingovim vektorom $\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H}$ tako da je:

$$\vec{G} = \epsilon \mu \vec{I} = \frac{1}{c^2} \vec{I}. \quad (5.135)$$

Vektor napreznja (tlaka) $\vec{t}$ je za slučaj prisutnosti samo stacionarnih komponenti polja ($\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV = 0$):

$$\vec{t} = \vec{T} \vec{n}, \quad (5.136)$$

$$\vec{t} = (\vec{T}^{(1)} \vec{n}) \vec{i} + (\vec{T}^{(2)} \vec{n}) \vec{j} + (\vec{T}^{(3)} \vec{n}) \vec{k}, \quad (5.137)$$

$$\vec{t}_e = \vec{T}_e \vec{n} = \epsilon (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} - \frac{1}{2} \epsilon E^2 \vec{n}, \quad (5.138)$$

$$\vec{t}_m = \vec{T}_m \vec{n} = \mu (\vec{H} \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} \mu H^2 \vec{n}, \quad (5.139)$$

a ukupni vektor naprezanja je:

$$\vec{t} = \vec{t}_e + \vec{t}_m = \varepsilon (\vec{E}\vec{n})\vec{E} - \frac{1}{2}\varepsilon E^2\vec{n} + \mu(\vec{H}\vec{n})\vec{H} - \frac{1}{2}\mu H^2\vec{n} \quad (5.140)$$

pri čemu je njegov modul:

$$|\vec{t}| = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2. \quad (5.141)$$

5.6.1 Elektromagnetski impuls

Sila na neki mehanički sustav jednaka je vremenskoj promjeni impulsa (količina gibanja), pa integral na desnoj strani izraza (5.133) predstavlja ukupni elektromagnetski impuls promatranog prostora, [3].

Sila na naboje i struje može se također izraziti impulsom. Nazovimo ga mehaničkim impulsom $\vec{I}_{meh}$. Tad jednačba:

$$\iint_S \vec{T}\vec{n}dS = \vec{F} + \frac{d}{dt} \iiint_V (\vec{D} \times \vec{B})dV = \vec{F} + \frac{d\vec{I}_{em}}{dt} \quad (5.142)$$

prelazi u:

$$\iint_S \vec{T}\vec{n}dS = \frac{d}{dt} (\vec{I}_{meh} + \vec{I}_{em}). \quad (5.143)$$

Ako se plošni integral u (5.143) protegne u prostor gdje nema plošnog naprezanja elektromagnetskog polja odnosno $\iint_S \vec{T}\vec{n}dS = 0$, dobiva se stavak o održanju impulsa elektromagnetskog sustava:

$$\frac{d}{dt} (\vec{I}_{meh} + \vec{I}_{elm}) = 0, \quad (5.144)$$

odnosno:

$$\vec{I}_{meh} + \vec{I}_{elm} = const. \quad (5.145)$$

To govori o tom da elektromagnetsko polje i u praznom prostoru ima određenu tromost. Ono se ne može trenutno niti stvoriti niti nestati. Uvijek je potrebno neko vrijeme.

5.6.2 Primjeri

5.6.2.1 Induktivitet vodiča u utoru

Primjenom prve Maxwellove jednadžbe za kvazistacionarno stanje:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} \quad (5.146)$$

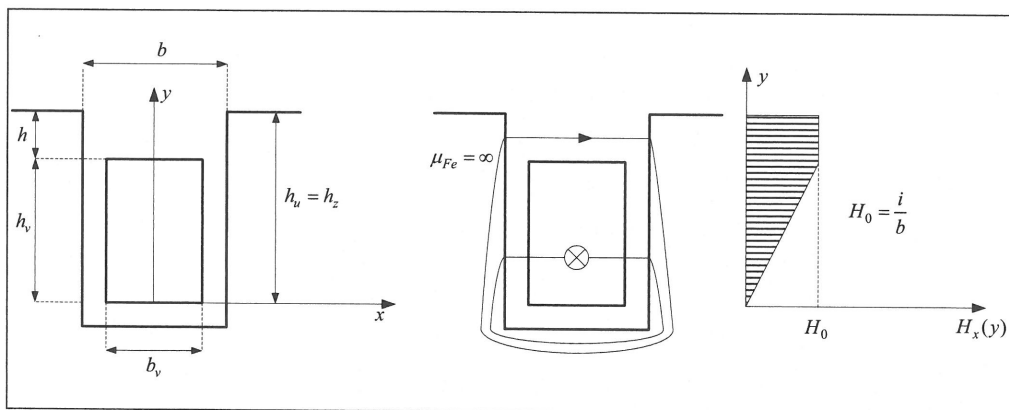
dobiva se:

$$H_x(y)b + \int_{s_{Fe}} \vec{H} d\vec{s} = \frac{i}{b_v h_v} (y b_v) = \frac{i}{h_v} y, \quad (5.147)$$

a odavde je:

$$H_x(y) \cong \frac{i}{h_v} \frac{y}{b}. \quad (5.148)$$

Dio pada magnetskog napona koji se odnosi na željezo se zanemaruje, (slika 5.11).



Slika 5.11 Uz izračun induktiviteta u utoru

Induktivitet vodiča se može odrediti i iz energije:

$$\frac{1}{2} Li^2 = \iiint_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dx dy dz = \frac{\mu_0}{2} bl \int_0^{h_v+h} H^2 dy = \frac{\mu_0 bl}{2} \left[\int_0^{h_v} H_x^2 dy + \int_{h_v}^{h_v+h} H_0 dy \right]. \quad (5.149)$$

Prvi je integral po uvrštenju gore dobivenog izraza za $H_x(y)$, (5.148) odnosi se na vodič i jednak je:

$$\int_0^{h_v} \left(\frac{i}{h_v} \frac{y}{b} \right)^2 dy = \left(\frac{i}{h_v b} \right)^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h_v} = i^2 \frac{h_v}{3b^2}, \quad (5.150)$$

a drugi se odnosi na prostor utora bez vodiča ($H_0 = \frac{i}{b}$):

$$\int_{h_v}^{h_v+h} H_0^2 dy = H_0^2 h = i^2 \frac{h}{b^2}, \quad (5.151)$$

pa je:

$$\frac{1}{2} Li^2 = \frac{\mu_0 b l}{2} i^2 \left(\frac{h_v}{3b^2} + \frac{h}{b^2} \right) \quad (5.152)$$

Rasipni induktivitet vodiča u utoru je:

$$L = L_{\sigma n} = \mu_0 l \lambda. \quad (5.153)$$

Usporedbom s prethodnim izrazom dobiva se parametar λ koji se zove bezdimenzionalna vodljivost utora:

$$\lambda = \frac{h_v}{3b} + \frac{h}{b}. \quad (5.154)$$

Gornji izraz vrijedi za jedan (1) masivni vodič u utoru pa je već spomenuti izraz za induktivitet:

$$L_{om} = \mu_0 l \lambda. \quad (5.155)$$

U slučaju da postoji n_v masivnih vodiča u utoru tad je izraz za induktivitet:

$$L_{om} = n_v^2 \mu_0 l \lambda. \quad (5.156)$$

5.6.2.2 Sile na vodič u utoru

- Od poprečne komponente polja (slika 5.12)

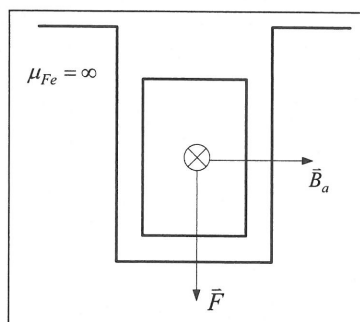
$$-F_y = \mu_0 \int_0^{h_v} \left(\frac{i}{b_v h_v} b_v dy \right) \left(\frac{i}{h_v} \frac{y}{b} \right) l = \frac{\mu_0 l i^2}{h_v^2 b} \int_0^{h_v} y dy = \frac{\mu_0 l}{2b} i^2 = \mu_0 \frac{i}{2b} il = \mu_0 H_{xa} il. \quad (5.157)$$

Sila bez obzira na smjer struje pritiskuje vodič na dno utora (želi povećati induktivitet vodiča u utoru).

Sila se može odrediti i preko naprezanja, (slika 5.13):

$$-t = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{i}{b} \right)^2, \quad (5.158)$$

$$-F_y = t b l = \frac{\mu_0 l}{2b} i^2. \quad (5.159)$$



Slika 5.12 Sila na vodič u utoru od poprečne komponente polja

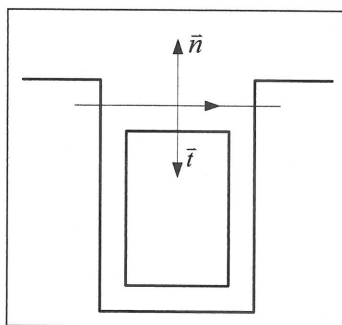
Za sinusni oblik struje je:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \varphi) \\ i^2 &= \frac{I_m}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)] \end{aligned} \quad (5.160)$$

pokazane su frekvencije sila u utoru u sljedećoj tablici.

Tablica 5.1 Frekvencije sila u utorima električnih strojeva za slučaj frekvencije napajanja $f=50\text{Hz}$

Vrsta stroja	stator	rotor
sinkroni	100Hz	0Hz
asinkroni	100Hz	$s \times 100\text{Hz}$ (s je klizanje u jv)



Slika 5.13 Sila na vodič u utoru od poprečne komponente polja

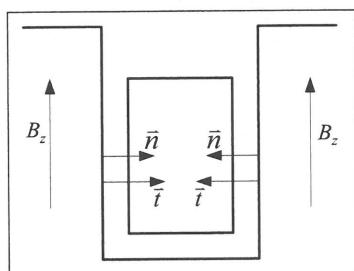
• **Sila od uzdužne komponente polja u utoru, (slika 5.14)**

Za to se treba uzeti u obzir konačna permeabilnost željeza jer jedino tad postoji uzdužna komponenta polja u utoru. Za slučaj da ne teče struja postoji samo narinuto vanjsko polje (indukcije iznosa B_z u lijevom i desnom zubu utora istog su smjera).

Iz graničnih uvjeta uzdužna komponenta polja u utoru je:

$$\frac{B_z}{\mu_z} = H_z. \quad (5.161)$$

Sila na vodič je nula i sila na zube je nula.



Slika 5.14 Uz izračun sila na vodič u utoru od uzdužne komponente polja, vodičem ne teče struja

$$|\vec{i}| = |\vec{i}_n| = \frac{1}{2} \mu_0 H_z^2 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) + \frac{1}{2} \mu_0 H_n^2 \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_z} \right). \quad (5.162)$$

za lijevi zub je:

$$\vec{i}_l = \vec{i} = \frac{1}{2} \mu_0 H_z^2 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) \vec{n}_l, \quad (5.163)$$

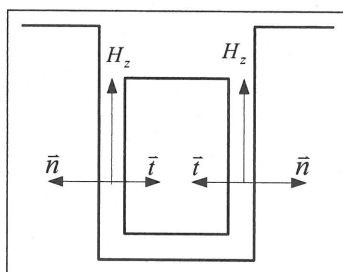
a za desni je:

$$\vec{i}_d = -\vec{i} \quad (5.164)$$

pa je zbroj:

$$\vec{i} = \vec{i}_l + \vec{i}_d = 0. \quad (5.165)$$

Slično se dobiva da je sila na vodič nula ako promatramo naprezanje u zraku između zuba i vodiča (slika 5.15).

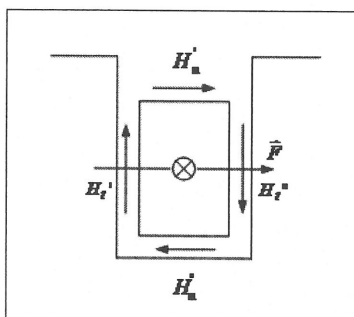


Slika 5.15 Uz izračun sila na vodič u utoru od uzdužne komponente polja u zraku između zuba i vodiča, vodičem ne teče struja

Ako struja teče vodičem, pored narinutog polja imamo i polje uzrokovano strujom vodiča, (slika 5.16). Uzme li se da je:

$$H_{ya} = \frac{1}{h_u} \int_0^{h_u} H'_t dy = H'_{ta} = H''_{ta}, \text{ a } H_x = H_{xa} = \frac{H'_u + H''_u}{2}, \quad (5.166)$$

gdje je H'_u polje na vrhu ($y = h_v + h$), a H''_u polje na dnu utora.



Slika 5.16 Uz izračun sila na vodič u utoru od uzdužne komponente polja u zraku između zuba i vodiča, vodičem teče struja

Prva Maxwellova jednačba za kvazistacionarno stanje:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} = i \quad (5.167)$$

daje:

$$2H_{ya}h_u + 2H_xb = i, \\ H_{ya} = \frac{i}{2h_u} - \frac{b}{h_u} H_x. \quad (5.168)$$

Ukupno polje na lijevoj strani vodiča je:

$$H'_u = H_z + H_y(y), \quad (5.169)$$

a na desnoj strani:

$$H''_u = H_z - H_y(y). \quad (5.170)$$

Ukupno naprezanje na desnoj i lijevoj strani na mjestu y je:

$$t(y) = \frac{1}{2} \mu_0 [H_z + H_y(y)]^2 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) - \frac{1}{2} \mu_0 [H_z - H_y(y)]^2 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) \quad (5.171)$$

s obzirom da je doprinos zbog normalne komponente nula, zbog istog iznosa $H_x(y)$, a suprotnog smjera na lijevoj i desnoj plohi.

Ukupno naprezanje na ordinati y je:

$$\begin{aligned} t(y) &= \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) \left[H_z^2 + 2H_z H_y(y) + H_y^2(y) - H_z^2 + 2H_z H_y(y) - H_y^2(y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\mu_z}{\mu_0} - 1 \right) \cdot 4H_z H_y(y). \end{aligned} \quad (5.172)$$

Za silu na zube može se, dakle, računati sa srednjom vrijednošću polja H_{ya} pa je sila:

$$\begin{aligned} F_z &= h_z l_a = h_u l_a = h_u l (\mu_z - \mu_0) \cdot 2H_z H_{ya} = B_z l \cdot 2h_u H_{ya} - \mu_0 H_z l \cdot 2h_u H_{ya} = \\ &= B_z l (i - 2bH_x) - \mu_0 H_z l (i - 2bH_x). \end{aligned} \quad (5.173)$$

Sila na vodič je:

$$F_v = \mu_0 \frac{H'_u + H''_u}{2} il = \mu_0 H_z il, \quad (5.174)$$

a ukupna sila na zube i na vodič je:

$$\begin{aligned} F &= F_z + F_v = B_z l (i - 2bH_x) + \mu_0 H_z l (2bH_x) = \\ &= B_z li - 2bH_x l (B_z - \mu_0 H_z) \cong B_z li - bH_x (h_u + h) (B_z - \mu_0 H_z) l. \end{aligned} \quad (5.175)$$

5.7 RAVNI VAL

Sustav Maxwellovih jednadžbi dopunjen relacijama građe i bez utisnutog vanjskog električnog polja ($\vec{E}^{(i)} = 0$) je, [4], [3]:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.176)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.177)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (5.178)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (5.179)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (5.180)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (5.181)$$

$$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}^{(i)}) = \kappa \vec{E}. \quad (5.182)$$

Uz konstantne vrijednosti parametara sredine ε , μ , κ za neograničeni prostor bez slobodnih naboja prethodni sustav jednadžbi korištenjem relacija građe za homogeno, linearno i izotropno mirujuće sredstvo prelazi u sustav:

$$\text{rot } \vec{H} = \kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.183)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (5.184)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (5.185)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (5.186)$$

Primjenom operatora rotacije na prvu i drugu Maxwellovu jednadžbu (vidi 5.48 i 5.49) dobiva se:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - (\nabla \nabla) \vec{H} = -\Delta \vec{H}, \quad (5.187)$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \quad (5.188)$$

pa iz prve i druge jednadžba proizlazi:

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\Delta \vec{H} = -\mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (5.189)$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5.190)$$

odnosno:

$$\Delta \bar{E} - \mu\kappa \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.191)$$

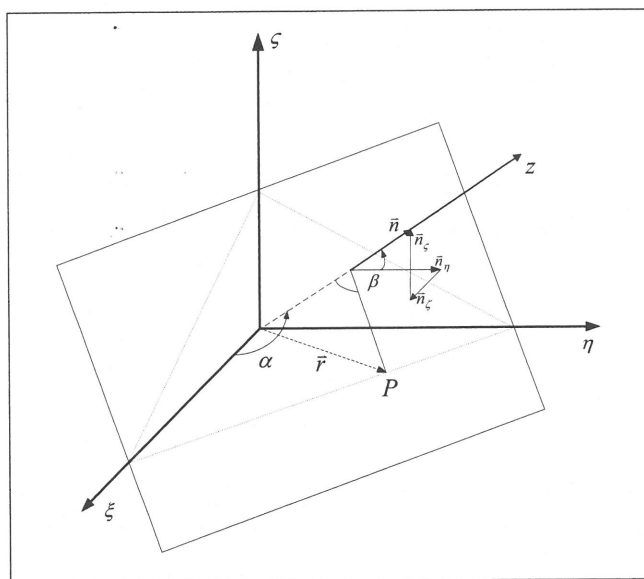
$$\Delta \bar{H} - \mu\kappa \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.192)$$

To je sustav koji se sastoji od dviju vektorskih jednačbi odnosno od 6 skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi 2. reda odnosno valnih jednačbi. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi drugog reda zahtijeva složeni matematički aparat. To je bitan razlog da se osnovno promatranje elektromagnetskih valova načini na ravnom valu čija će se svojstva ovdje postupno definirati.

Veličine polja u ravnom valu ovise samo o jednoj koordinati u Kartezijevom sustavu. Postoji uvijek jedna karakteristična ravnina u prostoru u kojoj su veličine polja konstantne, [3]. Njena je jednačba:

$$\bar{r} \cdot \bar{n} = \text{const.}, \quad (5.193)$$

gdje je $\bar{r}$ radius vektor od ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava do točke karakteristične ravnine čija je jedinična normala $\bar{n}$, (slika 5.17).



Slika 5.17 Karakteristična ravnina $\bar{r} \cdot \bar{n} = \text{const.}$

Veličine polja, dakle, u konkretnom slučaju ovise samo o koordinati z :

$$\bar{E} = \bar{E}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{E}(z), \quad (5.194)$$

$$\bar{H} = \bar{H}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{H}(z). \quad (5.195)$$

Također je vidljivo da vrijedi, (slika 5.17):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = n_\xi \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = n_\eta \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = n_\zeta \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.196)$$

Zato "nabla" (∇) operator dobiva jednostavan oblik:

$$\nabla = \bar{\xi}_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \eta} + \bar{\zeta}_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} = \bar{n} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.197)$$

$$\bar{n} = \bar{\xi}_0 n_\xi + \bar{\eta}_0 n_\eta + \bar{\zeta}_0 n_\zeta. \quad (5.198)$$

Maxwellove jednačbe za ravni val poprimaju jednostavan oblik, gdje postoji ovisnost samo o jednoj prostornoj koordinati, ovdje o koordinati z i glase:

$$\bar{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{rot } \vec{H} = \kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}), \quad (5.199)$$

$$\bar{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}), \quad (5.200)$$

$$\bar{n} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0 \quad (\text{div } \vec{E} = 0), \quad (5.201)$$

$$\bar{n} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0 \quad (\text{div } \vec{H} = 0). \quad (5.202)$$

Sad je moguće istražiti neke karakteristike ravnog vala. Zbog:

$$\bar{n} \left(\bar{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \right) = (\bar{n} \times \bar{n}) \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0, \quad (5.203)$$

$$\bar{n} \left(\bar{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right) = (\bar{n} \times \bar{n}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0, \quad (5.204)$$

je:

$$\bar{n} \left(\kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.205)$$

$$\bar{n} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (5.206)$$

Pomnoži li se jednačba (5.205) s dt/ε , a jednačba (5.201) s dz , a tako dobiveni se izrazi zbroje, dobit će se:

$$\bar{n} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt \right) + \frac{\kappa}{\varepsilon} \bar{n} \vec{E} dt = 0. \quad (5.207)$$

Pomnoži li se pak jednačba (5.206) s dt , a jednačba (5.202) s dz , a zatim se tako dobiveni izrazi zbroje, dobit će se:

$$\vec{n} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dt \right) = 0. \quad (5.208)$$

S obzirom da su izrazi u zagradama totalni diferencijali od $\vec{E}$ odnosno $\vec{H}$ to dobivene jednačbe postaju:

$$\vec{n} d\vec{E} + \frac{\kappa}{\varepsilon} \vec{n} \vec{E} dt = 0, \quad (5.209)$$

$$\vec{n} d\vec{H} = 0. \quad (5.210)$$

Te su jednačbe ispunjene kad je:

$$\vec{n} \vec{E} = 0, \quad \vec{n} d\vec{E} = 0 \quad (5.211)$$

i:

$$\vec{n} \vec{H} = 0, \quad \vec{n} d\vec{H} = 0. \quad (5.212)$$

Ovo se svojstvo ravnog vala iščitava tako da se konstatira da su vektori jakosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ okomiti na normalu odnosno oba vektora elektromagnetskog polja leže u karakterističnoj ravnini. ***Ujedno je ovo prvo svojstvo ravnog vala.***

Dalje, iz skalarnih produkata proizlazi:

$$\vec{H} \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \right) = \vec{n} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \times \vec{H} \right) \equiv 0 \quad (5.213)$$

ili poslije uvrštenja izraza (5.199, $\vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$):

$$\vec{H} \left(\kappa \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.214)$$

te:

$$\vec{E} \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} (\vec{E} \times \vec{n}) = \vec{n} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \times \vec{E} \right) \equiv 0 \quad (5.215)$$

ili poslije uvrštenja izraza (5.200, $\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$):

$$\vec{E} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (5.216)$$

Pomnoži li se (5.216) s ε i zbroji s (5.214) dobiva se:

$$\varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \kappa \vec{H} \vec{E} + \varepsilon \vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \kappa \vec{H} \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{H}) = 0 \quad (5.217)$$

ili poslije dijeljenja s κ jednostavna diferencijalna jednadžba:

$$\vec{H} \vec{E} + \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \vec{E}) = 0 \quad (5.218)$$

čije je rješenje po $\vec{H} \vec{E}$:

$$\vec{H} \vec{E} = (\vec{H} \vec{E})_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}. \quad (5.219)$$

I nakon određenog vremena ovisno o τ i početnim uvjetima je:

$$\vec{H} \vec{E} = 0. \quad (5.220)$$

Ovo je 2. svojstvo ravnog elektromagnetskog vala: vektori jakosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ i međusobno su okomiti.

Dakle ravni val karakterizira ravnina čija je normala u smjeru prostiranja vala, a u kojoj leže oba međusobno okomita vektora elektromagnetskog polja ovisna samo o jednoj prostornoj koordinati.

5.7.1 Rješenje valnih jednadžbi

U određenoj se literaturi, [4], [7] rješavanju homogenih valnih jednadžbi tipa:

$$\Delta \vec{E} - \mu\kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.191)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu\kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.192)$$

pristupa matematičkom metodom separacije varijabli. Bit metode sastoji se u pretpostavci da se matematički može odijeliti vremenski dio (oznaka funkcije $T(t)$) od prostornog dijela (oznaka vektorske prostorne funkcije $\vec{V}(\vec{r})$) na način da se opće rješenje postavi u obliku njihovog produkta:

$$\vec{W}(r, t) = \vec{V}(\vec{r})T(t). \quad (5.221)$$

Uvrštenjem ovog izraza u prethodni skup valnih jednadžbi dobiva se:

$$\Delta \vec{V} - f(t)\vec{V} = 0, \quad (5.222)$$

gdje je:

$$f(t) = \frac{\mu\varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\kappa \frac{\partial T}{\partial t}}{T}. \quad (5.223)$$

Deriviranjem izraza (5.222) po vremenu t dobiva se:

$$\frac{d}{dt} \Delta \vec{V} = f(t) \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{df(t)}{dt} \vec{V} = 0. \quad (5.224)$$

S obzirom da su $\Delta \vec{V}$ i $\vec{V}$ neovisni o vremenu to je:

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \quad (5.225)$$

odnosno:

$$f = \text{const} = -k_\gamma^2. \quad (5.226)$$

$S - k_\gamma^2$ označena je proizvoljna konstanta koja je uzeta negativnom čime se osigurava da gore navedene valne jednadžbe prijedju u Helmholtzovu jednadžbu oblika:

$$\Delta \vec{V} + k_\gamma^2 \vec{V} = 0 \quad (5.227)$$

koja ne sadrži vrijeme t kao varijablu.

Uvrsti li se pak (5.226, $f = -k_y^2$) u (5.223) dobiva se:

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\kappa \frac{\partial T}{\partial t} + k_y^2 T = 0. \quad (5.228)$$

Jednadžbe (5.227) i (5.228) formalno su neovisne, ali imaju zajedničku konstantu k_y kojom se ipak dovode u vezu. Vektorska se jednadžba $\Delta \vec{V} + k_y^2 \vec{V} = 0$ može rješavati numerički, ali i analitički metodom separacije varijabli. S obzirom da se vektorska funkcija $\vec{V}$ odnosi i na električno i na magnetsko polje (svako polje po tri prostorne komponente) jednadžba $\Delta \vec{V} + k_y^2 \vec{V} = 0$ sadrži šest skalarnih jednadžbi po $V_i(\vec{r})$ oblika :

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} + k_y^2 V_i = 0. \quad (5.229)$$

Sad treba pretpostaviti rješenje V_i u obliku produkta svojstvenih funkcija $X(x)$, $Y(y)$ i $Z(z)$ dakle funkcija jedne varijable:

$$V_i = X(x)Y(y)Z(z). \quad (5.230)$$

Uvrsti se sad (5.230) u prethodnu diferencijalnu jednadžbu (5.229) ona se nakon neznatnih manipulacija razloži u tri diferencijalne jednadžbe oblika:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (5.231)$$

gdje je:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_y^2. \quad (5.232)$$

Opće rješenje ovog sustava jednadžbi može se napisati u obliku :

$$V_i = V_{i0} e^{\pm(k_x x + k_y y + k_z z)} = V_{i0} e^{\pm i \vec{k}_y \cdot \vec{r}}, \quad (5.233)$$

gdje je:

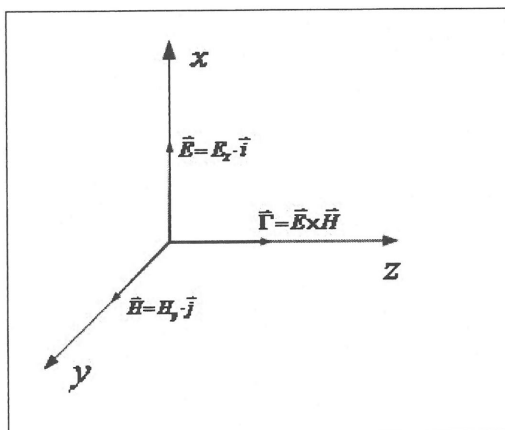
$$\begin{aligned} \vec{k}_y &= k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}, \\ \vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.234)$$

Druga se jednadžba (5.228) može relativno jednostavno riješiti posebice ako se ograniči na analizu kvazistacionarnih stanja odnosno sinusnih harmonijskih polja pa se za $T(t)$ pretpostavi da je u obliku operatora rotacije:

$$T(t) = e^{j\omega t}, \text{ što nakon uvrštenja u (5.228, } \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\kappa \frac{\partial T}{\partial t} + k_y^2 T = 0 \text{) daje:}$$

$$k_{\gamma}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \kappa = -\underline{\gamma}^2 \quad (5.235)$$

gdje je $\underline{\gamma}$ valna konstanta o kojoj će još biti riječi u daljnjem dijelu teksta o svojstvima ravnog vala, a posebice u odjeljku o harmonijskom valu.



Slika 5.18 Smjer komponenti jakosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ ravnog vala u karakterističnoj ravnini

Definicija ravnog vala i njegova svojstva znatno olakšavaju rješavanje jednadžbi i daljnju analizu njegovog ponašanja. Svaki se oblik vala može svesti na ravni val, ako se promatra u dovoljno malom prostoru. Tako se svojstva ravnog vala mogu primijeniti na bilo koji oblik vala. Koordinatni se sustav može uvijek tako postaviti da karakteristična ravnina padne u ravninu x - y , a vektori jakosti polja svaki u jednu od osi x i y . Korisno je da se Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ poklopi sa smjerom osi z , (slika 5.18). Kako se radi o desnom koordinatnom sustavu, $\vec{E}$ mora pasti na os x , a $\vec{H}$ na os y . Sad se mogu ispustiti oznake koordinata. Pritom jedino treba voditi računa da sad postoje samo komponente jakosti električnog polja E_x i magnetskog H_y .

Jednadžbe polja sad glase:

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \kappa E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (5.236)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.237)$$

Valne jednadžbe koje proizlaze iz ovih dviju jednadžbi polja su:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu \kappa \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (5.238)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu \kappa \frac{\partial H}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (5.239)$$

Laplaceova transformacija znatno pomaže da se lakše rješavaju i analiziraju gornje jednačbe. Treba pretpostaviti da je za $t = 0$, $E=0$ i $H=0$. Tad je jednostavniji oblik jednačbi u Laplaceovu području ($s \leftarrow \frac{\partial}{\partial t}$). Početni iznosi polja različiti od nule doprinose u smislu konstantnog iznosa koji se superponira na prolazno stanje. Uz ovu pretpostavku smije se staviti operator s umjesto vremenske derivacije. Na taj je način zapis gornjih jednačbi (5.236 – 5.239), [3]:

$$\frac{dH}{dz} = -YE, \quad Y = \kappa + \varepsilon s, \quad (5.240)$$

$$\frac{dE}{dz} = -ZH \quad Z = \mu s, \quad (5.241)$$

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = \gamma^2 E, \quad (5.242)$$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = \gamma^2 H, \quad (5.243)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{\mu \varepsilon s^2 + \mu \kappa s}. \quad (5.244)$$

Rješenje jednačbi je jednostavno i prikazuje se eksponencijalnim funkcijama:

$$E = E_1 e^{\gamma z} + E_2 e^{-\gamma z}, \quad (5.245)$$

$$H = H_1 e^{\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z}. \quad (5.246)$$

To je rješenje u Laplaceovu području i može se također izvesti i iz općeg rješenja homogene Helmholtzove jednačbe (5.233). U (5.246) pojavljuju se četiri integracijske konstante E_1, E_2, H_1 i H_2 .

Dvije (ovdje H_1 i H_2) se eliminiraju iz (5.241) tako da se u taj izraz uvrsti (5.245):

$$H = -\frac{1}{Z} \frac{dE}{dz} = -\frac{\gamma}{Z} (E_1 e^{\gamma z} - E_2 e^{-\gamma z}) = H_1 e^{\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z}, \quad (5.247)$$

$$H_1 = -\frac{\gamma}{Z} E_1, \quad H_2 = \frac{\gamma}{Z} E_2.$$

odakle je:

$$\frac{E_2}{H_2} = -\frac{E_1}{H_1} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{\mu s}{\kappa + \varepsilon s}} = Z_v(s). \quad (5.248)$$

Konstanta γ zove se valnom konstantom i ima dimenziju ($1/m$), a $Z_v(s)$ valnom impedancijom.

Konstante se mogu pisati i u preglednijem obliku. Za valnu se konstantu može pisati:

$$\gamma = s\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\kappa\mu}{\mu\epsilon s}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{c}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.249)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\kappa},$$

te valna impedancija:

$$Z_v(s) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{s\epsilon}{\kappa + \epsilon s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa}{\epsilon s}}} = Z_{v0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau s}}}, \quad (5.250)$$

$$Z_{v0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

5.7.2 Val u sredstvu bez gubitaka

Za sredstvo bez gubitaka odnosno: $\kappa = 0, \tau = \frac{\epsilon}{\kappa} \rightarrow \infty$ valna konstanta i valna impedancija prema (5.249) odnosno (5.250) postaju:

$$\gamma = \frac{s}{c}, \quad (5.251)$$

$$Z_v(s) = Z_{v0}. \quad (5.252)$$

To znači da valna impedancija postaje vremenski neovisan valni (djelatni) otpor.

Jednadžbe za jakost električnog (E) i magnetskog (H) polja prema (5.245) i (5.241) glase:

$$E = E_1 e^{\frac{s}{c}z} + E_2 e^{-\frac{s}{c}z}, \quad (5.253)$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{Z} \frac{dE}{dz} = -\frac{1}{\mu s} \frac{s}{c} \left(E_1 e^{\frac{s}{c}z} - E_2 e^{-\frac{s}{c}z} \right) = \\ &= -\frac{1}{\mu c} \left(E_1 e^{\frac{s}{c}z} - E_2 e^{-\frac{s}{c}z} \right) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(E_1 e^{\frac{s}{c}z} - E_2 e^{-\frac{s}{c}z} \right) = -\frac{1}{Z_{v0}} \left(E_1 e^{\frac{s}{c}z} - E_2 e^{-\frac{s}{c}z} \right). \end{aligned} \quad (5.241.1)$$

Eksponencijalni oblik u Laplaceovu području znači pomicanje u originalu po vremenskoj osi za $\pm \frac{z}{c}$ kad se počinje brojati vrijeme. Polja u originalu odnosno vremenskom području glase:

$$E = f_1\left(t + \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad (5.254)$$

$$H = \frac{1}{Z_{v0}} f_1 \left(t + \frac{z}{c} \right) + \frac{1}{Z_{v0}} f_2 \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (5.255)$$

Potpuno je jasan valni karakter polja. Oba se polja sastoje od dva vala, pozitivnog vala f_2 i negativnog vala f_1 . Prema pravilima Laplaceove transformacije mora biti $f_2 = 0$ za $t - \frac{z}{c} \leq 0$,

odnosno $t \leq \frac{z}{c}$, a isto tako i $f_1 = 0$ za $t + \frac{z}{c} \leq 0$, odnosno $t \leq -\frac{z}{c}$. To se može razumjeti samo tako

da je polje sastavljeno od dva vala koji se gibaju suprotnim smjerovima: pozitivnog i negativnog vala. Pozitivni se val (s komponentama E_2, H_2) giba u pozitivnim smjeru osi z brzinom čela vala jednako

brzini svjetlosti $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Ovo je bilo i ishodište Maxwellove teze da je svjetlost elektromagnetski

val. Impedancija ovog vala (u smjeru $+z$) je pozitivna : $\frac{E_2}{H_2} = Z_v > 0$. Čelo se negativnog vala giba

istom brzinom u suprotnom ili negativnom smjeru. Negativni val (komponente E_1, H_1) ima svojstvo da mu je valna impedancija negativna odnosno : $\frac{E_1}{H_1} = -Z_v < 0$.

5.7.3 Brzina čela vala

Promatranja funkcije u Laplaceovom području omogućuje stanovitu analizu. Poznato je da je:

- teorem početne vrijednosti funkcije $f(t)$: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$,
- teorem konačne vrijednosti funkcije $f(t)$: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$.

Ova se pravila iskorištavaju da se utvrdi ponašanje čela vala općenito u bilo kojem sredstvu. Treba pogledati kako se ponašaju funkcije $sE(s)$ i $sH(s)$, ako $s \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$).

U tom je slučaju valna konstanta :

$$\gamma \rightarrow \frac{s}{c}, \quad (5.256)$$

a valna impedancija :

$$Z_v(s) \rightarrow Z_{v0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (5.257)$$

Takve su vrijednosti kod sredstva bez gubitaka. Čelo vala se ponaša uvijek kao da sredstvo nema gubitaka. Ono se giba brzinom koja je jednaka brzini svjetlosti. Elektromagnetski se impuls rasprostire kroz prostor brzinom svjetla.

5.7.4 Harmonijski val

Najlakša je analiza harmonijskog vala. Ona pruža mogućnost da se dobije najviše podataka o ravnom valu. Ona traži da se govori o frekvenciji i duljini vala. Retardirano vrijeme dobiva konkretniji oblik budući da se dovodi u vezu s trajanjem jedne periode. Sam pojam vala nekako odmah upućuje na harmonijski ili sinusni val. Harmonijski val omogućuje da se primijene pravila kompleksnih brojeva pri rješavanju jednadžbi polja. Zamjenom $s = j\omega$ dobiva se:

- valna konstanta općenito je kompleksan broj:

$$\underline{\gamma} = j \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{1}{j\omega\tau}} = \alpha + j\beta, \quad (5.258)$$

- prigušna konstanta :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} - 1}, \quad (5.259)$$

- fazna konstanta :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2} + 1}, \quad (5.260)$$

- valna impedancija općenito je također kompleksni broj:

$$\underline{Z}_v = Z_{v0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}} = |\underline{Z}_v| e^{j\varphi}$$

$$|\underline{Z}_v| = \frac{Z_{v0}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}}, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} - \omega\tau \leq 1, \quad (5.261)$$

gdje je vremenska konstanta relaksacije naboja :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}. \quad (5.25)$$

Iz (5.259) i (5.260) se utvrđuje da prigušna konstanta nikad ne može biti veća od fazne. Valne jednadžbe za harmonijski val su Helmholtzove jednadžbe:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = (j\omega\mu\kappa - \omega^2\mu\varepsilon)\underline{E} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}, \quad (5.262)$$

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dz^2} = (j\omega\mu\kappa - \omega^2\mu\varepsilon)\underline{H} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}. \quad (5.263)$$

Ovdje su :

$$\underline{E}(z, \omega t) = (\underline{E}_1 e^{\gamma z} + \underline{E}_2 e^{-\gamma z}) e^{j\omega t} = \dot{\underline{E}}(z, j\omega) e^{j\omega t}, \quad (5.264)$$

$$\underline{H}(z, \omega t) = (\underline{H}_1 e^{\gamma z} + \underline{H}_2 e^{-\gamma z}) e^{j\omega t} = \dot{\underline{H}}(z, j\omega) e^{j\omega t}. \quad (5.265)$$

rješenja električnog i magnetskog polja u kompleksnom području pri čemu su izrazi u zagradi $\dot{\underline{E}}(z, j\omega)$ i $\dot{\underline{H}}(z, j\omega)$ zapravo odgovarajući fazori. Rješenja u vremenskoj domeni su:

$$\underline{E}(z, \omega t) = \Re \left(\dot{\underline{E}}(z, j\omega) e^{j\omega t} \right) = \left(\left| \underline{E}_1 \right| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{E_1}) + \left| \underline{E}_2 \right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{E_2}) \right), \quad (5.266)$$

$$\underline{H}(z, \omega t) = \Re \left(\dot{\underline{H}}(z, j\omega) e^{j\omega t} \right) = \left(\left| \underline{H}_1 \right| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{H_1}) + \left| \underline{H}_2 \right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{H_2}) \right), \quad (5.267)$$

pri čemu je:

$$H_1 = \frac{\left| \underline{E}_1 \right|}{\left| \underline{Z} \right|}, H_2 = \frac{\left| \underline{E}_2 \right|}{\left| \underline{Z} \right|}, \varphi_{H_1} = \varphi_{E_1} \pm \pi, \varphi_{H_2} = \varphi_{E_2}. \quad (5.268)$$

Izrazi (5.266) i (5.267) predstavljaju transverzalni elektromagnetski (TEM) val s linearno polariziranim električnim i magnetskim poljem. Dakle, dva ravna vala ($(\underline{E}_1, H_1)$ u smjeru $-z$, a $(\underline{E}_2, H_2)$ u smjeru $+z$). Za svakog od njih postoji jedna ravnina konstantne faze, okomita na smjer prostiranja vala, u kojoj se nalaze međusobno okomiti vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Pritom vektor jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ u svakoj točki prostora zaostaje za prema vektoru $\vec{E}$ za kut φ .

5.7.5 Harmonijski val u sredstvu bez gubitaka

Valne jednadžbe za sredstvo bez gubitaka ($\kappa = 0$) su:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon \underline{E} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}, \quad (5.269)$$

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dz^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon \underline{H} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}, \quad (5.270)$$

gdje je :

$$\underline{\gamma}^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \text{ ili : } \underline{\gamma} = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} = j\beta. \quad (5.271)$$

Rješenja valnih jednadžbi su:

- električno polje:

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{\gamma z} + \underline{E}_2 e^{-\gamma z}, \quad (5.272)$$

- magnetsko polje:

$$\underline{H} = -\frac{\gamma}{Z}(\underline{E}_1 e^{jz} + \underline{E}_2 e^{-jz}) = -\frac{\gamma}{j\omega\mu}(\underline{E}_1 e^{jz} - \underline{E}_2 e^{-jz}) = \underline{H}_1 e^{jz} + \underline{H}_2 e^{-jz}. \quad (5.273)$$

Valna impedancija je realni broj:

$$\frac{\underline{E}_2}{\underline{H}_2} = -\frac{\underline{E}_1}{\underline{H}_1} = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{v0} \quad (5.274)$$

i ne ovisi o frekvenciji polja ω .

Iz gornje jednačbe slijedi da je:

- pozitivni val: $\varphi_{H_2} = \varphi_{E_2}$ (jakost električnog i magnetskog polja su u fazi, prigušna konstanta $\alpha=0$),
- negativni val: $\varphi_{H_1} = \varphi_{E_1} \pm \pi$.

Za vakuum je valni otpor :

$$Z_{v00} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.74 \Omega. \quad (5.275)$$

Valovi su, (slika 5.19):

$$\underline{E} = E_{m1} e^{j(\omega t + \beta z + \varphi_{E1})} + E_{m2} e^{j(\omega t - \beta z + \varphi_{E2})} \quad (5.276)$$

s vremensko-prostornim prikazom:

$$E(t) = \Re(\underline{E}) = E_{m1} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{E1}) + E_{m2} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{E2}). \quad (5.277)$$

Sad se vidi koje je značenje fazne konstante β . Ona zakreće prostornu fazu polja tako da se prostorna faza polja βz promijeni za 2π radijana na duljini koja je jednaka valnoj duljini vala koja će se ovdje označiti s λ pa je: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$. Faza električnog i magnetskog polja $(\omega t - \beta z)$ ukazuje na gibanje valnog efekta. Efekt se primjećuje, jer se za vrijeme promatranja vala fiksira jedno mjesto na valu, na primjer tjeme vala što odgovara održanju uvjeta konstantne faze: $\omega t - \beta z = \text{const}$. Tako se dolazi do pojma fazne brzine koja se dobiva iz tog uvjeta njegovim deriviranjem po vremenu odnosno:

$$(\omega t \pm \beta z + \varphi_E) = \text{const.} \quad \left/ \frac{d}{dt} \right. \quad (5.278)$$

$$\omega \pm \beta \frac{dz}{dt} = 0 \quad (5.279)$$

ili brzina konstantne faze odnosno fazna brzina (brzina gibanja ravnine konstantne faze):

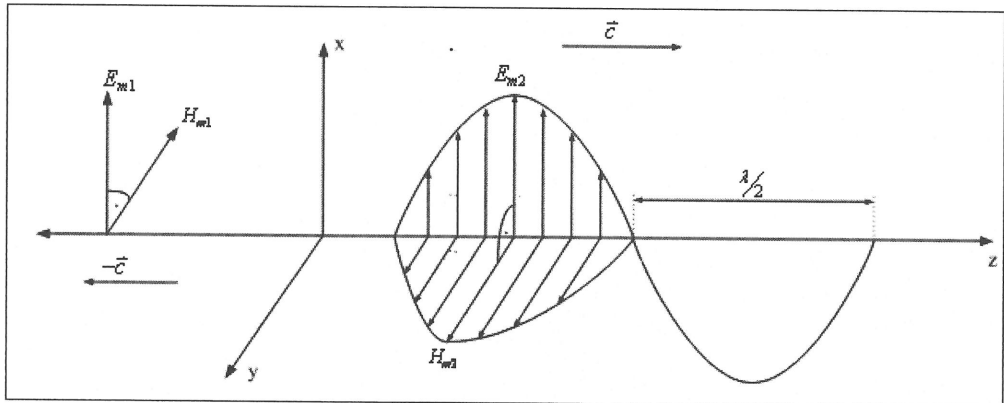
$$v = \frac{dz}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta} = \mp \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \mp c. \quad (5.280)$$

Prikaz polja (slika 5.19) za trenutak $t = 0$:

$$z_1 = -\frac{\varphi_{E_1}}{\beta}, z_2 = \frac{\varphi_{E_2}}{\beta}, \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}, c = \frac{2\pi}{\beta} f = \lambda f, \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (5.281)$$

Valni otpor (Z_{v0}) i fazna brzina (c) neovisni su o frekvenciji polja. Ostaju isti odnosi bez obzira o kojoj se frekvenciji radilo. Bilo kakav oblik vala se može rastaviti na harmonijske članove, a za sve njih valne impedancije su uvijek: $\underline{E}/\underline{H} = Z_{v0}$ jednake kao i brzina c . Dakle, val će zadržavati oblik za bilo koju vrijednost koordinate prostiranja z (nema gušenja).

Svaki se impuls Fourierovim integralom može pretvoriti u spektar frekvencija, pa se može tvrditi da se i čelo vala giba brzinom c .



Slika 5.19 Ravni elektromagnetski harmonijski val (jakosti polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$) u sredstvu bez gubitaka

5.7.6 Harmonijski val u sredstvu s gubicima

Polazi se od odnosa (5.264) - (5.267). Kvocijent vektora polja sad je kompleksan broj:

$$\frac{\underline{E}_2}{\underline{H}_2} = -\frac{\underline{E}_1}{\underline{H}_1} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\gamma}} = \underline{Z}_v = Z_v e^{j\varphi} \quad (5.282)$$

gdje je:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu\kappa - \omega^2\mu\epsilon} = \alpha + j\beta. \quad (5.283)$$

Da se bi se odredile prigušna i fazna konstanta α i β onako kako je to navedeno izrazima (5.258) – (5.260) treba kvadrirati posljednju jednadžbu (5.283) :

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = j\omega\mu\kappa - \omega^2\mu\varepsilon. \quad (5.284)$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobiva se:

$$2\alpha\beta = \omega\mu\kappa, \quad (5.285)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon, \quad (5.286)$$

$$\alpha = \frac{\omega\mu\kappa}{2\beta}, \quad (5.287)$$

$$\frac{(\omega\mu\kappa)^2}{4\beta^2} - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon. \quad (5.288)$$

Uvede li se privremena supstitucija $\beta^2 = a$, dobiva se:

$$(\omega\mu\kappa)^2 - 4a^2 + 4a\omega^2\mu\varepsilon = 0, \quad (5.289)$$

$$4a^2 - 4a\omega^2\mu\varepsilon - (\omega\mu\kappa)^2 = 0, \quad (5.290)$$

$$a_{1,2} = \frac{4\omega^2\mu\varepsilon \pm \sqrt{(4\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (4\omega\mu\kappa)^2}}{8}. \quad (5.291)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2} \right), \quad (5.292)$$

a odatle je fazna konstanta:

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2} + 1. \quad (5.293)$$

Kvadrat prigušne konstante je iz izraza (5.286):

$$\alpha^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + \frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2} \right) = \frac{\omega^2}{2c^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right), \quad (5.294)$$

a odatle prigušna konstanta:

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}. \quad (5.295)$$

Valna je impedancija kompleksan broj:

$$\underline{Z}_v = j \frac{\omega\mu}{\alpha + j\beta} = \frac{j\omega\mu(\alpha - j\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\omega\mu(\beta + j\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2} = |\underline{Z}_v| e^{j\varphi} = Z_v e^{j\varphi}. \quad (5.296)$$

Ovdje su:

$$Z_v = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.297)$$

modul i tangens kuta valne impedancije.

Za pozitivni val vrijedi:

$$\underline{E}_2 = \underline{Z}_v \underline{H}_2 = Z_v \underline{H}_2 e^{j\varphi}. \quad (5.298)$$

pa magnetsko polje zaostaje za kut φ za električnim poljem. Oba su polja međusobno prostorno okomita, ali su fazno pomaknuti. Naravno, u sredstvu bez gubitaka oba su polja u fazi ($\varphi = 0$).

U vremenskoj se domeni jakosti električnog i magnetskog polja mogu zapisati u sljedećem obliku :

- električno polje :

$$E_1 = E_{m1} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{E_1}), \quad (5.299)$$

$$E_1 = E_{m1} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{E_1}). \quad (5.300)$$

- magnetsko polje :

$$H_1 = E_{m1} \frac{1}{Z_v} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{E_1} - \varphi \pm \pi), \quad (5.301)$$

$$H_2 = E_{m2} \frac{1}{Z_v} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{E_2} - \varphi). \quad (5.302)$$

Brzine konstantne faze su:

$$v = \frac{dz}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta}. \quad (5.303)$$

Jednadžbe polja govore da se stanje mijenja duž osi z po eksponencijalnom zakonu (samo zbog vremenske jednostavnosti uveden je pojam faze brzine na isti način kao i ranije). Fazna brzina i prigušenje ovise o frekvenciji i val se deformira i amplitudno i fazno ako je sastavljen od spektra frekvencija. Više frekvencije imaju veću faznu brzinu, ali su i jače prigušene. Iz složenog vala prije nestaju više frekvencije.

Amplituda vala padne na vrijednost $1/e = 0.37$ na udaljenosti:

$$d = \frac{1}{\alpha} \quad (5.304)$$

koja se zove **dubina prodiranja vala**.

• **grupna brzina**

Ako se pak radi o valu koji nije sinusnog karaktera tad se ne može više govoriti o faznoj brzini s obzirom da nema jedinstvene kutne frekvencije ω . Pogotovo se to odnosi na signale kratkog trajanja u koje spadaju i impulsi širokog frekvencijskog spektra (pravokutni impulsi). Umjesto fazne brzine uvodi se pojam grupne brzine. Sintetizirajući nesinusni signal $s(t, z)$ inverznom Fourierovom transformacijom iz uskog frekvencijskog pojasa $F(\omega)$:

$$(\omega_0 - d\omega) \leq \omega \leq (\omega_0 + d\omega) \quad (5.305)$$

u okolišu noseće komponente frekvencije ω_0 može se funkcija faze $\beta(\omega)$ u okolišu te noseće frekvencije razviti u Taylorov red tako da je, [6]:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{d\beta}{d\omega} + \dots \quad (5.306)$$

Vremenski transformat u tom slučaju postaje:

$$\begin{aligned} s(t, z) &= \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} F(\omega) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z) + j(\omega - \omega_0) \left[t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right]} d\omega = \\ &= \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} F(\omega) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right]} d\omega = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right]} d\omega = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} s_0(t, z). \end{aligned} \quad (5.307)$$

Ovdje je:

$$s_0(t, z) = \int_{\omega_0 - d\omega}^{\omega_0 + d\omega} F(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right]} d\omega \quad (5.308)$$

srednja amplituda grupe signala frekvencija bliskih nosećoj ω_0 . Ova srednja amplituda konstantna je u plohi:

$$\left[t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right] = \text{const}. \quad (5.309)$$

Deriviranjem (5.309) po t dobiva se grupna brzina:

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (5.310)$$

Za dva sinusna signala bliskih frekvencija grupna brzina je fazna brzina modulacijske ovojnice (anvelope). Modulacijska ovojnica ima frekvenciju jednaku razlici frekvencija signala.

5.7.7 Polarizacija

Vektor električnog polja služi za utvrđivanje polarizacije elektromagnetskog vala. U optici je to vektor magnetskog polja. Ravnina polarizacije utvrđuje se na temelju smjerova vektora električnog polja i Poyntingovog vektora. Vektor magnetskog polja je tad okomit na polarizacijsku ravninu. *Ako je polarizacijska ravnina nepokretna radi se o slučaju linearne polarizacije vala.* Upravo je takva predodžba dosad eksploatirana. Postojala je dakle samo x komponenta električnog polja, a ravnina x - z bila je ravnina polarizacije. Drugi su oblici polarizacije mogući samo superpozicijom dvaju ili više linearno polariziranih valova. Dva su harmonijska vala linearno polarizirana ako imaju istu frekvenciju (valnu duljinu) te različite amplitude i faze.

Kružno polarizirani val sastoji se od dva linearno polarizirana vala jednakih amplituda:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xm} \cos(\omega t), \\ E_y &= E_{ym} \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \mp E_{ym} \sin(\omega t), \\ E_{xm} &= E_{ym}. \end{aligned} \quad (5.311)$$

Vektor ukupnog električnog polja ima konstantnu amplitudu $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ i rotira konstantnom brzinom u jednu ili drugu stranu ovisno o faznosti E_x i E_y . Magnetsko se polje mijenja u fazi s električnim poljem te oba vektora zajedno rotiraju.

Može se pokazati da kružno polarizirani val može nastati i iz višefaznog (m faza) sustava linearno polariziranih valova gdje je:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{m}{2} E_m \cos(\omega t), \\ E_y &= -\frac{m}{2} E_m \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (5.312)$$

Eliptički polarizirani val nastaje od dva kružno polarizirana vala iste frekvencije ali suprotnih smjerova:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= E_{m1} \cos(\omega t + \alpha_1), \quad E_{y1} = E_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1), \\ E_{x2} &= E_{m2} \cos(\omega t + \alpha_2), \quad E_{y2} = -E_{m2} \sin(\omega t + \alpha_2), \\ \left(\frac{E_\xi}{E_{\xi 0}} \right)^2 + \left(\frac{E_\eta}{E_{\eta 0}} \right)^2 &= 1, \\ E_\xi &= E_{\xi 0} \cos(\omega t + \alpha_0), \\ E_\eta &= E_{\eta 0} \sin(\omega t + \alpha_0), \\ E_{\xi 0} &= E_{m1} + E_{m2}, \quad E_{\eta 0} = E_{m1} - E_{m2}, \\ \alpha_0 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \end{aligned} \quad (5.313)$$

5.7.8 Podjela na vodiče i izolatore

Zbog različitog ponašanja u elektromagnetskom polju dijeli se sve materijale na vodiče i izolatore, a ponekad se spominju i poluvodiči, koji bi se mogli smatrati lošim vodičima ili pak lošim izolatorima. Ovdje se ne misli na poluvodiče, koje u jednom smjeru dobro vode, a u drugom loše s obzirom da oni nisu predmet ovih razmatranja.

Iskustvo pokazuje da ne postoje među materijalima idealni vodiči niti idealni izolatori. Postoje samo dobri vodiči i dobri izolatori, ali ne i idealni. To znači da svaki vodič ima neku konačnu vodljivost, a nipošto ne beskonačnu, kao što ne postoje idealni izolatori, koji ne bi u stanovitom stupnju vodili struju.

Metale u supravodljivom stanju moglo bi se smatrati idealnim vodičima. Međutim to stanje praktički je neodrživo te se ono ovdje ne uzima u obzir. Tako se jednako može suditi o slobodnom prostoru, koji je idealni izolator, ali ujedno i idealni vodič, ako se u njemu nađu slobodni naboji. Takvo je stanje prostora praktički tehnički nedostižno.

Ostaju praktički realna sredstva, kojima se uvijek mogu pripisati tri konstante: ε , μ i κ , konačnog iznosa.

Razmatranja ponašanja elektromagnetskog polja omogućuju podjelu sredstava na vodiče i izolatore, a ujedno pokazuju, da je moguće jedno te isto sredstvo jedanput ubrajati u vodiče, a drugi put u izolatore.

Valna konstanta, karakteristična za ponašanje vala u pojedinom sredstvu sadrži sve tri konstante sredstva: ε , μ , κ . Posljednja konstanta (κ), specifična vodljivost sredstva, je presudna hoće li neko sredstvo biti ocijenjeno kao vodič ili izolator. Idealni izolator ima $\kappa = 0$. Idealni vodič ima $\kappa = \infty$, te u njemu ne može uopće polje postojati, te po tom otpada moguće promatranje polja u takvom vodiču.

U prigušnoj i faznoj konstanti (5.259 i 5.260 odnosno 5.295 i 5.293) opaža se da je kvocijent $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon}$

mjerodavan u koju će se grupu ubrojiti promatrano sredstvo. Iz prve Maxwellove jednadžbe slijedi, da je taj kvocijent u stvari jednak omjeru iznosa provodne struje prema iznosu pomaćne struje za određenu frekvenciju. Ovdje treba utvrditi da je upravo provodna struja karakteristična za vodiče, a

pomaćna za izolatore. Dakle kvocijent $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon}$ najbolje je mjerilo klasifikacije određenog sredstva na

vodič ili izolator. Na primjer, ako prevladavaju pomaćne struje, treba ocijeniti dotično sredstvo kao izolator. Sad se tek vidi da frekvencija polja može biti odlučna, u koju grupu će se svrstati neki materijal, a da se pri različitim frekvencijama može naći u različitim grupama.

5.7.8.1 Slučaj: izolatori $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \ll 1$:

Prigušna i fazna konstanta te valna impedancija su prema (5.295) i (5.293) odnosno (5.296):

$$\alpha \cong \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (5.314)$$

$$\beta \cong \frac{\omega}{c}, \quad (5.315)$$

$$Z_v \cong \frac{\omega \varepsilon}{\beta} = \frac{\omega \mu}{\omega} c = \frac{\mu}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (5.316)$$

$$v \cong c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

U tom se slučaju val ponaša kao u sredstvu bez gubitaka, iako postoji stanovito prigušenje, koje je neovisno o frekvenciji. Isto tako je i fazna brzina neovisna o frekvenciji. Prema tome ne može se očekivati nekakva izrazita distorzija, samo se izvori polja smanjuju. Takvo se sredstvo može ocijeniti kao izolator.

Vrlo mala vrijednost karakterističnog kvocijenta provodne i pomačne struje može značiti da se uzme orijentacijski:

$$\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \leq 0.01. \quad (5.317)$$

Tablica 5.2 Vrijednosti za specifične vodljivosti κ (S/m) nekih materijala

Aluminij, komercijalni, tvrdo vučen	$35,4 \cdot 10^6$
Bakar, elektrostrojski	$57,0 \cdot 10^6$
Željezo, čisto 99.8%	$10,0 \cdot 10^6$
Čelik, ugljikov	$5 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6$
Olovo	$4,8 \cdot 10^6$
Nikal	$12,8 \cdot 10^6$
Volfram	$18,1 \cdot 10^6$
Bakelit	$10^{-8} - 10^{-10}$
Staklo, obično	10^{-12}
Tvrda guma	$10^{-14} - 10^{-16}$
Mramor	$10^{-7} \cdot 10^{-9}$
Tinjac	$10^{-11} - 10^{-15}$
Porculan	$3 \cdot 10^{-13}$
Kremen, taljen	$< 2 \cdot 10^{-17}$
Drvo, parafirano	$10^{-8} - 10^{-11}$
Petrolej	10^{-14}
Voda destilirana, 18° C	$2 \cdot 10^{-4}$
Voda morska	3 – 5
Voda slatka	$10^{-2} \cdot 10^{-3}$
Vlažno tlo	$10^{-2} \cdot 10^{-3}$
Suho tlo	$10^{-4} \cdot 10^{-5}$

Tablica 5.3 Vrijednosti za relativne dielektričnosti ε nekih materijala

Petrolej	2,13
Voda, destilirana	81,1
Staklo	6,6-9,5
Mramor	8,3
Tinjac	5,6-6,0
Papir(kabelska izolacija)	5,7

5.7.8.2 Slučaj: vodiči $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \gg 1$

Prigušna i fazna konstanta su prema (5.295) i (5.293):

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa} = \frac{1}{d}, \quad (5.318)$$

a valni otpor, kut između električnog i magnetskog polja te fazna brzina su:

$$Z_v = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad v \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \kappa}}. \quad (5.319)$$

Tu je karakteristično, da magnetsko polje fazno zaostaje za električnim poljem za osminu periode odnosno za 45° . Sve tri karakteristične konstante (α, β, Z_v) vala frekvencijski su ovisne, te će u vodičima postojati snažna distorzija vala.

Orijentacijski se za vodiče može uzeti da je:

$$\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \geq 100. \quad (5.320)$$

Analizom se može utvrditi da su za $\kappa > 10^3 S/m$ uvijek vodiči, a za $\kappa < 10^{-10} S/m$ uvijek izolatori. Vlažno tlo sa specifičnom vodljivošću $\kappa = 10^{-3} S/m$ i $\varepsilon_r = 10$ je izolator za frekvencije $f > 200 MHz$ (duljina vala $1.5m$).

Tablica 5.4 Dubine prodiranja harmonijskog vala za različite frekvencije za neka sredstva

$f, (Hz)$	50	10^3	10^4	10^5	10^6
Cu, $d(m)$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$0,63 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,067 \cdot 10^{-3}$
Fe, $d(m)$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,046 \cdot 10^{-3}$	$0,015 \cdot 10^{-3}$
Vlažno tlo, $d(m)$	2251	503	159	50,3	16

Tablica 5.5 Parametri gore navedenih sredstava

Cu: $\kappa = 57 \cdot 10^6 S/m$, $\mu_r = 1$
Fe: $\kappa = 6 \cdot 10^6 S/m$, $\mu_r = 200$
Vlažno tlo: $\kappa = 10^{-3} S/m$, $\mu_r = 1$

5.7.9 Strujanje energije

Poyntingov vektora $\vec{\Gamma} = \vec{E} \times \vec{H}$ gleda u smjeru širenja vala. Definiraju li se efektivna vrijednost električnog i magnetskog polja za pozitivni val:

$$E_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{mz} e^{-i\alpha} = E_{ef0} e^{-i\alpha}, \quad (5.321)$$

$$H_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E_{mz}}{Z_v} e^{-i\alpha} = \frac{E_{ef}}{Z_v}, \quad (5.322)$$

$$Z_v = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (5.323)$$

srednja vrijednost plošne gustoće snage je kao i za izmjenične struje:

$$\Gamma_a = E_{ef} H_{ef} \cos\varphi, \quad (5.324)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \frac{E_{ef}^2}{Z_v} \cos\varphi = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega\mu} \cos(\arctg \frac{\alpha}{\beta}) E_{ef}^2 \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega\mu} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} E_{ef}^2 = \frac{\beta}{\omega\mu} E_{ef}^2 = \frac{E_{ef}^2}{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.325)$$

Za izolator je efektivna vrijednost Poyntingovog vektora:

$$\Gamma_a = \frac{E_{ef}^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}, \quad (5.326)$$

a za vodič je:

$$Z_v = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\kappa}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \nu \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}}, \quad (5.327)$$

$$\Gamma_a = \frac{E_{ef}^2}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{E_{ef}^2}{\sqrt{\frac{2\omega\mu}{\kappa}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} H_{ef}^2. \quad (5.328)$$

Iz bilance energije mogu se odrediti gubici po jedinici volumena. Kao što se već ranije utvrdilo (5.110), za prostor bez izvora je vremenska promjena energije (snaga):

$$-\frac{\partial}{\partial t} W = \iiint_V \vec{J} \vec{E} dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S}. \quad (5.329)$$

Za slučaj stacionarnog stanja je: $\partial W / dt = 0$ pa se korištenjem Gaussovog teorema za isijanu snagu

$$\left(\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{I} dV \right) \text{ dobiva:}$$

$$0 = P_g + \iiint_V \text{div } \vec{I} dV, \quad (5.330)$$

$$P_g = -\text{div } \vec{I} \quad (5.331)$$

ili za slučaj ravnog vala i opći slučaj sredstva u kojem se val rasprostire:

$$\Gamma_a = \frac{\beta}{\omega\mu} E_{ef}^2 = \frac{E_{ef}^2}{\mu\nu} \quad (5.332)$$

$$\begin{aligned} P_g &= -\frac{\partial \Gamma_a}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta}{\omega\mu} E_{ef}^2 \right) = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_{ef0}^2 \frac{\partial}{\partial z} e^{-2\alpha z} = \\ &= \frac{2\alpha\beta}{\omega\mu} E_{ef0}^2 e^{-2\alpha z}. \end{aligned} \quad (5.333)$$

Prvi faktor u ovom konačnom obliku izraza je zapravo:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha\beta}{\omega\mu} &= \frac{2 \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{-1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}{\omega\mu} = \\ &= \frac{\mu\varepsilon\omega}{\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 = \varepsilon\omega \frac{\kappa}{\omega\varepsilon} = \kappa \end{aligned} \quad (5.334)$$

pa je:

$$P_g = \kappa E_{ef0}^2 e^{-2\alpha z} = \kappa E_{ef}^2. \quad (5.335)$$

Ovdje se usput može spomenuti solarna konstanta. Ona predstavlja snagu po jedinici površine Zemlje, koju emitira Sunce. Solarna konstanta iznosi približno $1.5[kW/m^2]$, što je Poyntingov vektor zračenja Sunca na Zemlji. U toj konstanti jakost električnog polja sudjeluje s oko $750[V/m]$, a magnetskog $2[A/m]$.

Dalje je kvocijent magnetske i električne energije polja:

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{\mu H_{ef}^2}{\varepsilon E_{ef}^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{Z_v^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} \quad (5.336)$$

Prema tome uvijek prevladava akumulirana magnetska energija. Samo u slučaju sredstva bez gubitaka obje energije su međusobno jednake. Ukupna energija jednaka je zbroju obiju energija.

5.8 POLJE NA GRANICI DVAJU SREDSTAVA

Dosad je prikazano polje u izotropnim, homogenim i linearnim sredstvima, u neograničenom prostoru. U stvarnosti ne postoji takvo idealno stanje, jer je prostor ispunjen sredstvima različitih svojstava. Svojstva se mijenjaju postupno ili skokovito. Takva mjesta diskontinuiteta izazivaju promjene u polju, a one su značajne za izračunavanje procesa u polju.

Utvrdilo se je da su odnosi u polju ovisni o konstantama sredstva. Polje uzrokuje polarizaciju sredstva ili struje u njemu. Oboje su sposobni da izazovu novo polje, koje će se superponirati narinutom. Oboje se opiru prodiranju polja, a u dotičnom sredstvu inducirana polarizacija i struje djeluju uvijek suprotno polju koje ih je induciralo. To se manifestira kao refleksija polja od promatranog sredstva. Dakle, ako neki elektromagnetski val naiđe na sredstvo veće dielektričnosti, permeabilnosti ili vodljivosti, reflektirat će se na tom mjestu, a u manjem će iznosu ući u njega.

Čim je dimenzija zapreke mnogo puta veća od duljine vala, nastupit će refleksija (odbijanje) i refrakcija (lom) vala na površini zapreke. Ako su njezine dimenzije malene, opet će ona biti izvor novih valova, ali ona neće spriječiti prodiranje vala, već ga samo promijeniti. Tad je to difrakcija vala ili ogib. U slučaju postupne promjene svojstava sredstva, nastaje i postupna promjena polja.

Područje studija elektromagnetskog polja na granici dvaju sredstava jedno je od najvažnijih. Ono obuhvaća u širem smislu širenje valova na granici dvaju sredstava, a zatim u užem smislu prijenosne valovode, vodove, te konačno vrtložne struje, odnosno skin (površinski) efekt, [3].

Polazna točka opet su Maxwellove jednačbe, koje moraju biti zadovoljene. Osnovni uvjeti na granici dvaju sredstava bili su već prikazani, a sad će se promatrati valovi, koji moraju zadovoljiti spomenute uvjete.

5.8.1 Refleksija (odbijanje) i refrakcija (lom)

Problem refleksije i refrakcije razmatrat će se najlakše na ravnom valu. Njegove su karakteristike zadane valnom konstantom:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5.337)$$

i valnim otporom Z_v , koji je općenito također kompleksna veličina za harmonijski val. Ravnina S dijeli sredstvo 2 od sredstva 1, a njena je normala $\vec{n}$. Ona je definirana jednačbom:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \quad (5.338)$$

pri čemu je $\vec{r}$ radijus vektor iz ishodišta 0 do neke točke u ravnini S , (slika 5.20).

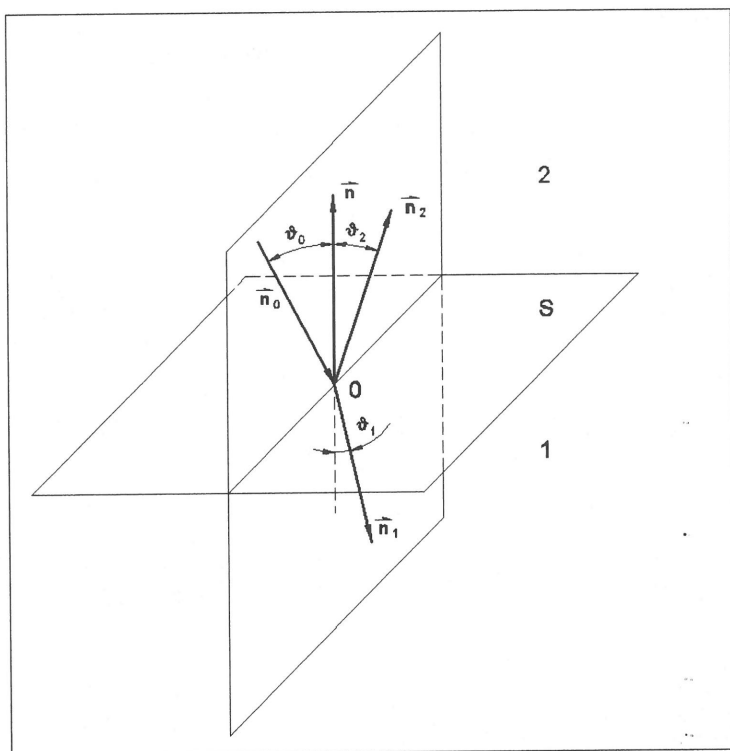
Iz sredstva 2 nailazi val čije su veličine polja $\vec{E}_u$ i $\vec{H}_u$ u smjeru $\vec{n}_0$ to jest. $\vec{n}_0 \cdot \vec{E}_u = 0$, $\vec{n}_0 \cdot \vec{H}_u = 0$.

Ravnina položena vektorima $\vec{n}$ i $\vec{n}_0$ naziva se ravinom upadnog vala. Poyntingov je vektor upadnog vala $\vec{F}_u = \vec{E}_u \times \vec{H}_u$, a ima smjer jediničnog vektora $\vec{n}_0$.

Reflektirani val čije su komponente električnog i magnetskog polja $\vec{E}_r$ i $\vec{H}_r$, odlazi u smjeru $\vec{n}_2$, a ravnina kroz $\vec{n}$ i $\vec{n}_2$ zove se ravnina reflektiranog vala.

Prolazni val čije su komponente električnog i magnetskog polja $\vec{E}_p$ i $\vec{H}_p$ odlazi u smjeru $\vec{n}_1$ u sredstvu 1, a ravnina vektora $\vec{n}$ i $\vec{n}_1$ je ravnina prolaznog vala.

Valne konstante iznose γ_2 i γ_1 za sredstvo 2 odnosno 1, a odgovarajući valni otpori su Z_{v2} i Z_{v1} .



Slika 5.20 Granična i upadna ravnina ravnog elektromagnetskog vala

Sad se mogu napisati jednačbe pojedinih valova za bilo koju točku na graničnoj ravni.

$$\underline{\vec{E}}_u = \underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t - \gamma_2 \vec{r} \cdot \vec{n}_0} \quad \underline{\vec{H}}_u = \frac{\vec{n}_0 \times \underline{\vec{E}}_u}{Z_{v2}} \quad (5.339)$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_2 e^{j\omega t - \gamma_2 \vec{r} \cdot \vec{n}_2} \quad \underline{\vec{H}}_r = \frac{\vec{n}_2 \times \underline{\vec{E}}_r}{Z_{v2}} \quad (5.340)$$

$$\underline{\vec{E}}_p = \underline{\vec{E}}_1 e^{j\omega t - \gamma_1 \vec{r} \cdot \vec{n}_1} \quad \underline{\vec{H}}_p = \frac{\vec{n}_1 \times \underline{\vec{E}}_p}{Z_{v1}} \quad (5.341)$$

Iz graničnih uvjeta (jednakosti tangencijalnih komponenti jakosti električnog i magnetskog polja) slijedi:

$$\vec{n} \times (\underline{\vec{E}}_u + \underline{\vec{E}}_r) = \vec{n} \times \underline{\vec{E}}_p \quad (5.342)$$

$$\vec{n} \times [(\underline{\vec{E}}_u + \underline{\vec{E}}_r) - \underline{\vec{E}}_p] = 0$$

$$\vec{n} \times (\underline{\vec{H}}_u + \underline{\vec{H}}_r) = \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_p \quad (5.343)$$

$$\vec{n} \times [(\underline{\vec{H}}_u + \underline{\vec{H}}_r) - \underline{\vec{H}}_p] = 0$$

Da bi taj uvjet bio ispunjen moraju u prvom redu biti jednaki eksponenti:

$$\underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_0 = \underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_2 = \underline{\gamma}_1 \bar{r} \bar{n}_1, \quad (5.344)$$

ili:

$$\underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_0 = \underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_2, \quad \underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_0 = \underline{\gamma}_1 \bar{r} \bar{n}_1 \quad (5.345)$$

što u biti predstavlja jednakost faznih brzina na granici ($z=0$). Odatle je:

$$\bar{r} \bar{n}_0 - \bar{r} \bar{n}_2 = 0, \quad (5.346)$$

$$\underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_0 - \underline{\gamma}_1 \bar{r} \bar{n}_1 = 0. \quad (5.347)$$

Dalje je:

$$\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r}) = (\bar{n} \bar{r}) \bar{n} - (\bar{n} \bar{n}) \bar{r} = -\bar{r} \quad (5.348)$$

Zbog $\bar{n} \bar{r} = 0$ ($\bar{r}$ leži u ravnini S , a $\bar{n}$ je normala na ravninu). Zamjenom (5.348, $-\bar{r} = \bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})$) u prvoj od dvije gornje jednačbe: (5.346, $\bar{r} \bar{n}_0 - \bar{r} \bar{n}_2 = 0$) dobiva se:

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 [\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})] - \bar{n}_2 [\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})] &= 0, \\ [(\bar{n}_0 \times \bar{n}) - (\bar{n}_2 \times \bar{n})](\bar{n} \times \bar{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.349)$$

odnosno:

$$\bar{n}_0 \times \bar{n} = \bar{n}_2 \times \bar{n}. \quad (5.350)$$

S obzirom da su moduli ovih vektora: $|\bar{n}_0 \times \bar{n}| = \sin(\pi - \vartheta_0) = \sin \vartheta_0$ te: $|\bar{n}_2 \times \bar{n}| = \sin \vartheta_2$ proizlazi da je i iz njihove jednakosti:

$$\sin \vartheta_0 = \sin \vartheta_2, \quad \vartheta_0 = \vartheta_2 \quad (5.351)$$

što predstavlja *prvi Snelliusov zakon ili zakon refleksije (odbijanja)*. Vektori $\bar{n}_0$, $\bar{n}$ i $\bar{n}_2$ u istoj su ravnini (jednakost smjera vektora – iz uglate zgrade, također pogledati i u Matematičkom prilogu, „Osnove varijacijskog računa“).

Dakle kut refleksije (ϑ_2) jednak je kutu upada (ϑ_0) što vrijedi i za svjetlo koje je također elektromagnetski val.

Dalje, iz druge jednačbe (5.347, $\underline{\gamma}_2 \bar{r} \bar{n}_0 - \underline{\gamma}_1 \bar{r} \bar{n}_1 = 0$) također po uvrštenju (5.348, $-\bar{r} = \bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})$) slijedi:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_2 \bar{n}_0 [\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})] - \underline{\gamma}_1 \bar{n}_1 [\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{r})] &= 0 \\ [\underline{\gamma}_2 (\bar{n}_0 \times \bar{n}) - \underline{\gamma}_1 (\bar{n}_1 \times \bar{n})](\bar{n} \times \bar{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.352)$$

$$\underline{\gamma}_2 (\bar{n}_0 \times \bar{n}) - \underline{\gamma}_1 (\bar{n}_1 \times \bar{n}) = 0. \quad (5.353)$$

S obzirom da su moduli ovih vektora: $|\vec{n}_0 \times \vec{n}| = \sin(\pi - \vartheta_0) = \sin \vartheta_0$ te: $|\vec{n}_1 \times \vec{n}| = \sin \vartheta_1$ izlazi da je i iz njihove jednakosti:

$$\gamma_2 \sin \vartheta_0 = \gamma_1 \sin \vartheta_1 \text{ ili:}$$

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (5.354)$$

što predstavlja **drugi Snelliusov zakon ili zakon refrakcije (loma)**. Vektori $\vec{n}_0$, $\vec{n}$ i $\vec{n}_1$ u istoj su ravnini, (pogledati još i u Matematičkom prilogu pod „Osnove varijacijskog računa“).

Ravnine propagacije svih valova padaju u zajedničku ravninu.

Sad se može prijeći na konačne uvjete za amplitude (amplituda upadnog vala $\vec{E}_0$, amplituda reflektiranog vala $\vec{E}_2$ te amplituda prolaznog vala amplituda $\vec{E}_1$) veličina polja (granični uvjeti):

$$\vec{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_2) = \vec{n} \times \vec{E}_1, \quad (5.355)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_2) = \vec{n} \times \vec{H}_1 \quad (5.356)$$

$$\vec{n} \times \left(\frac{\vec{n}_0 \times \vec{E}_0}{Z_{v2}} + \frac{\vec{n}_2 \times \vec{E}_2}{Z_{v2}} \right) = \vec{n} \times \frac{\vec{n}_1 \times \vec{E}_1}{Z_{v2}}$$

Gore navedene jednačbe (5.355) i (5.356) za električno i magnetsko polje elektromagnetskog vala na granici dvaju sredstava zovu se **Fresnelove jednačbe**.

Vektor $\vec{E}_0$ upadnog vala može biti po volji orijentiran, ali ga se može uvijek zamisliti rastavljenog u dvije komponente, okomito na upadnu ravninu vala, definiranog s $\vec{n}$ i $\vec{n}_0$, i paralelno s njom.

5.8.1.1 Vektor $\vec{E}_0$ okomit na upadnu ravninu

Tad je $\vec{H}_0$ u toj ravnini (paralelan s tom ravninom), a $\vec{E}_0$ je paralelan graničnoj ravnini, (slika 5.21, lijevo). To se još zove i tako da je ravnina polarizacije (električnog polja) okomita na upadnu ravninu. Zato su sljedeći skalarni produkti za upadni val jednaki nuli :

$$\vec{n} \vec{E}_0 = \vec{n}_0 \vec{E}_0 = 0, \quad (5.357)$$

a može se očekivati da su $\vec{E}_2$ i $\vec{E}_1$ paralelni s $\vec{E}_0$, pa su skalarni produkti i za reflektirani val također jednaki nuli:

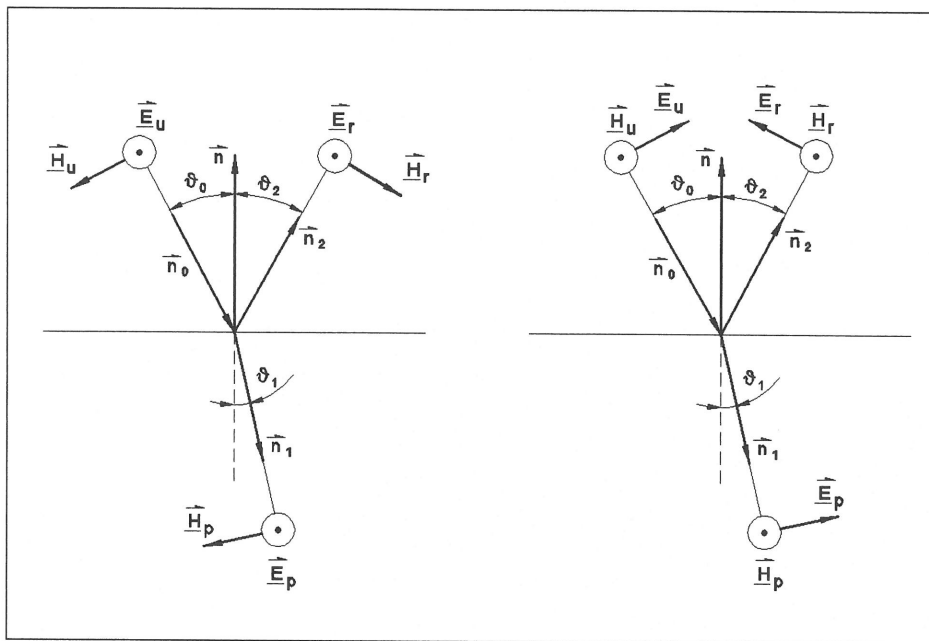
$$\vec{n} \vec{E}_1 = \vec{n} \vec{E}_2 = 0. \quad (5.358)$$

Prvu Fresnelovu jednačbu (za komponente jakosti električnog polja u oba sredstva) treba vektorski pomnožiti s $\vec{n}$ te se dobiva na primjer:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}_0) = (\vec{n} \vec{E}_0) \vec{n} - (\vec{n} \vec{n}) \vec{E}_0 = -\vec{E}_0 \quad (5.359)$$

Kad se to načini i s ostala dva člana prve Fresnelove jednadžbe iz nje se dobiva:

$$\underline{\vec{E}}_0 + \underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_1. \quad (5.360)$$



Slika 5.21 Lijevo: vektor električnog polja okomit na upadnu ravninu, desno: vektor električnog polja paralelan s upadnom ravninom

Iz druge Fresnelove jednadžbe (za komponente jakosti magnetskog polja u oba sredstva) dobiva se na primjer:

$$\vec{n} \times \frac{\vec{n}_0 \times \underline{\vec{E}}_0}{Z_{v2}} = \frac{1}{Z_{v2}} [(\vec{n} \underline{\vec{E}}_0) \vec{n}_0 - (\vec{n} \vec{n}_0) \underline{\vec{E}}_0], \quad (5.361)$$

a s obzirom da je $\vec{n} \cdot \underline{\vec{E}}_0 = 0$ ostaje samo drugi član u zagradi:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \frac{\vec{n}_0 \times \underline{\vec{E}}_0}{Z_{v2}} &= \frac{1}{Z_{v2}} [-(\vec{n} \vec{n}_0) \underline{\vec{E}}_0] = \\ &= \frac{1}{Z_{v2}} [-\cos(\pi - \vartheta_0) \underline{\vec{E}}_0] = \frac{1}{Z_{v2}} \cos \vartheta_0 \underline{\vec{E}}_0. \end{aligned} \quad (5.362)$$

Na sličan je način:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \frac{\vec{n}_2 \times \underline{\vec{E}}_2}{Z_{v2}} &= \frac{1}{Z_{v2}} [(\vec{n} \underline{\vec{E}}_2) \vec{n}_2 - (\vec{n} \vec{n}_2) \underline{\vec{E}}_2] = \\ &= -\frac{1}{Z_{v2}} \cos \vartheta_2 \underline{\vec{E}}_2. \end{aligned} \quad (5.363)$$

a također i za član na desnoj strani:

$$\begin{aligned}\bar{n} \times \frac{\bar{n}_1 \times \bar{E}_1}{Z_{v1}} &= \frac{1}{Z_{v1}} [(\bar{n} \bar{E}_1) \bar{n}_1 - (\bar{n} \bar{n}_1) \bar{E}_1] = \\ &= -\frac{1}{Z_{v1}} \cos(\pi - \vartheta_1) \bar{E}_1 = \frac{1}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1 \bar{E}_1\end{aligned}\quad (5.364)$$

tako da je iz druge Fresnelove jednadžbe nakon množenja objiju strana sa Z_{v2} :

$$\bar{E}_0 \cos \vartheta_0 - \bar{E}_2 \cos \vartheta_2 = \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \bar{E}_1 \cos \vartheta_1. \quad (5.365)$$

Konačno se dobivaju komponente jakosti električnog polja prolaznog i reflektiranog vala:

$$\bar{E}_1 = \frac{\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1} \bar{E}_0 \quad (5.366)$$

te.

$$\bar{E}_2 = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1} \bar{E}_0. \quad (5.367)$$

5.8.1.2 Vektor $\bar{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini

Drugi je slučaj kad je $\bar{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini odnosno polarizacijska ravnina paralelna je upadnoj ravnini, a tad je $\bar{H}_0$ okomit na nju, to jest $\bar{n} \bar{H}_0 = \bar{n}_0 \bar{H}_0 = 0$, (slika 5.21, desno). Ako se vektori $\bar{E}$ zamijene s $\bar{H}$ dobiva se:

$$\bar{n} \times (\bar{H}_0 + \bar{H}_2) = \bar{n} \times \bar{H}_1, \quad (5.368)$$

$$\bar{n} \times [Z_{v2}(\bar{H}_0 \times \bar{n}_0) + Z_{v2}(\bar{H}_2 \times \bar{n}_2)] = \bar{n} \times Z_{v1}(\bar{H}_1 \times \bar{n}_1). \quad (5.369)$$

Odatle se na isti način kao i za slučaj električnog polja mogu izračunati komponente jakosti magnetskog polja prolaznog i reflektiranog vala:

$$\bar{H}_1 = \frac{\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} \cos \vartheta_1} \bar{H}_0, \quad (5.370)$$

$$\bar{H}_2 = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} \cdot \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} \cdot \cos \vartheta_1} \bar{H}_0. \quad (5.371)$$

Čim je jedno sredstvo vodljivo, pripadni je valni otpor kompleksna veličina, a isto tako je kut vala kompleksan, što dovodi do promjene faze i reflektiranog i prolaznog vala u odnosu na upadni val.

Razmjerno se jednostavni odnosi dobivaju, ako je upadni val okomit na graničnu ravninu S , to jest $\vartheta_0 = 0$. Tad je i $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, a svejedno je da li je $\bar{E}_0$ okomit na upadnu ravninu ili nije:

$$\bar{E}_1 = \frac{2Z_{v1}}{Z_{v1} + Z_{v2}} \bar{E}_0, \quad (5.372)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{Z_{v1} - Z_{v2}}{Z_{v1} + Z_{v2}} \bar{E}_0. \quad (5.373)$$

5.8.2 Val na granici dvaju dielektričnih sredstava

Problemi se u mnogome pojednostavljaju, ako su oba sredstva izolatori, odnosno: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Tad se dobiva ($\vartheta_2 = \vartheta_0$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$):

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{j\beta_2}{j\beta_1} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (5.374)$$

S obzirom da je za slučaj izolatora:

$$\left. \frac{Z_2}{\gamma_2} \right|_{\kappa_2=0} = \sqrt{\frac{j\mu_2\omega}{\kappa_2 + j\varepsilon_2\omega}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = Z_{v2}, \quad (5.375)$$

$$\left. \frac{Z_1}{\gamma_1} \right|_{\kappa_1=0} = \sqrt{\frac{j\mu_1\omega}{\kappa_1 + j\varepsilon_1\omega}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = Z_{v1}.$$

pa je:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}. \quad (5.376)$$

Uz $\mu_1 = \mu_2$ to postaje:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (5.377)$$

U prvom slučaju, kad je $\vec{E}_0$ okomit na upadnu ravninu ($\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$) je:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \vartheta_1} \vec{E}_0 = \frac{2 \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_1} \cos \vartheta_1} \vec{E}_0 = \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_0} \vec{E}_0.\end{aligned}\quad (5.378)$$

ili za prolazni val:

$$\vec{E}_1 = \frac{2 \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_1)} \vec{E}_0 \quad (5.379)$$

te za reflektirani val:

$$\vec{E}_2 = \frac{\cos \vartheta_0 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_0} \vec{E}_0, \quad (5.380)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_1)} \vec{E}_0. \quad (5.381)$$

Za slučaj kad je $\vec{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini odnosno $\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$, dobiva se:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \times \vec{E}_1 &= \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} \cdot \frac{\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0 + \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} \cos \vartheta_1} (\vec{n}_0 \times \vec{E}_0) = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0} \frac{2 \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_1} (\vec{n}_0 \times \vec{E}_0) = \\ &= \frac{2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1} (\vec{n}_0 \times \vec{E}_0) = \frac{4 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_0}{\sin 2\vartheta_0 + \sin 2\vartheta_1} (\vec{n}_0 \times \vec{E}_0).\end{aligned}\quad (5.382)$$

Iste jednadžbe slijede iz normalnih komponenti Poyntingovog vektora:

$$\vec{n}_2 \times \vec{E}_2 = \frac{\sin 2\vartheta_0 - \sin 2\vartheta_1}{\sin 2\vartheta_0 + \sin 2\vartheta_1} (\vec{n}_0 \times \vec{E}_0) \quad (5.383)$$

Pri okomitom upadu vala, ($\vartheta_0 = \vartheta_2 = \vartheta_1 = 0$) dobivaju se jednostavniji izrazi bez obzira na polarizacijsku ravninu ako se u izraze :

$$\vec{E}_1 = \frac{\cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1} \vec{E}_0 \quad (5.384)$$

te:

$$\bar{E}_2 = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \cos \vartheta_1} \bar{E}_0. \quad (5.385)$$

uvrsti: $\vartheta_0 = \vartheta_2 = \vartheta_1 = 0$:

$$\bar{E}_1 = \frac{2Z_{v1}}{Z_{v1} + Z_{v2}} \bar{E}_0 \quad (5.386)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{Z_{v1} - Z_{v2}}{Z_{v1} + Z_{v2}} \bar{E}_0, \quad (5.387)$$

što je već upravo bilo izvedeno, a za slučaj kad su oba sredstva dielektrici s $\mu_1 = \mu_2$:

$$\bar{E}_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \bar{E}_0, \quad (5.388)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \bar{E}_0. \quad (5.389)$$

Prolazni val jednako je polariziran kao i upadni val, dok reflektirani val može biti i obrnuto ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). Vremenska faza ostaje ista kod svih valova. Zato se može promatrati i trenutna vrijednost Poyntingovog vektora.

Upadni val nosi sa sobom energiju.

$$\Gamma_u = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu}} \cdot E_0^2, \quad (5.390)$$

a reflektirani i prolazni val:

$$\Gamma_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu}} E_2^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2 E_0^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2 \Gamma_u \quad (5.391)$$

$$\Gamma_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu}} E_1^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu}} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right)^2 E_0^2 = \frac{4 \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2} \Gamma_u \quad (5.392)$$

Uvedu li se faktori refleksije (R) i transmisije (T):

$$R = \frac{\Gamma_r}{\Gamma_u} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2, \quad (5.393)$$

$$T = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_u} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2} = \frac{4}{\left(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} + \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)^2}, \quad (5.394)$$

dobiva se:

$$R + T = \frac{\varepsilon_2 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \varepsilon_1 + 4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2} = 1. \quad (5.395)$$

Za $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ (slučaj prolaza vala iz izolatora u vakuum) je $E_1 > E_0$ pa ipak je opet $T < 1$.

Tablica 5.6 Vrijednosti faktora transmisije za neke kvocijente dielektričnosti dvaju sredstava $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\sqrt{N}$	$T = \frac{4}{\left(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} + \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)^2} = \frac{4}{N}$
1	2.0000	1.0000
2	2,0301	0.9706
5	2,1641	0.8541
10	2,3406	0.7301
20	2.5876	0.5974
50	3.0352	0.4342
100	3,4785	0.3306

Dakle, za bilo kakav kvocijent dielektričnosti $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ faktor transmisije je: $T \leq 1$. Izlazna je energija uvijek manja od upadne. Izlazna energija vala postaje sve manja, kako val prelazi iz jednog dielektrika u drugi.

Za izlazni kut može vrijediti:

$$\sin \vartheta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sin \vartheta_0 > 1, \quad (5.396)$$

a to nastaje za:

$$\sin \vartheta_0 > \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (5.397)$$

To je slučaj totalne refleksije, a granični je kut određen sa:

$$\sin \vartheta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (5.398)$$

Totalna refleksija može nastupiti samo kad je $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Na granici zrak-voda nikad ne može nastupiti totalna refleksija, nego samo za slučaj voda-zrak, te kad bi se vodu smatralo izolatorom. Uvjet da postoji totalna refleksija, može biti zadovoljen samo ako je ϑ_1 kompleksna veličina, a $\cos \vartheta_1$ čisto imaginarna:

$$\cos \vartheta_1 = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin^2 \vartheta_0} = j \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (5.399)$$

5.8.3 Granica izolator-vodič

Već je uočeno da je kod vodiča:

$$\eta = \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \gg 1, \quad (5.400)$$

a pretpostavlja se da val dolazi iz izolatora u vodič (iz sredstva 2 u sredstvo 1). Tad su valna konstanta i valna impedancija za vodič (sredstvo 1):

$$\underline{\gamma}_1 \cong \alpha_1(1 + j), \quad (5.401)$$

$$\alpha_1 \cong \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu_1 \kappa_1} = \beta_1, \quad (5.402)$$

$$\underline{Z}_{v1} = \frac{j \omega \mu_1}{\alpha_1(1 + j)} = \frac{\omega \mu_1}{2 \alpha_1} j(1 - j) = \frac{\omega \mu_1}{2 \alpha_1} (1 + j), \quad (5.403)$$

a za sredstvo 2 (izolator):

$$\underline{\gamma}_2 = j \beta_2 = j \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}, \quad (5.404)$$

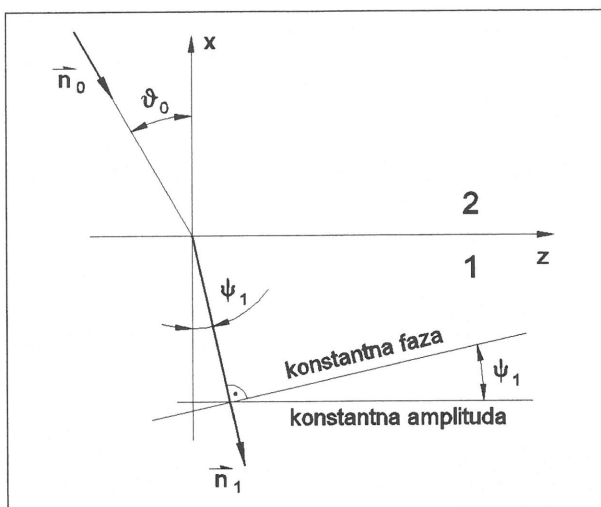
$$\underline{Z}_{v2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = Z_{v2}. \quad (5.405)$$

Prema drugom Snelliusovom zakonu je:

$$\sin \vartheta_1 = \frac{j \beta_2}{(1 + j) \alpha_1} \sin \vartheta_0 = (1 + j) \frac{\beta_2}{2 \alpha_1} \sin \vartheta_0. \quad (5.406)$$

Prolazni val ima jednadžbu, (slika 5.22):

$$\underline{\vec{E}}_p = \underline{\vec{E}}_1 e^{j \alpha x - \gamma_1 \bar{r} \cdot \bar{n}_1}. \quad (5.407)$$



Slika 5.22 Val na granici izolator-vodič

U (5.407) $\bar{r}\bar{n}_1$ je projekcija radijus vektora u x - z ravnni u vektor $\bar{n}_1$. Odatle slijedi:

$$\bar{r}\bar{n}_1 = -x \cos \vartheta_1 + z \sin \vartheta_1, \quad (5.408)$$

a po uvrštenju $\cos \vartheta_1$ i $\sin \vartheta_1$:

$$\bar{r}\bar{n}_1 = -x \sqrt{1 - (1+j)^2 \frac{\beta_2^2}{4\alpha_1^2} \sin^2 \vartheta_0} + z(1+j) \frac{\beta_2}{2\alpha_1} \sin \vartheta_0. \quad (5.409)$$

$$\gamma_1 \bar{r}\bar{n}_1 = (1+j)\alpha_1 \bar{r}\bar{n} = -x \sqrt{2j\alpha_1^2 - \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0} + jz\beta_2 \sin \vartheta_0 \quad (5.410)$$

$$\gamma_1 \bar{r} \cdot \bar{n}_1 = -x(p + jq) + jz\beta_2 \sin \vartheta_0 \quad (5.411)$$

Zamjenom: $p + jq = \sqrt{2j\alpha_1^2 - \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0}$ odnosno:

$$p^2 + 2jpq - q^2 = 2j\alpha_1^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0 \quad (5.412)$$

dobivaju se izrazi iz kojih se dalje računaju p i q :

$$2jpq = 2j\alpha_1^2, \quad q = \frac{\alpha_1^2}{p}, \quad (5.413)$$

te:

$$p^2 - q^2 = \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0 = p^2 - \frac{\alpha_1^4}{p^2} = \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0. \quad (5.414)$$

Odatle se dobiva bikvadratna jednadžba u p :

$$p^4 - p^2 \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0 - \alpha_1^4 = 0 \quad (5.415)$$

odakle se na sljedeći način dobivaju njena rješenja:

$$p^2 = \frac{\beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0 + \sqrt{(\beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0)^2 + 4\alpha_1^4}}{2} = \alpha_1^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{\alpha_1} \right)^2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0}{\alpha_1^2} \right)^2} \right], \quad (5.416)$$

pa je konačno:

$$p = \alpha_1 \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{\alpha_1} \right)^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{\alpha_1} \right)^2}. \quad (5.417)$$

Za eksponent prolaznog vala vrijedi uz primjenu (5.411):

$$\begin{aligned} j\omega t - \underline{\gamma} \vec{r} \cdot \vec{n}_1 &= j\omega t - (-x(p + jq) + jz\beta_2 \sin \vartheta_0) = \\ &= px + j(\omega t - xq + z\beta_2 \sin \vartheta_0) \end{aligned} \quad (5.418)$$

Plohe konstantne amplitude ($x = \text{const}$) paralelne su z osi, a plohe konstantne faze slijede iz:

$$-xq + z\beta_2 \sin \vartheta_0 = \text{const}. \quad (5.419)$$

$$x = \frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{q} z - \frac{\text{const.}}{q}. \quad (5.420)$$

Uz:

$$\text{tg } \psi_1 = \frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{q} \quad (5.421)$$

te:

$$\cos \psi_1 = \frac{q}{\sqrt{q^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0}}, \quad \sin \psi_1 = \frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{\sqrt{q^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0}} \quad (5.422)$$

izraz (5.420) postaje:

$$\begin{aligned} -xq + z \frac{\sin \psi_1}{\cos \psi_1} q &= \text{const.} \\ -x \cos \psi_1 + z \sin \psi_1 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (5.423)$$

Realni indeks loma vala $n(\vartheta_0)$ je:

$$n(\vartheta_0) = \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \psi_1} = \frac{1}{\beta_2} \sqrt{q^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_0}. \quad (5.424)$$

Fazna brzina slijedi iz (5.418):

$$\frac{d}{dt}(\omega t + xq - z\beta_2 \sin \vartheta_0) = 0, \quad (5.425)$$

odakle je:

$$\omega = -\frac{dx}{dt}q + \frac{dz}{dt}\beta_2 \sin \vartheta_0. \quad (5.426)$$

Fazna brzina je u smjeru normale $\bar{n}_1$ pa je uz pretpostavku da je komponenta fazne brzine u smjeru z osi zanemariva ($dz/dt=0$, kut ψ_1 zapravo je blizak nuli) približno:

$$v_1 \approx \frac{dx}{dt} \frac{1}{\cos \psi_1} = -\frac{\omega}{q} \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + (\beta_2 \sin \vartheta_0)^2} = -\frac{\omega}{q} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 \sin \vartheta_0}{q}\right)^2}. \quad (5.427)$$

S obzirom da je za granicu izolator-vodič:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1} = \frac{\omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu_1 \kappa_1}} = \sqrt{\frac{2\omega \mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \kappa_1}} \ll 1 \quad (5.428)$$

čak u relativno širokom opsegu frekvencija ω (do oko 10^{12} Hz) to su ostali parametri iz prethodnog razmatranja, a prema (5.417), (5.413), (5.421) te (5.427):

$$p \cong \alpha_1, \quad q \cong \alpha_1, \quad d = \frac{1}{\alpha_1}, \quad (5.429)$$

$$n(\vartheta_0) \cong \frac{\alpha_1}{\beta_2}, \quad \psi_1 \cong 0, \quad v_1 = -\frac{\omega}{\alpha_1}, \quad (5.430)$$

Iz kvocijenta valnih impedancija izolatora i vodiča:

$$\frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \frac{\kappa}{\omega \mu_1}} \gg 1. \quad (5.431)$$

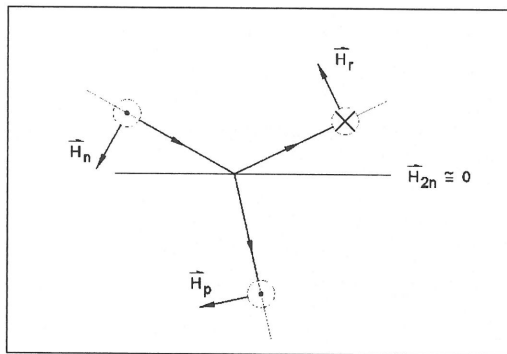
proizlazi da je valna impedancija izolatora puno veća od valne impedancije vodiča. **Val se praktički totalno reflektira. Iznosi polja u metalima su neznatni.**

5.8.3.1 Vektor $\vec{E}_0$ okomit ne upadnu ravninu: $\vec{n}\vec{E}_0 = 0$

Položaji vektora električnog i magnetskog polja prikazani su na slici 5.23.

$$\vec{E}_1 \cong 0, \vec{E}_2 \cong -\vec{E}_0, \frac{\vec{n}_0 \times \vec{E}_0}{Z_{v2}} = \vec{H}_0, \quad (5.432)$$

$$\vec{n}_2 \times \frac{\vec{E}_2}{Z_{v2}} = \vec{H}_2 \cong -\vec{n}_2 \times \frac{\vec{E}_0}{Z_{v2}}. \quad (5.433)$$



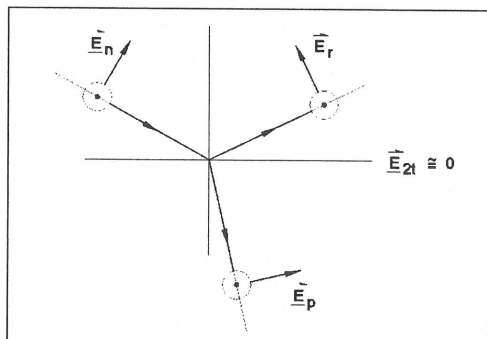
Slika 5.23 Vektor $\vec{E}_0$ okomit ne upadnu ravninu: $\vec{n}\vec{E}_0 = 0$

5.8.3.2 Vektor $\vec{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini: $\vec{n}\vec{H}_0 = 0$

Položaji vektora električnog i magnetskog polja za ova su slučaj prikazani na slici 5.24.

$$\vec{H}_1 \cong 2\vec{H}_0, \quad (5.434)$$

$$\vec{H}_2 \cong \vec{H}_0.$$



Slika 5.24 Vektor $\vec{E}_0$ paralelan upadnoj ravnini: $\vec{n}\vec{H}_0 = 0$

Iz prethodnih razmatranja ponašanja vala na granici vodič - izolator proizlazi da na površini idealnog vodiča ne može postojati tangencijalna komponenta električnog polja ni normalna komponenta magnetskog polja. Dakle, u izolatoru postoji samo normalna komponenta električnog polja i tangencijalna komponenta magnetskog polja.

Kod realnih vodiča ipak postoji neznatna tangencijalna komponenta električnog polja, zbog njihove konačne vodljivosti.

5.9 PRIJENOSNICI ENERGIJE

Prijenosni vodovi služe za usmjeravanje prijenosa elektromagnetske energije u određenom smjeru. Obično se govori, da se vodičima energija ne može prenositi već samo izolatorima, ali oni imaju takav značaj pri prijenosu da se njima bukvalno pridaje zadaća prenošenja energije. Postoje dvije tipične vrste prijenosnika električne energije. Jedna je vrsta konvencionalni vod koji se sastoji od dva ili više vodiča. Oni se protežu paralelno jedan drugome, a razmak im je mnogo puta manji od duljine vala polja, koje se stvara u njihovoj okolini. Isto su tako i dimenzije presjeka vodiča malene prema duljini vala. Kad to ne bi bilo zadovoljeno, moralo bi ih se promatrati kao antene. U jednoj su dimenziji po volji dugački, a na jednom kraju imaju priključen izvor napona i struje. To su prijenosni vodovi u užem smislu, [3].

Drugu vrstu predstavljaju šupljivi vodiči kroz koje se šalje elektromagnetski val, nositelj energije. Vodič predstavlja zaslon prema okolnom prostoru, te je polje prisiljeno da se rasprostire samo u šupljini vodiča. Dimenzije šupljine u vodiču moraju biti veće od pola duljine vala. U jednoj su dimenziji po volji dugački, a na jednom se kraju priključuje oscilator polja. Ovi se prijenosnici energije zovu valovodi.

U osnovi i za jedne i za druge vrijedi ista teorija polja, to jest Maxwellove jednadžbe, odnosno jednadžbe potencijala. Ovdje ipak treba načiniti razliku, kad se ulazi u dublju razradu, jer bi općenito rješavanje dovelo do takve složenosti, da bi se izgubila preglednost.

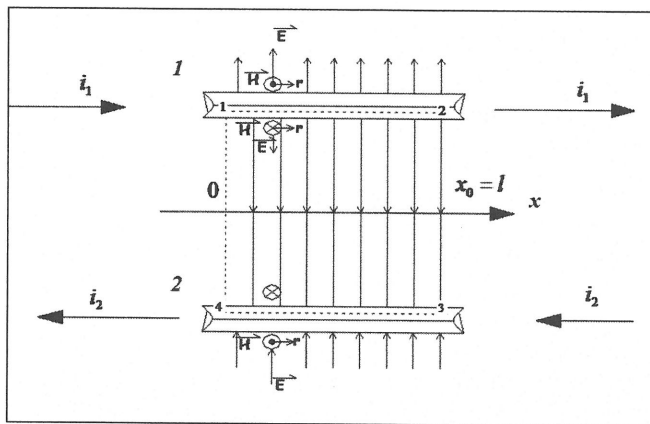
Energija se prenosi u smjeru uzdužne dimenzije vodiča brzinom svjetla, koji odgovara dielektriku u okolini vodiča. Smjer širenja energije ujedno je i smjer širenja polja. Za prijenosnike energije karakterističan je oblik polja ili modus odnosno mod (prema angloameričkoj literaturi „mode”) u odnosu na smjer rasprostiranja polja, odnosno energije.

Prijenosni vodovi imaju uvijek i električno i magnetsko polje transverzalno u odnosu na smjer širenja, kao za slučaj ravnog vala. To je TEM oblik ili (mod) polja (transverzalno električno i magnetsko polje).

Valovodi mogu imati transverzalno samo jedno od polja, te se u osnovi razlikuju dva oblika: TE i TM (TE - transverzalno električno i TM - transverzalno magnetsko). Ako je oblik polja TE, magnetsko polje može imati i longitudinalnu komponentu i obrnuto.

5.9.1 Prijenosni vod

Prijenosni se vod sastoji od dva okrugla vodiča prema slici 5.25, [3].



Slika 5.25 Prijenosni dvožični vod

Na lijevoj je strani voda priključen izvor tako da je vodič 1 na pozitivnom potencijalu i u njemu teče struja u pozitivnom smjeru osi z (u smjeru Poyntingovog vektora).

Pri priključivanju izvora na stezaljke voda stvori se električno polje između stezaljki. Izgrađivanje električnog polja popraćeno je stvaranjem magnetskog polja, koje stvara novo električno polje suprotno narinutom. Tako nastalo elektromagnetsko polje širi se brzinom svjetlosti duž voda.

Ono prodire iz okolnog prostora u vodič, te tamo izaziva pojavu vrtložnih struja i gubitke. Uvjeti na granici su kao i za slučaj ravnog vala: električno je polje normalno, a magnetsko polje tangencijalno na graničnu plohu, te postoji mala tangencijalna komponenta električnog polja, zbog konačne vodljivosti vodiča. Tangencijalne komponente jednog i drugog polja daju radijalnu komponentu Poyntingovog vektora, čiji plošni integral daje gubitke u vodu.

Duljina voda je l , a tolika je i duljina vodiča. Koordinatni se sustav postavlja tako da je $z = 0$ u točki O, a $x = x_0 = l$ je kraj (izlaz) voda.

S obzirom da su naponi i struje osnovne veličine vodova pa treba upotrebljavati integralni oblik Maxwellovih jednadžbi.

Da se odredi stanje na vodu, treba primijeniti drugu Maxwellovu jednadžbu:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.435)$$

te jednadžbu kontinuiteta:

$$i = \oint \vec{J} d\vec{s} = \oint \vec{J} n dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV, \quad (5.436)$$

dakle obje u integralnom obliku.

5.9.1.1 Naponska jednadžba

Naponske će se jednadžbe prema (5.435) primijeniti na petlju 1-2-3-4-1 prema slici 5.25. Linijski integral jakosti električnog polja po vodiču od 1-2 je pad napona u vodiču 1:

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = E_0 x_0 = u_{v1}. \quad (5.437)$$

Linijski integral od točke 3 do točke 4 daje pad napona u_{v2} u vodiču 2.

Ostala dva linijska integrala daju napone na njegovu kraju (teretna strana) i na njegovu početku (generatorska strana):

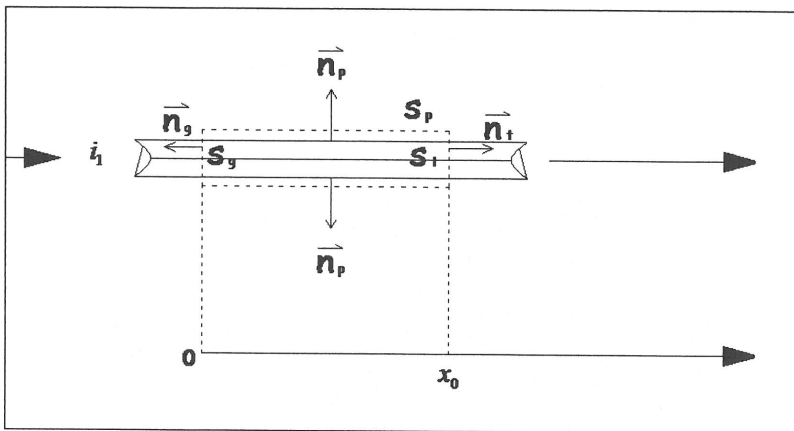
$$\int_2^3 \vec{E} d\vec{s} = u_t, \quad \int_4^1 \vec{E} d\vec{s} = -u_g. \quad (5.438)$$

Sad je naponska jednadžba prema (5.435):

$$-(u_t - u_g) = u_v + \frac{d\psi}{dt}. \quad (5.439)$$

5.9.1.2 Strujna jednadžba

Druga jednadžba (5.436) primijenit će se na zatvorenu plohu prema slici 5.26, a koja se sastoji od plašta kružnog vodiča te baza S_g na generatorskoj i S_t na teretnoj strani voda:



Slika 5.26 Integracijski cilindar jednog vodiča: strujna jednadžba

$$\int_{S_g} \vec{J} \vec{n} dS = -i_g, \quad \int_{S_t} \vec{J} \vec{n} dS = i_t. \quad (5.440)$$

Plošni integral po plaštu daje struju odvoda zbog loše izolacije:

$$\int_{S_p} \vec{J} \vec{n} ds = i_p. \quad (5.441)$$

pa je strujna jednadžba:

$$-(i_t - i_g) = i_p + \frac{dq}{dt}. \quad (5.442)$$

Naboj q je električni tok koji završava na vodiču, a prikazuje se naponom prema drugom vodiču voda i odgovarajućom kapacitivnošću. Jednadžbe $-(u_t - u_g) = u_v + \frac{d\psi}{dt}$ i $-(i_t - i_g) = i_p + \frac{dq}{dt}$ slično su građene. Jednadžba $-(u_t - u_g) = u_v + \frac{d\psi}{dt}$ govori o gubitku odnosno padu napona u vodiču u uzdužnoj dimenziji, a druga $-(i_t - i_g) = i_p + \frac{dq}{dt}$ daje gubitak ili odvod struje vodiča u poprečnoj dimenziji. Iz ovih se jednadžbi izvode sve ostale jednadžbe čak i najzamršenijih električnih vodova. Na njihovoj su desnoj strani u_v , i_p , ψ i q . Veličine u_v i i_p postoje jer postoje gubici u vodiču (tzv. uzdužni i poprečni gubici). Veličine ψ i q predstavljaju elektromagnetsku spregu vodiča i susjednih vodiča u vodu. Magnetski tok ψ predstavlja magnetsku (induktivnu), a električni tok q električnu odnosno kapacitivnu spregu među vodičima.

Sad će se prvo u izraze $-(u_t - u_g) = u_v + \frac{d\psi}{dt}$, (5.439) i $-(i_t - i_g) = i_p + \frac{dq}{dt}$, (5.442) uvrstiti izrazi za uzdužni pad napona i poprečne struje:

$$u_v = i_l R \text{ i } i_p = l G u, \quad (5.443)$$

gdje su R i G djelatni otpor i vodljivost po jedinici duljine. Zatim će se u iste izraze uvrstiti za magnetski tok:

$$\psi = l(L_u + L_v)i = lLi \quad (5.444)$$

pri čemu je: $L = L_u + L_v = L_{u1} + L_{u2} + L_v$ ukupna induktivnost voda po jedinici duljine. Dalje, električni se tok q predstavlja kao $q = Cu$ gdje je C kapacitet voda po jedinici njegove duljine. U tom slučaju jednadžbe (5.439) i (5.442) konačno postaju:

$$-(u_t - u_g) = l \left(Ru + L \frac{di}{dt} \right), \quad (5.445)$$

$$-(i_t - i_g) = l \left(Gu + C \frac{du}{dt} \right). \quad (5.446)$$

Dugi se vod predstavlja s mnoštvom kratkih, u seriju spojenih vodova, a koji su diferencijalnih razmjera. U nekim praktičnim slučajevima to može biti i nekoliko kratkih vodova. U tom slučaju konačno velike razlike napona na dijelu voda postaju diferencijalne razlike, a to se također odnosi na struje odnosno:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{u_t - u_g}{l} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.447)$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{i_t - i_g}{l} = \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (5.448)$$

U tom slučaju naponska (5.445) i strujna jednadžba (5.446) prelaze u oblik:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (5.449)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.450)$$

Ovdje će se uvesti operatorske impedancije i admitancije Z i Y :

$$Z = R + L \frac{\partial}{\partial t} = R + sL, \quad (5.451)$$

$$Y = G + C \frac{\partial}{\partial t} = G + Cs, \quad (5.452)$$

pa jednačbe (5.449) i (5.450) postaju:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Zi, \quad (5.453)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Yu. \quad (5.454)$$

Deriviranjem prve jednačbe (5.449) po ∂x , a zatim druge (5.450) po ∂t dobiva se:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R \frac{\partial i}{\partial x} + L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (5.455)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial x} = -G \frac{\partial u}{\partial t} - C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.456)$$

Zatim se u prvu jednačbu (5.455) umjesto drugog člana uz $L \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t} \right)$ uvrsti desna strana druge jednačbe $\cdot (-G \frac{\partial u}{\partial t} - C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$ te se prvi član $\frac{\partial i}{\partial x}$ uz R zamijeni s negativnom desnom stranom (5.450, $-Gu - C \frac{\partial u}{\partial t}$) pa se konačno dobiva:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R \left(Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \right) + L \left(G \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \quad (5.457)$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RGu + (RC + LG) \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.458)$$

Slično se dobiva i za $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RGi + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (5.459)$$

Uz oznake prema (5.451) i (5.452) dobiva se (sad se može pisati i totalni diferencijal):

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \gamma^2 U, \quad (5.460)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \gamma^2 I \quad (5.461)$$

pri čemu je:

$$\gamma^2 = ZY = (R + sL)(G + sC) = RG + s(LG + RC) + s^2 LC \quad (5.462)$$

odnosno:

$$\gamma = \sqrt{ZY}, \quad Z = R + sL, \quad Y = G + sC \quad (5.463)$$

valna operatorska konstanta.

Rješenja jednadžbi (5.460) i (5.461) su:

$$U = U_1 e^{\gamma x} + U_2 e^{-\gamma x}, \quad (5.464)$$

$$I = I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x}. \quad (5.465)$$

to jest postoje dva vala: pozitivni (U_2, I_2) i negativni (U_1, I_1).

Naponska (5.460) i strujna (5.461) jednadžba zovu se telegrafskim jednadžbama, a prvi put ih je primijenio Heaviside pri rješavanju problema telegrafskih kabela između Europe i Amerike. One u primjeni na vodove nadomještaju Maxwelllove jednadžbe, a mnogo su jednostavnije u rukovanju, s obzirom da nema vektorskih veličina, a radi se s naponima i strujama, koji su mnogo bliže osnovnom razumijevanju.

Ovdje je unaprijed načinjena jedna pretpostavka da su struje međusobno jednake, a suprotnog predznaka na istoj udaljenosti od ishodišta. To je moguće jer su vodiči razmjerno blizu, a zanemarene su pomaćne struje.

Drugi oblici vodova rješavaju se na sličan način, na primjer trofazni vodovi, ili vodovi gdje postoji utjecaj zemlje.

5.9.2 Sekundarne konstante voda

Konstante U_1, U_2, I_1 i I_2 integracijske su konstante u rješenjima telegrafskih jednadžbi (5.464) i (5.465) koje se dobivaju iz graničnih uvjeta, [3]. Napon i struja na vodu vezani su izrazima (5.453) i (5.454) i čime se eliminiraju dvije integracijske konstante. Iz (5.454) je:

$$U = -\frac{1}{Y} \frac{dI}{dx}, \quad (5.466)$$

a pošto se derivira izraz (5.465, $I = I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x}$) po x i uvrsti u ovaj izraz te se na kraju izjednači s rješenjem za napon (5.464, $U = U_1 e^{\gamma x} + U_2 e^{-\gamma x}$) dobiva se:

$$U = -\frac{\gamma I_1}{Y} e^{\gamma x} + \frac{\gamma I_2}{Y} e^{-\gamma x} = U_1 e^{\gamma x} + U_2 e^{-\gamma x}, \quad (5.467)$$

$$I_2 = \frac{Y U_2}{\gamma} \Rightarrow \frac{U_2}{I_2} = \frac{\gamma}{Y} = \frac{1}{Y} \sqrt{ZY} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_v, \quad (5.468)$$

$$I_1 = -\frac{Y U_1}{\gamma} \Rightarrow -\frac{U_1}{I_1} = \frac{\gamma}{Y} = \frac{1}{Y} \sqrt{ZY} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_v, \quad (5.469)$$

ili:

$$\frac{U_2}{I_2} = -\frac{U_1}{I_1} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_v = \sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}}. \quad (5.470)$$

Ovaj se kvocijent zove karakteristična impedancija voda Z_v ili češće valna impedancija voda, a rješenja telegrafskih jednadžbi (5.464) i (5.465) se mogu pisati u obliku:

$$U = U_1 e^{\gamma x} + U_2 e^{-\gamma x}, \quad (5.471)$$

$$I = -\frac{U_1}{Z_v} e^{\gamma x} + \frac{U_2}{Z_v} e^{-\gamma x}. \quad (5.472)$$

Dakle, preostale su samo dvije integracijske konstante U_1 i U_2 , a za to su dovoljna dva podatka navodu. Konstante γ i Z_v uvedene umjesto R, L, C, G zovu se i sekundarnim konstantama voda.

Jednostavno se rješenje dobiva za kvazistacionarno stanje kad su napon i struja harmonijske (sinusne) veličine. Tad se napon i struja trebaju prikazati simbolički odnosno fazorski u kompleksnom zapisu:

$$-\frac{dU}{dx} = (R + j\omega L)\underline{I}, \quad (5.473)$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C)\underline{U} \quad (5.474)$$

ili:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \gamma^2 \underline{U}, \quad (5.475)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \gamma^2 \underline{I} \quad (5.476)$$

gdje je:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (5.477)$$

valna konstanta voda i ima dimenziju m^{-1} s obzirom da su R, L, G i C zadani po jedinici duljine.

Sad su rješenja jednadžbi voda:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 e^{\gamma x} + \underline{U}_2 e^{-\gamma x}, \quad (5.478)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 e^{\gamma x} + \underline{I}_2 e^{-\gamma x}. \quad (5.479)$$

Kao i u općem slučaju, derivira li se prva jednadžba (5.478) po prostornoj koordinati x , dobiva se:

$$\frac{dU}{dx} = \gamma \underline{U}_1 e^{\gamma x} - \gamma \underline{U}_2 e^{-\gamma x} \quad (5.480)$$

što uz jednadžbu:

$$-\frac{dU}{dx} = (R + j\omega L)I \quad (5.481)$$

daje:

$$I = -\frac{\gamma}{R + j\omega L} (U_1 e^{\gamma x} - U_2 e^{-\gamma x}) \quad (5.482)$$

odakle se nakon izjednačenja s (5.479) dobiva:

$$\frac{U_2}{I_2} = -\frac{U_1}{I_1} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = Z_v = Z_v e^{j\varphi}. \quad (5.483)$$

Taj se kvocijent naziva valnom impedancijom ili karakterističnom impedancijom voda za slučaj sinusnih veličina. Valna se pak konstanta može rastaviti na realni i imaginarni dio:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5.484)$$

gdje su α i β :

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{1}{2} LC} \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)\left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right)} - \left(1 - \frac{RG}{\omega^2 LC}\right)}, \quad (5.485)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{1}{2} LC} \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)\left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right)} + \left(1 - \frac{RG}{\omega^2 LC}\right)}. \quad (5.486)$$

Ranije je pokazano da je $L_v C = \mu \varepsilon$, $\frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\varepsilon}$. Čim se zanemari otpor voda prelaze gornje jednadžbe, u jednadžbe, kakve smo imali za slučaj ravnog vala. Otpor vodiča unio je malo odstupanje, koje nema bitnijeg značaja.

Za valnu se impedanciju može prema (5.483) pisati:

$$\frac{Z_v}{Z_v} = \frac{R + j\omega L}{\alpha + j\beta} \frac{\alpha - j\beta}{\alpha - j\beta} = \frac{R\alpha + j\omega L\alpha - jR\beta + \omega L\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (5.487)$$

Modul i kut impedancije su:

$$Z_v = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L\alpha - R\beta}{\omega L\beta + R\alpha}. \quad (5.488)$$

Uzme li se u obzir da je: $\underline{U}_1 = \underline{U}_{m1} e^{j(\alpha + \varphi_{u1})}$, $\underline{U}_2 = \underline{U}_{m2} e^{j(\alpha + \varphi_{u2})}$ iz rješenja valnih jednadžbi dolazi se do zaključka da je:

- α - prigušna konstanta,
- β - fazna konstanta te:
- $v = \pm \frac{\omega}{\beta}$ fazna brzina.

Pozitivni predznak fazne brzine definira val koji se giba u pozitivnom smjeru voda, a negativni predznak je za suprotan smjer. To ujedno pokazuje da na vodu postoje dva vala: pozitivni i negativni, što je bilo i za slučaj ravnih valova. I α i β su frekvencijski ovisni te se zato pojavljuje amplitudno i fazno izobličenje (distorzija) napona i struje, ako se oni sastoje od više frekvencija. Što je veća frekvencija veće je i prigušenje, ali je i fazna brzina veća. Neki sasvim strmi val spljoštiti će svoje čelo šireći se duž voda, jer će čelo sadržavati s vremenom samo više frekvencije sa smanjenom amplitudom.

Uz oznake:

$$\beta_0 = \omega \sqrt{LC}, \quad \text{tg } \varepsilon_g = \frac{R}{\omega L} \quad \text{i} \quad \text{tg } \delta_g = \frac{G}{\omega C} \quad (5.489)$$

te normiranje iznosa α i β s β_0 :

$$\frac{\alpha}{\beta_0} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\delta_g + \varepsilon_g)}{2 \cos \delta_g \cos \varepsilon_g}}, \quad \frac{\beta}{\beta_0} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\delta_g + \varepsilon_g)}{2 \cos \delta_g \cos \varepsilon_g}} \quad (5.490)$$

i:

$$\frac{|\gamma|}{\beta_0} = \sqrt{\cos \delta_g \cos \varepsilon_g} \quad (5.491)$$

umjesto gornjih izraza za valni otpor $\underline{Z}_v$ (5.487 i 5.488) i njegov kut φ dobivaju se sljedeći izrazi:

$$Z_v = Z_{v0} \sqrt{\frac{\cos \delta_g}{\cos \varepsilon_g}}, \quad Z_{v0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{1}{2}(\delta_g - \varepsilon_g). \quad (5.492)$$

Gubici u vodu pokazuju se pute kutova gubitaka δ_g i ε_g (kutovi poprečnih i uzdužnih gubitaka).

Faktor $\text{tg } \delta_g$ bi se mogao, kao i za ravni val, prikazati kao $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon}$ kad ne bi bilo površinskih efekata na izolatorima voda, ali su kut gubitaka δ_g odnosno $\text{tg } \delta_g$ uistinu mali za izolaciju. Faktor gubitaka $\text{tg } \varepsilon_g$ ovdje figurira zbog gubitaka u vodičima voda. Često se ti gubici također zanemaruju. Recipročna vrijednost prigušne konstante kod vodova ne znači dubinu prodiranja nego doseg vala. Ako su gubici maleni doseg vala uvijek je veći od valne duljine što se može utvrditi postavljanjem ovih dviju veličina u sljedeći kvocijent:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1/\alpha}{2\pi/\beta} = \frac{\beta}{2\pi\alpha} = \frac{1}{2\pi} \text{ctg}(\delta_g + \varepsilon_g). \quad (5.493)$$

Pri ekstremno velikim gubicima doseg vala može biti i manji od duljine vala. Prema definiranom kvocijentu dosega vala i valne duljine pojave na vodu dijele se prema [3] na difuzijske i valne prema sljedećem kriteriju:

- difuzija:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}(\delta_g + \varepsilon_g) < 1, (\delta_g + \varepsilon_g) > 18.09^\circ \quad (5.494)$$

- val:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}(\delta_g + \varepsilon_g) > 1, (\delta_g + \varepsilon_g) < 18.09^\circ \quad (5.495)$$

5.9.2.1 $R=0$, $G=0$, vod bez gubitaka

Vod bez gubitaka nema prigušenja $\alpha=0$, a fazna je konstanta $\beta = \omega\sqrt{L_v C}$. Fazna brzina je:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_v C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c \quad (5.496)$$

dakle jednaka brzini širenja vala. Valna impedancija prelazi u valni otpor: $Z_v = \sqrt{\frac{L_v}{C}}$ bez faznog pomaka što znači da su napon i struja, pripadnici jednog vala uvijek u fazi.

5.9.2.2 $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, vod bez distorzije

Prigušna konstanta voda bez distorzije iznosi: $\alpha = \sqrt{RG}$ te je neovisna o frekvenciji. Fazna je konstanta: $\beta = \omega\sqrt{LC}$ što daje faznu brzinu $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Fazna je brzina također neovisna o

frekvenciji. Zato se takav vod zove vod bez distorzije. Val šireći se ne mijenja svoj oblik, već samo mijenja svoju veličinu zbog prigušenja, što je jednako za sve frekvencije. Valna impedancija prelazi

opet u otpor: $Z_v = \sqrt{\frac{L}{C}}$, bez faznog pomaka. Val na vodu bez distorzije ponaša se kao val na vodu

bez gubitaka, samo što postoji stanovito prigušenje, jednako za sve frekvencije. To je ujedno i razlog zašto se u telefonske kabele uključuju i induktiviteti, da bi se kompenzirao relativno veliki kapacitet i tim dobio vod sa što manjom distorzijom.

5.9.2.3 $G = 0$, $R \ll \omega L$, vod bez odvoda s malim gubicima

Konstante prigušenja i faze iznose približno:

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right),$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{R^2}{\omega^2 C^2}\right). \quad (5.497)$$

a modul i kut valne impedancije također su približno:

$$Z_v = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{2\omega L}. \quad (5.498)$$

Prigušenje raste s frekvencijom, a također i fazna brzina.

Općenito na vodu postoje dva vala: pozitivni i negativni val. Za prvi val je valna impedancija pozitivna a za drugi je negativna, što omogućuje određivanje odnosa napona i struja, za svaki val posebno.

Za zadani napon i struju na početku voda, $\underline{U}_p$ i $\underline{I}_p$ mogu se odrediti napon i struja na bilo kojem mjestu na vodu.

Za $x=0$ što odgovara početku voda je:

$$\underline{U} = \underline{U}_p = \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \quad (5.499)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_p = \frac{1}{\underline{Z}_v} (-\underline{U}_1 + \underline{U}_2). \quad (5.500)$$

Odatle je:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{U}_p, \quad (5.501)$$

$$-\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{I}_p \underline{Z}_v \quad (5.502)$$

odnosno:

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_p - \underline{Z}_v \underline{I}_p), \quad (5.503)$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_p + \underline{Z}_v \underline{I}_p). \quad (5.504)$$

Uvrštavanjem ovih konstanti u rješenja jednadžbi voda (5.478 i 5.479) dobiva se:

$$\underline{U}_x = \frac{1}{2} (\underline{U}_p - \underline{Z}_v \underline{I}_p) e^{\gamma x} + \frac{1}{2} (\underline{U}_p + \underline{Z}_v \underline{I}_p) e^{-\gamma x}, \quad (5.505)$$

$$\underline{I}_x = -\frac{1}{2\underline{Z}_v} (\underline{U}_p - \underline{Z}_v \underline{I}_p) e^{\gamma x} + \frac{1}{2\underline{Z}_v} (\underline{U}_p + \underline{Z}_v \underline{I}_p) e^{-\gamma x} \quad (5.506)$$

ili:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_p \operatorname{ch}(\gamma x) - \underline{Z}_v \underline{I}_p \operatorname{sh}(\gamma x), \quad (5.507)$$

$$\underline{I}_x = \underline{I}_p \operatorname{ch}(\gamma x) - \frac{\underline{U}_p}{\underline{Z}_v} \operatorname{sh}(\gamma x). \quad (5.508)$$

Obrnuto, ako su zadani napon i struja $\underline{U}_x$ i $\underline{I}_x$ na nekom mjestu x pojedini valovi su:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_1 e^{\gamma x} + \underline{U}_2 e^{-\gamma x}, \quad (5.509)$$

$$\underline{I}_x = \underline{I}_1 e^{\gamma x} + \underline{I}_2 e^{-\gamma x} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_v} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_v} e^{-\gamma x}. \quad (5.510)$$

Iz ovih se izraza sad mogu izračunati konstante $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$ na sljedeći način. Nakon množenja (5.510) s valnom impedancijom $\underline{Z}_v$ te prvi put odbijanja (5.509) i (5.510), a zatim i njihovog zbrajanja dobivaju se sljedeće jednadžbe:

$$\underline{U}_1 e^{\gamma x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) \quad (5.511)$$

$$\underline{U}_2 e^{-\gamma x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x), \quad (5.512)$$

ili:

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x}, \quad (5.513)$$

$$\underline{U}_2 e^{-\gamma x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x). \quad (5.514)$$

Odavde se vidi da povratni val definiran s (5.513) nestaje ako je:

$$\frac{\underline{U}_x}{\underline{I}_x} = \underline{Z}_v. \quad (5.515)$$

Ovo se zove prirodni teret, a vod radi bez refleksije. Pomoću ovih jednadžbi mogu se izračunati iznosi napona i struje na bilo kojem drugom mjestu na vodu iz općeg rješenja jednadžbi voda. Naime, za zadane iznose $\underline{I}_x$, $\underline{U}_x$ na nekom mjestu x na vodu izračunaju se prema gornjim jednadžbama konstante $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ pa kad se uvrste u ishodne jednadžbe za napon (5.499) i struju (5.500) na početku voda:

$$\underline{U} = \underline{U}_p = \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \quad (5.516)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_p = \frac{1}{\underline{Z}_v} (-\underline{U}_1 + \underline{U}_2). \quad (5.517)$$

dobivaju se vrijednosti napona i struje na početku voda:

$$\underline{U}_p = \frac{1}{2}(\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{\gamma x} = \underline{U}_x \operatorname{ch}(\gamma x) + \underline{Z}_v \underline{I}_x \operatorname{sh}(\gamma x), \quad (5.518)$$

$$\underline{I}_p = -\frac{1}{2\underline{Z}_v}(\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2\underline{Z}_v}(\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{\gamma x} = \underline{I}_x \operatorname{ch}(\gamma x) + \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_v} \operatorname{sh}(\gamma x). \quad (5.519)$$

Na primjer, ako su zadan napon i struja na kraju voda („vod pod zadanim teretom“, $x=l$), $\underline{U}_p = \underline{U}_g$, $\underline{I}_p = \underline{I}_g$, $\underline{U}_x = \underline{U}_l$, $\underline{I}_x = \underline{I}_l$ iz (5.518) i (5.519) dobivaju se veličine na strani generatora:

$$\underline{U}_g = \underline{U}_l \operatorname{ch}(\gamma l) + \underline{Z}_v \underline{I}_l \operatorname{sh}(\gamma l), \quad (5.520)$$

$$\underline{I}_g = \underline{I}_l \operatorname{ch}(\gamma l) + \frac{\underline{U}_l}{\underline{Z}_v} \operatorname{sh}(\gamma l). \quad (5.521)$$

Ako su pak zadani napon i struja na početku voda („vod na zadanom generatoru“, $x=0$) tad se iz jednadžbi (5.520) i (5.521) $\underline{U}_l$, $\underline{I}_l$ za $x=l$ (veličine na strani tereta) izračunaju kao dvije nepoznanice pri čemu je lijeva strana $\underline{U}_g$, $\underline{I}_g$ zadana:

$$\underline{U}_l = \underline{U}_g \operatorname{ch}(\gamma l) - \underline{Z}_v \underline{I}_g \operatorname{sh}(\gamma l), \quad (5.522)$$

$$\underline{I}_l = \underline{I}_g \operatorname{ch}(\gamma l) - \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_v} \operatorname{sh}(\gamma l). \quad (5.523)$$

Isti bi se rezultat dobio izravno i iz (5.518) i (5.519) ako se u njih uvrsti $x=-l$ te $\underline{U}_p = \underline{U}_l$, $\underline{I}_p = \underline{I}_l$, $\underline{U}_x = \underline{U}_g$, $\underline{I}_x = \underline{I}_g$.

5.9.2.4 Prazni hod

Ako se u jednadžbe (5.513, $\underline{U}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x}$) i (5.514, $\underline{U}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{\gamma x}$) postavi na teretnoj strani ($x=l$) $\underline{I}_x = \underline{I}_l = 0$ dobiva se prazni hod voda:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= e^{2\gamma l}, \\ \underline{Z}_0 &= \frac{\underline{U}_g}{\underline{I}_g} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{U}_1}{\underline{U}_2 - \underline{U}_1} \underline{Z}_v = \underline{Z}_v \operatorname{cth}(\gamma l). \end{aligned} \quad (5.524)$$

Minimalna će se vrijednost impedancije na ulazu otvorenog voda $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{\min}$ pojaviti za: $l = \frac{\lambda}{4}$.

Znači, kad vod ne bi imao gubitaka djelovao bi na ulazu kao kratki spoj iako je na izlazu otvoren. Čak i u slučaju gubitaka impedancija gledana s ulaza je mala. Za realni vod to iznosi: $\underline{Z}_0 = \frac{\lambda}{8} R$.

5.9.2.5 Kratki spoj

Ako se u jednađbe (5.513, $\underline{U}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x}$) i (5.514, $\underline{U}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_x + \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{\gamma x}$) pak postavi: $\underline{U}_x = \underline{U}_l = 0$ dobiva se kratki spoj voda:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -e^{2\gamma l},$$

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_g}{\underline{U}_g} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{U}_1}{\underline{U}_2 - \underline{U}_1} \underline{Z}_v = \underline{Z}_v \operatorname{th}(\gamma l).$$
(5.525)

Za $l = \frac{\lambda}{4}$ i vod bez gubitaka $\underline{Z}_k$ je maksimalan (beskonačan) iako je na izlazu kratko spojen (naponska rezonancija). Ulazna impedancija za realni vod je: $\underline{Z}_k = \frac{\underline{Z}_{v0}^2}{\frac{\lambda}{8} R}$ pri $l = \frac{\lambda}{4}$.

5.9.2.6 Kratki vod

Različiti se kriteriji mogu upotrijebiti za ocjenu što je to kratki vod. Najjednostavnije je uzeti da je apsolutni iznos argumenta u jednađbama voda: $l|\gamma| \ll 1$. Naime, pritom je:

$$\operatorname{sh}(\gamma l) \approx \gamma l$$

$$\operatorname{ch}(\gamma l) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \gamma l} \approx 1 + \frac{1}{2}(\gamma l)^2.$$
(5.526)

U [3] spominje se i sljedeći kriterij:

$$\frac{1}{4} |ZY| l^2 = \left(\frac{l|\gamma|}{2} \right)^2 \ll 1$$
(5.527)

odnosno: $l|\gamma| \ll 0.2$ za vod s gubicima, a za vod bez gubitaka $l|\gamma| \ll 0.03\lambda$ gdje je λ duljina vala u izolatoru.

Uzimajući u obzir da je u slučaju kratkog voda $\operatorname{sh}(\gamma l) \approx \gamma l$ i $\operatorname{ch}(\gamma l) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \gamma l} \approx 1 + \frac{1}{2}(\gamma l)^2$ jednađbe dugog voda:

$$\underline{U}_g = \underline{U}_l \operatorname{ch}(\gamma l) + \underline{Z}_v \underline{I}_l \operatorname{sh}(\gamma l)$$
(5.528)

$$\underline{I}_g = \underline{I}_l \operatorname{ch}(\gamma l) + \frac{\underline{U}_l}{\underline{Z}_v} \operatorname{sh}(\gamma l)$$
(5.529)

prelaze u jednadžbe:

$$\underline{U}_g = \underline{U}_t \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] + \underline{Z}_v \underline{I}_t (\gamma l) \quad (5.530)$$

$$\underline{I}_g = \underline{I}_t \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] + \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_v} (\gamma l) \quad (5.531)$$

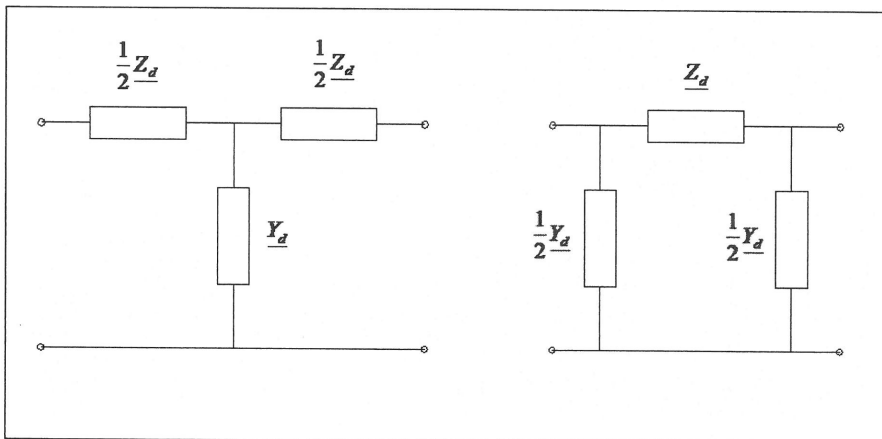
ili ako se napiše u obliku jednadžbi potencijala čvorova dobiva se:

$$\underline{I}_t = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_v(\gamma l)} - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_v(\gamma l)} \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_d} - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_d} \left(1 + \frac{1}{2} \underline{Z}_d \underline{Y}_d \right) = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_d} - \underline{U}_t \left(\frac{1}{\underline{Z}_d} + \frac{1}{2} \underline{Y}_d \right), \quad (5.532)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_g &= \underline{I}_t \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] + \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_v} (\gamma l) = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_v(\gamma l)} \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right] - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_v(\gamma l)} \left[\left(1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right)^2 - (\gamma l)^2 \right] \\ &= \underline{U}_g \left(\frac{1}{\underline{Z}_d} + \frac{\underline{Y}_d}{2} \right) - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_d} \left[1 + \frac{(\gamma l)^4}{4} \right] = \underline{U}_g \left(\frac{1}{\underline{Z}_d} + \frac{\underline{Y}_d}{2} \right) - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_d} \left[1 + \frac{(\gamma l)^4}{4} \right] \approx \underline{U}_g \left(\frac{1}{\underline{Z}_d} + \frac{\underline{Y}_d}{2} \right) - \frac{\underline{U}_t}{\underline{Z}_d}. \end{aligned} \quad (5.533)$$

Ovdje su: $\underline{Z}_d = \underline{Z}l = (R + j\omega L)l$ te $\underline{Y}_d = \underline{Y}l = (RG + j\omega C)l$.

Ovo omogućuje da se kratki se vod nadomjesti π shemom s koncentriranim parametrima prema slici 5.27, desno. Alternativni je prikaz s T nadomjesnom shemom na slici 5.27, lijevo.



Slika 5.27 T odnosno π shema kratkog voda s koncentriranim parametrima

Granične duljine kratkih vodova

1. Energetski zračni vod, visokonaponski, 50 Hz	180km
2. Energetski kabel, visokonaponski, 50 Hz	90km
3. Telefonski zračni vod, 20 Hz	450km
4. Telefonski kabel, izoliran papirom, 20 Hz	250km
5. Koaksijalni kabel, 1 MHz	9km
6. Antenski kabel za TV, 200 Hz	45km.

Za kratki vod općenito vrijedi da se pojave na početku i na kraju praktično odvijaju istovremeno, to jest bez kašnjenja.

5.9.2.7 Primjer:

Kao primjer neka posluži vod dug $l=20\text{km}$, na kraju opterećen trošilom djelatne snage 3MW , napona $17,3\text{kV}$, 50Hz , zanemarivih gubitaka. Struja tereta iznosi 173A . Valni otpor neka je 400Ω .

- Fazna konstanta iznosi:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \cong \frac{314}{3} \cdot 10^{-8} \cong 1,05 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{m}}$$

ili:

$$\beta x = \beta l \cong 1,05 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cong 0,021.$$

- Pozitivni je val:

$$u_2 = \frac{1}{2} (17,3 + 400 \cdot 173 \cdot 10^{-3}) \sqrt{2} \cos(\omega t + 0,021),$$

$$\cong 43,3 \sqrt{2} \cos(\omega t + 0,021) [\text{kV}]$$

- a negativni:

$$u_1 = \frac{1}{2} (17,3 - 400 \cdot 173 \cdot 10^{-3}) \sqrt{2} \cos(\omega t - 0,021)$$

$$\cong -26 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0,021) [\text{kV}]$$

- Struje su:

$$i_2 = \frac{u_2}{Z_v} \cong 108 \sqrt{2} \cos(\omega t + 0,021)$$

$$i_1 = -\frac{u_1}{Z_v} \cong 65 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0,021)$$

Pozitivni val nosi snagu: $U_2 I_2 \cong 4,68 MW$, a negativni vraća $U_1 I_1 \cong 1,68 MW$, te trošilo preostaje $3MW$, kako je i bilo zadano. Jedan dio snage njiše između trošila i generatora te tako dodatno opterećuje vod. Kao što je već rečeno, iz jednadžbi (5.513, i 5.514) za $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$

$(\underline{U}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_x - \underline{Z}_v \underline{I}_x) e^{-\gamma x} = 0 \text{ za } \frac{\underline{U}_x}{\underline{I}_x} = \underline{Z}_v)$ se vidi da, ako je impedancija trošila upravo jednaka

valnoj impedanciji, nema povratnog vala nego postoji samo direktni val. Takvo se trošilo zove prirodnim, a vod radi bez refleksije na kraju.

Iz navedenog se primjera ($l=20km$) vidi da je za frekvenciju $50Hz$ (valna duljina: $\lambda \cong 6000 km$) razlika u fazi na početku i kraju voda $1,2^\circ$. Može se, dakle, uzeti da su pojave praktički istofazne na početku i kraju voda, pa se može koristiti standardna shema (T ili π) s koncentriranim parametrima odnosno impedancijama (slika 5.27). S obzirom da su linearne dimenzije čak i velikih energetskih objekata (transformatori, generatori) male prema valnoj duljini $50Hz$ vala ($6000km$) to se ti objekti mogu promatrati s koncentriranim parametrima.

5.9.3 Putujući val na vodu

Rješenje valnih jednadžbi za prijenosni vod je:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 e^{yz} + \underline{U}_2 e^{-yz}, \quad (5.534)$$

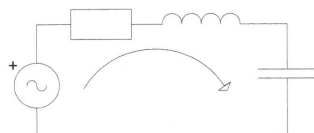
$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}_1}{Z_v} e^{yz} + \frac{\underline{U}_2}{Z_v} e^{-yz}. \quad (5.535)$$

Egzaktna teorija putujućih valova ili gibanja impulsa po vodovima vrlo je zamršena zadaća. Čelo vala je izvor zračenja prostornih valova, a s tim i izvor gubitaka energije, što se ne uzima u obzir. Gubici vodiča nelinearni su proces, a uzima se u račun kao da su odnosi linearni. Gubici u vodiču čela vala ne mogu se predstaviti kao gubici u stacionarnom stanju na nekoj dovoljno visokoj frekvenciji. Ako su valovi visokonaponski, često nastaje korona na vodičima, koja je izvor dodatnih gubitaka. Dvožični je vod najjednostavniji za promatranje putujućeg vala. I on se promatra kao vod od jednoga vodiča iznad vodljivog poluprostora, koji je ujedno povratni vodič. Tako se zadaća pojednostavljuje, a ne gubi se fizikalna slika, [3].

Ovom teorijom neće biti prikazano ponašanje vala u gibanju po vodu. Teorija će obuhvatiti ponašanje vala na mjestima diskontinuiteta, gdje se val reflektira i djelomično prolazi kroz njega. Reflektirani se val superponira na dolazeći val, te se njihovi efekti zbrajaju. To su efekti prolaznog stanja na vodu, te nisu interesantni u komunikacijskoj tehnici. Vodovi komunikacijske tehnike ne smiju imati takve diskontinuitete, koji bi štetili kvaliteti prijenosa. Njihovi impulsi smiju mijenjati oblik, ali ne toliko da štete kvaliteti. Rasprostriranje komunikacijskih signala ne predstavlja poseban problem.

Tako je ovom teorijom obuhvaćeno prolazno stanje na vodovima, koje nastaje različitim perturbacijama u prijenosu impulsa, u teretu voda, vanjskim utjecajima i slično.

Granični su uvjeti jednostavni na mjestu diskontinuiteta na vodu. Naponi su jednaki s obje strane mjesta diskontinuiteta, a isto je i sa strujama.



$$U_1 = U_2, \quad I_1 = I_2. \quad (5.536)$$

Naponski val koji je naišao na takvo mjesto, reflektira se jednim dijelom, a njegov ostatak prolazi. Isto se događa sa strujnim valom. Mjesto diskontinuiteta ima dvije strane. Ono ima stranu dolazećeg vala i stranu prolaznog vala. Na strani dolazećeg vala su dolazeći i reflektirani val, a na drugoj je strani samo prolazni val. Dolazeći valovi imaju indeks d , reflektirani valovi indeks r , a prolazni valovi indeks p . Prema tome na mjestu diskontinuiteta moraju biti zadovoljeni uvjeti:

$$U_d + U_r = U_p, \quad (5.537)$$

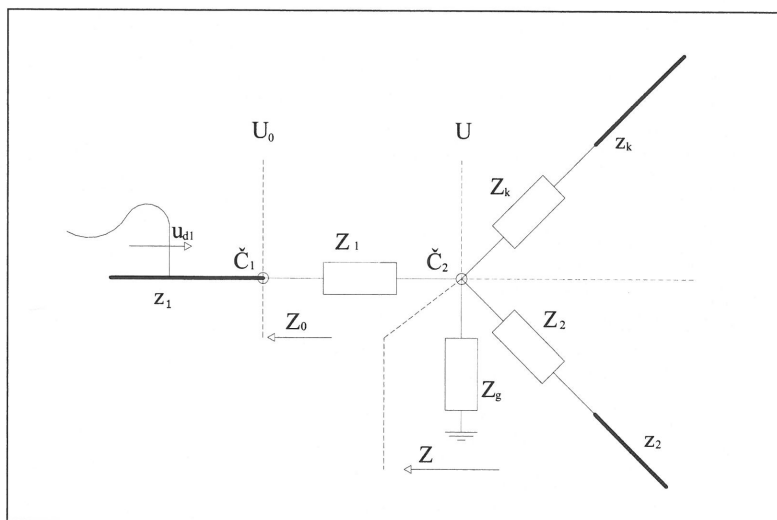
$$I_d + I_r = I_p. \quad (5.538)$$

Kako su to vodovi malih gubitaka, njihova je impedancija jednaka valnom otporu. Ovdje će se valni otpor Z_v pisati malim slovom z . Veliko slovo Z oznaka je za koncentrirane impedancije uključene u vod. Kvocijent između naponskog i strujnog vala glasi kao i prije po definiciji valne impedancije:

$$\frac{U_d}{I_d} = z_1, \quad \frac{U_r}{I_r} = -z_1, \quad \frac{U_p}{I_p} = z_2. \quad (5.539)$$

5.9.4 Val u čvorištu u vodu

Vodom 1 dolazi val U_{d1} (slika 5.28). On nailazi preko impedancije Z_1 na čvorište $\check{C}_2$, gdje se račva u nekoliko vodova. Isto je čvorište uzemljeno impedancijom Z_g . Tim se hoće prikazati opće čvorište, a vodovi nemaju međusobne sprege. Val nailazi samo jednim vodom. On susreće u čvorištu $\check{C}_1$, koncentriranu impedanciju. Val se reflektira na njoj, a jednim dijelom prolazi i stiže u čvorište $\check{C}_2$, gdje se vodovi račvaju.



Slika 5.28 Dolazak putujućeg vala na mjesto diskontinuiteta

Svi su vodovi vezani na čvorište $\check{C}_2$ preko koncentriranih impedancija, a ono je uz to i uzemljeno preko impedancije. Čvorište sa svojom impedancijom djeluje na nailazeći val kao cjelina, kao jedna koncentrirana impedancija Z_0 . Pritom vod djeluje kao valni otpor na nailazeći val. Impedancije u čvorištu $\check{C}_2$ spojene su međusobno paralelno, te se admitancije zbrajaju, a izuzima se vod nailazećeg vala.

Tad je admitancija čvorišta $\check{C}_2$ jednaka:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_g} + \frac{1}{Z_2 + z_2} + \dots + \frac{1}{Z_k + z_k}, \quad (5.540)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_g} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{Z_k + z_k} \quad (5.541)$$

ako se u čvorištu sastaje n vodova.

Impedancija u čvorištu $\check{C}_1$ je ujedno i cjelokupna impedancija čvorišta $\check{C}_2$, a zadana je sa $Z_0 = Z_1 + Z$. Ta ukupna impedancija djeluje na nailazeći val, koji se na njoj reflektira, a jednim dijelom prolazi kroz nju.

Struja I_0 , koja prolazi njime, vezana je uz napon U_0 čvorišta $\check{C}_1$ odnosom: $U_0 = Z_0 I_0$. Napon U_0 i struja I_0 su sastavljeni od nailazećeg i reflektiranog vala:

$$U_0 = U_{d1} + U_{r1}, \quad (5.542)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0} = I_{d1} + I_{r1} = \frac{U_{d1}}{z_1} - \frac{U_{r1}}{z_1}. \quad (5.543)$$

Navedene jednadžbe omogućuju izračun reflektiranog vala U_{r1} :

$$\frac{U_{d1}}{Z_0} + \frac{U_{r1}}{Z_0} = \frac{U_{d1}}{z_1} - \frac{U_{r1}}{z_1}, \quad (5.544)$$

$$U_{r1} \left(\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{z_1} \right) = U_{d1} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{Z_0} \right), \quad (5.545)$$

odnosno za faktor refleksije ρ :

$$\rho = \frac{U_{r1}}{U_{d1}} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{Z_0}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{z_1}}, \quad (5.546)$$

ili:

$$\rho = \frac{U_{r1}}{U_{d1}} = \frac{Z_0 - z_1}{Z_0 + z_1}. \quad (5.547)$$

Impedancija Z_0 je teret voda 1 nailazećeg vala. Faktor refleksije ima opći značaj za vodove, bez obzira o kakvom se vodu radi. Čim je impedancija čvora Z_0 jednaka valnom otporu voda 1, z_1 , nema refleksije ($\rho = 0$). To je opće pravilo za vodove.

Jedan dio vala prošao je kroz impedanciju Z_1 . Kako je impedancija koncentrirana, govori se o padu napona. Napon u čvorištu $\check{C}_2$ je naprosto: $U = U_0 - Z_1 I_0$.

Faktor transmisije τ se definira kao kvocijent napona prolaznog vala i nailazećeg vala:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{U}{U_{d1}} = \frac{U_0 - Z_1 I_0}{U_{d1}} = \frac{U_0}{U_{d1}} - Z_1 \frac{I_0}{U_{d1}} = \frac{U_0}{U_{d1}} - Z_1 \frac{U_0}{Z_0 U_{d1}} = \\ &= \frac{U_0}{U_{d1}} \left(1 - \frac{Z_1}{Z_0} \right) = \frac{U_0}{U_{d1}} \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0} = \frac{U_0}{U_{d1}} \frac{Z}{Z_0} \end{aligned} \quad (5.548)$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{U_{d1} + U_{r1}}{U_{d1}} \frac{Z}{Z_0} = (1 + \rho) \frac{Z}{Z_0} = \left(1 + \frac{Z_0 - z_1}{Z_0 + z_1}\right) \frac{Z}{Z_0} = \\ &= \frac{Z_0 + z_1 + Z_0 - z_1}{Z_0 + z_1} \frac{Z}{Z_0} = \frac{2Z}{Z_0 + z_1}.\end{aligned}\quad (5.549)$$

ili konačno:

$$\tau = \frac{2Z}{Z_0 + z_1}.\quad (5.550)$$

Poznavajući oba faktora, faktor refleksije i transmisije, rješavaju se svi problemi putujućih valova na vodovima, ako oni nemaju međusobne sprege.

5.9.5 Jednostavni prijelazi u vodu

Općenito postavljanje diskontinuiteta na vodu pomaže da se riješe pojedinačne zadaće, [3]. Ekstremni su slučajevi pogona voda prazni hod i kratki spoj. Faktori refleksije iznose 1, odnosno -1. Prvi se odnosi na pozitivnu totalnu refleksiju, a drugi na negativnu totalnu refleksiju. Napon se podvostručuje na vodu u praznom hodu nakon refleksije, a poništava na vodu u kratkom spoju. Navedeni su neki jednostavni prijelazi, ako je dotični val jediničan. Impedancije se izračunavaju u Laplaceovom području, te se umjesto operatora $\frac{d}{dt}$ stavlja operator s , a umjesto vremenskog integrala pojavljuje se dijeljenje sa s . Prema tome su reaktancije:

- induktivna: $X_L = Ls$
- kapacitivna: $X_C = \frac{1}{Cs}$.

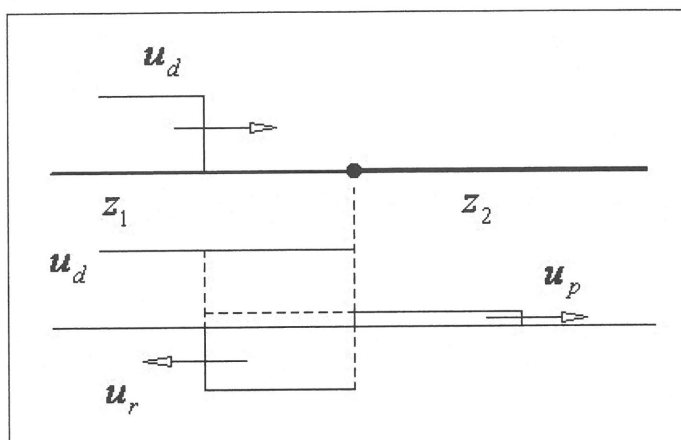
5.9.5.1 Dva voda

Dva voda valnih otpora z_1 i z_2 (bez koncentrirane impedancije) sastaju se prema slici 5.29, a val nailazi vodom 1. Faktori refleksije i transmisije iznose:

$$\rho = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1},\quad (5.551)$$

$$\tau = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}.\quad (5.552)$$

Neka su to zračni vod $z_1 = 400\Omega$ i kabel $z_2 = 50\Omega$. Faktori refleksije i transmisije iznose $\rho \cong -0,78$ i $\tau = 0,22$, a kabel preuzima na sebe val znatno nižeg napona, ovdje svega 22%. Zato kabel djeluje povoljno u zaštiti postrojenja od visokog napona putujućih valova. To se iskorištava i u praksi.

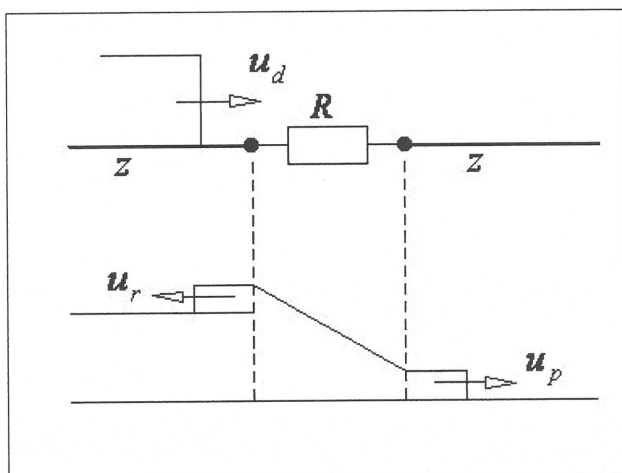


Slika 5.29 Putujući val na spoju dva voda

5.9.5.2 Otpor u seriji

Vod valnog otpora z rastavljen je na jednom mjestu, te je tu uključen djelatni otpor, (slika 5.30). Faktori refleksije i transmisije iznose:

$$\rho = \frac{R}{R + 2z}, \quad \tau = \frac{2z}{R + 2z}. \quad (5.553)$$



Slika 5.30 Otpor u seriji

Na slici su odmah skicirani valovi nakon refleksije. Ovdje je refleksija je uvijek pozitivna. Pad napona na otporu iznosi:

$$U_R = (1 + \rho - \tau)U_d = \frac{2R}{R + 2z}U_d. \quad (5.554)$$

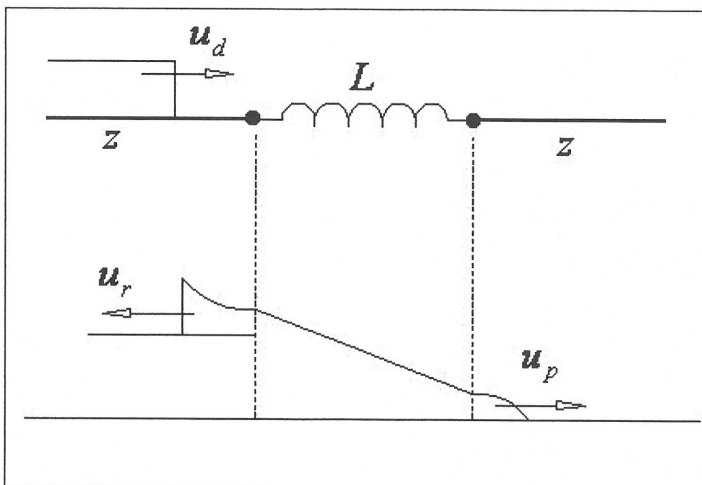
5.9.5.3 Induktivitet u seriji

Opet je vod valnog otpora z rastavljen na jednom mjestu gdje je uključena zavojnica induktiviteta L , (slika 5.31).

Faktori refleksije i transmisije iznose u Laplaceovom području:

$$\rho = \frac{sL + z - z}{sL + z + z} = \frac{s}{s + \alpha}, \quad \tau = \frac{2z}{sL + 2z} = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad (5.555)$$

$$\alpha = \frac{2z}{L}.$$



Slika 5.31 Induktivitet u seriji

Kako je dolazeći val u Laplaceovom području $U_d(s) = \frac{u_d}{s}$ jedinični val, iznosi i oblik reflektiranog i prolaznog vala u originalu (vremenskom području) glase:

$$u_r = u_d e^{-\alpha t}$$

$$u_p = u_d (1 - e^{-\alpha t}) \quad (5.556)$$

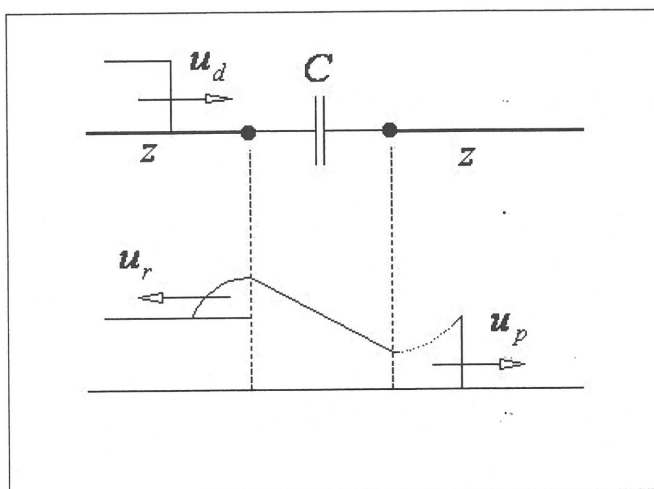
Reflektirani je val odrezan, a prolazni je postao spljošten. Induktivitet ne dopušta u prvi trenutak prolazak vala, te nastaje prolazna totalna refleksija kao u praznom hodu. Kako struja počinje postupno prolaziti induktivitetom, tako se ublažava efekt refleksije. Induktivitet ne predstavlja otpor u stacionarnom stanju za istosmjernu struju, te val prolazi kao da on nije uključen u vod. Induktivitet zaštićuje priključeni vod od strmih valova. Spljošteni val nije opasnost za postrojenje. Njegovo čelo iznosi oko $50 \mu s$, a strmina je nešto iznad $10^{10} V/s$ ili ispod $100 V/m$ duljine voda u zraku. Uz ove strmine ne mogu nastati opasne razlike potencijala u postrojenju, čije se dimenzije mjere na nekoliko desetaka metara. Čak i nekoliko stotina metara nisu opasne dimenzije. Zračni vod 400Ω treba induktivitet u seriju od $13 mH$ da bi se postigla strmina $100 V/m$ pri dolazećem valu od $500 kV$.

5.9.5.4 Kapacitet u seriji

Faktori refleksije i transmisije za ovaj slučaj, (slika 5.32), iznose:

$$\rho = \frac{\frac{1}{Cs} + z - z}{\frac{1}{Cs} + z + z} = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \tau = \frac{2z}{\frac{1}{Cs} + 2z} = \frac{s}{s + \alpha}, \quad (5.557)$$

$$\alpha = \frac{1}{2zC}.$$



Slika 5.32 Kapacitet u seriji

To daje valove refleksije i prolaza za $U_d(s) = \frac{u_d}{s}$:

$$u_r = u_d(1 - e^{-\alpha}),$$

$$u_p = u_d e^{-\alpha}. \quad (5.558)$$

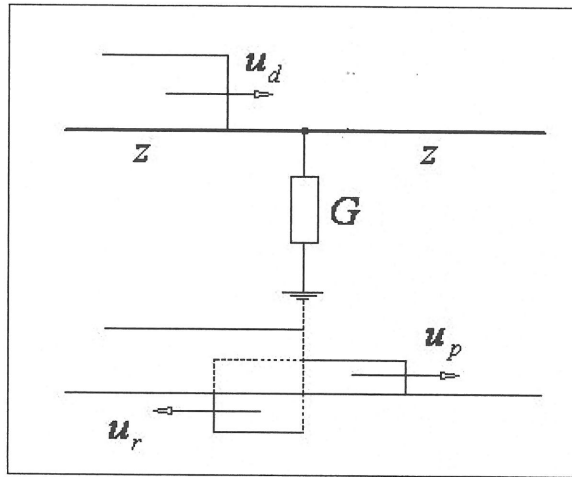
5.9.5.5 Odvod na vodu

Vod ima valni otpor z , a na jednom mjestu priključuje se koncentrirani djelatna vodljivost (odvod) G , (slika 5.33). Faktori refleksije i transmisije iznose:

$$\rho = \frac{\frac{1}{G + \frac{1}{z}} - z}{\frac{1}{G + \frac{1}{z}} + z} = \frac{1 - z\left(G + \frac{1}{z}\right)}{1 + z\left(G + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1 - zG - 1}{1 + zG + 1} = \frac{-zG}{2 + zG} = \frac{-G}{2y + G}, \quad (5.559)$$

$$\tau = \frac{2 \frac{1}{G + \frac{1}{z}}}{\frac{1}{G + \frac{1}{z}} + z} = \frac{2}{1 + z\left(G + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{2 + zG} = \frac{2y}{2y + G}, \quad (5.560)$$

$$y = \frac{1}{z}. \quad (5.561)$$



Slika 5.33 Djelatna vodljivost (odvod) G na vodu valne impedancije z

Refleksija je uvijek negativna, te je prolazeći val uvijek manji od dolazećeg. Tako djeluje odvod na izolatorima i stupovima visokonaponskih dalekovoda.

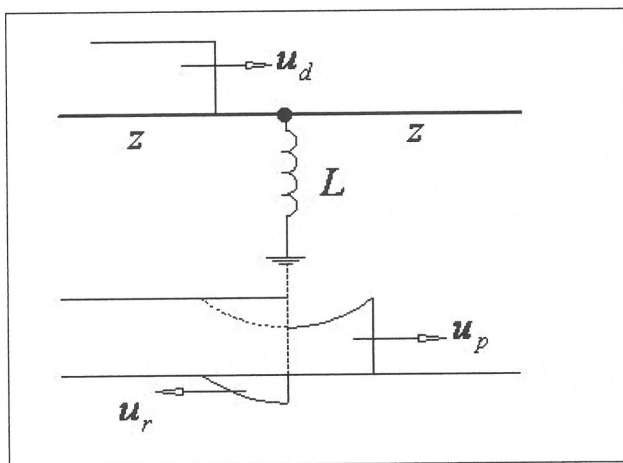
5.9.5.6 Induktivitet spojen paralelno odnosno poprečno na zemlju

Induktivitet se priključuje na vod valnog otpora z između njega i zemlje, koja se smatra da je nultog potencijala, (slika 5.34). Faktori refleksije i transmisije iznose:

$$\rho = \frac{\frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z}} - z}{\frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z}} + z} = \frac{1 - z \left(\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z} \right)}{1 + z \left(\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z} \right)} = \frac{-\frac{z}{Ls}}{2 + \frac{z}{Ls}} = \frac{-\alpha}{s + \alpha}, \quad (5.562)$$

$$\tau = 2 \frac{\frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z}}}{\frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z}} + z} = \frac{2}{1 + z \left(\frac{1}{Ls} + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2}{2 + \frac{z}{Ls}} = \frac{s}{s + \alpha}, \quad (5.563)$$

$$\alpha = \frac{z}{2L}. \quad (5.564)$$

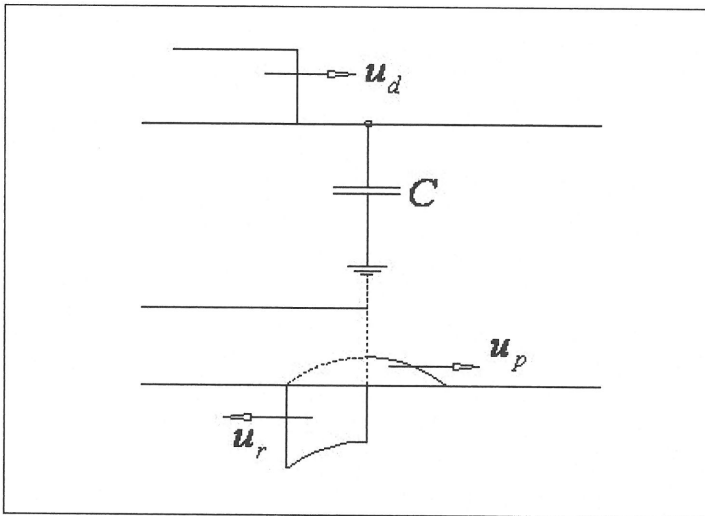


Slika 5.34 Induktivitet spojen poprečno na zemlju

Reflektirani i prolazni val iznose za dolazeći val $U_d(s) = \frac{u_d}{s}$:

$$\begin{aligned} u_r &= -u_d(1 - e^{-\alpha t}), \\ u_p &= u_d e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (5.565)$$

5.9.5.7 Kapacitet spojen paralelno



Slika 5.35 Kapacitet spojen poprečno na zemlju

Faktori refleksije i transmisije za ovaj slučaj, (slika 5.33) iznose:

$$\rho = \frac{\frac{1}{Cs + \frac{1}{z}} - z}{\frac{1}{Cs + \frac{1}{z}} + z} = \frac{1 - z \left(Cs + \frac{1}{z} \right)}{1 + z \left(Cs + \frac{1}{z} \right)} = \frac{-zCs}{2 + zCs} = \frac{-s}{s + \alpha}, \quad (5.566)$$

$$\tau = 2 \frac{\frac{1}{Cs + \frac{1}{z}}}{\frac{1}{Cs + \frac{1}{z}} + z} = \frac{2}{2 + zCs} = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad (5.567)$$

$$\alpha = \frac{2}{zC}. \quad (5.568)$$

Odatle slijede reflektirani i prolazni val za $U_d(s) = \frac{u_d}{s}$:

$$\begin{aligned} u_r &= -u_d e^{-\alpha t}, \\ u_p &= u_d (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned} \quad (5.569)$$

6 SKIN EFEKT

Pri analizi pojava na granici izolator - vodič nije bilo riječi o podrijetlu polja. Polje može biti stranog podrijetla koje, rasprostirući se, nailazi na vodljivu ravninu u kojoj inducira struju. Zbog induciranih struja dubina prodiranja polja je praktički konačna, kako je to prije utvrđeno. Vodič u ovom slučaju ima samo pasivnu ulogu. On je samo sijelo gubitaka energije, te se tad govori o gubicima zbog vrtložnih struja. Tehnički se treba boriti protiv takvih gubitaka, [3], [5], [6], [7].

S druge strane, postoje aktivni vodiči, koji su elementi strujnih ili magnetskih krugova, koji provode strujni odnosno magnetski tok. Na prvom su mjestu vodiči struje. Oni u svojoj okolini induciraju polje. Ono se ponaša u odnosu na vodič kao strano polje, koje je naišlo na vodič, samo se pri proračunima treba voditi računa o graničnim uvjetima. Razlika između "aktivnog" i "pasivnog" vodiča mogla se uočiti pri razmatranju problema prijenosnih vodova i valovoda. I jedni i drugi podliježu Maxwelllovim jednadžbama, dakle općim jednadžbama polja.

Feromagnetski materijal u nekom magnetskom krugu mogao bi se također ubrojiti među aktivne vodiče. Magnetski tok kruga mora proći kroz krug željeza (limove). Ovdje je ipak bliža slika da polje prodiere iz vanjskog prostora u feromagnetski materijal.

U oba slučaja imamo pojavu da se struja kod jednih, a magnetski tok kod drugih materijala natiskuju prema površini graničnog izolatora, dok se u njegovoj unutrašnjosti mogu očekivati, dapače, područja sasvim bez polja, dakle bez struje, odnosno magnetskog toka. Ta se pojava zove skin efekt. Kad se govori o skin efektu misli se na aktivne vodiče, koji trebaju provesti izvjesnu struju odnosno magnetski tok.

Ako se u svim slučajevima usvoji da polje prodiere iz izolatora u vodiče, moraju biti zadovoljeni granični uvjeti. Kad se radi o aktivnim vodičima, najčešće je povoljno poći od promatranja polja u aktivnim vodičima gdje su pomaćne struje zanemarive.

Maxwellove jednadžbe za taj slučaj glase:

$$\text{rot } \vec{H} \cong \kappa \vec{E}, \quad (6.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Uzevši gore uvedenu pretpostavku zanemarenja pomaćnih struja, slično kao i pri izvođenju valnih jednadžbi primjenom operacije „rotor“ na obje jednadžbe, nakon preuređenja se dobiva:

$$\Delta \vec{E} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.3)$$

$$\Delta \vec{H} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (6.4)$$

$$\Delta \vec{J} = \mu \kappa \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (6.5)$$

pri čemu je κ djelatna vodljivost vodiča (S/m).

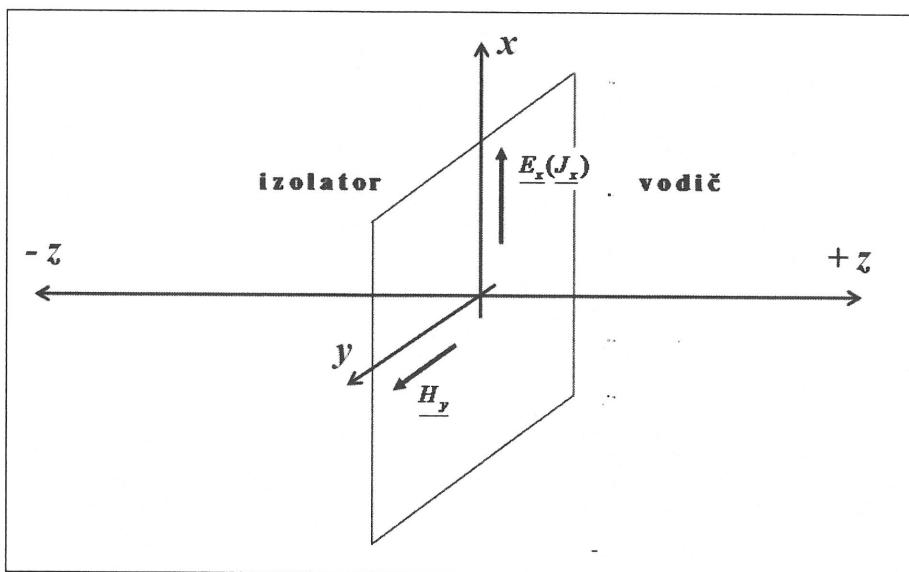
To više nisu valne jednadžbe, već su one karakteristične za vođenje topline u sredstvu s toplinskim izvorima i u literaturi se zovu difuzijske jednadžbe. Treća jednadžba koja se odnosi na gustoću struje

proizlazi iz prve jednadžbe uvrštenjem $\vec{E} = \vec{J} / \kappa$. Rješavaju se od slučaja do slučaja uz zadovoljenje graničnih uvjeta.

Za ocjenu skin efekta od bitne je važnosti dubina prodiranja harmonijskog polja u vodič za neku određenu frekvenciju :

$$d = \frac{1}{\alpha} \cong \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \kappa}}. \quad (6.6)$$

Približno nakon tri do pet dubina prodiranja praktički ne postoji polje u vodiču, dakle nema niti struje. Posljedica je toga da to područje vodiča nije uopće interesantno, te ono praktički ne postoji čim je debljina vodiča veća od tri do pet dubina prodiranja (6.6), a debljina se u tom slučaju može smatrati beskonačno velikom. To može olakšati promatranje pojave.



Slika 6.1 Smjerovi veličina polja na granici izolator-vodič

Tangencijalna komponenta (fazora) električnog polja $\underline{E}_x$ (slika 6.1) vezana je za vektor gustoće struje $\underline{J}_x$ odnosom, [6], [7]:

$$\underline{J}_x = \kappa \underline{E}_x, \quad (6.7)$$

a također je vezana za magnetsko polje preko valnog otpora $\underline{Z}_v$:

$$\frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \underline{Z}_v = \frac{\underline{Z}}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{(1+j)\alpha} = \frac{j\omega\mu}{(1+j)\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\kappa}} = (1+j) \frac{\underline{Z}_v}{\sqrt{2}} = \underline{Z}_v e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad (6.8)$$

$$Z_v = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} = \sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\kappa}}. \quad (6.9)$$

Valna je konstanta za slučaj vodiča:

$$\underline{\gamma} = (1 + j) \alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \omega\mu\kappa} = \sqrt{\pi f\mu\kappa}, \quad (6.10)$$

a kvocijent apsolutnog iznosa valne impedancije i α (prigušna konstanta jednaka je faznoj) je:

$$\frac{Z_v}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}. \quad (6.11)$$

Budući da nema povratnog vala, prodiranje polja je u pozitivnom smjeru osi z:

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0 e^{j\alpha x - \gamma z}, \quad \underline{J}_x = \kappa \underline{E}_0 e^{j\alpha x - \gamma z} = \underline{J}_0 e^{j\alpha x - \gamma z}, \quad (6.12)$$

$$\underline{H}_y = \underline{H}_0 e^{j\alpha x - \gamma z}. \quad (6.13)$$

Na nekom mjestu površine vodiča struje teku u smjeru x-osi (slika 6.1). Njihov se iznos po jedinici duljine y-osi zove strujni oblog, koji se označava s $\underline{\tilde{K}}$. Jakost polja na granici vodič - izolator jednaka je upravo strujnom oblogu $\underline{\tilde{K}}$:

$$\underline{\tilde{K}} e^{j\alpha x} = \int_0^\infty \underline{J}_x dz = \underline{H}_0 e^{j\alpha x}. \quad (6.14)$$

Dalje se može računati:

$$\int_0^\infty \underline{J}_x dz = \int_0^\infty \kappa \underline{E}_0 e^{j\alpha x - \gamma z} dz = \kappa \underline{E}_0 e^{j\alpha x} \left(\frac{-1}{\gamma} \right) e^{-\gamma z} \Big|_0^\infty = \kappa \underline{E}_0 e^{j\alpha x} \frac{1}{(1 + j)\alpha} = \frac{\underline{J}_0}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha x - \frac{\pi}{4})}, \quad (6.15)$$

$$\underline{\tilde{K}} e^{j\alpha x} = \underline{E}_0 \frac{1}{(1 + j) \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega\mu\kappa}{\kappa^2}}} e^{j\alpha x} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_v} e^{j\alpha x} = \underline{H}_0 e^{j\alpha x}. \quad (6.16)$$

Srednja vrijednost Poyntingovog (kompleksnog) vektora je:

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \underline{H}_0^* = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \frac{\underline{E}_0^*}{\underline{Z}_v} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_v} \frac{1 - j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{E_0^2}{Z_v} (1 + j), \quad (6.17)$$

a također je iz istog izraza:

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \underline{H}_0^* = \frac{1}{2} \underline{Z}_v \underline{H}_0 \underline{H}_0^* = \frac{1}{2} \frac{Z_v}{\sqrt{2}} (1 + j) H_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_v}{\sqrt{2}} (1 + j) K^2. \quad (6.18)$$

Realni dio predstavlja djelatne gubitke u vodiču:

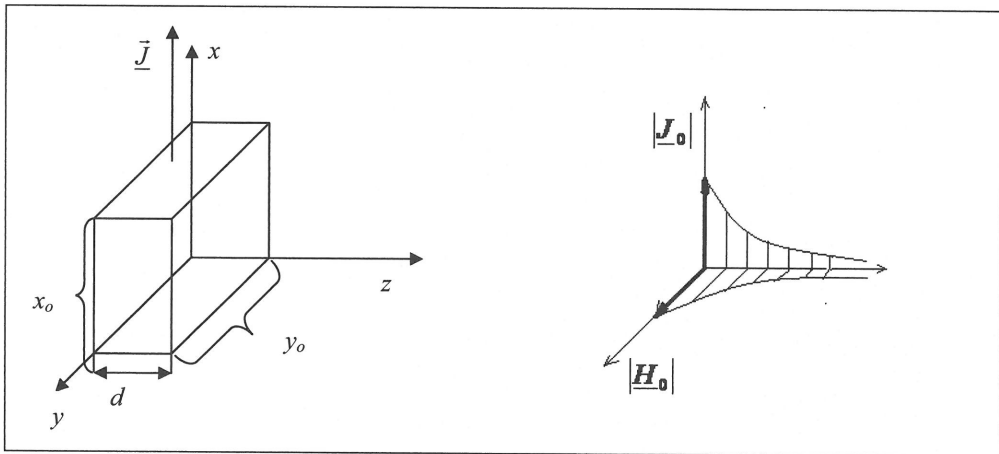
$$\Gamma_r = \frac{1}{2} K^2 \frac{Z_v}{\sqrt{2}}, \quad (6.19)$$

a imaginarni dio jalovu snagu, koja ulazi u vodič. Ako je površina vodiča zakrivljena, tad polumjer zakrivljenosti mora biti mnogo puta veći od dubine prodiranja. Kad elektromagnetsko polje nastaje iz točkastog izvora izvan vodiča mora njegova udaljenost od vodiča biti mnogo puta veća od dubine prodiranja. U svim tim slučajevima može se računati kao da ravni val nailazi okomito na ravnu plohu vodiča, koji je beskonačno debelo (slika 6.2).

U protivnom slučaju, kad je debljina vodiča reda veličine dubine prodiranja, treba računati s Maxwellovim jednadžbama za vodič.

Neka se još promotri izraz za plošnu gustoću djelatne snage:

$$\Gamma_r = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{E_0^2}{Z_v} = \frac{\sqrt{2}}{4} J_0^2 \frac{1}{\kappa^2 \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}} = \frac{J_0^2}{4} \frac{1}{\kappa \sqrt{\frac{1}{2} \omega\mu\kappa}} = \left(\frac{J_{0ef}}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{\alpha\kappa} = \left(\frac{J_{0ef}}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{d}{\kappa}. \quad (6.20)$$



Slika 6.2 Razdioba gustoće struje i jakosti magnetskog polja u debeloj vodljivoj ploči

Snaga na površini $S_z = x_0 y_0$ je:

$$\Gamma_r S_z = \Gamma_r x_0 y_0 = \left(\frac{I_o}{y_0 d} \right)^2 \frac{d}{\kappa} x_0 y_0 = I_o^2 \frac{1}{\kappa} \frac{x_0}{y_0 d} = I_o^2 R, \quad (6.21)$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{x_0}{y_0 d}, \quad I_o = \frac{J_{0ef}}{\sqrt{2}} y_0 d. \quad (6.22)$$

Dakle, dobiven je rezultat, kao da struja $I_o = \frac{J_{0ef}}{\sqrt{2}} y_0 d$ teče kroz otpor $R = \frac{1}{\kappa} \frac{x_0}{y_0 d}$.

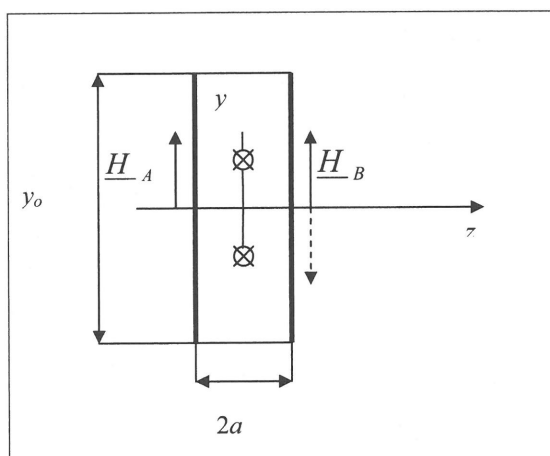
Za $x_0 = y_0 = 1m$ dobiva se:

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{d}. \quad (6.23)$$

Za račun gubitaka smatra se da je struja jednoliko raspoređena po dubini d .

6.1 VODLJIVA PLOČA

Vodljiva ploča protjecana je strujom $\underline{I}_m$ u osi x , tako da gustoća struje nije ovisna o koordinati y i x , već samo o koordinati z . Ako je visina vodiča y_o mnogo veća od debljine ($y_o \gg 2a$), može se postupiti kao da je (vodič) beskonačno visok, [3], [11], (slika 6.3).



Slika 6.3 Vodljiva ploča visine $y_o \gg 2a$

Jakost magnetskog polja na površini dobiva se iz zakona protjecanja odnosno prve Maxwelllove jednadžbe u integralnom obliku:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{s}, \quad (6.24)$$

a uz zanemarenje pomaćnih struja i doprinosa jakosti magnetskog polja po koordinati z ($y_o \gg 2a$) to je:

$$\underline{H}_A y_o - \underline{H}_B y_o \cong \underline{I}_m. \quad (6.25)$$

Također je zbog simetrije:

$$\underline{H}_A = -\underline{H}_B = \underline{H}_o = \frac{\underline{I}_m}{2y_o}. \quad (6.26)$$

Ova posljednja dva izraza (6.25 i 6.26) predstavljaju ujedno i granične uvjete za rješavanje jednadžbi:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}, \quad (6.27)$$

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dz^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}, \quad (6.28)$$

$$\frac{d^2 \underline{J}}{dz^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{J}. \quad (6.29)$$

gdje je:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \cong (1 + j)\alpha, \quad \alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa} \quad (6.30)$$

već dobro poznata valna konstanta.

Rješenja prve i druge jednadžbe glase:

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{\underline{\gamma} z} + \underline{E}_2 e^{-\underline{\gamma} z}, \quad (6.31)$$

$$\underline{H} = \underline{H}_1 e^{\underline{\gamma} z} + \underline{H}_2 e^{-\underline{\gamma} z}. \quad (6.32)$$

Odnosi između polja su:

$$\frac{\underline{E}_2}{\underline{H}_2} = -\frac{\underline{E}_1}{\underline{H}_1} = \underline{Z}_v = \frac{Z_v}{\sqrt{2}} (1 + j). \quad (6.33)$$

Granični su uvjeti:

$$\bullet \quad \text{za: } z = -a: \underline{H} = \underline{H}_o, \quad (6.34)$$

$$\bullet \quad \text{za: } z = +a: \underline{H} = -\underline{H}_o. \quad (6.35)$$

Uvrsti li se to u opće rješenje za jakost magnetskog polja (6.32, $\underline{H} = \underline{H}_1 e^{\underline{\gamma} z} + \underline{H}_2 e^{-\underline{\gamma} z}$) dobiva se:

$$\underline{H}_o = \underline{H}_1 e^{-\underline{\gamma} a} + \underline{H}_2 e^{\underline{\gamma} a}, \quad (6.36)$$

$$-\underline{H}_o = \underline{H}_1 e^{\underline{\gamma} a} + \underline{H}_2 e^{-\underline{\gamma} a}. \quad (6.37)$$

Množenjem (6.36) s $e^{\underline{\gamma} a}$ i (6.37) s $e^{-\underline{\gamma} a}$ posljednja dva izraza postaju:

$$\underline{H}_o e^{\underline{\gamma} a} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2 e^{2\underline{\gamma} a}, \quad (6.38)$$

$$-\underline{H}_o e^{-\underline{\gamma} a} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2 e^{-2\underline{\gamma} a}. \quad (6.39)$$

Sad se (6.39) odbije od (6.38) pa se dobiva:

$$\underline{H}_o (e^{\underline{\gamma} a} + e^{-\underline{\gamma} a}) = \underline{H}_2 (e^{2\underline{\gamma} a} - e^{-2\underline{\gamma} a}) = \underline{H}_2 (e^{\underline{\gamma} a} + e^{-\underline{\gamma} a})(e^{\underline{\gamma} a} - e^{-\underline{\gamma} a}), \quad (6.40)$$

a nakon kraćenja s $(e^{\underline{\gamma}a} + e^{-\underline{\gamma}a})$ dobiva se za $\underline{H}_2$:

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{H}_0}{2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}a}. \quad (6.41)$$

Uvrsti li se ovaj izraz, u na primjer, izraz: $\underline{H}_0 e^{\underline{\gamma}a} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2 e^{2\underline{\gamma}a}$ dobiva se:

$$\begin{aligned} \underline{H}_1 &= \underline{H}_0 e^{\underline{\gamma}a} - \underline{H}_2 e^{2\underline{\gamma}a} = \underline{H}_0 \left(e^{\underline{\gamma}a} - \frac{e^{2\underline{\gamma}a}}{2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}a} \right) = \\ &= \frac{\underline{H}_0}{2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}a} (2e^{\underline{\gamma}a} \operatorname{sh} \underline{\gamma}a - e^{2\underline{\gamma}a}) = \frac{\underline{H}_0}{2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}a} (e^{2\underline{\gamma}a} - 1 - e^{2\underline{\gamma}a}) = -\frac{\underline{H}_0}{2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}a}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Uvrštenjem konstanti $\underline{H}_1$ i $\underline{H}_2$ u osnovno rješenje za jakost magnetskog polja u vodiču $\underline{H} = \underline{H}_1 e^{\underline{\gamma}z} + \underline{H}_2 e^{-\underline{\gamma}z}$ dobiva se konačno rješenje:

$$\underline{H} = -\underline{H}_0 \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma}z}{\operatorname{sh} \underline{\gamma}a}. \quad (6.43)$$

Funkcija $\operatorname{sh} \underline{\gamma}z$ može se i drugačije izraziti i to kao:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \underline{\gamma}z &= \operatorname{sh}[(1+j)\alpha z] = \operatorname{sh} \alpha z \operatorname{ch} j\alpha z + \operatorname{ch} \alpha z \operatorname{sh} j\alpha z = \\ &= \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z + j \operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z = |\operatorname{sh} \underline{\gamma}z| e^{j\psi_z}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Odavde je apsolutni iznos $|\operatorname{sh} \underline{\gamma}z|$:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sh} \underline{\gamma}z| &= \sqrt{(\operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z)^2 + (\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z)^2} = \sqrt{(\operatorname{ch}^2 \alpha z - 1) \cos^2 \alpha z + \operatorname{ch}^2 \alpha z \sin^2 \alpha z} \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha z \cos^2 \alpha z + \operatorname{ch}^2 \alpha z \sin^2 \alpha z - \cos^2 \alpha z} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha z - \cos^2 \alpha z} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha z - \cos 2\alpha z)}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

a tangens argumenta prema (6.44):

$$\operatorname{tg} \psi_z = \frac{\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z}{\operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z} = (\operatorname{cth} \alpha z)(\operatorname{tg} \alpha z). \quad (6.46)$$

Odatle je također za $z=a$:

$$|\operatorname{sh} \underline{\gamma}a| = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha a - \cos 2\alpha a)}, \quad (6.47)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{ch} \alpha a \sin \alpha a}{\operatorname{sh} \alpha a \cos \alpha a} = (\operatorname{cth} \alpha a)(\operatorname{tg} \alpha a). \quad (6.48)$$

S obzirom da je $i \operatorname{sh} \underline{\gamma} a = \operatorname{sh}[(1+j)\alpha a] = |\operatorname{sh} \underline{\gamma} a| e^{j\psi}$ može se pisati za već izvedene konstante:

$$\underline{H}_2 = -\underline{H}_1 = \frac{\underline{H}_o}{2|\operatorname{sh} \underline{\gamma} a|} e^{-j\psi}, \quad (6.49)$$

a zatim i izraz za jakost magnetskog polja:

$$\underline{H} = -\underline{H}_o \frac{|\operatorname{sh} \underline{\gamma} z|}{|\operatorname{sh} \underline{\gamma} a|} e^{j(\psi_z - \psi)}. \quad (6.50)$$

Da se dobije jakost električnog polja prvo treba prema $\frac{\underline{E}_2}{\underline{H}_2} = -\frac{\underline{E}_1}{\underline{H}_1} = \underline{Z}_v = \frac{\underline{Z}_v}{\sqrt{2}}(1+j)$ izračunati konstante $\underline{E}_1$ i $\underline{E}_2$:

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{Z}_v}{2|\operatorname{sh} \underline{\gamma} a|} \underline{H}_o e^{-j\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)} = \underline{E}_1 = \underline{E}_o, \quad (6.51)$$

a zatim ih uvrstiti u opći izraz za jakost električnog polja $\underline{E} = \underline{E}_1 e^{jz} + \underline{E}_2 e^{-jz}$ pa je:

$$\underline{E} = \underline{E}_o (e^{jz} + e^{-jz}) = 2\underline{E}_o \operatorname{ch} \underline{\gamma} z \quad (6.52)$$

$$\underline{E} = \underline{Z}_v \underline{H}_o \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} z}{|\operatorname{sh} \underline{\gamma} a|} e^{-j\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)} = \underline{Z}_v \frac{|\operatorname{ch} \underline{\gamma} z|}{|\operatorname{sh} \underline{\gamma} a|} \underline{H}_o e^{j\left(\varphi_z - \psi + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (6.53)$$

Ovdje su:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \underline{\gamma} z &= \operatorname{ch}[(1+j)\alpha z] = \operatorname{ch} \alpha z \operatorname{ch} j\alpha z + \operatorname{sh} \alpha z \operatorname{sh} j\alpha z = \\ &= \operatorname{ch} \alpha z \cos \alpha z + j \operatorname{sh} \alpha z \sin \alpha z = |\operatorname{ch} \underline{\gamma} z| e^{j\varphi_z} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Oдавде je apsolutni iznos $|\operatorname{ch} \underline{\gamma} z|$:

$$\begin{aligned} |\operatorname{ch} \underline{\gamma} z| &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha z \cos^2 \alpha z + \operatorname{sh}^2 \alpha z \sin^2 \alpha z} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha z \cos^2 \alpha z + (\operatorname{ch}^2 \alpha z - 1) \sin^2 \alpha z} = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha z - \sin^2 \alpha z} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha z + \cos 2\alpha z)}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

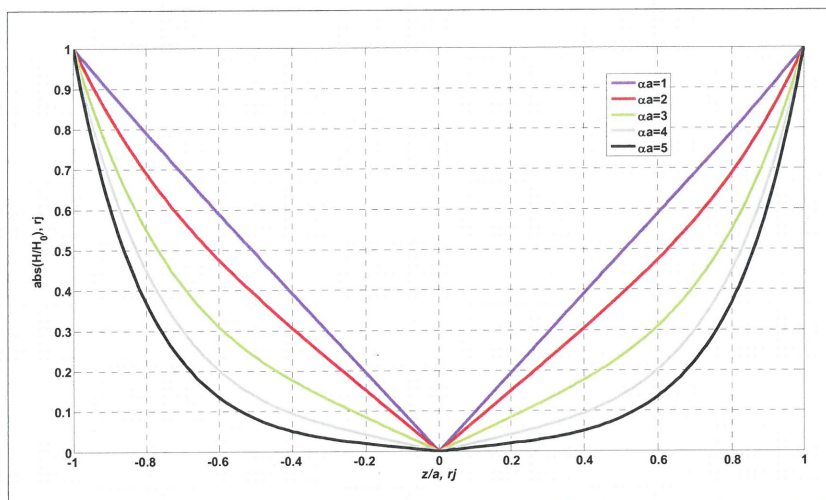
a tangens argumenta prema (6.54):

$$\operatorname{tg} \varphi_z = \frac{\operatorname{sh} \alpha z \sin \alpha z}{\operatorname{ch} \alpha z \cos \alpha z} = (\operatorname{th} \alpha z)(\operatorname{tg} \alpha z). \quad (6.56)$$

Odatle je također za $z=a$:

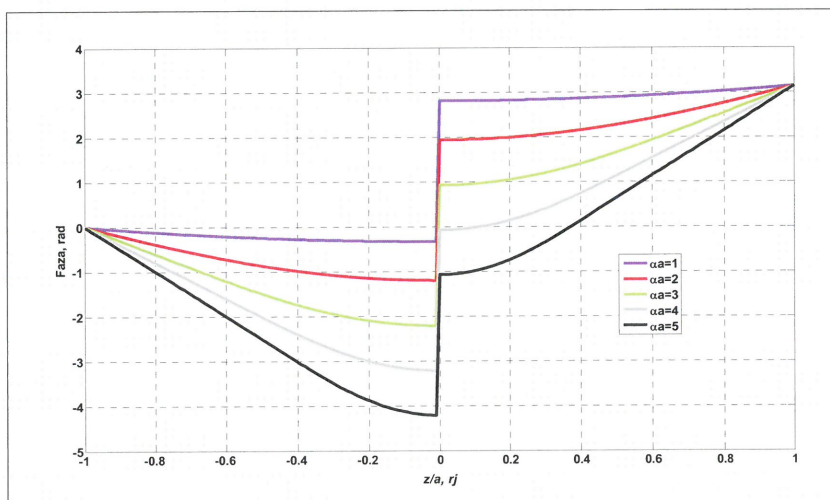
$$|\operatorname{ch} \underline{\gamma} a| = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\alpha a)}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \alpha a \sin \alpha a}{\operatorname{ch} \alpha a \cos \alpha a} = (\operatorname{th} \alpha a)(\operatorname{tg} \alpha a). \quad (6.57)$$

Prema gornjim izrazima nacrtane su razdiobe jakosti magnetskog i električnog polja (gustoće struje) u ovisnosti o relativnoj debljini ploče (z/a) normirane s H_0 odnosno s E_0 (J_0). Parametar αa u području je vrijednosti od 1 do 5.



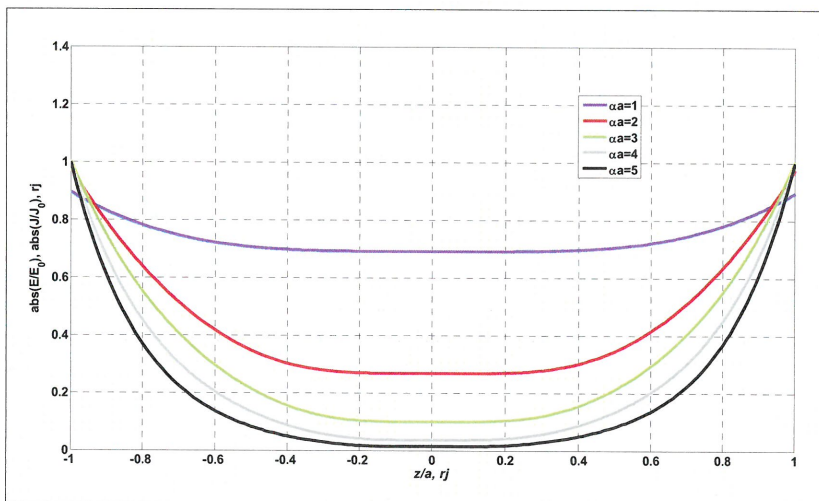
Slika 6.4 Razdioba apsolutne vrijednosti magnetskog polja (H_y) po relativnoj debljini (z/a) vodljive ploče visine $y_0 \gg 2a$

Na slici 6.4 prikazana je razdioba apsolutne vrijednosti magnetskog polja, a na slici 6.5 njegova faza u skladu s odabranim smjerom struje prema slici 6.3 odnosno prema uvjetima (6.25, 6.34 i 6.35).

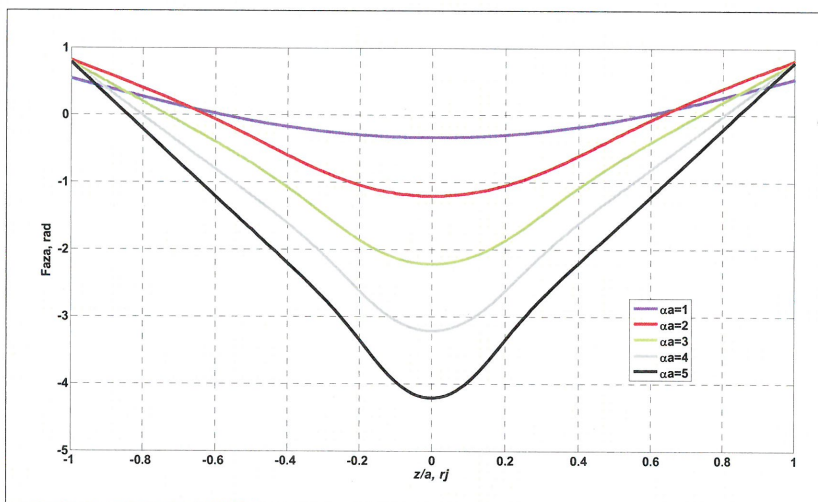


Slika 6.5 Razdioba faze magnetskog polja (H_y) po relativnoj debljini (z/a) vodljive ploče visine $y_0 \gg 2a$

Na slici 6.6 prikazana je razdioba apsolutne vrijednosti električnog polja odnosno gustoće struje, a na slici 6.7 njihova faza u skladu s odabranim smjerom struje prema slici 6.3.



Slika 6.6 Razdioba apsolutne vrijednosti električnog polja odnosno gustoće struje (E_x, J_x) po relativnoj debljini (z/a) vodljive ploče visine $y_0 \gg 2a$



Slika 6.7 Razdioba faze električnog polja odnosno gustoće struje (E_x, J_x) po relativnoj debljini (z/a) vodljive ploče visine $y_0 \gg 2a$

Gubici u ploči mogu se odrediti na dva načina. Može se promatrati Poyntingov vektor ili izravno računati volumen i integral Jouleovih gubitaka. Za ovaj je slučaj jednostavnije početi od Jouleovih gubitaka. Apsolutna vrijednost gustoće struje iznosi:

$$|J| = \kappa |E| = \kappa Z_v H_o \frac{|\operatorname{ch} \underline{\gamma z}|}{|\operatorname{sh} \underline{\gamma a}|} = \kappa Z_v H_o \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\alpha z + \cos 2\alpha z}{\operatorname{ch} 2\alpha a - \cos 2\alpha a}}, \quad (6.58)$$

a uz već poznati odnos apsolutnog iznosa valne impedancije i prigušne konstante za vodiče:

$$\kappa Z_v = \sqrt{2\alpha}, \quad \kappa^2 Z_v^2 = 2\alpha^2 \quad (6.59)$$

te izraz za gubitke $P_g = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{|J|^2}{\kappa} dz$ dobiva se dalje:

$$2\Gamma_r x_o y_o = x_o y_o 2 \int_0^a \frac{|J|^2}{\kappa} dz = \frac{x_o y_o 2\alpha^2 H_o^2}{\kappa} \int_0^a \frac{\text{ch } 2\alpha z + \cos 2\alpha z}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} dz = \frac{x_o y_o \alpha H_o^2}{\kappa} \frac{\text{sh } 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.60)$$

ili:

$$2\Gamma_r x_o y_o = \frac{x_o y_o \alpha I_m^2}{\kappa 4 y_o^2} \frac{\text{sh } 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} = \frac{I_m^2}{2} \frac{x_o \alpha}{2 \kappa y_o} \frac{\text{sh } 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} = \frac{I_m^2}{2} R_{\approx} \quad (6.61)$$

Ovdje je $R_{\approx}$ djelatni otpor za izmjeničnu struju, a djelatni otpor za istosmjernu struju je:

$$R_{\approx} = \frac{1}{\kappa} \frac{x_o}{2 a y_o} \quad (6.62)$$

pa je povećanje otpora k_R :

$$k_R = \frac{R_{\approx}}{R_{\approx}} = \frac{x_o \alpha}{2 \kappa y_o} \frac{\text{sh } 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \frac{\kappa 2 a y_o}{x_o} = \alpha a \frac{\text{sh } 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.63)$$

Magnetski tok kroz ploču određuje unutarnji induktivitet $L_{u\approx}$. Ovaj se induktivitet može odrediti iz magnetske energije pri čemu se računa s tjemnim vrijednostima struje I_m pa se dobiva još jedan faktor 1/2:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} L_{u\approx} I_m^2 = 2 \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{2} \mu |H|^2 dz x_o y_o \quad (6.64)$$

S obzirom da se određeni integral računa samo od 0 do a vrijednost integrala valja udvostručiti. Dalje slijedi:

$$L_{u\approx} I_m^2 = 2 \mu H_o^2 \int_0^a \frac{\text{ch } 2\alpha z - \cos 2\alpha z}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} x_o y_o dz = \frac{2 \mu x_o y_o I_m^2}{4 y_o^2 2 \alpha} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.65)$$

ili:

$$L_{u\approx} = \frac{\mu}{4 \alpha} \frac{x_o}{y_o} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.66)$$

Unutarnji induktivitet za istosmjernu struju izračunat će se prema:

$$L_u = I_m^2 = 2\mu H_o^2 \int_0^a \left(\frac{z}{a}\right)^2 x_o y_o dz = \frac{2\mu x_o y_o I_m^2}{4y_o^2} \frac{1}{3a^2} a^3 = \frac{\mu x_o a}{6y_o} I_m^2 \quad (6.67)$$

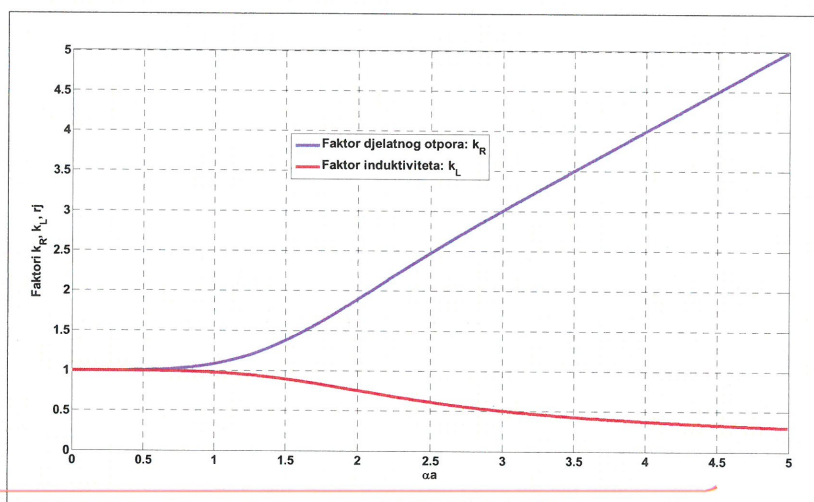
ili:

$$L_u = \frac{\mu x_o a}{6y_o} \quad (6.68)$$

Induktivitet se za izmjeničnu struju smanjuje prema onom za istosmjernu struju, a faktor je:

$$k_L = \frac{L_u}{L_{u=}} = \frac{\mu x_o}{4\alpha y_o} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \frac{6y_o}{\mu x_o a} = \frac{3}{2\alpha a} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.69)$$

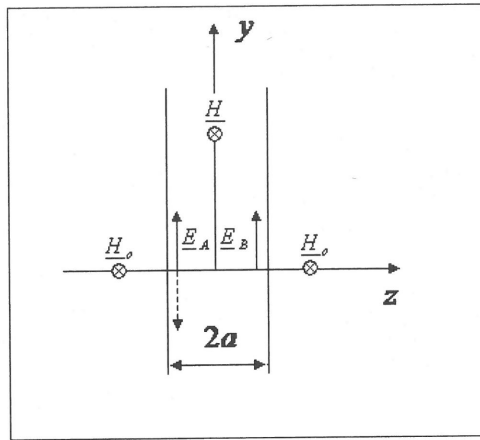
Za vrlo izražen skin efekt: $\alpha a \gg 1$ faktor (povećanja prema onom za istosmjernu struju) djelatnog otpora za izmjeničnu struju približno je $k_R \cong \alpha a$. Faktor (smanjenja prema onom za istosmjernu struju) induktiviteta približno je $k_L \cong \frac{3}{2\alpha a}$ što se može uočiti i sa slike 6.8.



Slika 6.8 Ovisnost faktora djelatnog otpora k_R i induktiviteta k_L o αa

6.2 LIM U MAGNETSKOM POLJU

Željezne jezgre u transformatorskim limovima i električnim strojevima sastavljene su od tankih limova, čija je uzdužna dimenzija u smjeru polja. Zbog funkcioniranja spomenutih uređaja potrebno je provesti stanoviti magnetski tok, koji mora proći duž limova. Pri prolazu toka kroz limove induciraju se vrtložne struje u limovima, koje izazivaju skin efekt magnetskog polja. Zadatak je sličan vodljivoj ploči, samo električno i magnetsko polje mijenjaju svoja mjesta, [11], (slika 6.9).



Slika 6.9 Lim u magnetskom polju

Granični su uvjeti:

- za $z = \pm a$: $\underline{H} = \underline{H}_o$

pa iz jednačbe:

$$\underline{H} = \underline{H}_1 e^{\gamma z} + \underline{H}_2 e^{-\gamma z} \quad (6.70)$$

slijedi:

$$\underline{H}_o = \underline{H}_1 e^{\gamma a} + \underline{H}_2 e^{-\gamma a}, \quad (6.71)$$

$$\underline{H}_o = \underline{H}_1 e^{-\gamma a} + \underline{H}_2 e^{\gamma a}. \quad (6.72)$$

Nakon množenja prve jednačbe s $e^{\gamma a}$, a druge s $e^{-\gamma a}$ te oduzimanja druge jednačbe od prve dobiva se:

$$\underline{H}_o e^{\gamma a} - \underline{H}_o e^{-\gamma a} = \underline{H}_1 (e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma a}) \quad (6.73)$$

odakle je nakon kraćenja s $(e^{\gamma a} - e^{-\gamma a})$:

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_2 = \frac{\underline{H}_o}{2 \cosh \gamma a}. \quad (6.74)$$

Ove se konstante uvrste u opće rješenje za jakost magnetskog polja $\underline{H} = \underline{H}_1 e^{\gamma z} + \underline{H}_2 e^{-\gamma z}$ pa se konačno dobiva njegova razdioba:

$$\underline{H} = \underline{H}_o \frac{\cosh \gamma z}{\cosh \gamma a} = \underline{H}_o \left| \frac{\cosh \gamma z}{\cosh \gamma a} \right| e^{j(\varphi_z - \varphi)} \quad (6.75)$$

gdje su kvadrat apsolutnog iznosa $|\operatorname{ch} \gamma z|$ i tangens argumenta φ_z :

$$|\operatorname{ch} \gamma z|^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha z + \cos 2\alpha z)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_z = (\operatorname{th} \alpha z)(\operatorname{tg} \alpha z)$$
(6.76)

Sad se magnetsko polje ponaša kao prije električno polje u pločastom vodiču. Električno polje dobiva se iz poznatog odnosa prema magnetskom polju.

$$\underline{E}_2 = -\underline{E}_1 = \frac{Z_v}{2 \operatorname{ch} \gamma a} \underline{H}_o e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{Z_v \underline{H}_o}{2 |\operatorname{ch} \gamma a|} e^{j(\frac{\pi}{4} - \varphi)}$$
(6.77)

Odatle je električno polje:

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{\gamma z} + \underline{E}_2 e^{-\gamma z},$$
(6.78)

$$\underline{E} = -Z_v \underline{H}_o \frac{|\operatorname{sh} \gamma z|}{|\operatorname{ch} \gamma a|} e^{j(\frac{\pi}{4} + \psi_z - \varphi)}$$
(6.79)

gdje su:

$$|\operatorname{sh} \gamma z|^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha z - \cos 2\alpha z),$$

$$\operatorname{tg} \psi_z = (\operatorname{cth} \alpha z)(\operatorname{tg} \alpha z).$$
(6.80)

Na taj su se način dakle, odredile jednadžbe, kojima su definirane razdiobe magnetskog i električnog polja unutar lima za zadani iznos $\underline{H}_o$ na površini lima. $\underline{H}_o$ je jednak u izolatoru i limu, dok indukcija čini skok za iznos permeabilnosti željeza. Pomoću tih jednadžbi može se odrediti magnetski tok u limu i gubici vrtložnih struja. Oboje je najbolje izraziti po jedinici visine tj. $y_o = 1m$

Magnetski tok po jedinici visine lima iznosi:

$$\underline{\Phi} = 2\mu \int_0^a \underline{H} dz = \frac{2\mu \underline{H}_o}{\gamma} \operatorname{th}(\gamma a) = \sqrt{2} \frac{\mu}{\alpha} \underline{H}_o \frac{|\operatorname{sh} \gamma a|}{|\operatorname{ch} \gamma a|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \frac{1}{\alpha} \underline{B}_o \frac{|\operatorname{sh} \gamma a|}{|\operatorname{ch} \gamma a|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{4})}.$$
(6.81)

Magnetski tok kroz lim prethodi fazno za kut $(\psi - \varphi - \frac{\pi}{4})$ jakosti magnetskog polja na površini lima.

U zraku je magnetski tok u fazi s poljem, a u vodiču (koji je ujedno i magnetski i električki vodič) fazni pomak nastaje djelovanjem vrtložnih struja.

Taj se tok može izraziti nekom srednjom indukcijom u limu:

$$\underline{B}_m = \frac{\underline{\Phi}}{2a} = \sqrt{2} \frac{\underline{B}_o}{2\alpha a} \frac{|\operatorname{sh} \gamma a|}{|\operatorname{ch} \gamma a|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{4})}$$
(6.82)

koja je prema indukciji B_o neposredno ispod površine lima pomaknuta za fazni kut $\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{4}\right)$. To

može poslužiti za proračun indukcije B_o odnosno H_o , ako je zadan magnetski tok kroz lim, što je obično slučaj. Fazni kut $(\psi - \varphi)$ slijedi nakon sljedećih jednostavnih transformacija uvrštavanjem za

$$\text{tangense kutova } \psi \text{ i } \varphi \text{ u izraz } \text{tg}(\psi - \varphi) = \frac{\text{tg} \psi - \text{tg} \varphi}{1 + \text{tg} \psi \text{tg} \varphi};$$

$$\text{tg} \psi = \frac{\text{ch} \alpha a \sin \alpha a}{\text{sh} \alpha a \cos \alpha a} = (\text{cth} \alpha a)(\text{tg} \alpha a) \quad (6.83)$$

te:

$$\text{tg} \varphi = \frac{\text{sh} \alpha a \sin \alpha a}{\text{ch} \alpha a \cos \alpha a} = (\text{th} \alpha a)(\text{tg} \alpha a), \quad (6.84)$$

a koji su već prije definirani izrazima (6.47) odnosno (6.56). Dalje je:

$$\text{tg}(\psi - \varphi) = \frac{\text{tg} \psi - \text{tg} \varphi}{1 + \text{tg} \psi \text{tg} \varphi} = \frac{\text{cth} \alpha a \text{tg} \alpha a - \text{th} \alpha a \text{tg} \alpha a}{1 + \text{cth} \alpha a \text{tg} \alpha a \text{th} \alpha a \text{tg} \alpha a} = \frac{\text{tg} \alpha a (\text{cth} \alpha a - \text{th} \alpha a)}{1 + \text{tg}^2 \alpha a}, \quad (6.85)$$

$$\text{tg}(\psi - \varphi) = \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\cos \alpha a \cos \alpha a} \frac{\frac{\text{ch} \alpha a}{\text{sh} \alpha a} - \frac{\text{sh} \alpha a}{\text{ch} \alpha a}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha a}{\cos^2 \alpha a}} = \sin \alpha a \cos \alpha a \frac{\frac{\text{ch}^2 \alpha a - \text{sh}^2 \alpha a}{\text{sh} \alpha a \text{ch} \alpha a}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha a}} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2 \alpha a}{\frac{1}{2} \text{sh} 2 \alpha a} \quad (6.86)$$

pa je konačno:

$$\text{tg}(\psi - \varphi) = \frac{\sin 2 \alpha a}{\text{sh} 2 \alpha a}. \quad (6.87)$$

Za $2 \alpha a \leq 0.7$ je:

$$B_m = \sqrt{2} \frac{1}{0.7} \sqrt{\frac{\text{ch} 2 \alpha a - \cos 2 \alpha a}{\text{ch} 2 \alpha a + \cos 2 \alpha a}} B_o = 0.9981 B_o, \quad (6.88)$$

$$\psi - \varphi = \arctg \frac{\sin 2 \alpha a}{\text{sh} 2 \alpha a} = 40.34^\circ, \quad (6.89)$$

$$\psi - \varphi - \frac{\pi}{4} = -4.66^\circ.$$

Dakle, može se uzeti s pogreškom manjom od 1% da je srednja indukcija u limu jednaka B_o . Pri tom srednja indukcija zaostaje fazno za B_o za $<5^\circ$. Toliko je fazno pomaknuta struja prema induciranom naponu ($90^\circ - 5^\circ$) u namotu, koji se nalazi oko jezgre, te se manifestira kao djelatna snaga, što predstavlja stvarne gubitke u limovima jezgre.

Gubici u limu ($y_0 = x_0 = 1\text{ m}$) iznose:

$$P_g = 2 \frac{1}{2} \int_0^a \frac{|J|^2}{\kappa} dz = \kappa Z_v^2 H_o^2 \int_0^a \frac{\text{ch } 2\alpha z - \cos 2\alpha z}{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a} dz = \frac{\kappa Z_v^2}{2\alpha} H_o^2 \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a} \quad (6.90)$$

pri čemu je apsolutni iznos gustoće struje u magnetskom limu:

$$|J| = \kappa |E| = \kappa Z_v H_o \frac{|\text{sh } \gamma z|}{|\text{ch } \gamma a|} = \kappa Z_v H_o \sqrt{\frac{\text{ch } 2\alpha z - \cos 2\alpha z}{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a}}. \quad (6.91)$$

U gornji izraz za gubitke P_g treba još uvrstiti:

$$H_o = \frac{2B_m \alpha a}{\mu \sqrt{2}} \frac{|\text{ch } \gamma a|}{|\text{sh } \gamma a|} = \frac{2B_m \alpha a}{\mu \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a}}, \quad (6.92)$$

a koje dobiva iz izraza za indukciju (6.82, $B_m = \sqrt{2} \frac{\mu H_o}{2\alpha a} \frac{|\text{sh } \gamma a|}{|\text{ch } \gamma a|}$) pa se za djelatne gubitke P_g dobiva:

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{Z_v}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{B_m 2\alpha a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a}} \right)^2 \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a + \cos 2\alpha a} \\ &= \frac{Z_v}{\sqrt{2}} \frac{(2\alpha a)^2 B_m^2}{2\mu^2} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\text{gdje je: } B_m = \sqrt{2} \frac{B_o}{2\alpha a} \frac{|\text{sh } \gamma a|}{|\text{ch } \gamma a|}.$$

Specifični gubici u W/m izraženi preko indukcije su:

$$p_g = \frac{P_g}{2a} = \frac{Z_v}{2\sqrt{2}a} \frac{(2\alpha a)^2}{2\mu^2} B_m^2 \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a}, \quad (6.94)$$

a nakon množenja i dijeljenja s $\frac{2\alpha a}{3}$:

$$p_g = \frac{2\alpha a}{3} \cdot \frac{Z_v}{2\sqrt{2}a} \cdot \frac{(2\alpha a)^2}{2\mu^2} B_m^2 \frac{3}{2\alpha a} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} = \frac{\alpha^3 Z_v}{6\sqrt{2}\mu^2} (2a)^2 B_m^2 \frac{3}{2\alpha a} \frac{\text{sh } 2\alpha a - \sin 2\alpha a}{\text{ch } 2\alpha a - \cos 2\alpha a} \quad (6.95)$$

a nakon uvrštavanja $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa}$ i $Z_v = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}}$ dobiva se:

$$p_g = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa} \frac{1}{2} \omega \mu \kappa \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}} (2a)^2 B_m^2 \frac{3}{2 \alpha a} \frac{\operatorname{sh} 2 \alpha a - \sin 2 \alpha a}{\operatorname{ch} 2 \alpha a - \cos 2 \alpha a}}{6 \mu^2} \quad (6.96)$$

ili:

$$p_g = \frac{\kappa}{24} \omega^2 (2a)^2 B_m^2 \frac{3}{2 \alpha a} \frac{\operatorname{sh} 2 \alpha a - \sin 2 \alpha a}{\operatorname{ch} 2 \alpha a - \cos 2 \alpha a} \frac{W}{m^3}. \quad (6.97)$$

Ocjena gubitaka u limu za dva krajnja slučaja skin efekta je:

$\alpha a = \frac{a}{d} \ll 1,$	$\alpha a = \frac{a}{d} \gg 1, \text{ jako izražen skin efekt}$
$p_g \cong \frac{\kappa}{24} \omega^2 (2a)^2 B_m^2$ $B_m \cong B_o$	$p_g \cong \frac{\kappa}{4} a \omega^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \kappa}} B_m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2 \mu}} a \omega^{\frac{3}{2}} B_m^2.$

6.3 SKIN EFEKT OKRUGLOG VODIČA

U okruglom vodiču polumjera R_0 postoji centralno simetrično polje. Veličine polja ovise samo o polumjeru r , [11]. Električno polje i gustoća struje u vodiču imaju samo aksijalnu komponentu, a magnetsko polje samo tangencijalnu. Stoga je pogodno koristiti cilindrični koordinatni sustav. Uvodi se veličina:

$$\underline{k}^2 = -\underline{\gamma}^2 = -[(1+j)\alpha]^2 = -2j\alpha^2 = -2j\frac{\omega\mu\kappa}{2} = -j\omega\mu\kappa, \quad (6.98)$$

$$\underline{k} = (1-j)\alpha.$$

Kao što je već poznato jakost magnetskog polja ima tangencijalnu komponentu (α) koja je ovisna o udaljenosti od središta r : $\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{a}}_\alpha \underline{H}(r)$. Na površini vodiča je jakost magnetskog polja:

$$\underline{H}(R_0) = \underline{H}_0 = \frac{I_0}{2\pi R_0}. \quad (6.99)$$

Za slučaj da vodičem teče istosmjerna struja (I) u pozitivnom smjeru osi z (ovdje bi to moglo, na primjer, biti u smjeru iz ravnine papira), a koja je jednaka efektivnoj vrijednosti izmjenične struje ($I_0/\sqrt{2}$) odnosno:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (6.100)$$

otpor vodiča po jedinici duljine za istosmjernu struju je:

$$R_{\text{=}} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{R_0^2 \pi}, \quad (6.101)$$

a djelatni gubici po jedinici duljine su:

$$P_{g\text{=}} = I^2 R_{\text{=}} = \frac{I_0^2}{2} \frac{1}{\kappa R_0^2 \pi}. \quad (6.102)$$

Jakost magnetskog polja unutar vodiča je:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{I_0}{2\sqrt{2}R_0^2\pi} r \underline{\vec{a}}_\alpha, \quad (6.103)$$

a unutarnji induktivitet okruglog vodiča po jedinici duljine poznat je od prije i iznosi: $L_{u\text{=}} = \frac{\mu_0}{8\pi}$.

Za slučaj da vodičem teče sinusna izmjenična struja amplitude I_0 promjena jakosti magnetskog polja u vodiču definirana je rješenjem jednadžbe ravnog vala u cilindričnom koordinatnom sustavu:

$$\Delta \underline{\vec{H}} = \underline{\gamma}^2 \underline{\vec{H}} \quad (6.104)$$

odnosno:

$$\Delta \underline{\bar{H}} = \bar{a}_r \left[\Delta \underline{H}_r - \frac{1}{r^2} \left(\underline{H}_r + 2 \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \alpha} \right) \right] + \bar{a}_\alpha \left[\Delta \underline{H}_\alpha - \frac{1}{r^2} \left(\underline{H}_\alpha - 2 \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \alpha} \right) \right] + \bar{a}_z \Delta \underline{H}_z = \underline{\gamma}^2 \underline{\bar{H}}. \quad (6.104.1)$$

S obzirom da postoji samo komponenta $\underline{\bar{H}}_\alpha(r)$ koja je isključivo ovisna o r pa je i $\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \alpha} = 0$ od gornjeg izraza ostaje:

$$\Delta \underline{\bar{H}} = \bar{a}_\alpha \left(\Delta \underline{H}_\alpha - \frac{1}{r^2} \underline{H}_\alpha \right) = \underline{\gamma}^2 \underline{\bar{H}}_\alpha. \quad (6.105)$$

Dalje je:

$$\Delta \underline{H}_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{H}_\alpha}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \underline{H}_\alpha}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \underline{H}_\alpha}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2 \underline{H}_\alpha}{\partial r^2} \quad (6.106)$$

ili pošto se ovaj izraz uvrsti u prethodni dobiva se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2 \underline{H}_\alpha}{\partial r^2} - \frac{\underline{H}_\alpha}{r^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}_\alpha. \quad (6.107)$$

U daljnjem se razmatranju može izostaviti oznaka α u indeksu polja pa se dobiva Besselova diferencijalna jednadžba:

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{H}}{dr} + \left(-\underline{\gamma}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \underline{H} = 0 \quad (6.108)$$

ili uz već uvedene oznake $\underline{k}^2 = -\underline{\gamma}^2$:

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{H}}{dr} + \left(\underline{k}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \underline{H} = 0. \quad (6.109)$$

Slična se jednadžba dobiva i za jakost električnog polja:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{E}}{dr} + \underline{k}^2 \underline{E} = 0, \quad (6.110)$$

Ovdje će se prvo razriješiti jakost magnetskog polja, a jakost električnog polja dobit će se iz prve Maxwellove jednadžbe ($\underline{\bar{E}} = \frac{\underline{\bar{J}}}{\kappa} = \text{rot } \underline{\bar{H}}$). Naravno da se moglo poći i od diferencijalne jednadžbe za jakost električnog polja (6.110), ali bi se onda, obrnuto iz rješenja za električno polje dobilo rješenje za magnetsko polje sad prema drugoj Maxwellovoj jednadžbi ($\text{rot } \underline{\bar{E}} = -\mu \frac{\partial \underline{\bar{H}}}{\partial t} = -j\omega\mu \underline{\bar{H}} = \frac{k^2}{\kappa} \underline{\bar{H}}$).

Opće rješenje Besselove diferencijalne jednadžbe za magnetsko polje glasi:

$$\underline{H} = \underline{C}_1 J_1(\underline{kr}) + \underline{C}_2 N_1(\underline{kr}). \quad (6.111)$$

$\underline{C}_1$ i $\underline{C}_2$ su nepoznate konstante. $J_1(\underline{kr})$ i $N_1(\underline{kr})$ su Besselove funkcije prve odnosno druge vrste (Neumanova funkcija), prvog reda. Ako argument $\underline{kr}$ teži k nuli funkcija druge vrste $N_1(\underline{kr})$ teži ka beskonačnosti. S obzirom da magnetsko polje u središtu ima konačnu vrijednost to je konstanta $\underline{C}_2 = 0$.

Na sličan je način rješenje jednadžbe za električno polje $\underline{E} = \underline{C}_1 J_0(\underline{kr}) + \underline{C}_2 N_0(\underline{kr})$ gdje su $J_0(\underline{kr})$ i $N_0(\underline{kr})$ Besselove funkcije prve odnosno druge vrste nultog reda.

Besselove funkcije nultog i prvog reda imaju brzo konvergentne redove ($z = \underline{kr}$):

$$\begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots, \\ J_1(z) &= \frac{z}{2} \left[1 - \frac{1}{1! \cdot 2!} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \cdot 3!} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{3! \cdot 4!} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots \right], \end{aligned} \quad (6.112)$$

a za neke velike argumente, to jest za $z \gg 1$ približno iznose:

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \\ J_1(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot z}} \cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Za Besselove funkcije p -tog reda vrijedi pravilo deriviranja:

$$\frac{d}{dz} [J_p(z)] = -\frac{p}{z} J_p(z) + J_{p-1}(z). \quad (6.114)$$

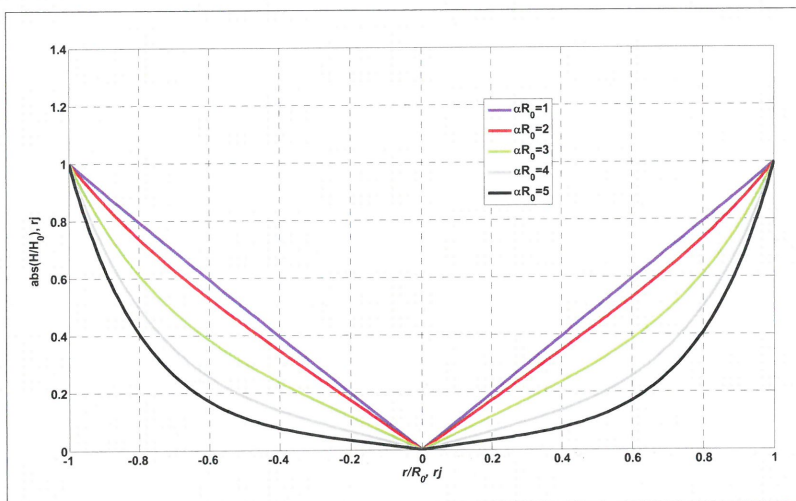
Preostaje da se odredi konstanta $\underline{C}_1$, a iz rubnog uvjeta $\underline{H} = \underline{H}_0$ ($r=R_0$, $z=\underline{k}R_0$) pa je:

$$\underline{C}_1 = \frac{\underline{H}_0}{J_1(\underline{k}R_0)}. \quad (6.115)$$

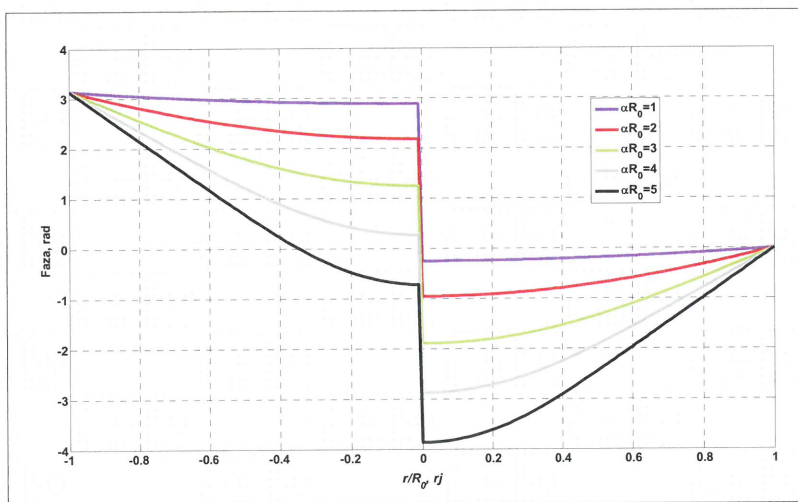
Ova se sad konstanta uvrsti u izraz za jakost magnetskog polja $\underline{H} = \underline{C}_1 J_1(\underline{kr})$ i dobiva se konačno izraz za jakost magnetskog polja:

$$\underline{\bar{H}} = \bar{a}_\alpha \underline{H}_0 \frac{J_1(\underline{kr})}{J_1(\underline{k}R_0)}. \quad (6.116)$$

Za različite vrijednosti parametra αR_0 (od 1 do 5) dobivaju se razdiobe apsolutne vrijednosti jakosti magnetskog polja i njegove faze u ovisnosti kako je prikazano na slikama 6.10 i 6.11.



Slika 6.10 Razdioba apsolutne vrijednosti magnetskog polja (H_y) po relativnom promjeru okruglog vodiča, parametar αR_0



Slika 6.11 Fazni kut magnetskog polja (H_y) po promjeru okruglog vodiča, parametar αR_0

Jakost električnog polja određuje se iz prve Maxwellove jednadžbe primjenom operacije „rotor“ na rješenje za jakost magnetskog polja $\vec{H} = \vec{a}_\alpha H_0 \frac{J_1(kr)}{J_1(kR_0)}$ odnosno:

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}. \quad (6.117)$$

Postoji samo z komponenta *rotora* magnetskog polja ($\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}}_\alpha$, $\frac{\partial \underline{\vec{H}}_r}{\partial \alpha} = 0$):

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\vec{H}}_\alpha) - \frac{\partial \underline{\vec{H}}_r}{\partial \alpha} \right] = \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\vec{H}}_\alpha), \quad (6.118)$$

Jakost električnog polja je:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\vec{J}}}{\kappa} = \frac{\text{rot } \underline{\vec{H}}}{\kappa} = \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{\kappa r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{\vec{H}}). \quad (6.119)$$

Uzevši u obzir da je:

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d(\underline{k}r)} = \frac{d}{\underline{k}dr}, \quad \frac{d}{dr} = \underline{k} \frac{d}{dz} \quad (6.120)$$

primjena gore navedenog pravila (6.114) deriviranja Besselovih funkcija daje:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \frac{\underline{\vec{J}}}{\kappa} = \frac{\text{rot } \underline{\vec{H}}}{\kappa} = \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{\kappa r} \left[H_0 \frac{J_1(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} + r H_0 \frac{\underline{k}}{J_1(\underline{k}R_0)} \left(-\frac{1}{\underline{k}r} J_1(\underline{k}r) + J_0(\underline{k}r) \right) \right] = \\ &= \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{\kappa r} \left[H_0 \frac{J_1(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} - r H_0 \frac{\underline{k} J_1(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0) \underline{k}r} + r H_0 \frac{\underline{k}}{J_1(\underline{k}R_0)} J_0(\underline{k}r) \right] = \underline{\vec{a}}_z \frac{1}{\kappa r} r H_0 \frac{\underline{k}}{J_1(\underline{k}R_0)} J_0(\underline{k}r) \end{aligned} \quad (6.121)$$

ili konačno:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{a}}_z \frac{\underline{k}}{\kappa} H_0 \frac{J_0(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)}. \quad (6.122)$$

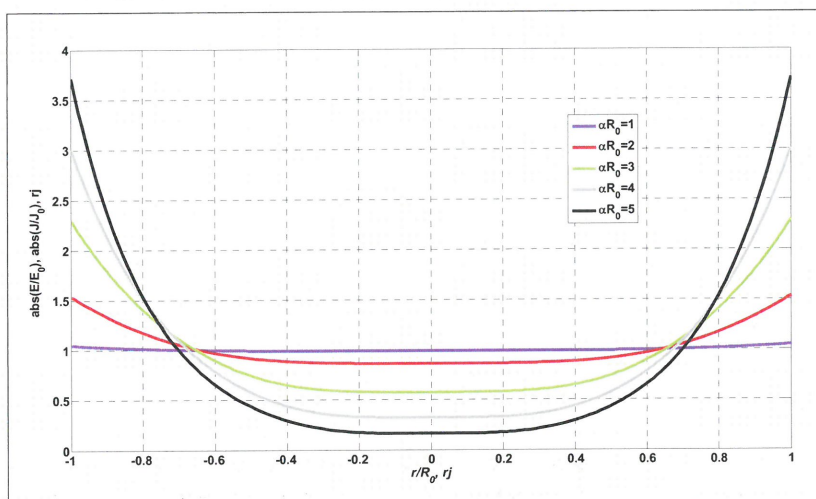
Za različite vrijednosti parametra αR_0 (od 1 do 5) dobivaju se razdiobe jakosti električnog polja i njegove faze kako je prikazano na slikama 6.12 i 6.13. Da bi se pravilno normirala jakost električnog polja odnosno gustoća struje u vodiču u gornji izraz treba uvrstiti $H_0 = \frac{I_0}{2R_0\pi}$ pa se dobiva:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{a}}_z \frac{\underline{k}}{\kappa} \frac{I_0}{2R_0\pi} \frac{R_0}{R_0} \frac{J_0(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} = \frac{1}{2} \frac{\underline{k}R_0}{\kappa} \frac{I_0}{R_0^2\pi} \frac{J_0(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} \underline{\vec{a}}_z = \frac{1}{2} \frac{\underline{k}R_0}{\kappa} J_{00} \frac{J_0(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} \underline{\vec{a}}_z = \frac{\underline{k}R_0}{2} E_0 \frac{J_0(\underline{k}r)}{J_1(\underline{k}R_0)} \underline{\vec{a}}_z, \quad (6.123)$$

gdje je:

$$J_{00} = \frac{I_0}{R_0^2\pi}, \quad E_0 = \frac{J_{00}}{\kappa} \quad (6.124)$$

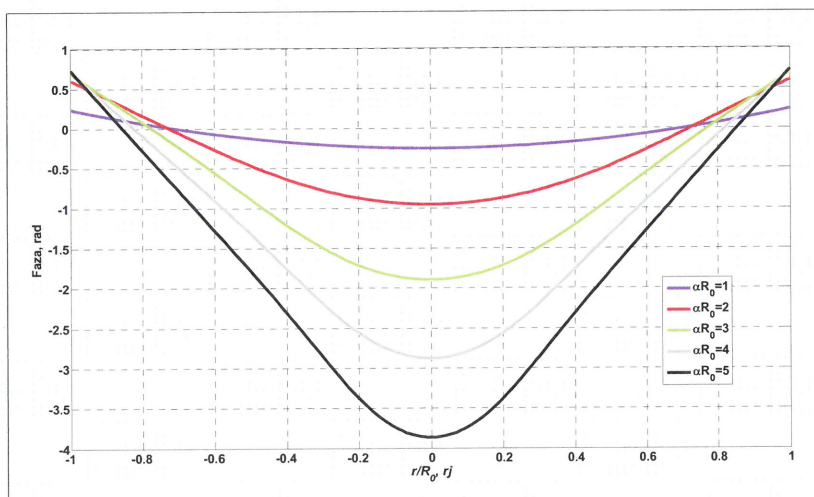
jednolika gustoća struje po presjeku vodiča za istosmjernu struju iznosa I_0 odnosno odgovarajuća jakost električnog polja.



Slika 6.12 Razdioba apsolutne vrijednosti električnog polja odnosno gustoće struje (E_z , J_z) po promjeru okruglog vodiča, parametar αR_0

Preostaje još odrediti kvocijente djelatnog otpora i induktiviteta i istoimenovanih veličina za istosmjernu struju. Kao i u slučaju vodljive ploče krenut će se od gubitaka. Gubici će se odrediti na temelju Poyntingovog vektora primijenjenog na harmonijske veličine (fazore).

Poyntingov je vektor usmjeren prema unutrašnjosti vodiča, a po oplošju vodiča je konstantan.



Slika 6.13 Fazni kut električnog polja odnosno gustoće struje (E_z , J_z) po promjeru okruglog vodiča, parametar αR_0

Integral:

$$W_g = -\frac{1}{2} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \vec{n} dS = \frac{k I_0^2}{4\pi\kappa R_0} \frac{J_0(kR_0)}{J_1(kR_0)} \quad (6.125)$$

se računa po oplošju S ($2R_0\pi l$).

Djelatni gubici po jedinici duljine su:

$$P_{g\approx} = \Re e \left(-\frac{1}{2l} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \vec{n} dS \right) = \frac{I_0^2}{4\pi\kappa R_0} \Re e \left(k \frac{J_0(kR_0)}{J_1(kR_0)} \right). \quad (6.126)$$

Kvocijent gubitaka za izmjeničnu i istosmjernu struju je:

$$k_R = \frac{P_{g\approx}}{P_{g=}} = \frac{\frac{I_0^2 R_0}{4R_0 R_0 \pi \kappa} \Re e \left(k \frac{J_0(kR_0)}{J_1(kR_0)} \right)}{\frac{I_0^2}{2R_0^2 \pi \kappa}} = \frac{\alpha R_0}{2} \Re e \left[(1-j) \frac{J_0((1-j)\alpha R_0)}{J_1((1-j)\alpha R_0)} \right]. \quad (6.127)$$

Magnetska energija po jedinici duljine jednaka je imaginarnom dijelu integrala kompleksnog Poyntingovog vektora po oplošju S ($2R_0\pi l$) (za harmonijske veličine je: $j\omega \leftarrow d/dt$, a također je zanemarena prostorna gustoća energije električnog polja u vodiču u odnosu na prostornu gustoću magnetske energije, [11], točka 9.3):

$$W_{m\approx} = \Im m \left(-\frac{1}{4\omega l} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \vec{n} dS \right) = \frac{I_0^2}{8\pi\omega\kappa R_0} \Im m \left(k \frac{J_0(kR_0)}{J_1(kR_0)} \right). \quad (6.128)$$

S druge je strane magnetska energija:

$$W_{m\approx} = \frac{1}{2} L_{u\approx} \frac{I_0^2}{2} \quad (6.129)$$

pa je unutarnji induktivitet:

$$L_{u\approx} = \frac{1}{2\pi\omega\kappa R_0} \Im m \left[k \frac{J_0(kR_0)}{J_1(kR_0)} \right]. \quad (6.130)$$

Kvocijent ovako izračunatog induktiviteta i induktiviteta za istosmjernu struju je:

$$k_L = \frac{L_{u\approx}}{L_{u=}} = \frac{\frac{\alpha}{2\pi\omega\kappa R_0} \Im m \left[(1-j) \frac{J_0((1-j)\alpha R_0)}{J_1((1-j)\alpha R_0)} \right]}{\frac{\mu_0}{8\pi}}. \quad (6.131)$$

Faktor ispred znaka $\Im m(\dots)$ je:

$$\frac{8\alpha\pi}{2\pi\omega\kappa R_0\mu_0} = \frac{4\alpha}{\omega\kappa R_0\mu_0} = \frac{2\alpha}{R_0(\omega\kappa\mu_0)/2} = \frac{2\alpha}{R_0\alpha^2} = \frac{2}{R_0\alpha}. \quad (6.132)$$

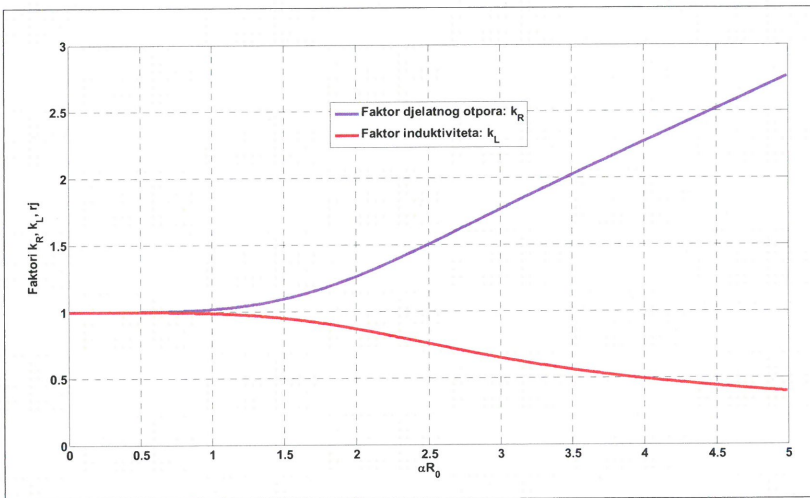
Konačno je:

$$k_L = \frac{L_{u\approx}}{L_{u=}} = \frac{2}{\alpha R_0} \Im m \left[(1-j) \frac{J_0((1-j)\alpha R_0)}{J_1((1-j)\alpha R_0)} \right]. \quad (6.133)$$

Za vrlo izražen skin efekt: $\alpha R_0 = \frac{R_0}{d} \gg 1$ faktor (povećanja prema onom za istosmjernu struju)

djelatnog otpora za izmjeničnu struju približno je $k_R \cong \frac{\alpha R_0}{2}$. Faktor (smanjenja prema onom za

istosmjernu struju) induktiviteta približno je $k_L \cong \frac{2}{\alpha R_0}$ što se može uočiti i sa slike 6.14.



Slika 6.14 Ovisnost faktora djelatnog otpora k_R i induktiviteta k_L o αR_0

7 HERTZOV DIPOL

Električni dipol, kojem se mijenja iznos dipolnog momenta s vremenom u neograničenom prostoru zove se Hertzov dipol. Dakle, Hertzov dipol je dinamički električni dipol i najjednostavniji je zračeći element. To je u biti tanki ravni vodič (žica) i kratak da se razdioba struje po njegovoj duljini može smatrati jednolikom. Izvor promjenjive elektromotorne sile priključuje se približno na sredini vodiča (slika 7.1). Vodič je za izvor trošilo. Izučavanjem Hertzovog dipola se postavlja prvi put dosad način nastanka elektromagnetskih valova proizvedenih pretpostavljenim razdiobama naboja i struja u slobodnom i neograničenom prostoru.

Prema već poznatoj definiciji je:

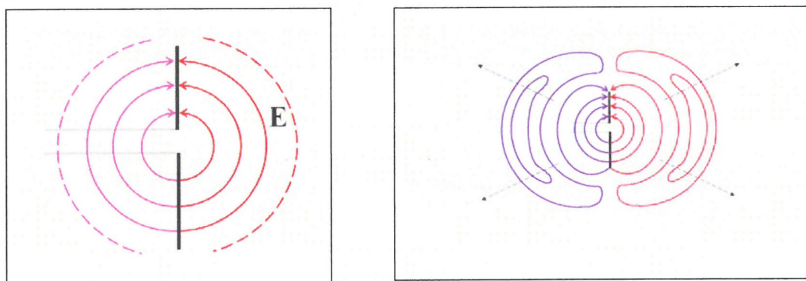
$$\vec{p} = q\vec{a} \quad (7.1)$$

je dipolni moment, a vremenski promjenjivi električni dipol je:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} \vec{a} = i\vec{a}, \quad (7.2)$$

a razmak negativnog i pozitivnog naboja a prema već izloženom može se smatrati da je diferencijalne veličine.

Slika električnog polja za slučaj kad se dipol napoji iz istosmjernog izvora (frekvencija nula) dana je na slici 7.1, lijevo, [31]. Za slučaj izmjeničnog napajanja oscilacije struje duž vodiča proizvode polje koje se također mijenja u istom ritmu te se širi dalje od dipola, a silnice električnog polja zatvorene su linije (slika 7.1, desno).



Slika 7.1 Hertzov dipol – slika električnog polja dipola pri istosmjernom, lijevo i pri izmjeničnom napajanju, desno

U sljedećem dijelu teksta dat će se matematički model Hertzovog dipola pomoću kojeg je donekle točno moguće opisati mehanizam zračenja elektromagnetskog vala.

Već je ranije u poglavlju o elektromagnetskim potencijalima, a posebice Hertzovom vektoru odnosno potencijalu (5.4.3) utvrđeno da bi Hertzov vektor bio: $\vec{H} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon r}$, ali uzimajući u obzir da je sad dipolni moment $\vec{p} = q\vec{a}$ dinamička veličina. Mogao bi se prema istom poglavlju odmah računati magnetski vektorski potencijal, [3], [17]:

$$\vec{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon r} \right) \quad (7.3)$$

što u slobodnom linearnom, izotropnom i homogenom sredstvu daje izraz:

$$\vec{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi r} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}. \quad (7.4)$$

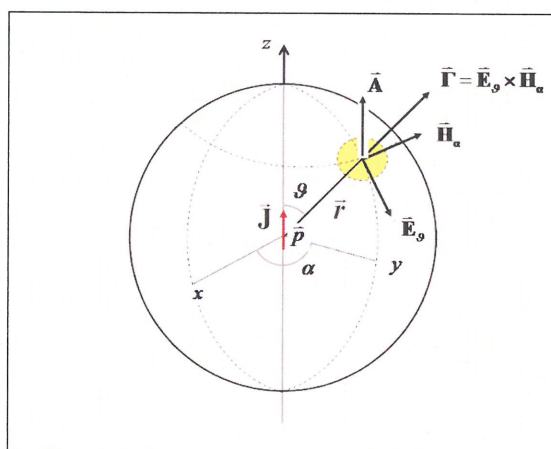
S druge strane, neovisno o razmatranjima Hertzovog vektora, može se krenuti od poznatog izraza za magnetski vektorski potencijal:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_s \frac{id\vec{s}}{|\vec{R}|} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_s \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.5)$$

U ovom je kontekstu nevažna pozicija dipola pa će se postaviti u ishodište u smjeru osi z : (slika 7.2) pa je:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_s \frac{id\vec{s}}{|\vec{R}|} = \frac{\mu}{4\pi r} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{A}_z \quad (7.6)$$

što je već dobiveno i iz definicije Hertzovog vektora. Daljnja razmatranja o Hertzovom dipolu mogu teći na sljedeći način.



Slika 7.2 Hertzov dipol – oznake veličina u kuglinim koordinatama

S obzirom da je električni dipol u ishodištu u smjeru osi z , tad su ostale dvije komponente jednake nuli:

$\vec{A}_x = \vec{A}_y = 0$ te će se izostaviti vektorska oznaka magnetskog vektorskog potencijala pa je uz oznake:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p', \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = p'' \quad (7.7)$$

magnetski vektorski potencijal A_z :

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi r} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi r} p'. \quad (7.8)$$

Skalarni potencijal slijedi iz Lorentzovog uvjeta koji je u vezi je s Lorentzovim baždarenjem odnosno jednačbom kontinuiteta, a prema izrazu 5.66 ($\text{div} \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$), odnosno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{\mu c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{r} \right) = -\frac{\mu c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z}. \quad (7.9)$$

Sad se ovdje treba uzeti u obzir kašnjenje („retardiranje“) potencijala. Prvo treba izračunati $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{r} \right)$.

Činjenica da se propagacija veličine $p(t)$ iz ishodišta očekuje na mjestu $\vec{r}$ nakon vremena r/c zapisat će se u obliku: $p(\vec{r}) = p\left(t - \frac{r}{c}\right)$.

Odavde je:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial(t-r/c)} \frac{\partial(t-r/c)}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial(t-r/c)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p'(t-r/c)}{c} = -\frac{p'}{c}, \quad (7.10)$$

odnosno:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p'}{c}, \quad (7.11)$$

a druga vremenska derivacija izvodi se na sličan način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{p'}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial(t-r/c)}{\partial r} = \frac{p''}{c^2}, \\ \frac{\partial p'}{\partial r} &= -\frac{p''}{c}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Prema tome je $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{r} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{r} \right) = \frac{\frac{\partial p'}{\partial r} r - p'}{r^2} = -\frac{p''}{rc} - \frac{p'}{r^2}, \quad (7.13)$$

a električni skalarni potencijal φ je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu c^2}{4\pi} \left(\frac{p''}{rc} + \frac{p'}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial z}. \quad (7.14)$$

U kuglinim je koordinatama:

- $z = r \cos \vartheta$
- $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ odakle je:

$$2r \frac{\partial r}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \vartheta. \quad (7.15)$$

Konačno je vremenska derivacija skalarnog električnog potencijala:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = + \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \left(\frac{p''}{rc} + \frac{p'}{r^2} \right) \cos \vartheta, \quad (7.16)$$

a poslije jedne vremenske integracije dobiva se potencijal s neodređenošću do izvjesne konstante:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \cos \vartheta. \quad (7.17)$$

Neka se na trenutak zapazi da iz ove jednadžbe uz $p' = 0$ (stacionarno stanje) slijedi izraz za elektrostatički potencijal dipola koji je već prije bio definiran.

Koristeći (7.8) komponente magnetskog vektorskog potencijala u kuglinim koordinatama su:

$$A_r = A_z \cos \vartheta = \frac{\mu p'}{4\pi r} \cos \vartheta, \quad (7.18)$$

ne ovisi o azimutalnom kutu α ,

$$A_\vartheta = -A_z \sin \vartheta = -\frac{\mu p'}{4\pi r} \sin \vartheta, \quad (7.19)$$

također ne ovisi o azimutalnom kutu α te:

$$A_\alpha = 0. \quad (7.20)$$

Jakosti magnetskog i električnog polja mogu se odrediti iz definicijskih jednadžbi preko magnetskog vektorskog potencijala (točka 5.4):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}, \quad (7.21)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (7.22)$$

Pojedine komponente jakosti magnetskog polja ($H_r, H_\vartheta, H_\alpha$) su redom:

- radijalna:

$$H_r = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \vec{a}_r = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta A_\alpha)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] = 0, \quad (7.23)$$

- tangencijalna (meridijalna):

$$H_{\vartheta} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \vec{a}_{\vartheta} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r A_{\alpha})}{\partial r} \right] = 0, \quad (7.24)$$

- azimutalna:

$$H_{\alpha} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \vec{a}_{\alpha} = \frac{1}{\mu r} \left[\frac{\partial (r A_{\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu p' \sin \vartheta}{4\pi} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\mu p'}{4\pi r} \cos \vartheta \right], \quad (7.25)$$

ili:

$$H_{\alpha} = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{p''}{c} + \frac{p'}{r} \right] \sin \vartheta. \quad (7.26)$$

Prema definicijskoj jednačbi jakost električnog polja je:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu p'}{4\pi r} \vec{a}_z - \left(\vec{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{a}_{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{a}_{\alpha} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left[\frac{1}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \cos \vartheta \right] \\ &= -\frac{\mu p''}{4\pi r} \cos \vartheta \vec{a}_z + \frac{\mu p'}{4\pi r} \sin \vartheta \vec{a}_{\alpha} - \left(\vec{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{a}_{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{a}_{\alpha} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left[\frac{1}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \cos \vartheta \right] \end{aligned} \quad (7.27)$$

Odatle su pojedine komponente jakosti električnog polja ($E_r, E_{\vartheta}, E_{\alpha}$):

- radijalna:

$$E_r = -\frac{\mu p''}{4\pi r} \cos \vartheta - \frac{1}{4\pi \varepsilon} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) = -\frac{\mu p''}{4\pi r} \cos \vartheta - \frac{1}{4\pi \varepsilon} \cos \vartheta \left(-\frac{p''}{rc^2} - \frac{p'}{r^2 c} - \frac{p'}{r^2 c} - 2 \frac{p}{r^3} \right) \quad (7.28)$$

$$E_r = -\underbrace{\frac{\mu p''}{4\pi r} \cos \vartheta + \frac{p''}{4\pi \varepsilon c^2} \cos \vartheta}_0 + \frac{1}{2\pi \varepsilon r^2} \left(\frac{p'}{c} + \frac{p}{r} \right) \cos \vartheta, \quad (7.29)$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi \varepsilon r^2} \left(\frac{p'}{c} + \frac{p}{r} \right) \cos \vartheta. \quad (7.30)$$

- tangencijalna (meridijalna):

$$E_{\vartheta} = +\frac{\mu p''}{4\pi r} \sin \vartheta + \frac{1}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \frac{1}{r} \sin \vartheta, \quad (7.31)$$

$$E_{\vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \left(\frac{p''}{c^2} + \frac{p'}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \sin \vartheta, \quad (7.32)$$

- azimutalna:

$$E_{\alpha} = 0. \quad (7.33)$$

Treba napomenuti da je običaj da se r - komponenta zove još i radijalna komponenta, ϑ - komponenta – tangencijalna, a α - komponenta – azimutalna.

Dakle može se ustvrditi da će kod Hertzovog dipola postojati samo azimutalna komponenta magnetskog polja (kao paralele na kugli) te radijalna i tangencijalna komponenta električnog polja (u meridijalnoj ravnini). Oba su polja su međusobno prostorno okomita.

Da bi se dobio pregledniji uvid u veličinske odnose, najbolje je primijeniti izvedene jednadžbe na harmonijski dipol, u kojemu se naboj mijenja po zakonu sinusa s kružnom frekvencijom ω .

U simboličkom načinu pisanja $\underline{p} = \underline{p}_0 e^{j\omega t}$, postoji odnos $\underline{p}' = j\omega \underline{p}$, $\underline{p}'' = -\omega^2 \underline{p}$.

Jednadžbe polja prema izrazima (7.26), (7.30) i (7.32) sad glase:

$$\underline{H}_{\alpha} = \frac{\omega}{4\pi r} \underline{p} \left(-\frac{\omega}{c} + j\frac{1}{r} \right) \sin \vartheta, \quad (7.34)$$

$$\underline{E}_r = \frac{1}{2\pi\epsilon r} \underline{p} \left(\frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) \cos \vartheta, \quad (7.35)$$

$$\underline{E}_{\vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \underline{p} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta. \quad (7.36)$$

Svaka se komponenta sastoji od nekoliko pribrojnika čiji se iznosi međusobno mogu uspoređivati. Označe li se komponente magnetskog polja na sljedeći način:

$$\underline{H}_{\alpha 1} = \frac{\omega^2 \underline{p}}{4\pi rc} \sin \vartheta \text{ i } \underline{H}_{\alpha 2} = \frac{\omega \underline{p}}{4\pi r^2} \sin \vartheta, \quad (7.37)$$

tad je:

$$\underline{H}_{\alpha} = -\underline{H}_{\alpha 1} + j\underline{H}_{\alpha 2}, \quad (7.38)$$

a njihov je kvocijent:

$$\frac{\underline{H}_{\alpha 2}}{\underline{H}_{\alpha 1}} = \frac{c}{r\omega}. \quad (7.39)$$

Komponenta $\underline{H}_{\alpha 2}$ se može zanemariti prema $\underline{H}_{\alpha 1}$, kad je $\frac{c}{r\omega} \ll 1$, odnosno kad je:

$$r \gg \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda f}{2\pi f} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (7.40)$$

pri čemu je:

$$\lambda f = c. \quad (7.41)$$

Ovdje je još $\lambda = \frac{c}{f}$ duljina vala koja odgovara frekvenciji f . S druge strane za $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ može se zanemariti komponenta $\underline{H}_{\alpha 1}$, a ostaje samo kvazistacionarno polje.

Komponente električnog polja su:

- radialne:

$$\underline{E}_{r1} = \frac{\omega p}{2\pi \epsilon r^3 c} \cos \vartheta, \quad \underline{E}_{r2} = \frac{p}{2\pi \epsilon r^3} \cos \vartheta, \quad \underline{E}_r = j\underline{E}_{r1} + \underline{E}_{r2}, \quad (7.42)$$

i:

- tangencijalne:

$$\underline{E}_{\vartheta 1} = \frac{\omega^2 p}{4\pi \epsilon r c^2} \sin \vartheta, \quad \underline{E}_{\vartheta 2} = \frac{\omega p}{4\pi \epsilon r^2 c} \sin \vartheta, \quad \underline{E}_{\vartheta 3} = \frac{p}{4\pi \epsilon r^3} \sin \vartheta, \quad \underline{E}_\vartheta = -\underline{E}_{\vartheta 1} + \underline{E}_{\vartheta 3} + j\underline{E}_{\vartheta 2}. \quad (7.43)$$

Ako se uzme mjerodavnim kvocijent svih ostalih komponenti prema $\underline{E}_{\vartheta 1}$, dobiva se da je opet važan kvocijent $\frac{c}{r\omega}$.

Čim taj kvocijent postaje manji od 1 (ili $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$), mogu se zanemariti sve ostale komponente u odnosu na $\underline{E}_{\vartheta 1}$. I obrnuto, kad je $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$, električno se polje svodi na statičko (kvazistacionarno), te preostaju komponente $\underline{E}_{\vartheta 2}$ i $\underline{E}_{\vartheta 3}$ te $\underline{E}_{r1}$ i $\underline{E}_{r2}$. Tako su ti kvocijenti:

$$\frac{\underline{E}_{r1}}{\underline{E}_{\vartheta 1}} = \frac{2c}{r\omega} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \frac{\underline{E}_{r2}}{\underline{E}_{\vartheta 1}} = \frac{2c^2}{r^2 \omega^2} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (7.44)$$

$$\frac{\underline{E}_{\vartheta 2}}{\underline{E}_{\vartheta 1}} = \frac{c}{r\omega}, \quad \frac{\underline{E}_{\vartheta 3}}{\underline{E}_{\vartheta 1}} = \frac{c^2}{r^2 \omega^2}. \quad (7.45)$$

Za elektromagnetsko polje Hertzovog dipola zanimljiv je samo slučaj za udaljenosti $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, kad su iznosi magnetskog i električnog polja približno:

$$\bullet \quad H_\alpha \cong \frac{p''}{4\pi r c} \sin \vartheta, \quad (-\underline{H}_{\alpha 1} = -\frac{\omega^2 p}{4\pi r c} \sin \vartheta \text{ za harmonijsko polje}), \quad (7.46)$$

$$\bullet \quad E_\vartheta \cong \frac{p''}{4\pi \epsilon r c^2} \sin \vartheta, \quad (-\underline{E}_{\vartheta 1} = -\frac{\omega^2 p}{4\pi \epsilon r c^2} \sin \vartheta \text{ za harmonijsko polje}). \quad (7.47)$$

Na velikim udaljenostima od dipola preostaju samo azimutalna komponenta magnetskog polja i tangencijalna komponenta električnog polja koje su međusobno okomite i okomite na smjer širenja vala u smjeru radijus vektora, dakle preostaje tipični kuglasti val. Brzina širenja vala u smjeru radijus vektora opet iznosi c , jer je uzeto da je $p = p\left(t - \frac{r}{c}\right)$, a valni otpor širenju vala iznosi:

$$\frac{E_g}{H_\alpha} = \frac{1}{\varepsilon c} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (7.48)$$

kao i za ravni val. Silnice polja su postavljene kao paralele i meridijani na kugli. To se područje polja zove emisijska zona.

Harmonijski dipol na velikim udaljenostima ima efektivne jakosti magnetskog i električnog polja:

$$H_{\text{ef}} = \frac{\omega^2 p_{\text{ef}}}{4\pi r c} \sin \vartheta, \quad (7.49)$$

$$E_{\text{ef}} = \frac{\omega^2 p_{\text{ef}}}{4\pi \varepsilon r c^2} \sin \vartheta. \quad (7.50)$$

Karakteristično je za ovo dinamičko polje da opada razmjerno s udaljenošću r . Polje statičkog dipola opada s trećom potencijom udaljenosti r^3 . Longitudinalna komponenta polja postoji samo u neposrednoj blizini dipola, a naročito u njegovu smjeru, gdje uopće nema transverzalne komponente. Ona je mjerodavna za razdiobu naboja na dipolu.

7.1 ENERGIJA ISIJAVANJA

Neka se promotri Hertzov električni dipol, s obzirom da se polje magnetskog dipola bitno ne razlikuje. Ovdje će sad dobro poslužiti Poyntingov vektor. Odmah se može eliminirati radijalna komponenta električnog polja, jer ona s azimutalnom komponentom (a to je jedina komponenta) magnetskog polja daje tangencijalnu komponentu Poyntingovog vektora, dakle predstavlja kruženje energije oko dipola, a ne doprinosi isijavanju energije u prostor.

Prema tome preostaje samo tangencijalna komponenta električnog polja. Ona s azimutalnom komponentom magnetskog polja daje radijalnu komponentu Poyntingovog vektora. Ta je komponenta:

$$\Gamma_r = E_g H_\alpha = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon r^2} \left(\frac{p'^2}{c^3} + 2 \frac{p' p''}{r c^2} + \frac{p p'^2 + p'^2}{r^2 c} + \frac{p p'}{r^3} \right) \sin^2 \vartheta, \quad (7.51)$$

a dobivena je množenjem:

- tangencijalne komponente električnog poja:

$$E_g = \frac{1}{4\pi \varepsilon r} \left(\frac{p''}{c^2} + \frac{p'}{r c} + \frac{p}{r^2} \right) \sin \vartheta, \quad (7.52)$$

i:

- azimutalne komponente magnetskog polja:

$$H_\alpha = \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{p''}{c} + \frac{p'}{r} \right) \sin \vartheta. \quad (7.53)$$

Radijalna komponenta Poyntingovog vektora (7.51) ima četiri pribrojnika, od kojih je samo prvi uvijek istog predznaka s obzirom da je prvi pribrojnik kvadrat. Za harmonijski dipol ostala su tri člana čiste periodične funkcije, te ne doprinose strujanju energije već zapravo znače titranje energije. Dakle, iznos Poyntingovog vektora je:

$$\Gamma_r = \frac{p'^2 \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \epsilon r^2 c^3} = \frac{A}{2\pi r^2} \sin^2 \vartheta, \quad (7.54)$$

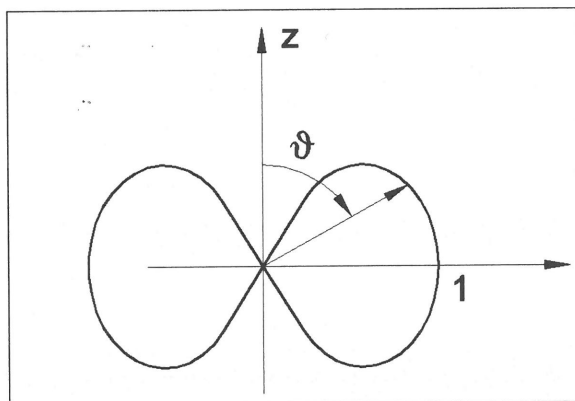
gdje je s A označeno:

$$A = \frac{p'^2}{8\pi \epsilon c^3}. \quad (7.55)$$

Dijagram $\Gamma_r = \Gamma_r(\vartheta)$ za neki određeni kvocijent $\frac{A}{2\pi r^2}$ zove se emisijski dijagram, a za Hertzov dipol prikazan je na slici 7.3.

Pomoću Poyntingovog vektora dolazi se do izraza za emisijsku snagu dipola kao njegova integrala po zatvorenoj plohi (element površine je: $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$):

$$P = \oint_S \vec{\Gamma} d\vec{S} = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha = A \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = A \int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta)(-d \cos \vartheta), \quad (7.56)$$



Slika 7.3 Emisijski dijagram Hertzovog dipola

$$P = A \left(-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) \Big|_0^\pi = A \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} A \quad (7.57)$$

ili nakon uvrštenja izraza za A :

$$P = \frac{p'^2}{6\pi \epsilon c^3}. \quad (7.58)$$

Za slučaj harmonijskog dipola iznosila bi srednja snaga:

$$P = \frac{\omega^4 p_{ef}^2}{6\pi\epsilon c^3}. \quad (7.59)$$

Emisijska snaga raste vrlo brzo s porastom frekvencije. Daljnja razrada snage ovisit će o praktičnoj realizaciji dipola. Ako ga se zamisli kao kondenzator razmaka elektroda a (to mogu biti dvije kugle ili dvije ploče kao na slici 7.1 iz uvoda u ovu točku) na koje je priključen napon frekvencije ω , teći će struja određena impedancijom kruga. Iznos naboja će se mijenjati s frekvencijom ω , a njegova će efektivna vrijednost biti:

$$Q_{ef} = \frac{I}{\omega}. \quad (7.60)$$

Efektivna vrijednost dipolnog momenta će biti:

$$p_{ef} = Q_{ef} a = \frac{I \ddot{a}}{\omega}. \quad (7.61)$$

Uz:

$$Z_{vo} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ i } c = \lambda f \quad (7.62)$$

emisijaska snaga Hertzovog dipola poslije uvrštenja (7.61, $p_{ef} = \frac{I \ddot{a}}{\omega}$) u izraz (7.59) te zamjene

$$c^3 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} (\lambda f)^2 \quad (7.63)$$

iznosi:

$$P = \frac{\omega^4 I^2 a^2 \sqrt{\mu\epsilon}}{\omega^2 6\pi\epsilon (\lambda f)^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{6\pi f^2} Z_{vo} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 I^2 = \frac{2\pi}{3} Z_{vo} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 I^2. \quad (7.64)$$

Ta je snaga jednako oblikovana kao i snaga utrošena na nekom djelatnom otporu kojim protječe struja efektivnog iznosa I :

$$P = R_{isH} I^2 \quad (7.65)$$

pa kad se to usporedi s izrazom (7.64) dobiva se izraz za otpor isijavanja:

$$R_{isH} = \frac{2\pi}{3} Z_{vo} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (7.66)$$

R_{isH} je otpor, koji predstavlja energiju isijanu u prostor nepovratno.

On se zove otpor isijavanja, u ovom slučaju Hertzovog dipola. On ovisi o valnom otporu prostora te o valnoj duljini i dimenzijama dipola. Veliki značaj ima međusobni razmak a između naboja, odnosno elektroda. Izvedene jednačbe vrijede uz uvjet da je duljina dipola mnogo manja od valne duljine: $a \ll \lambda$.

Tako na primjer, valnom otporu vakuuma $Z_{v0} \cong 377\Omega$, duljini vala $\lambda = 10m$ te razmaku naboja dipola $0.5m$ odgovara otpor isijavanja $R_{isH} \cong 1.97\Omega$.

Za ocjenu emisije dipola značajni su u prvom redu emisijski dijagram i otpor isijavanja.

7.2 ŠTAPNA ANTENA

Ako ravnim vodičem ograničene duljine teče struja, on pobuđuje elektromagnetsko polje u okolnom prostoru, (slika 7.4). Po njemu struja može biti i nejednoliko raspodijeljena, a uz to i vremenski promjenljiva. U njegovom dužinskom elementu dz' postoji naboj dQ koji duljinu dz' prođe brzinom v .

$$dQ = \lambda dz', \lambda = \frac{dQ}{dz'}, \quad (7.67)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dz'} \frac{dz'}{dt} = \frac{dQ}{dz'} v = \lambda v = i_z, \quad (7.68)$$

ili:

$$dQv = i_z dz' = p' \quad (7.69)$$

što se izvodi prema definiciji električnog dipolnog momenta p i njegove prve vremenske derivacije p' :

$$p = qa, \quad p' = \frac{dq}{dt} a = ai. \quad (7.70)$$

Struja u štapu općenito iznosi:

$$i = f(z') \cos(\omega t + \varphi), \quad (7.71)$$

gdje se s funkcijom $f(z')$ uzima u obzir razdiobu struje u trenutku $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ na duljini z' .

U ovom razmatranju treba uzeti u obzir kašnjenje („retardaciju“) struje, pa je:

$$i = f(z') \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) + \varphi \right]. \quad (7.72)$$

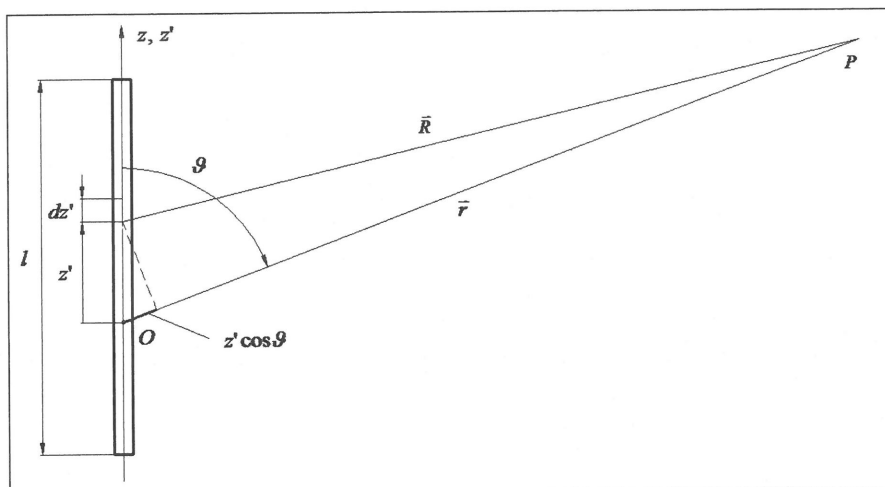
Dalje je:

$$p' = idz' = f(z') \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) + \varphi \right] dz'. \quad (7.73)$$

Radi lakšeg računa može se upotrijebiti simbolički način prikazivanja za harmonijsko polje, pa je:

$$\underline{p'} = f(z') e^{j\omega \left(t - \frac{R}{c} \right)} dz', \quad (7.74)$$

$$\underline{p''} = j\omega f(z') e^{j\omega \left(t - \frac{R}{c} \right)} dz'. \quad (7.75)$$



Slika 7.4 Štapna antena

Prema jednačbi za jakost električnog polja električnog dipola izraz:

$$dE_{\theta} \cong \frac{p''}{4\pi\epsilon c^2 R} \sin \theta \quad (7.76)$$

vrijedi kao dobro približenje za električno polje na velikim udaljenostima od štapne antene.

Također dalje, iz geometrijskih odnosa vrijedi:

$$R \sin \theta \cong r \sin \varphi, \quad R \cong r - z' \cos \theta. \quad (7.77)$$

Pošto se (7.75), $p'' = j\omega f(z')e^{j\omega(t-\frac{R}{c})}dz'$ uvrsti u izraz za jakost električnog polja (7.76) i primijeni integracija po cijeloj duljini štapa dobiva se:

$$\underline{E}_{\theta} \cong \frac{j\omega \sin \theta}{4\pi\epsilon c^2 r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} e^{j\varphi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{j\omega\frac{z'}{c}\cos\theta} f(z') dz'. \quad (7.78)$$

Kao što je već poznato, magnetsko se polje dobiva iz kvocijenta električnog i magnetskog polja odnosno putem valnog otpora $\frac{E_{\theta}}{H_{\alpha}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ako se polje promatra u sredstvu bez gubitaka (na primjer vakuum ili zrak). Kao što se vidi za konačno rješenje polja, potrebno je poznavati razdiobu struje po vodiču odnosno funkciju $f(z')$. Na razdiobu struje u vodiču utječe oblik vodiča i način njegova napajanja. Isijavanje energije nepovratno u okolni prostor odražava se kao povećanje otpora vodiča, odnosno povećanje njegovih gubitaka.

To ima za posljedicu prigušenje amplitude struje duž vodiča, dakle konačno utječe i na razdiobu struje, pa bi se morali popraviti iznosi polja. Potpuno egzaktno rješenje problema traži metodu postupnog rješavanja. U mnogo slučajeva ne treba voditi o tom računa, kao kod svih vodiča koji svojom dužinom ne prelaze duljinu vala.

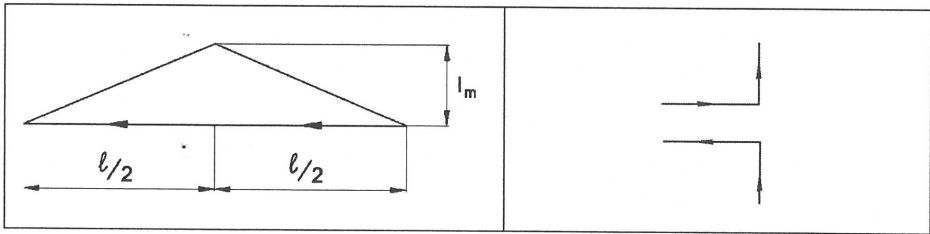
Faktor u eksponentu dijela podintegralne funkcije u (7.78) $\omega \frac{z'}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} z' = \frac{2\pi}{\lambda} z$ je malen ako je duljina vodiča mala prema duljini vala $l \ll \lambda$ to jest odgovarajući je eksponent jednak nuli, a cijeli eksponencijalni član podintegralne funkcije približno je jednak jedinici:

$$e^{j\omega \frac{z'}{c} \cos \vartheta} \approx 1. \quad (7.79)$$

Tad se jednadžba za jakost električnog polja pojednostavljuje i postaje:

$$\underline{E}_\vartheta \cong \frac{j\omega \sin \vartheta}{4\pi\epsilon c^2 r} e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j\varphi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(z') dz' \quad (7.80)$$

pa integral predstavlja površinu u dijagramu razdiobe struje ovisno o duljini vala.



Slika 7.5 Trokutasta razdioba struje po duljini dipola

U slučaju trokutaste razdiobe struje (slika 7.5), koja se javlja pri $l \ll \lambda$ i napajanju strujom u sredini vodiča, površina ispod funkcije razdiobe struje po duljini štapa iznosi $\frac{I_m l}{2}$, te je jakost električnog polja:

$$E_\vartheta = -\frac{\omega l \sin \vartheta}{8\pi\epsilon c^2 r} I_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right]. \quad (7.81)$$

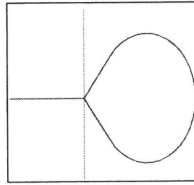
Iz E_ϑ se može izračunati H_a . Isijana je energija proporcionalna kvadratu polja, pa je kvocijent kvadrata polja štapne antene s trokutastom razdiobom struje i kvadrata polja Hertzovog dipola ($I = I_m / \sqrt{2}$):

$$\left(\frac{\frac{\omega l \sin \vartheta}{8\pi\epsilon c^2 r} \frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{\sin \vartheta}{4\pi\epsilon c^2 r} \omega^2 \frac{Ia}{\omega}} \right)^2 = \left(\frac{l}{2a} \right)^2. \quad (7.82)$$

Otpor štapne antene je, dakle:

$$R_{is\alpha} = R_{isH} \left(\frac{l}{2a} \right)^2 = \frac{2\pi}{3} Z_{vo} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{l}{2a} \right)^2 = \frac{\pi}{6} Z_{vo} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (7.83)$$

Oblik emisijskog dijagrama se uopće ne mijenja prema emisijskom dijagramu Hertzovog dipola, samo je otpor veći (a s tim i snaga), (slika 7.6).



Slika 7.6 Emisijski dijagram štapne antene istog je oblika kao i emisijski dijagram Hertzovog dipola

Poseban slučaj predstavlja sinusna razdioba struje po vodiču pri čemu je duljina vodiča (l) mnogokratnik duljine poluvale $\lambda/2$, odnosno:

$$l = m \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{2l}{m}, \quad m = \frac{2l}{\lambda}. \quad (7.84)$$

Tad je funkcija razdiobe struje:

$$f(z') = I_m \sin\left(2\pi \frac{z'}{\lambda} - \alpha\right). \quad (7.85)$$

Kut α dobiva se iz uvjeta da je struja na krajevima vodiča nula:

$$f\left(\pm \frac{l}{2}\right) = I_m \sin\left(2\pi \frac{\pm l}{2\lambda} - \alpha\right) = 0 \rightarrow 2\pi \frac{l}{2\lambda} - \alpha = m\pi, \quad (7.86)$$

gdje je m bilo koji pozitivan cijeli broj. Stoga je zbog (7.84, $l = m \frac{\lambda}{2}$):

$$\alpha = 2\pi \frac{l}{2\lambda} - m\pi = 2\pi \frac{m(\lambda/2)}{2\lambda} - m\pi = \frac{m\pi}{2} - m\pi = -\frac{m\pi}{2}. \quad (7.87)$$

te je konačno funkcija razdiobe struje $f(z')$:

$$\begin{aligned} f(z') &= I_m \sin\left(2\pi \frac{z'}{\lambda} - \alpha\right), \quad \lambda = \frac{2l}{m}, \quad \alpha = -\frac{m\pi}{2}, \\ f(z') &= I_m \sin\left(m\pi \frac{z'}{l} + \frac{m\pi}{2}\right) = I_m \sin\left[m\pi \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Sad se s tom funkcijom razdiobe struje po duljini vodiča može izračunati polje. Jakost struje predstavlja tjemenu vrijednost struje, koja iz izvora dotječe u sredinu vodiča.

Integral:

$$I_{f(z')} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{j\omega \frac{z'}{c} \cos \vartheta} f(z') dz' \quad (7.89)$$

po uvrštenju (7.88, $f(z') = I_m \sin \left[m\pi \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) \right]$) te uz:

$$\frac{j\omega}{c} z' = j2\pi \frac{f}{c} z' = j2\pi \frac{z'}{\lambda} = j2\pi \frac{z'}{(2l/m)} = j \frac{m\pi}{l} z' \quad (7.90)$$

postaje:

$$I_{f(z')} = I_m \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{jm\pi \frac{z'}{l} \cos \vartheta} \sin m\pi \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) dz' \quad (7.91)$$

Ovaj je integral tipa: $I_m \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ax} \sin(bx + c) dx$ pri čemu su:

$$a = j \frac{m\pi}{l} \cos \vartheta, \quad b = \frac{m\pi}{l}, \quad c = \frac{m\pi}{2} \quad (7.92)$$

Dalje je još:

$$a^2 = -m^2 \pi^2 \frac{1}{l^2} \cos^2 \vartheta, \quad (7.93)$$

$$b^2 = m^2 \pi^2 \frac{1}{l^2}, \quad (7.94)$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (7.95)$$

Za sinus funkciju može se pisati:

$$\sin m\pi \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) = \sin m\pi \frac{z'}{l} \cos \frac{m\pi}{2} + \cos m\pi \frac{z'}{l} \sin \frac{m\pi}{2} \quad (7.96)$$

pa su sljedeće tri etape rješavanja integrala:

$$I = I_m \left[\cos \frac{m\pi}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{az'} \sin bz' dz' + \sin \frac{m\pi}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{az'} \cos bz' dz' \right], \quad (7.97)$$

$$I = I_m \left[\cos m \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{az'}}{a^2 + b^2} (a \sin bz' - b \cos bz') + \sin m \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{az'}}{a^2 + b^2} (a \cos bz' + b \sin bz') \right] \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}, \quad (7.98)$$

$$I = I_m \frac{e^{az'}}{a^2 + b^2} \left[\cos m \frac{\pi}{2} (a \sin bz' - b \cos bz') + \sin m \frac{\pi}{2} (a \cos bz' + b \sin bz') \right] \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}. \quad (7.99)$$

Nakon uvrštavanja koeficijenata a , b i c prema (7.92) te evaluacije na gornjoj i donjoj granici određeni integral prema posljednjem izrazu (7.99) postaje:

$$\begin{aligned} I = I_m \left\{ \frac{e^{\frac{j m \pi}{2} \cos \vartheta}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta} \left[\cos m \frac{\pi}{2} \left(j \frac{m \pi}{l} \cos \vartheta \sin m \frac{\pi}{2} - \frac{m \pi}{l} \cos m \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m \frac{\pi}{2} \left(j \frac{m \pi}{l} \cos \vartheta \cos m \frac{\pi}{2} + \frac{m \pi}{l} \sin m \frac{\pi}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{j m \pi}{2} \cos \vartheta}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta} \left[\cos m \frac{\pi}{2} \left(-j \frac{m \pi}{l} \cos \vartheta \sin m \frac{\pi}{2} - \frac{m \pi}{l} \cos m \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m \frac{\pi}{2} \left(j \frac{m \pi}{l} \cos \vartheta \cos m \frac{\pi}{2} - \frac{m \pi}{l} \sin m \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (7.100) \end{aligned}$$

Poslije kraćenja s $m \pi / l$ iz gornjeg se izraza dobiva:

$$\begin{aligned} I = I_m \left\{ \frac{e^{\frac{j m \pi}{2} \cos \vartheta}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right) \sin^2 \vartheta} \left[\cos m \frac{\pi}{2} \left(j \cos \vartheta \sin m \frac{\pi}{2} - \cos m \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m \frac{\pi}{2} \left(j \cos \vartheta \cos m \frac{\pi}{2} + \sin m \frac{\pi}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{j m \pi}{2} \cos \vartheta}}{\left(\frac{m \pi}{l} \right) \sin^2 \vartheta} \left[\cos m \frac{\pi}{2} \left(-j \cos \vartheta \sin m \frac{\pi}{2} - \cos m \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m \frac{\pi}{2} \left(j \cos \vartheta \cos m \frac{\pi}{2} - \sin m \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (7.101) \end{aligned}$$

U gornjem integralu za neparne $m = 1, 3, 5, \dots$ nestaju svi članovi uz $\cos(m\pi/2)$ pa je:

$$I = I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \left[e^{j\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + e^{-j\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right], \quad (7.102)$$

$$I = I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \operatorname{ch} \left(j \frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right) = I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right). \quad (7.103)$$

a za parne $m = 2, 4, 6, \dots$ nestaju članovi uz $\sin(m\pi/2)$ pa je:

$$I = I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \left[e^{j\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta} \cos^2 \frac{m\pi}{2} - e^{-j\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta} \cos^2 \frac{m\pi}{2} \right], \quad (7.104)$$

$$I = I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \operatorname{sh} \left(j \frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right) = -j I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right). \quad (7.105)$$

Vrativši se na izraz za jakost električnog polja, (7.80):

$$\underline{E}_\vartheta \cong \frac{j\omega \sin \vartheta}{4\pi\epsilon c^2 r} e^{j\varphi} e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(z') dz' \quad (7.80)$$

za neparne $m = 1, 3, 5, \dots$, a prema (7.103) ono iznosi:

$$\underline{E}_\vartheta \cong \frac{j\omega \sin \vartheta}{4\pi\epsilon c^2 r} e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} e^{j\varphi} I_m \frac{l}{m\pi \sin^2 \vartheta} \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right), \quad (7.106)$$

$$\underline{E}_\vartheta \cong \frac{j2\pi f I_m}{4\pi\epsilon c^2 r} \frac{\lambda}{2\pi \sin \vartheta} \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right) e^{j \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right]}, \quad (7.107)$$

a poslije kraćenja sa $\sin \vartheta$ te zbog $f = c/\lambda$, $f\lambda = c$ i kraćenja s c dobiva se:

$$\underline{E}_\vartheta \cong \frac{j\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} I_m}{2\pi r} \frac{\cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} e^{j \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right]} \quad (7.108)$$

U ovom je izrazu još eliminirana i brzina svjetlosti $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ pa se u vremenskom području konačno dobiva:

$$E_\vartheta = \Re(\underline{E}_\vartheta) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi r} \frac{\cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} I_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right]. \quad (7.109)$$

Jakost električnog polja za parne $m = 2, 4, 6, \dots$ je:

$$E_{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi r} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} I_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \varphi\right]. \quad (7.110)$$

Poyntingov vektor iznosi:

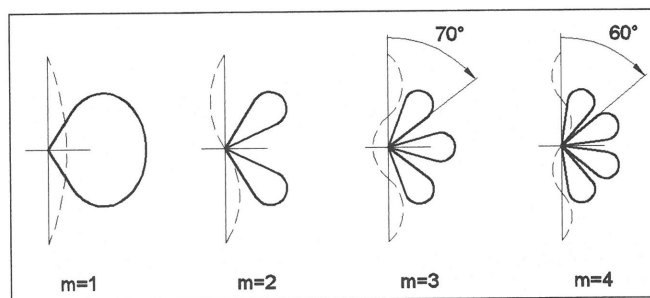
$$\Gamma = \frac{E_{\vartheta}^2}{Z_{vo}} = E_{\vartheta}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (7.111)$$

a za posebne slučajeve iznosa m :

$$\bullet \quad \Gamma = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{za } m = 1, 3, 5, \dots \quad (7.112)$$

$$\bullet \quad \Gamma = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{8\pi^2 r^2} \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{za } m = 2, 4, 6, \dots \quad (7.113)$$

U jednadžbama za jakost polja pojavljuje se funkcija $F(\vartheta)$, u kojoj je sadržana ovisnost o kutu ϑ , karakteristična za tip zračećeg vodiča (radijatora). U Poyntingovom se vektoru ta funkcija pojavljuje kao kvadrat odnosno $F^2(\vartheta)$.



Slika 7.7 Oblici emisijskih dijagrama štapne antene sa sinusnom razdiobom struje po duljini štapa za različite iznose cijelog broja m (kvocijent duljine vodiča antene i polovice valne duljine)

Funkcija $F^2(\vartheta)$ ima nultočke za sljedeće vrijednosti $\cos \vartheta_0$:

$$\bullet \quad F^2(\vartheta) = \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{1}{m}, \frac{3}{m}, \frac{5}{m}, \dots, \frac{m}{m} \quad (7.114)$$

za neparne omjere te:

$$\bullet \quad F^2(\vartheta) = \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta}, \quad \cos\vartheta_0 = 0, \frac{2}{m}, \frac{4}{m}, \frac{6}{m}, \dots, \frac{m}{m} \quad (7.115)$$

za parne omjere duljine vodiča i polovice valne duljine m .

Broj latica u emisijskom dijagramu jednak je mnogokratniku m (slika 7.7). Najjače su izražene latice koje su prve uz vodič. Kad bi se pustilo da m raste, dobila bi se interesantna slika, prema kojoj bi energija praktički strujala uz vodič, a bila bi zanemariva energija koja struji okomito na njega. Ovu sliku mogu znatno poremetiti gubici u vodiču. Zbog njih se mogu znatno smanjiti latice uz vodič, jer se iz toga područja pokrivaju djelatni gubici.

Ukupna se emitirana snaga dobiva kao i kod dipola plošnom integracijom Poyntingovog vektora $\vec{I}$:

$$P = \oint_S \vec{I} d\vec{S} = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} F^2(\vartheta) r \sin\vartheta d\alpha d\vartheta = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{4\pi} \int_0^\pi F^2(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{4\pi} K. \quad (7.116)$$

Preostaje da se integral K riješi za dvije inačice funkcije $F^2(\vartheta)$ prema (7.114) te (7.115). Uz supstituciju $u = \cos\vartheta$, $(-du = \sin\vartheta d\vartheta = -d(\cos\vartheta))$ dobivaju se integrali:

$$\bullet \quad - \int_1^{-1} \frac{\cos^2 \frac{m\pi u}{2}}{1-u^2} du = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2 \frac{m\pi u}{2}}{1-u^2} du \quad \text{za } m=1,3,5,\dots, \quad (7.117)$$

$$\bullet \quad - \int_1^{-1} \frac{\sin^2 \frac{m\pi u}{2}}{1-u^2} du = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \frac{m\pi u}{2}}{1-u^2} du \quad \text{za } m=2,4,6,\dots. \quad (7.118)$$

Treba uzeti u obzir sljedeće ekvivalencije:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) \quad (7.119)$$

te:

$$\cos^2 \frac{m\pi}{2} u = \frac{1}{2} [1 + \cos(m\pi u)], \quad \sin^2 \frac{m\pi}{2} u = \frac{1}{2} [1 - \cos(m\pi u)]. \quad (7.120)$$

Uz daljnje supstitucije:

$$1+u = \frac{v}{\pi m} \quad \text{odnosno} \quad 1-u = \frac{v}{\pi m} \quad (7.121)$$

dobiva se:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \frac{(1 \pm \cos(m\pi u))}{1-u^2} du &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) [1 \pm \cos(m\pi u)] du = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1 \pm \cos(m\pi u)}{1+u} du + \int_{-1}^1 \frac{1 \pm \cos(m\pi u)}{1-u} du \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{2m\pi} \frac{m\pi}{m\pi} \frac{1 \pm \cos \left[m\pi \left(\frac{v}{m\pi} - 1 \right) \right]}{v} dv - \int_{2m\pi}^0 \frac{m\pi}{m\pi} \frac{1 \pm \cos \left[m\pi \left(\frac{v}{m\pi} + 1 \right) \right]}{v} dv \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{2m\pi} \frac{1 - \cos v}{v} dv + \int_0^{2m\pi} \frac{1 - \cos v}{v} dv \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{2m\pi} \frac{1 - \cos v}{v} dv = K.
 \end{aligned}
 \tag{7.122}$$

Treba zapaziti da alternative predznaka „ $\pm$ “, koje se još pojavljuju u pretposljednem koraku prethodnog izraza, konačno nestaju zbog toga što je:

- za m neparno (predznak „ $+$ “):

$$1 + \cos \left[m\pi \left(\frac{v}{m\pi} - 1 \right) \right] = 1 + \cos(v - m\pi) = 1 + \cos v \cos m\pi = 1 - \cos v,
 \tag{7.123}$$

- za m parno (predznak „ $-$ “):

$$1 - \cos \left[m\pi \left(\frac{v}{m\pi} - 1 \right) \right] = 1 - \cos(v - m\pi) = 1 - \cos v \cos m\pi = 1 - \cos v.
 \tag{7.124}$$

Donju granicu treba označiti s a te promatrati graničnu vrijednost: $\lim_{a \rightarrow 0} K'$.

$$2K' = \int_a^{2m\pi} \frac{dv}{v} - \int_a^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv + \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv.
 \tag{7.125}$$

Ovdje se pojavljuje transcendentna funkcija, integral – kosinus, koja se definira prema:

$$C_i(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv = C + \ln x - \frac{1}{2!} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{4} - \dots
 \tag{7.126}$$

pa je:

$$- \int_a^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv + \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv = C_i(a) - C_i(2m\pi) = C + \ln a + \frac{1}{2!} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{a^4}{4} + \dots - C_i(2m\pi).
 \tag{7.127}$$

Ovdje $C = 0.5772...$ konstanta, a naziva se Eulerovom konstantom.

Dakle je:

$$2K' = \ln(2m\pi) - \ln a + C_i(a) - C_i(2m\pi), \quad (7.128)$$

pri čemu su prva dva člana posljedica rješenja integrala $\int_a^{2m\pi} \frac{dv}{v}$, a druga dva pripadaju definicijski prvom odnosno drugom integral – kosinusu: S obzirom da dio reda $\frac{1}{2!} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{a^4}{4} + \dots$ u (7.127) teži k nuli kad a teži k nuli, a $\ln a$ će se u izrazu (7.128) poništiti s onim u (7.127) te konačno ostaje:

$$K = \frac{1}{2} [C + \ln(2m\pi) - C_i(2m\pi)]. \quad (7.129)$$

Snaga isijavanja je dakle:

$$P = \frac{I_m^2 Z_{vo}}{4\pi} K = \frac{1}{2} I_m^2 R_{is} \quad (7.130)$$

odnosno:

$$R_{is} = \frac{Z_{vo}}{2\pi} K = \frac{Z_{vo}}{4\pi} [C + \ln(2m\pi) - C_i(2m\pi)].$$

Za slobodni prostor (vakuum i zrak) valni je otpor $Z_{voo} \cong 377\Omega$, pa je otpor isijavanja:

$$R_{is} = 72.454 + 30 \ln(m) - 30 C_i(2m\pi). \quad (7.131)$$

$C_i(2m\pi)$ se za $m > 2$ može zanemariti ($C_i(2\pi) = -0.02$).

U sljedećoj su tablici navedeni otpori isijavanja za različite mnogokratnike od m :

Tablica 7.1 Otpori isijavanja za različite iznose omjera duljine vodiča i polovice valne duljine m .

m	1	2	3	4	10
$R_{is} (\Omega)$	73	93	105	114	142

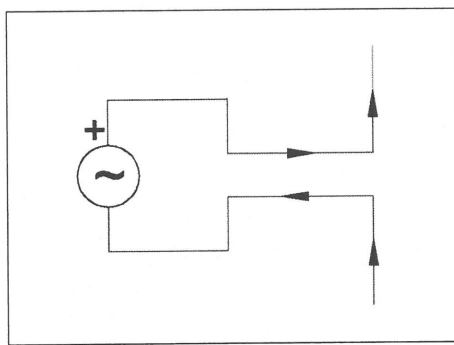
Kod štapne antene ne isplati se produljiti antenu preko pola duljine vala, jer je dobit na otporu isijavanja mala. S druge strane, ako postoje viši harmonijski članovi u struji visokofrekvencijskog generatora, tad će za svaki član biti različiti otpori isijavanja, a može se govoriti o različitom dosegu vala. Viši harmonijski članovi imaju veći otpor isijavanja, te oni mogu prenijeti veću energiju. Osim toga oni mogu biti različito usmjereni, što se može zaključiti iz emisijskih dijagrama. Kod pojedinih antena može se dogoditi da postoje pojedina područja, koja primaju emisiju preko harmonijskih članova.

U ovim izvodima određena je funkcija razdiobe struje tako da je struja na krajevima bila nula. Posljedica toga je bila da su postojale čvrste čvorne točke, međusobno razmaknute za $\lambda/2$.

Struja je bila raspoređena u obliku stojnih valova. Kad vodič ne bi bio mnogokratnik polovice duljine vala, a na krajevima ne bi bio opterećen, dobio bi se u osnovi sličan rezultat, a otpor isijavanja bi se neznatno razlikovao od vrijednosti u tablici, samo bi vrijednost otpora bila između navedenih iznosa.

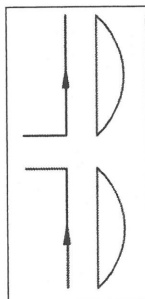
Prilično se drugačiji rezultat dobiva za vodiče opterećene na krajevima, a naročito tako opterećenih da ne postoji uopće refleksija strujnih valova s krajeva vodiča. U tom se slučaju dobiva veći otpor isijavanja. Za duljine vodiča $l = \frac{1}{2}\lambda$ otpor isijavanja iznosi 84Ω , a za punovalne duljine je oko 125Ω , što je znatno više nego u prethodnom slučaju vodiča sa stojnim valovima.

7.2.1 Napajanje antene



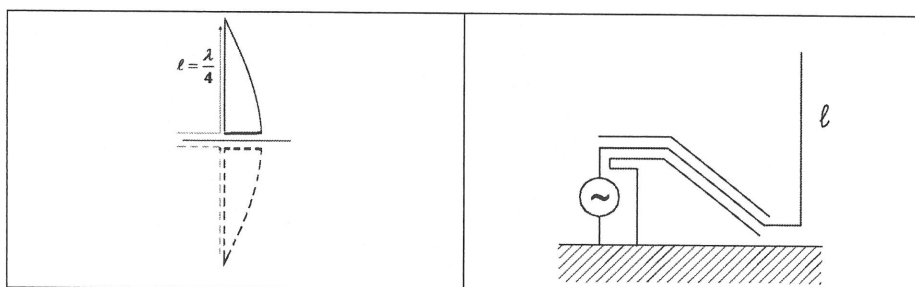
Slika 7.8 Napajanje antene po sredini vodiča

Pri priključku struje na sredinu (slika 7.8) antene vidi se da se na taj način mogu realizirati slučajevi $m = 1, 3, 5, \dots$, dok za $m = 2, 4, 6, \dots$ nastaje različito stanje od pretpostavljenog. Na primjer, za $m = 2$ nastaje slučaj koji je prikazan na slici 7.9 pa je emisijski dijagram (i otpor isijavanja) drugačiji od izvedenog. Emisijski dijagram ima jednu laticu. Pri takvom napajanju ulazna impedancija za $m = 1$ je malena a za $m = 2$ velika (u prvom slučaju na slici 7.8 je struja na sredini antene maksimalna, a u drugom slika 7.9 minimalna).



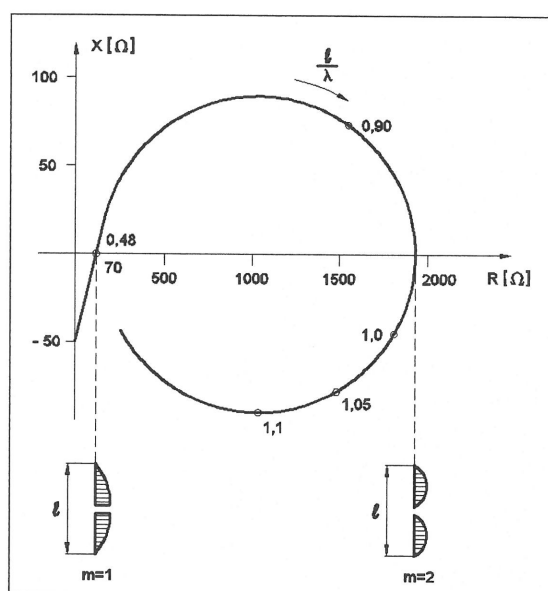
Slika 7.9 Napajanje antene po sredini vodiča pri $m=2$

Pri uzemljenju antene uz $\left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \gg 1\right)$ nastaje dobro odslikavanje, pa na primjer štap duljine $\lambda/4$ djeluje kao antena s duljinom $\lambda/2$ (slika 7.10)



Slika 7.10 Uzemljenje antene

Na slici 7.11 prikazan je i impedantni dijagram antene: $\underline{Z}_{antene} = R_{is} + jX_{antene}$

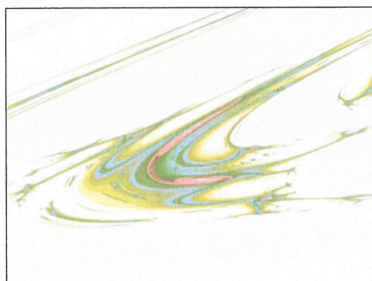
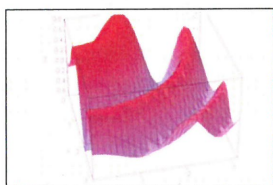


Slika 7.11 Impedantni dijagram antene

8 MATEMATIČKI PRILOG

Osnovni pojmovi vektorske analize, važniji izvodi i teoremi

- Krivolinijski (zakrivljeni) koordinatni sustavi,
- Pravokutni Kartezijev sustav, osnovne i složene vektorske operacije i funkcije u Kartezijevom sustavu,
- Cilindrični sustav i vektorske funkcije u cilindričnom sustavu,
- Sferni sustav i vektorske funkcije u sfernom sustavu,
- Tenzori, osnovni pojmovi,
- Gaussov i Stokesov teorem,
- Helmholtzov teorem,
- Rješenje Poissonove jednačbe,
- Osnove varijacijskog računa.



8.1 KOORDINATNI SUSTAVI I MATEMATIČKI PROSTORI

Prostor i koordinatni sustav ne predstavljaju isti pojam. Sa stanovišta, ne samo elektrotehnike, različite fizikalne veličine postoje u prostoru i neovisne su o izboru koordinatnog sustava. Pravac je primjer euklidskog jednodimenzionalnog prostora koji se proteže na obje strane iz bilo koje točke na njoj u $\pm\infty$. Koordinatni sustav pridružen pravcu definiran je jediničnom intervalu koji se kopira jedan drugom za početne točke. Pravac se zato označava s brojevima i tako označen predstavlja pravac realnih brojeva. Ravnina je primjer euklidskog prostora dimenzije 2 i prostire se u $\pm\infty$ svim smjerovima pravaca koji leže u toj ravnini. Ravnina ima također linearnu metriku i to površinsku metriku, jedinični kvadrat. Pripadnu geometriju odnosno geometrijski prostor definirao je Euklid, 300 godina prije Krista. Euklidska geometrija formirana je od točaka, a ne od vektora. Svojstva našeg prostora prvotno je sustavno opisao sam Euklid. Sam je Euklid sugerirao 5 postulata da se opiše ta geometrija. Sa suvremenog stajališta euklidski se prostor opisuje čak s 20 aksioma odnosno postulata, a grupirani su u 5 grupa: incidencije, reda, sukladnosti (sličnosti), neprekinutosti i paralelnosti.

U euklidskoj geometriji se objekti, likovi kao što su trokuti, kvadrati ili krugovi mogu gibati u ravnini bez deformacije, uspoređivati međusobno koristeći sličnost. U euklidskoj geometriji paralelni pravci se prostiru u $\pm\infty$, a da se nikad ne sijeku. U ravnini se odabire Kartezijev sustav kojeg čine dva pravca realnih brojeva koji se sijeku pod pravim kutom. Mogući su naravno i drugi izbori koordinatnih sustava.

Najbliža fizikalna analogija tom prostoru je područje u kojem se materijalni objekti i/ili svjetlosne zrake gibaju bez deformacije, [27]. Međutim, s obzirom da *gravitacija prožima cijeli prostor i vrijeme* zapravo ne postoji takvo područje u svemiru. Stoga je A. Einstein napustio euklidski prostor kao bazu opće teorije relativnosti te je odabrao *diferencijalnu metriku neeuklidskog prostora*.

Ploha kugle (sfera) je primjer *eliptičkog dvodimenzionalnog prostora*. Kao i ravnina, sfera također ima dvije dimenzije ali se sfera ne proteže u beskonačnost već je konačna i zatvorena poloha. Kuglina ploha ima diferencijalnu linearnu metriku i diferencijalnu površinsku metriku. Ima, dakle i geometriju, ali različitu od one euklidske. Diferencijalna se metrika koristi tamo gdje je jedinična metrika teško primjenjiva, a zbog diferencijalne razine „u malom“ se ponaša kao euklidska. U ravnini se Pitagorin poučak $l^2 = x^2 + y^2$ koristi kao algebarska metrika za pravokutni trokut bez uvjeta diferencijalnosti s

obzirom na svojstva ravnine. Na sferi bi se odgovarajući odnos zapisao kao: $l^2 = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$.

Diferencijalni će zapis infinitezimalne duljine dl biti: $dl^2 = dx^2 + dy^2$, dakle kao i u euklidskom prostoru. Dakle, na sferi se uvijek može odabrati dovoljno mali dio površine koji se može smatrati ravnim. Na sferi, međutim nema euklidskih paralelnih pravaca. Nikakav se Kartezijev sustav ne može konstruirati na sferi. Koordinatni se sustav može konstruirati koristeći *velike kružnice* (kružnice čiji su polumjeri jednaki polumjeru kugle), ali ovaj koordinatni sustav nema jedinstvenog ishodišta. Tako je zbroj unutarnjih kutova u trokutu u ravnini uvijek jednak 180° . Zbroj unutarnjih kutova trokuta na kuglinoj plohi može biti i 270° .

Ploha jajeta je pak drugi primjer eliptičkog prostora koji također ima dvije dimenzije, zatvorena je i konačna, a na koju se također može primijeniti diferencijalna metrika. Relacije sličnosti se ovdje ne mogu primijeniti kao na kuglinoj plohi s obzirom da se objekti ne mogu micati bez deformacije osim za posebne slučajeve (zakrivljenost se mijenja). Lokalni koordinatni sustav i ovdje je moguć, ali za vrlo mala područja gdje se promjena zakrivljenosti može zanemariti. Koordinatni sustav kao na sferi ovdje nije moguć. Mogu se zamisliti i drugi tipovi ploha, ali s različitim svojstvima.

Uobičajeno je da se osnovni pojmovi u vektorskoj analizi definiraju prvo u euklidskom prostoru pa ni naš se slučaj u tom smislu neće razlikovati. Na određenom će se mjestu dati opći pristup transformacijama općenito krivolinijskih koordinata putem diferencijalne metrike te primjena na uobičajene pravokutne krivolinijske sustave kao što su cilindrični i sferni.

Također će se navesti i neki osnovni pojmovi o tenzorima kao (fizikalnim) veličinama čija svojstva ne ovise o izboru koordinatnog sustava kako je već na samom početku ovog priloga izjavljeno, ali se sam naziv još nije spomenuo.

8.2 TRANSFORMACIJA KOORDINATA I KRIVOLINIJSKE POOPĆENE KOORDINATE

Mogu li se pravokutne koordinate x, y, z bilo koje točke u prostoru izraziti pomoću u_1, u_2, u_3 , [26]:

$$x = x(u_1, u_2, u_3), y = y(u_1, u_2, u_3), z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (8.1)$$

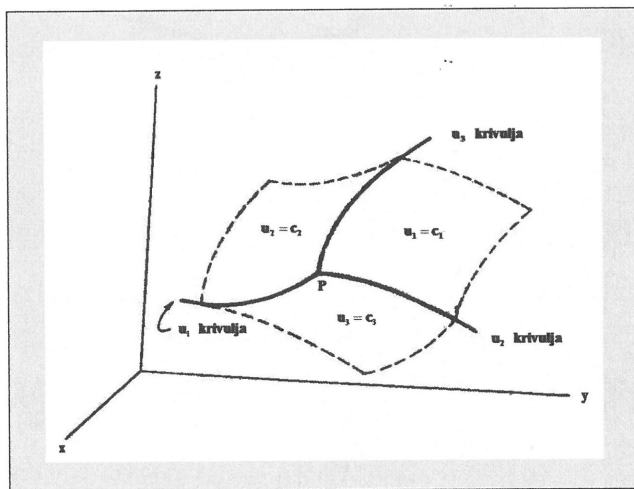
te postoji li obrat:

$$u_1 = u_1(x, y, z), u_2 = u_2(x, y, z), u_3 = u_3(x, y, z) \quad (8.2)$$

tako da su sve navedene funkcije jednoznačne i neprekidnih derivacija (jakobijana) tad se zadanoj točki P u prostoru može na jedinstven način pridružiti i skup koordinata u_1, u_2, u_3 koje se zovu krivolinijskim koordinatama. Navedene jednačbe definiraju transformacije koordinata.

8.2.1 Ortogonalne krivolinijske koordinate

Plohe na slici 8.1 $u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3$ pri čemu su $c_1, c_2, i c_3$ konstante zovu se koordinatnim ploham, a svaki par ovih ploha siječe se u krivuljama koje se zovu koordinatnim krivuljama (linijama). Ako se koordinatne plohe sijeku pod pravim kutom sustav krivolinijskih koordinata je pravokutan. Krivolinijske koordinate u_1, u_2, u_3 analogne su koordinatnim x, y, z osima pravokutnog Kartezijeva sustava.



Slika 8.1 Koordinatne plohe $u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3$ i koordinatne krivulje (linije)

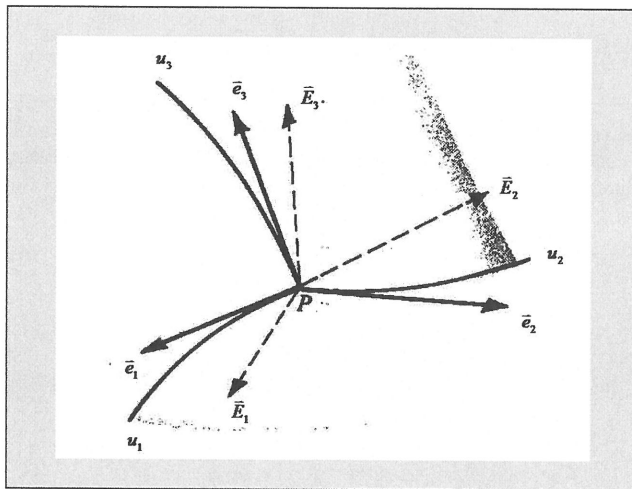
8.2.2 Sustavi krivolinijskih koordinata i jedinični vektori

Prema gore navedenom radijus vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ točke P (slika dolje) može se napisati kao $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. Vektor tangente $\vec{h}_1$ na krivulju u_1 u točki P ($u_2 = \text{const}$, $u_3 = \text{const}$) je:

$$\vec{h}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}. \quad (8.3)$$

Jedinični vektor koji pripada $\vec{h}_1$ je:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{h}_1}{|\vec{h}_1|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|} \text{ odnosno: } \vec{e}_1 |\vec{h}_1| = \vec{e}_1 h_1 = \vec{e}_1 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|. \quad (8.4)$$



Slika 8.2 Jedinični vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tangencijalni na koordinatne krivulje i jedinični vektori $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ normalni na koordinatne plohe

Također su ostala dva jedinična vektora ($\vec{e}_2, \vec{e}_3$) tangenti $\vec{h}_2$ i $\vec{h}_3$ na krivulji u_2 odnosno u_3 :

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{h}_2}{|\vec{h}_2|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|} \text{ odnosno: } \vec{e}_2 |\vec{h}_2| = \vec{e}_2 h_2 = \vec{e}_2 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right| = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, \quad (8.5)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{h}_3}{|\vec{h}_3|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|} \text{ odnosno: } \vec{e}_3 |\vec{h}_3| = \vec{e}_3 h_3 = \vec{e}_3 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right| = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|. \quad (8.6)$$

Veličine h_1, h_2, h_3 nazivaju se metričkim koeficijentima (engleski: „scale factors“). S obzirom da je $\text{grad } u_1 = \nabla u_1$ vektor okomit na plohu $u_1=c_1$ jedinični vektor u ovom je smjeru: $\bar{E}_1 = \frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|}$ (slika gore). Ostala dva jedinična vektora okomita na plohu $u_2=c_2$ odnosno na plohu $u_3=c_3$ su: $\bar{E}_2 = \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|}$ odnosno $\bar{E}_3 = \frac{\nabla u_3}{|\nabla u_3|}$. Jedinični vektori $\bar{e}_1$ i $\bar{E}_1$ identični su samo u slučaju ako su krivolinijski koordinatni sustavi ortogonalni. To se odnosi i na preostala dva para jediničnih vektora $\bar{e}_2$ i $\bar{E}_2$ te $\bar{e}_3$ i $\bar{E}_3$. S obzirom da je:

$$\begin{aligned} \nabla u_1 d\bar{r} &= du_1 = \nabla u_1 \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} du_3 \right) = \\ &= \nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} du_1 + \nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} du_2 + \nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} du_3, \end{aligned} \quad (8.7)$$

odakle usporedbom diferencijala (du_1) na lijevoj i desnoj strani slijedi:

$$\nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = 1, \nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = 0, \nabla u_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} = 0. \quad (8.8)$$

Potražte li se dalje i $\nabla u_2 d\bar{r} = du_2$ te $\nabla u_3 d\bar{r} = du_3$ dobiva se redom:

$$\nabla u_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = 0, \nabla u_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = 1, \nabla u_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} = 0, \quad (8.9)$$

$$\nabla u_3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = 0, \nabla u_3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = 0, \nabla u_3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} = 1. \quad (8.10)$$

Zaključuje se da skupovi vektora $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$ i $\text{grad } u_1 = \nabla u_1, \text{grad } u_2 = \nabla u_2, \text{grad } u_3 = \nabla u_3$ općenito grade međusobno recipročne sustave vektora.

Neki vektor $\bar{A}$ može se predložiti bilo u bazi jediničnih vektora $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bilo u bazi jediničnih vektora $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$:

$$\bar{A} = A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2 + A_3 \bar{e}_3 = \alpha_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 \bar{E}_2 + \alpha_3 \bar{E}_3. \quad (8.11)$$

Isti se vektor $\bar{A}$ može predložiti i u bazi već spomenutih unitarnih (općenito ne i jediničnih) vektora $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$ (*tangente na koordinatne krivulje*, 8.3, 8.5, 8.6) i $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ (*normale na koordinatne plove*, 8.8, 8.9, 8.10) na sljedeći način:

$$\vec{A} = C_{i1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + C_{i2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} + C_{i3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = C_{i1} \vec{h}_1 + C_{i2} \vec{h}_2 + C_{i3} \vec{h}_3, \quad (8.12)$$

$$\vec{A} = C_{v1} \nabla u_1 + C_{v2} \nabla u_2 + C_{v3} \nabla u_3 = C_{i1} \vec{g}_1 + C_{i2} \vec{g}_2 + C_{i3} \vec{g}_3.$$

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 = \alpha_1 \vec{E}_1 + \alpha_2 \vec{E}_2 + \alpha_3 \vec{E}_3. \quad (8.13)$$

Komponente C_{i1}, C_{i2}, C_{i3} se zovu **kontravarijantnim**, a C_{v1}, C_{v2}, C_{v3} **kovarijantnim komponentama** vektora $\vec{A}$. Ovdje bi se negdje mogli početi postavljati i temeljni pojmovi o tenzorima. Kao što je već rečeno, za slučaj da je sustav ortogonalni ovi su vektori identični.

8.2.2.1 Duljina luka, plošni i prostorni element u ortogonalnim krivolinijskim sustavima

S obzirom da je:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \vec{e}_1 + h_2 du_2 \vec{e}_2 + h_3 du_3 \vec{e}_3 \quad (8.14)$$

to je **duljina luka**:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\vec{r} d\vec{r} &= \vec{h}_1 \vec{h}_1 du_1^2 + \vec{h}_1 \vec{h}_2 du_1 du_2 + \vec{h}_1 \vec{h}_3 du_1 du_3 + \\ &+ \vec{h}_2 \vec{h}_1 du_2 du_1 + \vec{h}_2 \vec{h}_2 du_2^2 + \vec{h}_2 \vec{h}_3 du_2 du_3 + \\ &+ \vec{h}_3 \vec{h}_1 du_3 du_1 + \vec{h}_3 \vec{h}_2 du_3 du_2 + \vec{h}_3 \vec{h}_3 du_3^2, \end{aligned} \quad (8.15)$$

ili:

$$ds^2 = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 g_{pq} du_p du_q, \quad g_{pq} = \vec{h}_p \vec{h}_q. \quad (8.16)$$

Veličine g_{pq} elementi su (3x3) metričkog simetričnog tenzora. Ako bi vandijagonalni elementi bili jednaki nuli ($g_{pq} = 0, p \neq q$) krivolinijski je sustav ortogonalan što znači da je za te sustave $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0, \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 0, \vec{e}_3 \vec{e}_1 = 0$. U tom slučaju kvadrat duljine luka ds^2 postaje:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 = \sum_{k=1}^3 h_k^2 du_k^2. \quad (8.17)$$

8.2.2.2 Plošni se elementi računaju na sljedeći način:

- na plohi $u_1 = c_1$: $dS_1 = |d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3| = h_2 h_3 du_2 du_3,$ (8.18)

- na plohi $u_2 = c_2$: $dS_2 = |d\vec{s}_3 \times d\vec{s}_1| = h_3 h_1 du_3 du_1,$ (8.19)

- na plohi $u_3 = c_3$: $dS_3 = |d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2| = h_1 h_2 du_1 du_2.$ (8.20)

8.2.2.3 Prostorni element

$$\bullet \quad dV = d\vec{s}_2(d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3) = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (8.21)$$

8.2.3 Vektorske funkcije u krivolinijskom ortogonalnom sustavu

Gradijent će se izvesti na sljedeći način. S obzirom da je gradijent općenito u bazi jediničnih vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\nabla \varphi = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3 \quad (8.22)$$

te da je prema (8.14):

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \vec{e}_1 + h_2 du_2 \vec{e}_2 + h_3 du_3 \vec{e}_3 \quad (8.14)$$

to je totalni diferencijal $d\varphi$:

$$d\varphi = \nabla \varphi d\vec{r} = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3, \quad (8.23)$$

a s druge je strane:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} du_3 \quad (8.24)$$

odakle usporedbom proizlaze komponente gradijenta u ortogonalnom krivolinijskom sustavu:

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}, \quad (8.25)$$

a nakon njihovog uvrštavanja u (8.22, $\nabla \varphi = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3$) dobiva se i gradijent:

$$\nabla \varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}. \quad (8.26)$$

Divergencija vektora $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ je:

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A} = \nabla(A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3) = \nabla(A_1 \vec{e}_1) + \nabla(A_2 \vec{e}_2) + \nabla(A_3 \vec{e}_3). \quad (8.27)$$

Da bi se izveo izraz za divergenciju potrebna su i sljedeća razmatranja. Uvrsti li se $\varphi = u_1$ u izraza za gradijent (8.26) dobiva se:

$$\nabla u_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}, |\nabla u_1| = \frac{1}{h_1}. \quad (8.28)$$

Na sličan je način:

$$\nabla u_2 = \frac{\bar{e}_2}{h_2}, |\nabla u_2| = \frac{1}{h_2}, \quad \nabla u_3 = \frac{\bar{e}_3}{h_3}, |\nabla u_3| = \frac{1}{h_3}. \quad (8.29)$$

Odavde slijedi da je:

$$\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\bar{e}_2}{h_2} \times \frac{\bar{e}_3}{h_3} = \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3}, \quad (8.30)$$

$$\bar{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3. \quad (8.31)$$

Slično je i:

$$\bar{e}_2 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1, \quad \bar{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2. \quad (8.32)$$

Razvije li se samo prvi član $\nabla(A_1 \bar{e}_1)$:

$$\begin{aligned} \nabla(A_1 \bar{e}_1) &= \nabla(A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla(A_1 h_2 h_3) \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1 h_2 h_3 \nabla(\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \\ &= \nabla(A_1 h_2 h_3) \frac{\bar{e}_2}{h_2} \times \frac{\bar{e}_3}{h_3} + 0 = \nabla(A_1 h_2 h_3) \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

a uz pomoć izraza za gradijent (8.26) dobiva se:

$$\begin{aligned} \nabla(A_1 \bar{e}_1) &= \nabla(A_1 h_2 h_3) \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} = \left[\frac{\bar{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\bar{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\bar{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_2 h_3) \right] \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Razvoj druga dva člana ($\nabla(A_2 \bar{e}_2)$, $\nabla(A_3 \bar{e}_3)$) na sličan način daje:

$$\nabla(A_2 \bar{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1), \quad \nabla(A_3 \bar{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \quad (8.35)$$

pa je konačni izraz za $\text{div} \vec{A}$ u ortogonalnim krivolinijskim koordinatama:

$$\text{div} \vec{A} = \nabla \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right]. \quad (8.36)$$

Rotacija vektora $\vec{A}$ je:

$$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2 + A_3 \bar{e}_3) = \nabla \times (A_1 \bar{e}_1) + \nabla \times (A_2 \bar{e}_2) + \nabla \times (A_3 \bar{e}_3). \quad (8.37)$$

Da bi se izveo izraz za rotaciju potrebna su i sljedeća razmatranja.

Razvije li se samo prvi član $\nabla \times (A_1 \bar{e}_1)$ dobiva se na temelju prethodnog:

$$\begin{aligned}\nabla \times (A_1 \bar{e}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1) = \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 + A_1 h_1 \nabla \times \nabla u_1 = \\ &= \nabla(A_1 h_1) \times \frac{\bar{e}_1}{h_1} + 0,\end{aligned}\quad (8.38)$$

pa je:

$$\begin{aligned}\nabla \times (A_1 \bar{e}_1) &= \nabla(A_1 h_1) = \left[\frac{\bar{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_1) + \frac{\bar{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) + \frac{\bar{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) \right] \times \frac{\bar{e}_1}{h_1} = \\ &= \frac{\bar{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\bar{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1).\end{aligned}\quad (8.39)$$

Razvoj druga dva člana ($\nabla \times (A_2 \bar{e}_2)$, $\nabla \times (A_3 \bar{e}_3)$) daje:

$$\nabla \times (A_2 \bar{e}_2) = \frac{\bar{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2), \quad \nabla \times (A_3 \bar{e}_3) = \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\bar{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3)\quad (8.40)$$

pa je konačni izraz za $\text{rot} \bar{A}$ u ortogonalnim krivolinijskim koordinatama:

$$\begin{aligned}\text{rot} \bar{A} = \nabla \times \bar{A} &= \frac{\bar{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\bar{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) + \\ &+ \frac{\bar{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \\ &+ \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\bar{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3).\end{aligned}\quad (8.41)$$

Ovo se može izraziti i kao:

$$\text{rot} \bar{A} = \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} h_1 \bar{e}_1 & h_2 \bar{e}_2 & h_3 \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{bmatrix}.\quad (8.42)$$

Da bi se izračunao i laplasian od φ odnosno $\text{divgrad} \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$ treba samo zapaziti da se u izraz za divergenciju (8.36) umjesto komponenti vektora $\bar{A}$ trebaju uvrstiti komponente gradijenta $\nabla \varphi$ prema (8.26):

$$A_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad A_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad A_3 = \frac{\bar{e}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}.\quad (8.43)$$

U tom se slučaju dobiva:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} h_3 h_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} h_1 h_2 \right) \right]. \quad (8.44)$$

Nakon ovih razmatranja, izrazi za vektorske funkcije u pravokutnom Kartezijevom, cilindričnom i sfernom sustavu mogu se relativno jednostavno izvesti. Prethodno je potrebno samo izračunati metričke koeficijente:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right| \quad (8.45)$$

za svaki od navedenih sustava.

8.2.4 Primjena na pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

Prema prethodno utvrđenom metrički su koeficijenti definirani prema izrazima (8.3) do (8.6):

$$h_1 = h_x = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|, \quad h_2 = h_y = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, \quad h_3 = h_z = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right| \quad (8.46)$$

gdje je $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ pa su njihove konkretne vrijednosti:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1, \quad (8.47)$$

a odgovarajući jedinični vektori su:

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}. \quad (8.48)$$

U tom će se slučaju dobiti izrazi za vektorske funkcije kao i ostali odnosi koji vrijede u pravokutnom Kartezijevom sustavu.

8.2.4.1 Linijski element (8.17):

$$\bullet \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (8.49)$$

8.2.4.2 Plošni elementi (8.18-8.20):

$$\bullet \quad \text{na plohi } x = c_1: dS_1 = dydz, \quad (8.50)$$

$$\bullet \quad \text{na plohi } y = c_2: dS_2 = dzdx, \quad (8.51)$$

$$\bullet \quad \text{na plohi } z = c_3: dS_3 = dxdy. \quad (8.52)$$

8.2.4.3 Prostorni element (8.21):

$$\bullet \quad dV = dx dy dz. \quad (8.53)$$

8.2.4.4 Osnovne definicije i jednadžbe vektorske analize

Neka su:

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - jedinični vektori pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava,
- $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ - zapis vektora $\vec{a}$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu,
- a_x, a_y, a_z - komponente vektora $\vec{a}$ u smjeru x, y i z osi,
- $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - modul ili apsolutna vrijednost vektora, euklidska duljina vektora.

8.2.4.5 Skalarni produkt

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha, \quad (8.54)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (8.55)$$

gdje je α - kut između vektora čiji je kosinus:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}, \quad |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}. \quad (8.56)$$

8.2.4.6 Vektorski produkt

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (8.57)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x). \quad (8.58)$$

Iznos vektorskog produkta:

$$C = |\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \alpha. \quad (8.59)$$

Vektor $\vec{C}$ ima smjer napredovanja desnog vijka, ako $\vec{A}$ pri tome prelazi na $\vec{B}$ u smjeru manjeg kuta desno. Vektor $\vec{C}$ je okomit na ravninu vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

8.2.4.7 Višestruki produkti

Neposrednim razvojem skalarnog produkta po komponentama moguće je pokazati da je:

$$\vec{C} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{C} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (8.60)$$

Za račun dvostrukog vektorskog produkta:

$$\vec{F} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (8.61)$$

prvo se lako utvrđuje da taj vektor leži u ravnini vektora $\vec{B}$ i $\vec{C}$ što znači da se može napisati kao njihova linearna kombinacija:

$$\vec{F} = \beta \vec{B} - \gamma \vec{C}. \quad (8.62)$$

Prema tome je skalarni produkt $\vec{F}$ i $\vec{A}$ zbog njihove okomitosti jednak nuli:

$$\vec{F} \cdot \vec{A} = (\beta \vec{B} - \gamma \vec{C}) \cdot \vec{A} = \beta \vec{A} \cdot \vec{B} - \gamma \vec{A} \cdot \vec{C} = 0. \quad (8.63)$$

Poslije diobe ovog izraza s $(\vec{A} \cdot \vec{C})$ $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dobiva se:

$$\frac{\beta}{(\vec{A} \cdot \vec{C})} + \frac{\gamma}{(\vec{A} \cdot \vec{B})} = 0 \quad (8.64)$$

što je moguće uz:

$$\beta = k_0 (\vec{A} \cdot \vec{C}), \quad \gamma = -k_0 (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (8.65)$$

Uvrštenjem u (8.61)

$$\vec{F} = k_0 (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - k_0 (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}. \quad (8.66)$$

Nije teško pokazati da je $k_0 = 1$ pa se konačno dobiva (8.61).

8.2.4.8 Vektorske funkcije u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu

S obzirom da vrijedi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (8.67)$$

to su vektorske funkcije prema izrazima (8.26), (8.36), (8.42) i (8.44) te postavljanjem $A_x = A_1, A_y = A_2, A_z = A_3$:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi, \quad (8.68)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \vec{A}, \quad (8.69)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \vec{A}, \quad (8.70)$$

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{k} = \\ &= \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k} = \nabla^2 \vec{A}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

8.2.4.9 Vektorske funkcije složenih veličina

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \vec{A} + \nabla \vec{B} = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}, \quad (8.73)$$

$$\text{grad}(\varphi \psi) = \nabla(\varphi \psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi = \psi \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } \psi, \quad (8.74)$$

$$\text{grad}(c \varphi) = \nabla(c \varphi) = c \nabla \varphi = c \text{grad } \varphi, \quad c = \text{konst.}, \quad (8.75)$$

$$\text{div}(\varphi \vec{A}) = \nabla(\varphi \vec{A}) = \varphi \nabla \vec{A} + \nabla \varphi \vec{A} = \varphi \text{div } \vec{A} + \text{grad } \varphi \vec{A}, \quad (8.76)$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \nabla \times (\varphi \vec{A}) = \varphi \nabla \times \vec{A} + \nabla \varphi \times \vec{A} = \varphi \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \varphi \times \vec{A}, \quad (8.77)$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \text{rot } \vec{B}, \quad (8.78)$$

$$(\vec{A} \nabla) \vec{B} = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{B} = A_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}. \quad (8.79)$$

S obzirom da je usmjerena derivacija vektorske funkcije $\vec{B}$ po vektoru $\vec{A} = A \vec{a}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial A} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dA} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dA} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dA} = \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \cos \gamma = (\vec{a}_0 \nabla) \vec{B} \end{aligned} \quad (8.80)$$

ili:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial A} = (\vec{a}_0 \nabla) \vec{B} \quad (8.81)$$

pri čemu je:

$$\vec{a}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma \quad (8.82)$$

to je nakon množenja objiju strana izraza (8.81) s A i zamjene strana:

$$(\vec{A} \nabla) \vec{B} = A \frac{\partial \vec{B}}{\partial A}. \quad (8.83)$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (8.84)$$

$$\text{uz (8.61, } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}))$$

postaje:

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A}. \quad (8.84.1)$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (8.85)$$

uz sljedeće odnose:

$$\bullet \quad \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{B} \cdot \vec{A}) - (\vec{B} \nabla) \vec{A} = \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{B} \nabla) \vec{A}, \quad (8.86)$$

$$\bullet \quad \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (8.87)$$

$$\bullet \quad \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \nabla) \vec{B}, \quad (8.88)$$

$$\bullet \quad \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}), \quad (8.89)$$

$$\bullet \quad \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}), \quad (8.90)$$

postaje:

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}. \quad (8.85.1)$$

$$(\vec{A} \nabla) \varphi = \vec{A} (\nabla \varphi) = \vec{A} \text{grad } \varphi. \quad (8.91)$$

Ako su $\vec{r}$ radijus vektor koji gleda od ishodišta (izvora pojave) prema točki promatranja te $\vec{r}_0$ njegov jedinični radijus vektor tad je:

$$\text{grad } f(r) = \nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr} \nabla r, \quad (8.92)$$

a uz:

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{i:} \quad (8.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} r = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} r = \frac{z}{r} \quad (8.94)$$

te:

$$\nabla r = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0 \quad (8.95)$$

izraz (8.92) postaje:

$$\text{grad } f(r) = \frac{df(r)}{dr} \vec{r}_0 = f'(r) \vec{r}_0. \quad (8.96)$$

$$\text{div}[f(r) \vec{r}_0] = \nabla[f(r) \vec{r}] = \nabla[\underline{f}(r) \vec{r}_0] + \nabla[f(r) \underline{\vec{r}}_0], \quad (8.97)$$

$$\nabla[\underline{f}(r) \vec{r}_0] = \frac{df}{dr} \vec{r}_0 \vec{r}_0 = f'(r), \quad (8.98)$$

S obzirom da je:

$$\nabla \vec{r}_0 = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) \quad (8.99)$$

ili kad se raspiše:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{r^2 r}, \quad (8.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x^2 + z^2}{r^2 r}, \quad (8.101)$$

i:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x^2 + y^2}{r^2 r} \quad (8.102)$$

to je:

$$\nabla \vec{r}_0 = \frac{2}{r}$$

ili konačno za (8.97) se dobiva:

$$\text{div}[f(r) \vec{r}_0] = 2 \frac{f(r)}{r} + f'(r). \quad (8.103)$$

$$\nabla \times \vec{r} = 0,$$

$$(\vec{c} \nabla) \vec{r} = \left(c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[f(r)\vec{r}_0] &= \nabla \times [F(r)\vec{r}] = \nabla \times [F(r)\vec{r}] + \nabla \times [F(r)\vec{r}] = \frac{\partial F(r)}{\partial r} \nabla r \times \vec{r} + F(r) \nabla \times \vec{r} = \\ &= \frac{\partial F(r)}{\partial r} \vec{r}_0 \times \vec{r} + F(r) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Koristeći izraz (8.103) uz $f(r) = \frac{1}{r^2}$ dobiva se za:

$$\text{div} \frac{\vec{r}_0}{r^2} = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0 \quad (8.105)$$

i to za sve $r \neq 0$. Ako je pak $r = 0$ (8.105) se neće moći primijeniti pa treba postupiti na način kako je to pokazano u (8.7.4).

8.2.4.10 Složene vektorske funkcije

$$\text{divgrad} \varphi = \nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi. \quad (8.106)$$

$$\nabla(\nabla \vec{A}) = \text{graddiv} \vec{A} = \Delta \vec{A}. \quad (8.107)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \text{rotrot} \vec{A} = \nabla(\nabla \vec{A}) - (\nabla \nabla) \vec{A} = \text{graddiv} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \quad (8.108)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \text{rotgrad} \varphi = 0. \quad (8.109)$$

Ako je vektorsko polje takvo da se može prikazati gradijentom skalarne funkcije (konzervativno polje), npr. $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$, tad je $\text{rot} \vec{E} \equiv 0$ i polje je bezvrtložno, to jest nema zatvorenih silnica.

$$\nabla(\nabla \times \vec{A}) = (\nabla \times \nabla) \vec{A} \equiv 0; \nabla(\nabla \times \vec{A}) = \text{divrot} \vec{A} = 0. \quad (8.110)$$

Ako je vektorsko polje takvo da se može prikazati rotorom vektorske funkcije, na primjer: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, tad je $\text{div } \vec{B} = 0$ i polje je bez izvora, a silnice su zatvorene krivulje. To je polje vrtložno i naziva se solenoidnim.

$$\begin{aligned}
 \Delta(\varphi\psi) &= \nabla(\nabla\varphi\psi) = \nabla(\psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi) = \\
 &= \nabla(\psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi) + \nabla(\psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi) = \\
 &= \nabla\psi\nabla\varphi + \nabla\varphi\nabla\psi + \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi = \\
 &= \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\text{grad}\varphi\text{grad}\psi.
 \end{aligned}
 \tag{8.111}$$

8.2.5 Primjena na cilindrični sustav ($\rho \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$)

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|, h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right| \quad (8.112)$$

$$\rho = u_1, \alpha = u_2, z = u_3,$$

$$x = \rho \cos \alpha, y = \rho \sin \alpha, z = z, \quad (8.113)$$

$$\vec{r} = \rho \cos \alpha \vec{i} + \rho \sin \alpha \vec{j} + z \vec{k}.$$

Metrički koeficijenti za cilindrični sustav koordinata kao na slici 8.3 su:

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \left| \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \right| = 1, \\ h_\alpha &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right| = \left| -\rho \sin \alpha \vec{i} + \rho \cos \alpha \vec{j} \right| = \rho, \\ h_z &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = \left| \vec{k} \right| = 1. \end{aligned} \quad (8.114)$$

8.2.5.1 Linijski element

$$\bullet \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2 + dz^2. \quad (8.115)$$

8.2.5.2 Plošni elementi

$$\bullet \quad \text{na plohi } \rho = c_1: dS_1 = \rho d\alpha dz, \quad (8.116)$$

$$\bullet \quad \text{na plohi } \alpha = c_2: dS_2 = \rho d\rho dz, \quad (8.117)$$

$$\bullet \quad \text{na plohi } z = c_3: dS_3 = \rho d\rho d\alpha. \quad (8.118)$$

8.2.5.3 Prostorni element

$$\bullet \quad dV = \rho d\rho d\alpha dz. \quad (8.119)$$

8.2.5.4 Vektorske funkcije u cilindričnom koordinatnom sustavu

S obzirom da vrijedi:

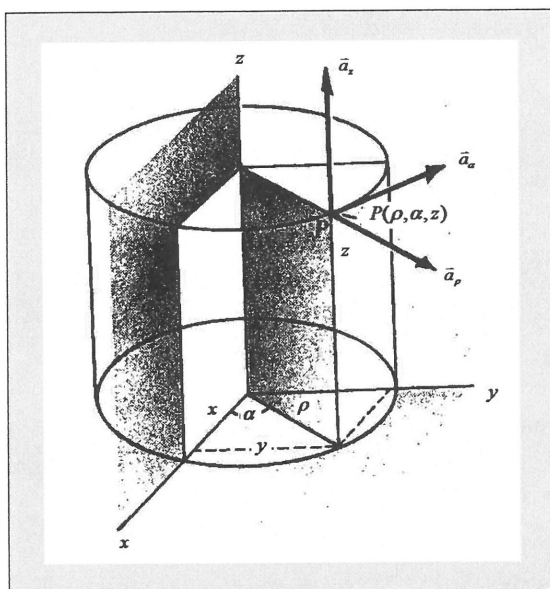
$$\vec{a}_\rho \times \vec{a}_\alpha = \vec{a}_z, \quad \vec{a}_\alpha \times \vec{a}_z = \vec{a}_\rho, \quad \vec{a}_z \times \vec{a}_\rho = \vec{a}_\alpha, \quad (8.120)$$

to su vektorske funkcije prema izrazima (8.26), (8.36), (8.42) i (8.44) te postavljajjem:

$$A_\rho = A_1, A_\alpha = A_2, A_z = A_3 \quad (8.121)$$

$$\text{grad}_\rho \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \text{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (8.122)$$

$$\nabla \varphi = \bar{a}_\rho \text{grad}_\rho \varphi + \bar{a}_\alpha \text{grad}_\alpha \varphi + \bar{a}_z \text{grad}_z \varphi = \bar{a}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \bar{a}_\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \bar{a}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (8.123)$$



Slika 8.3 Cilindrični koordinatni sustav

$$\text{div } \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (8.124)$$

$$\bar{a}_\rho \text{rot}_\rho \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \bar{a}_\alpha \text{rot}_\alpha \bar{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \bar{a}_z \text{rot}_z \bar{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\alpha) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha} \right], \quad (8.125)$$

$$\Delta \varphi = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (8.126)$$

$$\Delta \bar{A} = \bar{a}_\rho \left(\Delta A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \right) + \bar{a}_\alpha \left(\Delta A_\alpha + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha} - \frac{A_\alpha}{\rho^2} \right) + \bar{a}_z (\Delta A_z). \quad (8.127)$$

8.2.6 Primjena na sferni sustav ($r \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$)

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|, h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|, \quad (8.128)$$

$$r = u_1, \quad \alpha = u_2, \quad \vartheta = u_3,$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \alpha, \quad y = r \sin \vartheta \sin \alpha, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (8.129)$$

$$\vec{r}_s = r \sin \vartheta \cos \alpha \vec{i} + r \sin \vartheta \sin \alpha \vec{j} + r \cos \vartheta \vec{k}.$$

Metrički koeficijenti za sferni sustav koordinata kao na slici 8.4 su:

$$\begin{aligned} h_r &= \left| \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial r} \right| = \left| \sin \vartheta \cos \alpha \vec{i} + \sin \vartheta \sin \alpha \vec{j} + \cos \vartheta \vec{k} \right| = 1, \\ h_\alpha &= \left| \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \alpha} \right| = \left| -r \sin \vartheta \sin \alpha \vec{i} + r \sin \vartheta \cos \alpha \vec{j} \right| = r \sin \vartheta, \\ h_\vartheta &= \left| \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \vartheta} \right| = \left| r \cos \vartheta \cos \alpha \vec{i} + r \cos \vartheta \sin \alpha \vec{j} - r \sin \vartheta \vec{k} \right| = r. \end{aligned} \quad (8.130)$$

8.2.6.1 Linijski element

$$ds^2 = d\vec{r} d\vec{r} = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\alpha^2 + r^2 d\vartheta^2. \quad (8.131)$$

8.2.6.2 Plošni elementi

- na plohi $r = c_1$: $dS_1 = r^2 \sin \vartheta d\alpha d\vartheta$, (8.132)

- na plohi $\alpha = c_2$: $dS_2 = r dr d\vartheta$, (8.133)

- na plohi $\vartheta = c_3$: $dS_3 = r \sin \vartheta dr d\alpha$. (8.134)

8.2.6.3 Prostorni element

- $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\alpha d\vartheta$. (8.135)

8.2.6.4 Vektorske funkcije u sfernom koordinatnom sustavu

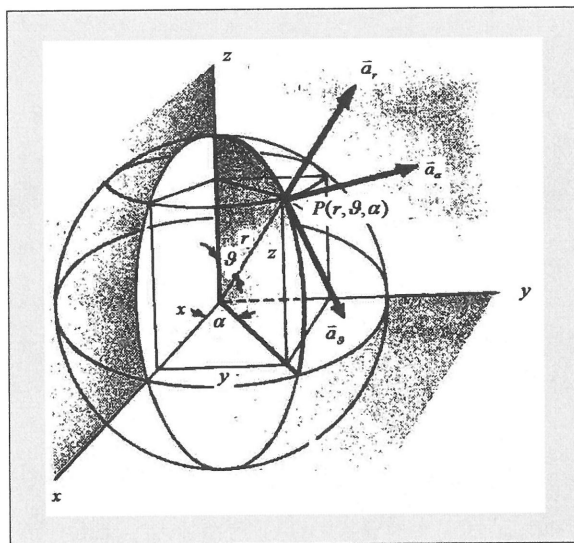
S obzirom da vrijedi:

$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\vartheta = \vec{a}_\alpha, \quad \vec{a}_\alpha \times \vec{a}_r = \vec{a}_\vartheta, \quad \vec{a}_\vartheta \times \vec{a}_\alpha = \vec{a}_r, \quad (8.136)$$

to su vektorske funkcije prema izrazima (8.26), (8.36), (8.42) i (8.44) te postavljanjem $A_\rho = A_1, A_\alpha = A_2, A_\vartheta = A_3$:

$$\text{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \text{grad}_\vartheta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \text{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (8.137)$$

$$\nabla \varphi = \vec{a}_r \text{grad}_r \varphi + \vec{a}_\vartheta \text{grad}_\vartheta \varphi + \vec{a}_\alpha \text{grad}_\alpha \varphi = \vec{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{a}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \vec{a}_\alpha \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (8.138)$$



Slika 8.4 Sferni koordinatni sustav

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (8.139)$$

$$\vec{a}_r \text{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(\sin \vartheta A_\alpha)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right], \quad (8.140)$$

$$\vec{a}_\vartheta \text{rot}_\vartheta \vec{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r}, \quad (8.141)$$

$$\vec{a}_\alpha \text{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}, \quad (8.142)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad (8.143)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{A} = & \bar{a}_r \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \operatorname{ctg} \vartheta A_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] + \\
 & + \bar{a}_\vartheta \left[\Delta A_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} A_\vartheta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
 & + \bar{a}_\alpha \left[\Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} A_\alpha - \frac{2}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{8.144}$$

8.3 TENZORI

U uvodnom dijelu ovog priloga već je bilo rečeno da su tenzori matematički objekti odnosno fizikalne veličine čija svojstva ne ovise o izboru koordinatnog sustava. Općenito fizikalni zakoni moraju biti neovisni o bilo kojem posebnom koordinatnom sustavu. Studiranje posljedica ovog zahtjeva vodi do tenzora i tenzorske analize koja se vrlo intenzivno koristi u općoj teoriji relativnosti, diferencijalnoj geometriji, mehanici, a posebice u grani o čvrstoći, hidrodinamici, ali i u teoriji elektromagnetizma, [27], [26], [16].

Također se u literaturi navodi da su tenzori objekti različitog ranga. Tako je tenzor ranga 0 skalar ($3^0=1$ odnosno jedna komponenta), a tenzor ranga 1 ($3^1=3$ komponente) je vektor. Tenzor ranga 2 ($3^2=9$ komponenti) prikazuje se u matričnom obliku. Opis naprezanja u anizotropnom materijalu zahtijeva 81 komponentu ($3^4=81$) dakle tenzor ranga 4. Općenito tenzor ranga r ima 3^r komponenti. Često se ispušta iz vida da obrat ne vrijedi: nije svaki skalar tenzor ranga 0 niti je svaki vektor tenzor ranga 1. Neka to ilustriraju sljedeći primjeri, [27].

Neka je jedan promatrač u mirujućem sustavu S , a drugi promatrač u sustavu S' koji se giba. Ako oba promatrača neku fizikalnu veličinu vide jednako tad je ta veličina tenzor. Na primjer, temperatura koju će i jedan i drugi promatrač očitati na svojim termometrima bit će jednake: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Temperatura kao skalar u ovom je slučaju tenzor ranga 0.

Neka na primjer izvor monokromatske svjetlosti u nekoj točki prostora P zrači frekvencijom iznosa f' koju u tom iznosu registrira promatrač u sustavu S' . Promatrač u mirujućem sustavu S neće mjeriti taj iznos frekvencije već neki iznos f i to prema efektu Dopplera koji se može pokazati i putem Lorentzove transformacije frekvencije. U tu se svrhu treba iskoristiti činjenica da je faza vala neovisna o sustavu motrenja. Zbog jednostavnosti to se može demonstrirati na ravnom valu, [16]. Zamjenom koordinate x' i vremena t' iz gibajućeg sustava S' s odgovarajućim koordinatama x i t iz mirujućeg sustava prema točki 3 (izrazi 3.13.1 i 3.21) dobivaju se odnosi između frekvencija i valnih duljina u oba sustava:

$$f = \gamma(f' + \frac{u}{\lambda'}), \quad \frac{1}{\lambda} = \gamma\left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{uf'}{c^2}\right). \quad (8.145)$$

Eliminira li se $1/\lambda'$ iz prvog izraza pomoću drugog izraza te uzimajući još u obzir da je: $1/\lambda = f/c$ dobiva se odnos između samih frekvencija u oba sustava:

$$f = f' \frac{1}{\lambda(1-u/c)} = f' \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} = f' \frac{1+u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \quad (8.146)$$

To znači da se za male iznose brzine gibanja u sustava S' prema brzini svjetlosti c odnosno $u/c \approx 0$ dobiva za frekvenciju f :

$$f = f' \left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \quad (8.147)$$

pri čemu će predznak „+“ vrijediti za slučaj da se izvor svjetlosti (sustavu S') približava promatraču u sustavu S (frekvencija se pomiče ka ljubičastom dijelu spektra), a predznak „-“, za slučaj da se izvor svjetlosti (sustav S') udaljava od promatrača u sustavu S (frekvencija se pomiče ka crvenom dijelu spektra). Čak što više sustav S također ne mora biti mirujući. Važno je isključivo relativno gibanje,

Frekvencija je ovdje također skalar, ali nije tenzor ranga 0.

Ako za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ promatrači u sustavima S i S' utvrđuju da je:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (8.148)$$

tad je vektor $\vec{a}$ tenzora ranga 1. Općenito ako se transformacijom utvrđuje da je bilo koja veličina jednaka u oba sustava:

$$T = T' \quad (8.149)$$

odnosno da je neovisna o izboru bilo kakvog sustava, riječ je o tenzoru određenog ranga. Na primjer, neka je vektor pozicije odnosno radijus vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ povučen iz ishodišta nekog sustava S do točke u prostoru P . Ako je $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ vektor pozicije povučen iz ishodišta sustava S' u istu točku u prostoru P tad je općenito:

$$\vec{r} \neq \vec{r}'. \quad (8.150)$$

To prosto znači da vektor pozicije $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ nije tenzor ranga 1 (iako ima 3 komponente). Neka se sad u dvije točke u prostoru P_1 i P_2 povuku po dva radijus vektora iz ishodišta svakog od koordinatnih sustava S (u točku P_1 : $\vec{r}_1$, a u točku P_2 : $\vec{r}_2$) odnosno S' (u točku P_1 : $\vec{r}_1'$, a u točku P_2 : $\vec{r}_2'$). Utvrđuje se da je:

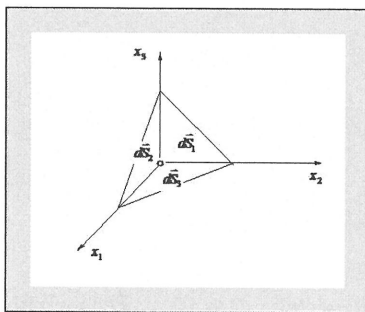
$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'. \quad (8.151)$$

Dakle razliku radijus vektora i jedan i drugi promatrač (u sustavu S odnosno S') vide jednako pa je razlika vektora $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ tenzor ranga 1. Kao izravna posljedica ovog također vrijedi i za diferencijale vektora pozicije:

$$d\vec{r} = d\vec{r}' \quad (8.152)$$

pa je diferencijal $d\vec{r}$ također tenzor ranga 1.

Za ilustraciju tenzora ranga 2 neka posluži skraćeno razmatranje prema [16], a odnosi se na razmatranja napetosti u čvrstom tijelu. Neka se uoče tri plošna elementa $d\vec{S}_1$, $d\vec{S}_2$ i $d\vec{S}_3$ u čvrstom tijelu prema slici 8.5. Plošni su elementi smješteni u odgovarajućim koordinatnim ravninama.



Slika 8.5 Tetraedar u čvrstom tijelu

Napetost se definira kao tlak odnosno sila po jedinici površine i označit će se vektorima $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ i $\vec{t}_3$.

Neka se sile na plošne elemente označe redom kao $d\vec{F}_1$, $d\vec{F}_2$ i $d\vec{F}_3$ pa je:

$$d\vec{F}_1 = \vec{t}_1 dS_1, \quad d\vec{F}_2 = \vec{t}_2 dS_2, \quad d\vec{F}_3 = \vec{t}_3 dS_3. \quad (8.153)$$

Svaki od vektora $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ i $\vec{t}_3$ ima po tri komponente (x, y i z):

$$\begin{array}{lcl} & \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \\ x - \text{komponenta} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ y - \text{komponenta} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ z - \text{komponenta} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array} \quad (8.154)$$

pa je stanje napetosti određeno s devet veličina koje se mogu rasporediti u kvadratnu shemu. Te veličine se zovu komponentama tenzora napetosti, ranga 2.

Neka je sad plošni element $d\vec{S}$ čija se normala ne poklapa niti s jednom od koordinatnih osi, a iznosi projekcija na pojedine ravnine su upravo prije definirani plošni elementi ili:

$$dS_1 = dS \cos \alpha, \quad dS_2 = dS \cos \beta, \quad dS_3 = dS \cos \gamma. \quad (8.155)$$

Cjelokupna sila na uočeni tetraedar jednaka je nuli odnosno:

$$\vec{t} dS - \vec{t}_1 dS_1 - \vec{t}_2 dS_2 - \vec{t}_3 dS_3 = 0 \quad (8.156)$$

odnosno:

$$\vec{t} = \vec{t}_1 \cos \alpha + \vec{t}_2 \cos \beta + \vec{t}_3 \cos \gamma \quad (8.157)$$

ili po komponentama:

$$\begin{aligned} t_x &= T_{11} \cos \alpha + T_{12} \cos \beta + T_{13} \cos \gamma, \\ t_y &= T_{21} \cos \alpha + T_{22} \cos \beta + T_{23} \cos \gamma, \\ t_z &= T_{31} \cos \alpha + T_{32} \cos \beta + T_{33} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8.158)$$

U kompaktnom zapisu je:

$$\vec{t} = \tau \vec{n} \quad (8.159)$$

pri čemu je:

$$\tau = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (8.160)$$

tenzor napetosti, a $\vec{n}$ vektor normale na plošni element dS tako da je: $d\vec{S} = dS \vec{n}$. O transformaciji komponenti tenzora iz jednog u drugi sustav bit će riječi u sljedećem dijelu teksta, a u uskoj je vezi s razmatranjima krivolinijskih sustava odnosno transformaciji koordinata.

Ovdje se može samo napomenuti da se svaka transformirana komponenta tenzora ranga 2 dobiva kao linearna kombinacija svih devet komponenti u ishodnom sustavu.

U tenzorskoj je notaciji uobičajeno izostaviti znak zbrajanja (obično je to znak Σ), a zbrajanje se podrazumijeva po bilo kojem ponavljajućem indeksu koji se pojavljuje u odgovarajućim izrazima i transformacijama.

Tako se zbroj $\sum_{j=1}^n a_j x^j$ prosto označava kao:

$$a_j x^j, \quad (8.161)$$

a znači zbrajanje po (ponavljajućem) indeksu j te predstavlja konvenciju zbrajanja u tenzorskoj analizi, [26]. *Oznaka j u nadindexu nije dakle eksponent već, u tenzorskoj konvenciji, oznaka za komponentu kontarvarijantnog vektora odnosno tenzora ranga 1. Obični (pod)indeks označava komponentu kovarijantnog vektora odnosno tenzora ranga 1.* Indeksi koji se pojavljuju samo jedanput slobodni su indeksi. Treba li se negdje pojaviti potencija komponente tad se ona stavlja, na primjer, u poluokrugle zagrade i iznad desne se stavlja eksponent. Pojmovi komponenti kovarijantnog i kontarvarijantnog vektora već su uvedeni pri razmatranju općenitih krivolinijskih koordinata. Dakle, skup vektora vezanih za *tangente na lokalne koordinatne (krivulje) osi* naziva se **skupom kontravarijantnih vektora**, a skup vektora *normalnih na lokalne koordinatne plove* naziva se **skupom kovarijantnih vektora**. Tako, znači postoje dva tipa tenzora ranga 1: kontravarijantni i kovarijantni.

Neki se tenzor ranga 1 $\vec{a}$ općenito može odnositi ili na skup jediničnih kontravarijantnih ili kovarijantnih vektora. Izbor ovih jediničnih vektora nema utjecaja na sam vektor $\vec{a}$ s obzirom da se radi o tenzoru ranga 1.

Formalno, iz razmatranja transformacija općih krivolinijskih (čest je naziv i „zakrivljenih“) sustava proizlazi transformacija za diferencijal iz sustava $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ u sustav $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$:

$$x'^1 = x'^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x'^2 = x'^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, \quad x'^n = x'^n(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (8.162)$$

odnosno:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \quad (8.163)$$

što u notaciji tenzora znači zbroj 3 komponente.

Ne samo diferencijal nego i bilo koji drugi vektor $\vec{A}$ s komponentama $A^1, A^2, \dots, A^n$ koji se transformira iz sustava $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ u sustav $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ s komponentama $A'^1, A'^2, \dots, A'^n$ na takav način zvat će **kontravarijantnim vektorom** (oznaka s nadindexom) odnosno tenzorom ranga 1:

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j. \quad (8.164)$$

Vektor $\vec{A}$ s komponentama $A^1, A^2, \dots, A^n$ koji se iz sustava $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ transformira u sustav $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ s komponentama $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ na sljedeći način:

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \quad (8.165)$$

zvat će **kovarijantnim vektorom** (oznaka s podindeksom) odnosno tenzorom ranga 1.

Ako se n^2 veličina A^{jl} transformiraju iz sustava $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ u veličine A'^{ik} u sustavu $(x'^1, x'^2, \dots, x'^m)$ prema izrazu:

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} A^{jl} \quad (8.166)$$

tad se one zovu kontravarijantne komponente tenzora ranga 2, a zbrajanje je po konvenciji o zbrajanju načinjeno po indeksima l i j .

I obratno, komponente kovarijantnog tenzora ranga 2 su:

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} A_{jl}. \quad (8.167)$$

Postoje još i mješoviti tenzori, a komponente takvog tenzora ranga 2 su:

$$A'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} A^j_l. \quad (8.168)$$

Zbrajanje ili oduzimanje tenzora istog ranga načinit će se kao i u matricnoj algebri. Vanjski produkt dva tenzora je tenzor čiji je rang jednak zbroju rangova pojedinih tenzora. Treba napomenuti da nije svaki tenzor moguće predstaviti s produktom dva tenzora nižeg ranga tako da dijeljenje tenzora nije uvijek moguće. Dalje, ako se izjednače jedan kontravarijantni i jedan kovarijantni indeks, a to po konvenciji znači odmah zbrajanje što rezultira sniženjem ranga rezultirajućeg tenzora za dva u odnosu na ishodni tenzor.

Postoji još i unutarnje množenje dva tenzora. Unutarnji produkt generira se pri vanjskom množenju dva tenzora, a zatim primjenom kontrakcije na dobiveni rezultat. Unutarnji produkt tenzora i vektora je opet vektor. Kvocijentnim zakonom se za veličinu A utvrđuje da li je tenzor ili nije množenjem s proizvoljnim tenzorom. Veličina A je tenzor ako je rezultat takvog množenja opet tenzor.

Ako je $A_{ij} = A_{ji}$ pri $i \neq j$ tad se radi o simetričnom tenzoru i to bez obzira na koordinatni sustav, a takav tenzor ima 6 različitih komponenti. U slučaju da je $A_{ij} = -A_{ji}$ pri $i \neq j$, a $A_{ii} = 0$ tad je riječ o antisimetričnom odnosno koso simetričnom tenzoru koji ima tri različite komponente.

Na primjer, umnožak koso simetričnog tenzora $\mathbf{A}$ i vektora $\mathbf{x}$ je vektor $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & A_{31} \\ A_{12} & 0 & -A_{23} \\ -A_{31} & A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{31}x_3 - A_{12}x_2 \\ A_{12}x_1 - A_{23}x_3 \\ A_{23}x_2 - A_{31}x_1 \end{bmatrix} \quad (8.169)$$

što se dobiva i kao rezultat već dobro poznatog vektorskog produkta:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{x}}, \\ \bar{\mathbf{a}} &= A_{23}\bar{\mathbf{i}} + A_{31}\bar{\mathbf{j}} + A_{12}\bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{x}} &= x_1\bar{\mathbf{i}} + x_2\bar{\mathbf{j}} + x_3\bar{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (8.170)$$

I još jedan primjer za ova slučaj je Poyntingov vektor. Poyntingov vektor zapravo nije vektor u klasičnom smislu, a niti tenzor ranga 1. Naime smjer Poyntingovog vektora $\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H}$ ima isti smjer ako oba u njega ulazeća sastavna vektora promijene smjer za 180° što je razumljivo s obzirom da se radi o umnošku vektora. Obični će vektor promijeniti smjer za 180° ako mu sve tri komponente

promijene smjer također za 180° . Radi se zapravo o tom da je Poyntingov vektor antisimetrični tenzor ranga 2 koji ima samo tri komponente (kao i vektor) za razliku od simetričnog tenzora ranga 2 koji ima šest komponenti ili nesimetričnog tenzora ranga 2 koji ima devet komponenti. Operator rotacije na nekoj vektorskoj funkciji također će generirati antisimetrični tenzor. Međutim, na primjer, magnetski vektorski potencijal je vektor i ima smjer strujnice na koju se odnosi.

8.4 GAUSSOV STAVAK (TEOREM)

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} d\vec{S} = \oiint_S \vec{A} \vec{n} dS, \quad (8.171)$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na element plohe (dS), a usmjeren je iz promatranog prostora.

8.5 STOKESOV STAVAK

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \vec{n} dS = \oint_{\vec{s}} \vec{A} d\vec{s}. \quad (8.172)$$

Normala $\vec{n}$ i površina koju zatvara put $\vec{s}$ vezani su pravilom desnog vijka.

8.6 HELMHOLTZOV TEOREM

Neka se promotri opće vektorsko polje $\vec{F}$ za koje vrijedi:

$$\nabla \vec{F} = \rho \quad (8.173)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{c}, \quad (8.174)$$

gdje je ρ skalarna, a $\vec{c}$ vektorska funkcija prostornih koordinata x, y, z . Kako je divergencija rotora bilo kojeg vektora nula, to je $\nabla \vec{c} = 0$. Po Helmholtzovu se teoremu može opće vektorsko polje $\vec{F}$ prikazati kao zbroj dva vektorska polja $\vec{X}$ i $\vec{Y}$. Jedno je polje solenoidno (divergencija tog polja jednaka je nuli: $\nabla \vec{X} = 0$), a drugo je polje bezvrtložno (rotor tog polja jednak je nuli: $\nabla \times \vec{Y} = 0$), dakle:

$$\vec{F} = \vec{X} + \vec{Y}, \quad (8.175)$$

pri čemu je:

$$\bullet \quad \vec{X} \text{ solenoidno (bezizvorno polje): } \nabla \vec{X} = 0, \quad (8.176)$$

$$\bullet \quad \vec{Y} \text{ bezvrtložno (polje s izvorima i ponorima): } \nabla \times \vec{Y} = 0. \quad (8.177)$$

Uz te pretpostavke također vrijedi:

$$\vec{X} = \nabla \times \vec{A}, \quad (8.178)$$

$$\vec{Y} = -\nabla \phi, \quad (8.179)$$

a tad je prema (8.175):

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} - \nabla \phi. \quad (8.180)$$

Teorem se dokazuje tako da se utvrdi odredivost veličina $\vec{A}$ i ϕ .

Divergencija vektora $\vec{F}$ je:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A} - \nabla \phi) = -\nabla^2 \phi = -\Delta \phi = \rho \quad (8.181)$$

ili:

$$\nabla^2 \phi = -\rho. \quad (8.182)$$

Ta je jednačba poznata kao Poissonova jednačba.

Rotor vektorskog polja $\vec{F}$ je:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A} - \nabla \phi) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{c}. \quad (8.183)$$

Kako $\vec{A}$ još nije određen, može se pretpostaviti da je $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, pa se dobiva:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{c}, \quad (8.184)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_x = -c_x, \quad (8.185)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_y = -c_y, \quad (8.186)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_z = -c_z. \quad (8.187)$$

To su opet oblici Poissonove jednačbe. Za potpuni dokaz Helmholtzovog teorema treba riješiti Poissonovu jednačbu.

Prije toga će se uvesti funkcija $\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$, gdje je ε konstanta, tako da Poissonova jednačba (8.182) glasi:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (8.188)$$

8.7 RJEŠENJE POISSONOVE JEDNAČBE

Eksplicitno Poissonova jednačba u pravokutnom koordinatnom sustavu glasi:

$$\Delta \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}. \quad (8.189)$$

To je nehomogena parcijalna diferencijalna jednačba drugog reda. Rješenje će se prvo potražiti Fourierovom transformacijom. Treba riješiti problem:

- za danu funkciju $\frac{1}{\varepsilon} \rho(x, y, z)$ treba odrediti funkciju $\phi(x, y, z)$, koja zadovoljava Poissonovu jednačbu i granične uvjete tako da $\phi \rightarrow 0$, kad $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ i $z \rightarrow \infty$.

8.7.1 Fourierova transformacija

Dvije funkcije $f(x, y, z)$ i $\bar{f}(\xi, \eta, \zeta)$, koje zadovoljavaju relacije, [4]:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \eta, \zeta) e^{j(\xi x + \eta y + \zeta z)} d\xi d\eta d\zeta \quad (8.190)$$

i:

$$\bar{f}(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz \quad (8.191)$$

beskonačne su Fourierove transformacije.

Pomnoži li se sad Poissonovu jednadžbu s $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz$ i integrira od $-\infty$ do ∞ dobiva se:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \varphi e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = -\frac{\bar{\rho}(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon}. \quad (8.192)$$

Lijeva je strana jednadžbe uzimajući u obzir izraz (8.190):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) e^{j(\xi x + \eta y + \zeta z)} d\xi d\eta d\zeta \right] e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) e^{j(\xi x + \eta y + \zeta z)} (-1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = \\ & = (-1) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 + z^2) \varphi(x, y, z) e^{-j(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = \\ & = -(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (8.193)$$

dakle vrijedi uz (8.192):

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\bar{\rho}(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon}, \quad (8.194)$$

odnosno:

$$\bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\bar{\rho}(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}. \quad (8.195)$$

Sad se obje strane jednadžbe (8.195) izmnože s:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{j(\xi x + \eta y + \zeta z)} d\xi d\eta d\zeta, \quad (8.196)$$

a zatim integriraju po ξ , η i ζ od $-\infty$ do $+\infty$ nakon čega se dobiva:

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\rho}(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} e^{j(\xi x + \eta y + \zeta z)} d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.197)$$

Također je i:

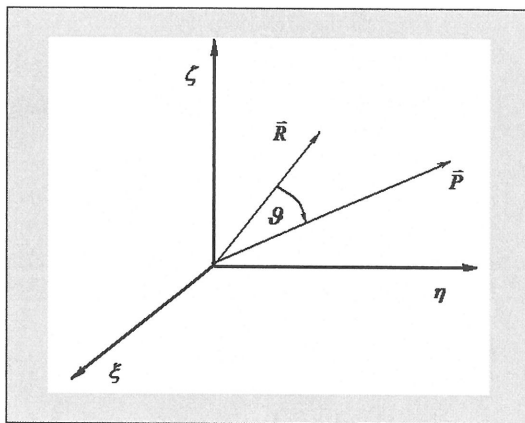
$$\bar{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', y', z') e^{-j(\xi x' + \eta y' + \zeta z')} dx' dy' dz' \quad (8.198)$$

pa je:

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y', z')}{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j[\xi(x-x') + \eta(y-y') + \zeta(z-z')]} d\xi d\eta d\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right) dx' dy' dz'. \quad (8.199)$$

Sad prvo treba riješiti integral u polukruglim zagradama izraza (8.199). Neka se sad taj integral označi s I .

Integral se može riješiti prijelazom u sustav kuglinih koordinata (sferni koordinatni sustav, slika 8.6).



Slika 8.6 Sferni koordinatni sustav – uz rješavanje integrala I u polukruglim zagradama izraza (8.199)

Neka su vektori $\bar{P}$ i $\bar{r} - \bar{r}'$:

$$\bar{P} = \xi \bar{i} + \eta \bar{j} + \zeta \bar{k} \quad (8.200)$$

te:

$$\bar{r} - \bar{r}' = \bar{R} = (x - x') \bar{i} + (y - y') \bar{j} + (z - z') \bar{k}. \quad (8.201)$$

Neka se uzme polarna os u smjeru $\vec{R}$, a tad integral glasi:

$$I = \int_{P=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{e^{jP|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\vartheta}}{P^2} P^2 dP \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = 2\pi \int_{P=0}^{\infty} \int_1^{-1} e^{jP|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\vartheta} dP (-d\cos\vartheta) =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 e^{jP|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\vartheta} dP d\cos\vartheta,$$
(8.202)

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{jP|\vec{r}-\vec{r}'|}}{jP|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{e^{-jP|\vec{r}-\vec{r}'|}}{jP|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dP.$$
(8.203)

Podintegralna je funkcija:

$$\frac{e^{jP|\vec{r}-\vec{r}'|} - e^{-jP|\vec{r}-\vec{r}'|}}{jP|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2 \frac{\text{sh } jP|\vec{r}-\vec{r}'|}{jP|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2 \frac{\sin P|\vec{r}-\vec{r}'|}{P|\vec{r}-\vec{r}'|},$$
(8.204)

a:

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{\sin P|\vec{r}-\vec{r}'|}{P|\vec{r}-\vec{r}'|} = 1.$$
(8.205)

Integral je dakle:

$$I = \frac{4\pi}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \int_0^{\infty} \frac{\sin P|\vec{r}-\vec{r}'|}{P} dP.$$
(8.206)

Prema priručniku, [25] je:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{za } a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za } a < 0 \end{cases},$$
(8.207)

pa je vrijednost traženog integrala:

$$I = \frac{2\pi^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$
(8.208)

Tražena funkcija φ je konačno:

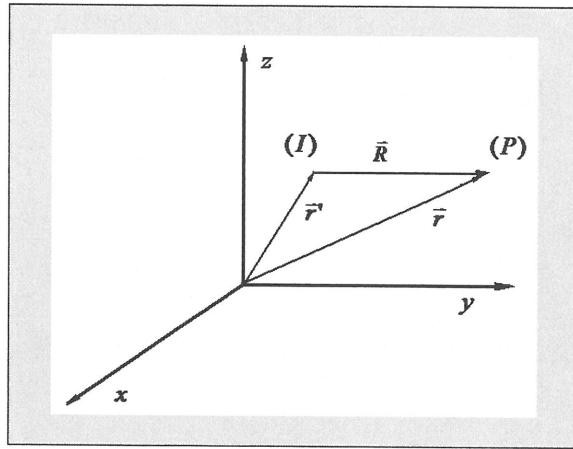
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'.$$
(8.209)

Pritom se razlikuju koordinate izvora (x', y', z') i promatrača (x, y, z) prema slici 8.7.

Uz oznake kao na slici 8.7 tražena se funkcija φ može pisati i u obliku:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (8.210)$$

U elektrostatiki funkcija $\varphi(\vec{r})$ je potencijalna funkcija, a $\rho(\vec{r}')$ je funkcija koja opisuje prostornu razdiobu naboja (poznata ili zadana).



Slika 8.7 Položaj izvora (I) i promatrača (P)

8.7.2 Slučaj točkastog naboja

Za točkasti naboj q na mjestu (x', y', z') može se naći razadioba potencijala, prema dobivenom rješenju za prostornu gustoću naboja, uvođenjem Diracove δ (delta) funkcije koja ima sljedeća svojstva:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{r}', \quad (8.211)$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = f(\vec{r}). \quad (8.212)$$

Detaljnije raspisani gornji izrazi su:

- $\delta(x - x', y - y', z - z') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = 0$ i to za:
 $x \neq x'$ i $y \neq y'$ i $z \neq z'$, (8.213)

- $\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z') \delta(x - x', y - y', z - z') dx' dy' dz' = f(x, y, z).$ (8.214)

Diracova δ -funkcija nije funkcija u konvencionalnom smislu već se naziva simboličkom funkcijom.

Poissonova jednačba za slučaj točkastog naboja u točki (x', y', z') je:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = -\frac{q}{\varepsilon} \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z'). \quad (8.215)$$

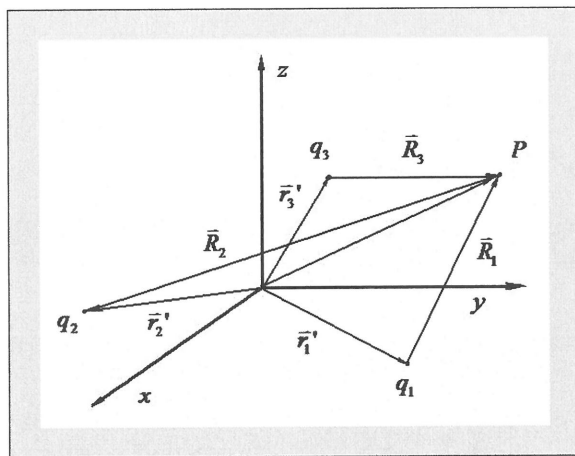
Ponovi li se raniji postupak dobiva se:

$$\begin{aligned} -(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{q}{\varepsilon} e^{-j(\xi x' + \eta y' + \zeta z')} \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \left(-\frac{q(\vec{r}')}{\varepsilon} \right) e^{-j(\xi x' + \eta y' + \zeta z')}, \end{aligned} \quad (8.216)$$

odnosno:

$$\bar{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{q}{\varepsilon} \frac{e^{-j(\xi x' + \eta y' + \zeta z')}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad (8.217)$$

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{q}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi x' + \eta y' + \zeta z')}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (8.218)$$



Slika 8.8 Slučaj tri (3) točkasta naboja

Za n točkastih naboja q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) rješenje glasi:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x_i', y_i', z_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i}. \quad (8.219)$$

Na slici 8.8 prikazan je slučaj tri (3) točkasta naboja.

8.7.3 Greenov teorem

Prema Gaussovom teoremu je:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oiint_S \vec{F} d\vec{S}, \quad (8.220)$$

gdje je $\vec{F}$ bilo koji vektor, koji je funkcija položaja, a ploha S zatvara volumen V .

Ako je $\vec{F} = \phi \nabla \psi = \phi \operatorname{grad} \psi$, gdje su ϕ i ψ skalarne funkcije, tad je uz korištenje gore navedenoga Gaussovog teorema:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iiint_V \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \psi) dV = \\ &= \iiint_V \nabla(\phi \nabla \psi) dV = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \nabla \psi) dV = \\ &= \iint_S (\phi \operatorname{grad} \psi) d\vec{S} = \iint_S (\phi \nabla \psi) d\vec{S}. \end{aligned} \quad (8.221)$$

Iz toga slijedi Greenova lema odnosno prvi Greenov identitet:

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \nabla \psi) dV = \oiint_S \phi \nabla \psi d\vec{S} \quad (8.222)$$

Slično, ako je:

$$\vec{F} = \psi \nabla \phi = \psi \operatorname{grad} \phi \quad (8.223)$$

Greenova lema daje:

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \nabla \phi) dV = \oiint_S \psi \nabla \phi d\vec{S}. \quad (8.224)$$

Odbijanjem drugog identiteta (8.224) od prvog (8.222) dobiva se drugi Greenov identitet odnosno simetrični teorem:

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oiint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) d\vec{S}. \quad (8.225)$$

8.7.4 Drugo rješenje Poissonove jednadžbe

Za zadanu razdiobu naboja $\rho(x', y', z')$ treba naći funkciju potencijala, [4], [5], [6].

Poissonova jednadžba glasi:

$$(\nabla')^2 \varphi(x', y', z') = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x', y', z'), \quad (8.226)$$

a φ i $\nabla\varphi$ nestaju ako $\vec{r}' \rightarrow \infty$.

Uzima se da je funkcija:

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{R}. \quad (8.227)$$

Za Greenov teorem treba odrediti laplasian od ψ odnosno: $(\nabla')^2\psi = \Delta'\psi$ odnosno $\nabla^2\psi = \Delta\psi$.

Zbog jednostavnosti neka se uzme da je: $\vec{r}' = 0$ ($\vec{R} = \vec{r}$), a tad je:

$$\nabla^2\psi = \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\nabla\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(-\frac{1}{r^2}\vec{r}_0\right) = \nabla\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \neq 0 \text{ ako } r \rightarrow 0. \quad (8.228)$$

Neka se pokaže da je to tako. Prvo će se izračunati integral u kugli radijusa r uz primjenu Gaussovog teorema kad $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_{r \rightarrow 0} \int \int \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dV &= \int_{r \rightarrow 0} \int \int \nabla\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV = \oint_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{r}{r^3}\right) d\vec{S} = \oint_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \vec{r}\right) dS = \\ &= \oint_{r \rightarrow 0} -\frac{1}{r^2} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = - \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = -2\pi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta = \\ &= 2\pi \cos\vartheta \Big|_0^{\pi} = 2\pi(-1-1) = -4\pi. \end{aligned} \quad (8.229)$$

To znači da je:

$$\int \int \int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dV = \int \int \int (-4\pi)\delta(0) dV = -4\pi, \quad (8.230)$$

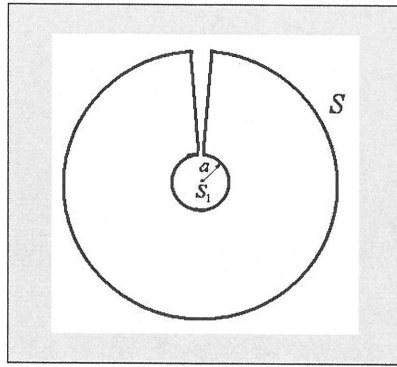
pa je prema svojstvima Diracove funkcije, (8.214):

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(0). \quad (8.231)$$

Isti rezultat se može naći u [26], s donekle drukčijim pristupom. Neka se oko singularne točke $r = 0$ načini ploha proizvoljnog oblika S . Oko točke $r = 0$ načini se mala kugla polumjera a čija je ploha S_1 kao što je to prikazano na slici 8.9 tako da se točka $r = 0$ izolira.

Izračuna li se integral po prostoru između ovih ploha V_{S-S_1} dobit će se vrijednost nula odnosno:

$$\int \int_{S+S_1} \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS = \int \int_S \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS + \int \int_{S_1} \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS = \int \int \int_{V_{S-S_1}} \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dV = 0, \quad (8.232)$$



Slika 8.9 Uz evaluaciju $\nabla\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$ pri $r = a \rightarrow 0$

s obzirom da točka $r = 0$ nije unutar plohe $S + S_1$. Iz gornjeg izraza slijedi:

$$\iint_S \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS = - \iint_{S_1} \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS. \quad (8.233)$$

Na plohi S_1 su polumjer (r) i normala na nju ($\vec{n}$):

$$r = a, \quad \vec{n} = -\vec{r} / a \quad (8.234)$$

tako da je:

$$\frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} = \frac{(-\vec{r} / a)\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}\vec{r}}{a^4} = -\frac{1}{a^2}. \quad (8.235)$$

Zato je konačno:

$$\iint_S \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS = - \iint_{S_1} \frac{\vec{n}\vec{r}}{r^3} dS = \iint_{S_1} \frac{1}{a^2} dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi \quad (8.236)$$

što je isti rezultat kao i u (8.229) samo što je u (8.229) korišten $\nabla\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$ umjesto $\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$.

Može se također pokazati da vrijedi, [4]:

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \quad (8.237)$$

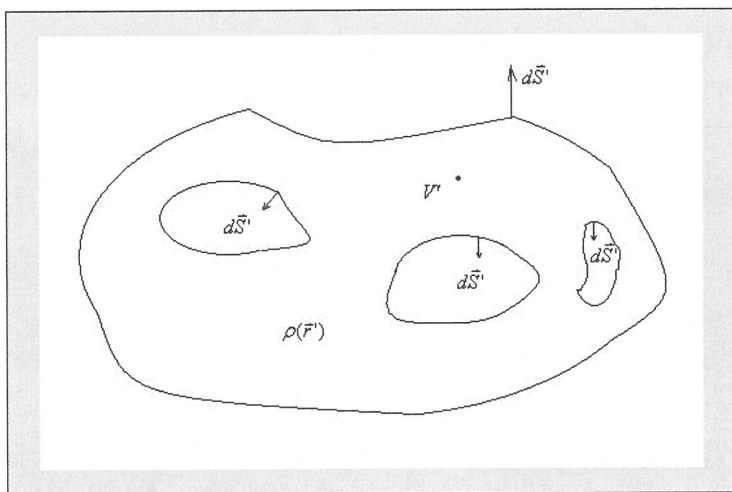
Uvrštenjem izraza (8.226), (8.227), (8.231) odnosno (8.237) u drugi Greenov identitet prema (8.225) slijedi:

$$\begin{aligned} \varepsilon \iiint_V \left\{ \phi [-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')] - \frac{1}{R} \left[-\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon} \right] \right\} dV' &= \oiint (\phi \nabla' \psi - \psi \nabla' \phi) d\vec{S}' = \\ &= -4\pi\phi(\vec{r})\varepsilon + \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \end{aligned} \quad (8.238)$$

odnosno:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oiint_{S'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{S}'. \quad (8.239)$$

Prvi član na desnoj strani jednadžbe predstavlja doprinos potencijalu od prostorne gustoće naboja u volumenu V' , dakle unutar plohe, koja zatvara V' (slika 8.10). Drugi član predstavlja doprinos potencijalu, koji dolazi od izvora, izvan volumena V' . To je rješenje homogene jednadžbe odnosno Laplaceove jednadžbe $\nabla'^2 \varphi(x', y', z') = 0$.



Slika 8.10 Uz drugo rješenje Poissonove jednadžbe

Ukoliko prostor V' nema šupljina, i ako $V' \rightarrow \infty$, φ i $\nabla' \varphi$ teže k nuli brže od $\frac{1}{R}$, [7] pa u beskonačnosti, drugi član iščezava u cijelosti i rješenje je:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (8.240)$$

8.7.5 Dokaz o jedinstvenosti rješenja

Neka se pretpostavi da postoje dva rješenja φ_1, φ_2 Poissonove jednadžbe. Neka se sad definira: $\chi = \varphi_1 - \varphi_2$. Uvrsti li se u Greenovu lemu odnosno prvi Greenov identitet prema (8.222) tako da se postavi: $\phi = \psi = \chi$, dobiva se:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \int \int (\chi \nabla^2 \chi + \nabla \chi \nabla \chi) dV = \oint_{S \rightarrow \infty} \chi \nabla \chi d\vec{S}. \quad (8.241)$$

Desni član nestaje zbog graničnih uvjeta u beskonačnosti. Kako φ_1 i φ_2 zadovoljavaju Poissonovu jednadžbu to znači da je i:

$$\nabla^2 \chi = \Delta \chi = \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (8.242)$$

pa prema lijevoj strani (8.241) konačno preostaje da je:

$$\int \int \int (\nabla \chi \nabla \chi) dV = 0, \quad (8.243)$$

a što je istinito ako je svugdje $\nabla \chi = 0$ ili $\varphi_1 - \varphi_2 = c_\varphi$. To prosto znači da se potencijali φ_1 i φ_2 mogu razlikovati samo za konstantu c_φ , a koja je također zbog graničnih uvjeta u beskonačnosti jednaka nuli.

Ovime je dokazana jedinstvenost rješenja Poissonove jednadžbe.

8.7.6 Tait i McAulayev teorem

Izvod teorema je načinjen prema [4], a teorem postavlja da je:

$$\oint_S \vec{F} \times d\vec{s} = \iint_S [(\nabla \vec{F})\vec{n} - \nabla(\vec{F}\vec{n})] dS. \quad (8.244)$$

Da se dokaže da je tako, prvo se desna strana pomnoži s konstantnim vektorom $\vec{c}$ pa se dobiva:

$$\vec{c} \oint_S \vec{F} \times d\vec{s} = \oint_S \vec{c}(\vec{F} \times d\vec{s}) = \oint_S (\vec{c} \times \vec{F}) d\vec{s}. \quad (8.245)$$

$$\oint_S (\vec{c} \times \vec{F}) d\vec{s} = \iint_S \text{rot}(\vec{c} \times \vec{F}) d\vec{S} = \iint_S \nabla \times (\vec{c} \times \vec{F}) \vec{n} dS. \quad (8.246)$$

Podintegralni se dio razvije koristeći formulu za rotor vektorskog produkta dviju veličina danu u prethodnom dijelu, izraz (8.84.1):

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\vec{B}) - (\vec{A}\nabla)\vec{B} = (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A} \quad (8.247)$$

tako da se zamjenom $\vec{A} = \vec{c}$, $\vec{B} = \vec{F}$ dobiva:

$$\nabla \times (\vec{c} \times \vec{F})\vec{n} = [(\vec{F}\nabla)\vec{c} - (\vec{c}\nabla)\vec{F} + \vec{c}(\nabla\vec{F}) - \vec{F}(\nabla\vec{c})]\vec{n}. \quad (8.248)$$

Prvi i četvrti član jednaki su nuli s obzirom da se operacija deriviranja primjenjuje na konstantni vektor $\vec{c}$ pa preostaju samo treći i drugi član, odnosno:

$$\nabla \times (\vec{c} \times \vec{F})\vec{n} = [\vec{c}(\nabla\vec{F}) - (\vec{c}\nabla)\vec{F}]\vec{n} = \vec{c}[(\nabla\vec{F})\vec{n} - (\nabla\vec{F}\vec{n})]. \quad (8.249)$$

Vrati li se na sami početak na izraz (8.245) te se u njemu podintegralna funkcija člana na desnoj strani zamijeni s (8.249) konačno je:

$$\begin{aligned} \vec{c} \oint_S \vec{F} \times d\vec{s} &= \vec{c} \iint_S [(\nabla\vec{F})\vec{n} - \nabla(\vec{F}\vec{n})] dS, \\ \oint_S \vec{F} \times d\vec{s} &= \iint_S [(\nabla\vec{F})\vec{n} - \nabla(\vec{F}\vec{n})] dS. \end{aligned} \quad (8.250)$$

S obzrom da je konstanta c sasvim proizvoljna izvod dokaza je s tim završen.

Teorem se koristi pri izvodu magnetskog dipolnog momenta i magnetskog skalarnog potencijala na temelju Biot - Savartovog zakona u točki 4.2.

8.8 OSNOVE VARIJACIJSKOG RAČUNA

Postavlja se zadaća pronaći zakonitost odnosno funkciju $y(x)$ tako da funkcional:

$$J = \int F(y, y', x) dx \quad (8.251)$$

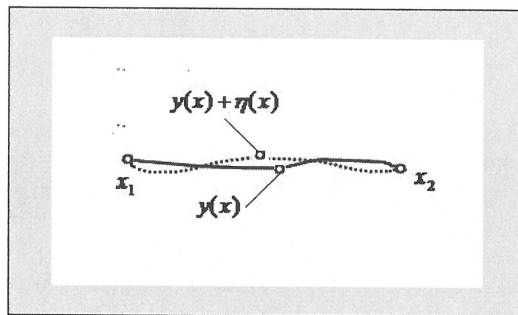
bude minimalan ili maksimalan. Hoće li ekstrem biti minimum ili maksimum ovisit će o Lagrangeovim uvjetima, a koji se ispituju preko predznaka druge derivacije podintegralne funkcije u (8.251) $F''_{y'y'}$. Na primjer, za slučaj da je $F''_{y'y'} \geq 0$ radi se o minimumu:

$$\min_{y(x)}(J) = \min_{y(x)} \left(\int F(y, y', x) dx \right) \quad (8.252)$$

u području od x_1 do x_2 , a uz uvjet da je u krajnjim točkama:

$$\delta(y(x_1)) = \eta(x_1) = 0, \quad \delta(y(x_2)) = \eta(x_2) = 0 \quad (8.253)$$

gdje je $\delta(y(x)) = \eta(x)$ varijacija funkcije $y(x)$, također funkcija koja zadovoljava gore navedeni uvjet kao što prikazuje slika 8.11, [33], [32], [29], [30].



Slika 8.11 Varijacija funkcije $y(x)$

Za slučaj jedne dimenzije postupak teče na sljedeći način. Potražiti će se prva varijacija funkcionala J :

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int F(y, y', x) dx = \\ &= \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \\ &= \int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \right] dx. \end{aligned} \quad (8.254)$$

Provest će se parcijalna integracija ($\int u dv = uv - \int v du$) na drugom članu pri čemu je:

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx, \quad (8.255)$$

$$dv = d(\delta y), \quad v = \delta y.$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \delta y. \quad (8.256)$$

Sad je cijeli izraz za varijaciju δJ :

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) dx \delta y. \quad (8.257)$$

Ako se sad iskoristi uvjet $\delta(y(x_1)) = 0$, $\delta(y(x_2)) = 0$ vidi se da prvi član u ovom izrazu postaje jednak nuli pa onda ostaje:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) dx \delta y. \quad (8.258)$$

Stacionarna vrijednost funkcionala J nastupa za $\delta J = 0$. Za daljnji izvod potrebna je primjena sljedećeg teorema, [32], [33] koja se ovdje navodi bez dokazivanja. Ako za neku neprekinutu funkciju $f(x)$ vrijedi da je:

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0 \quad (8.259)$$

za svaku neprekinutu funkciju $\eta(t)$ za koju je $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tad je u cijelom intervalu $x \in [a, b]$ $f(x) = 0$.

U konkretnom slučaju to znači da integrand gornjeg izraza mora biti jednak nuli bez obzira na granice x_1 i x_2 pa se dobiva diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (8.260)$$

Ova se diferencijalna jednadžba u literaturi zove **Euler-Lagrangeova diferencijalna jednadžba i temeljna je jednadžba varijacijskog računa**. Za viševarijabilni odnosno višedimenzijjski slučaj:

$$J = \int_{\Omega} F(y, x_1, x_2, \dots, x_n, y_{x_1}, y_{x_2}, \dots, y_{x_n}) d\Omega \quad (8.261)$$

to bi bio sustav parcijalnih Euler-Lagrangeovih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_i}} \right) = 0. \quad (8.262)$$

Dalje, ako je integrand u funkcionalu funkcija ne samo prve y' nego i druge derivacije y'' odnosno:

$$J = \int F(y, y', y'', x) dx \quad (8.263)$$

tad je Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0. \quad (8.264)$$

Beltramijev identitet

Totalna derivacija integranda u J za jednovarijabilni slučaj je, [33]:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (8.265)$$

Pomnoži li se Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (8.260)$$

s y' dobiva se:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right). \quad (8.266)$$

Ovaj se sad izraz uvrsti u totalnu derivaciju dF/dx , prema (8.265) pa se dobiva:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (8.267)$$

S obzirom da prva tri člana (8.267) čine totalnu derivaciju od $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$ po x odnosno:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (8.268)$$

to se dobiva:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (8.269)$$

Beltramijev se identitet iz (8.269) dobiva prosto za slučaj da nema izravne ovisnosti $\partial F / \partial x$ (ili: $\partial F / \partial x = 0$):

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c. \quad (8.270)$$

U slučaju da treba minimizirati:

$$J = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (8.271)$$

uz ograničenje:

$$H = \int_a^b G(y, y', x) dx = \text{const} \quad (8.272)$$

tad u Euler-Lagrangeovu jednadžbu (8.260) treba umjesto $F(y, y', x)$ uvrstiti:

$$F_1(y, y', x) = F(y, y', x) - \lambda G(y, y', x), \quad (8.273)$$

te izvesti diferencijalnu jednadžbu kao da se radi o slučaju bez ograničenja. Ovdje je λ Lagrangeov množitelj, a određuje se na temelju ograničenja $H = \int_a^b G(y, y', x) dx = \text{const}$ i uvjeta u krajnjim točkama a i b .

8.8.1 Primjeri

8.8.1.1 Drugi Newtonov zakon

Ako se za integrand F u funkcionalu J (8.251) uvrsti razlika kinetičke i potencijalne energije pri čemu je neovisna varijabla $x = t$ vrijeme, dobiva se:

$$F(y, y', t) = T - V = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - V(y) = \frac{m}{2} y'^2 - V(y). \quad (8.274)$$

Uvrštenje u Euler-Lagrangeovu jednadžbu (8.260) daje:

$$-\frac{\partial V}{\partial y} - m \frac{d}{dt} y' = -\frac{\partial V}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y} - m y'' = 0, \quad (8.275)$$

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2} = m y''.$$

gdje je sila F promjena potencijalne energije po prostornoj koordinati:

$$F = -\frac{\partial V(y)}{\partial y}. \quad (8.276)$$

Funkcional J koji odgovara izrazu (8.274 u literaturi se zove akcija, a 2. Newtonov zakon posljedica je načela minimalne akcije (djelovanja), [8].

8.8.1.2 Najkraća krivulja između dvije točke u ravnini

Zadaća je naći najkraću krivulju koja spaja dvije točke a i b u ravnini odnosno minimizirati J :

$$J = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8.277)$$

Može se odmah primijeniti Beltramijev identitet, (8.270) pa je:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c, \quad \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c, \quad (8.278)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c, \quad y' = c_1, \quad y = c_1 x + c_2.$$

Dakle, tražena je krivulja pravac čija je jednačica:

$$y = c_1 x + c_2. \quad (8.279)$$

8.8.1.3 Brahistokrona

Zadaća je naći oblik krivulje gibanja koje nastaje iz mirovanja silom gravitacije tako da se put iz jedne (P_1) u drugu točku (P_2) prijeđe za najkraće moguće vrijeme.

Brzina gibanja je:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}, \quad (8.280)$$

odakle odmah slijedi:

$$t_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v(t)}. \quad (8.281)$$

Iz jednakosti kinetičke i potencijalne energije dobiva se (poznata formula za brzinu istjecanja tekućine):

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgy, \quad v = \sqrt{2gy}. \quad (8.282)$$

Također je dalje:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (8.283)$$

pa je:

$$t_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v(t)} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \quad (8.284)$$

odakle se zaključuje da je:

$$F(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}. \quad (8.285)$$

S obzirom da nema izravne ovisnosti $\partial F / \partial x$ može se odmah primijeniti Beltramijev identitet (8.270), a nakon izračuna $\partial F / \partial y'$ se dobiva:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = c. \quad (8.286)$$

Sređivanjem člana u sredini dobiva se:

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} (1 + y'^2 - y'^2) = c, \quad (8.287)$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = \frac{1}{2gc^2} = k^2.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe u parametarskom obliku ($y = k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$) je:

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\vartheta - \sin \vartheta), \quad (8.288)$$

$$y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \vartheta). \quad (8.289)$$

što predstavlja jednadžbu cikloide koja se dobiva kao krivulja koju opisuje točka na kružnici koja se kotrlja duž x osi.

8.8.1.4 Krivulja provjesa teškog lanca

Zadaća je naći krivulju provjesa teškog lanca s konstantnom linijskom gustoćom mase ρ_l odnosno $dm = \rho_l dl$ za zadanu duljinu lanca l_0 kao ograničenjem prema (8.272) i (8.273):

$$H = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{const} = l_0, \quad G(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8.290)$$

Funkcija koju treba minimizirati je gravitacijska potencijalna energija odnosno:

$$J = g\rho_l \int_a^b y dl = g\rho_l \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad F(x, y, y') = g\rho_l y \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8.291)$$

Funkcija $F_1(y, y', x)$ se komponira prema (8.273):

$$F_1(y, y', x) = (\rho_l g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}, \quad (8.292)$$

a može se odmah koristiti Beltramijev identitet (8.270) s obzirom da nema izravne ovisnosti $\partial F_1 / \partial x$ pa je:

$$(\rho_l g y - \lambda) \left(\frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = c \quad (8.293)$$

odnosno:

$$y'^2 = \left(\frac{y - \lambda_1}{C} \right)^2 - 1, \quad C = c / (\rho_l g), \quad \lambda_1 = \lambda / (\rho_l g). \quad (8.294)$$

Uz zamjenu:

$$y - \lambda_1 = C h z \quad (8.295)$$

dobiva se:

$$z = x / C + c_1 \quad (8.296)$$

što konačno daje ovisnost tipa kosinus hiperbolni o x odnosno lančanu krivulju:

$$y = \lambda_1 + C ch(x / C + c_1). \quad (8.297)$$

8.8.1.5 Snellov (Snelliusov) zakon loma

Brzina svjetlosti u sredstvu (i) koji ima indeks loma n_i iznosi $v_i = c / n_i$. Fermat-ovo načelo u optici utvrđuje da se zraka svjetlosti kroz sredstvo prostire po najbržoj krivulji (minimalno vrijeme prostiranja) odnosno:

$$t = \min \left(\sum_{i=1}^m \frac{l_i}{v_i} \right) = \frac{1}{c} \min \left(\sum_{i=1}^m n_i l_i \right) \quad (8.298)$$

gdje su: l_i i $v_i = c / n_i$ prijeđeni put odnosno brzina u sredstvu te n_i indeks loma sredstva i . Problem je srodan problemu s brahistokronom.

U tom se sad smislu može definirati duljina optičkog puta u nehomogenom, ali izotropnom sredstvu za prostiranje po krivulji $y(x)$ kao:

$$J = \int_a^b n(l) dl = \int_a^b n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad F(x, y, y') = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (8.299)$$

umjesto prostorne duljine odnosno duljine luka krivulje u ravnini: $l : J = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Ovdje se indeks loma $n(x, y)$ kontinuirano mijenja od točke do točke. Dopusti li se da je indeks loma $n(x, y)$ funkcija samo y odnosno $n = n(y)$ tad se može odmah primijeniti Beltramijev identitet (8.270) tako da se uvrsti:

$$F(x, y, y') = n(y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (8.300)$$

u Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = n(y) \sqrt{1 + y'^2} - n(y) y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c, \quad (8.301)$$

$$n(y) \frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = n(y) \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

dobiva se:

$$n(y) \cos \alpha = c, \quad (8.302)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Ovdje kut α kut tangente na krivulju prostiranja svjetlosti $y(x)$, a ovaj se posljednji izraz može izraziti i pomoću kuta između tangente i normale tako da je: $\vartheta = \pi/2 - \alpha$:

$$n(y) \sin \vartheta = c. \quad (8.303)$$

Posljednja je relacija zapravo drugi Snelliusov zakon, a poznatiji je zapis za dva sredstva:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2, \quad \sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_2 = n_2 / n_1 = v_1 / v_2 \quad (8.304)$$

gdje su kutovi ϑ_1 i ϑ_2 upadni odnosno kut loma (refrakcije).

8.8.1.6 Primjer iz elektrostatičke

Ako postoje naboji samo na vodičima (a ne i u prostoru raspodijeljeni naboj) energija elektrostatičkog polja je :

$$W_e = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_V E^2 dV = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_V (\nabla \varphi)^2 dV \quad (8.305)$$

gdje je φ potencijal. Ako su vodiči priključeni na napon U tad se ista energija izražava i pomoću kapaciteta:

$$W_e = \frac{CU^2}{2} \quad (8.306)$$

pa se izračun minimuma elektrostatičke energije svodi na izračun minimalnog kapaciteta C . Međutim, za razliku od dosadašnjeg pristupa traženja zakonitosti na primjer $y(x)$ uz uvjet minimuma funkcioanla ovdje će se oblik zakonitost pretpostaviti unaprijed i to način da se osigura praktična izvedivost računskog postupka, a sama minimizacija izvesti na uobičajeni izravni način.

Ako je funkcija razdiobe potencijala između vodiča poznata tad nije problem izračunati kapacitivnost konfiguracije pomoću gore navedene elektrostatičke energije uz određena izvedbena ograničenja računskog postupka na koja će se poslije dati osvrt. Ovdje će se pretpostaviti da točni oblik funkcije nije poznat. Umjesto toga pretpostavit će se da je potencijal kao funkcija prostornih koordinata zadan u polinomskom obliku odabranog reda, ali s nepoznatim koeficijentima. Minimizacijom elektrostatičke energije odnosno kapaciteta izračunat će se iznos kapaciteta suosnog (koaksijalnog) kabela s unutarnjim vodičem polumjera r_1 te s vanjskim vodičem polumjera r_2 , [8], (slika 2.22).

Dakle, neka se model potencijala φ pretpostavi, na primjer, kao polinom trećeg reda i to po veličini ρ :

$$\rho = (r - r_1)/(r_2 - r_1) = (r - r_1)/d_0, \quad d_0 = r_2 - r_1, \quad (8.307)$$

a koja je zapravo normirana veličina $r - r_1$ s razmakom između cilindara $r_2 - r_1$ pa je potencijal:

$$\varphi = U(1 + p_1\rho + p_2\rho^2 + p_3\rho^3). \quad (8.308)$$

Iz pretpostavljene zakonitosti potencijala proistječe i model za jakost električnog polja:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{d\varphi}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -U \frac{\partial \rho}{\partial r} (p_1 + 2p_2\rho + 3p_3\rho^2) = -\frac{U}{d_0} (p_1 + 2p_2\rho + 3p_3\rho^2) \quad (8.309)$$

gdje je skup koeficijenata polinoma:

$$p^T = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \quad (8.310)$$

tek treba odrediti.

Kvadrat jakosti električnog polja (8.309) je:

$$E^2 = \frac{U^2}{d_0^2} [p_1^2 + 4p_1p_2\rho + (6p_1p_3 + 4p_2^2)\rho^2 + 12p_2p_3\rho^3 + 9p_3^2\rho^4] = \frac{U^2}{d_0^2} P^2(\rho), \quad (8.311)$$

a koji će se potom uvrstiti u izraz za energiju elektrostatičkog polja (8.305).

Diferencijal volumena je $dV = 2\pi r dr = 2\pi d_0(d_0\rho + r_1)d\rho$ pa će se za izračun W_e integrirati po varijabli r u granicama od r_1 do r_2 odnosno po varijabli ρ u granicama od 0 do 1.

S kvadratom jakosti polja E^2 osigurana je nenegativnost energije W_e , ali nije izbjegnut slučaj kad može biti $W_e = 0$ što se može dogoditi čak i za trivijalni slučaj koeficijenata polinoma $p^T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = [0 \ 0 \ 0]$ s obzirom na predloženi model jakosti polja prema (8.307), a koji je proizašao iz polinomske ovisnosti potencijala φ o ρ . Slučaj $W_e = 0$ može se naravno dogoditi i za beskonačno drugih kombinacija koeficijenata polinoma $p^T = [p_1 \ p_2 \ p_3]$.

Da bi se to izbjeglo postaviti će se ograničenja na skup parametara:

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad (8.312)$$

čime je osigurano da barem jedan od parametara $p^T = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ bude različit od nula. Tim se također jamči da minimalni iznos kapaciteta ne bude jednak nuli pri konačno velikom kvocijentu $k = r_2 / r_1$. Broj parametara uz ovo ograničenje efektivno je smanjen za jedan.

Energija elektrostatičkog polja W_e se sad može izraziti kao:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{2\pi\epsilon U^2}{2} d_0^2 \int_0^1 [P^2(\rho)(\rho d_0 + r_1)] d\rho = \pi\epsilon U^2 \int_0^1 \left[P^2(\rho)\rho + P^2(\rho)\frac{r_1}{d_0} \right] d\rho = \\ &= \pi\epsilon U^2 \int_0^1 \left[P^2(\rho)\rho + P^2(\rho)\frac{r_1}{d_0} \right] d\rho = \pi\epsilon U^2 \int_0^1 \left[P^2(\rho)\rho + \frac{P^2(\rho)}{k-1} \right] d\rho \end{aligned} \quad (8.313)$$

pri čemu je:

$$k = r_2 / r_1, \quad r_1 / d_0 = 1/(k-1). \quad (8.314)$$

Izjednačenjem izraza (8.313) s izrazom (8.306) dobiva se funkcija koju treba minimizirati po p :

$$F(p) = \frac{C(p)}{l} = 2\pi\epsilon \int_0^1 \left[P^2(\rho)\rho + \frac{P^2(\rho)}{k-1} \right] d\rho = 2\pi\epsilon(I_1 + I_2), \quad (8.315)$$

a kao što se i vidi to je kapacitet po jedinici duljine.

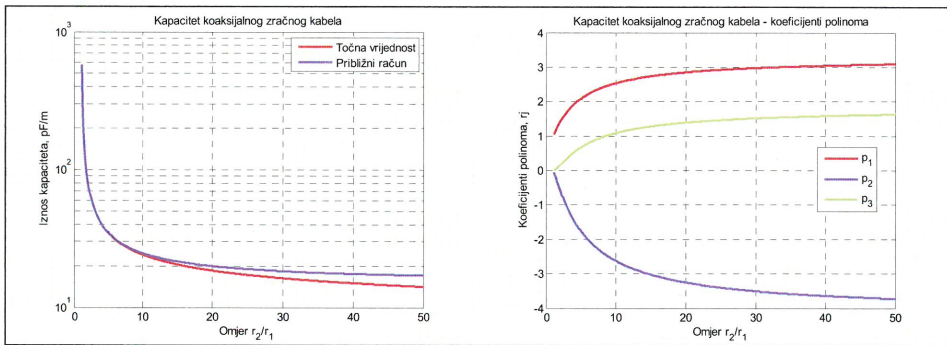
Prvi određeni integral I_1 jednak je:

$$I_1 = \int_0^1 P^2(\rho) \rho d\rho = \frac{p_1^2}{2} + \frac{4p_1p_2}{3} + \frac{6p_1p_3 + 4p_2^2}{4} + \frac{12p_2p_3}{5} + \frac{9p_3^2}{6}, \quad (8.316)$$

a drugi:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{P^2(\rho)}{k-1} d\rho = \frac{1}{k-1} \left(p_1^2 + 2p_1p_2 + \frac{6p_1p_3 + 4p_2^2}{3} + 3p_2p_3 + \frac{9p_3^2}{5} \right). \quad (8.317)$$

Za slučaj da je dielektrik zrak ($\varepsilon = \varepsilon_0$) na dolje priloženim slikama (slika 8.12 lijevo i desno) dani su rezultati proračuna odnosno minimizacije navedene funkcije $F(p) = C(p)/l$ po skupu koeficijenata polinoma $p^T = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ za različite kvocijente polumjera vanjskog i unutarnjeg vodiča $k = r_2/r_1$ u rasponu od 1.1 do 50. Na slici 8.12, lijevo dani su rezultati za 'točnu' ($2\pi\varepsilon/\ln(r_2/r_1)$) i približnu vrijednost kapaciteta pa se vidi da je do kvocijenta polumjera $k = r_2/r_1 = 10$ slaganje rezultata izvanredno, a tek se dalje pojavljuju značajnija odstupanja. Na slici 8.12 desno dani su iznosi koeficijenata polinoma za različite iznose kvocijenta polumjera vodiča k .



Slika 8.12 'Točna' i približna vrijednost kapaciteta susosnog kabela (lijevo) te iznosi koeficijenta polinoma za različite iznose kvocijenta polumjera vodiča k (desno)

Naravno, daljnja poboljšanja su moguća u smislu izbora matematičkog modela potencijala odnosno jakosti magnetskog polja, zatim varijabilnih rubnih uvjeta kako bi se obuhvatile vrlo komplicirane geometrijske konfiguracije, a ne samo ovaj školski poznati primjer.

9 LITERATURA

1. James Clerk Maxwell, M.A.: A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I, Clarendon Press Series, Oxford, 1873
2. James Clerk Maxwell, M.A.: A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II, Clarendon Press Series, Oxford, 1873
3. Tomo Bosanac: Teoretska elektrotehnika, Tehnička knjiga, GZH, Zagreb 1973.
4. Nunzio Tralli: Classical Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963
5. Zijad Haznadar, Željko Štih: Elektromagnetizam 1, Školska knjiga, GZH, Zagreb 1997.
6. Zijad Haznadar, Željko Štih: Elektromagnetizam 2, Školska knjiga, GZH, Zagreb 1997.
7. Zijad Haznadar, Elektromagnetska teorija i polja, Element, Zagreb, 2001.
8. Richard Feynman: Lectures on Physics Vol 2, Addison-Wesley, Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, 1964
9. Edward M. Purcell: Elektricitet i magnetizam, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988. (Svezak 2 udžbenika Sveučilišta u Berkely-u)
10. E.Zentner, Radiokomunikacije, Školska knjiga, Zagreb, 1980.
11. Sead Berberović: Teorijska elektrotehnika, Odabrani primjeri, Graphis, Zagreb, 1998.
12. Josip Matjan: Auditorne vježbe iz teorijske elektrotehnike, Sveučilište u Zagrebu, Liber, Zagreb 1975.
13. Hermann A. Haus, James R. Melcher: Electromagnetic Fields and Energy, MIT, 1998
14. Richard Fitzpatrick: Advanced Classical Electromagnetism, The University of Texas at Austin, 1996
15. E. C.Jordan, K.G.Balmain, Electromagnetic waves and radiating systems, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J, 1968
16. Ivan Supek: Teorijska fizika i struktura materije, I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
17. Danilo Blanuša: Promjenjiva magnetska polja, Sveučilište J.J. Strossmayer u Osijeku, Priedio Ivan Ivanšić, Grafika, Osijek 2006.
18. Wolfgang Pauli: Theory of Relativity, Dover Publications Inc., New York, 1981. prema originalu „Relativitätstheorie“, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Vol. V19, B.G. Teubner, Leipzig, 1921.
19. J. Pierce: Almost all about waves, The MIT Press Cambridge, Massachusetts and London, 1974
20. I. E. Tamm: Fundamentals of the Theory of Electricity, Mir Publishers, Moscow, 1979
21. R. F. Harrington, Time-harmonic electromagnetic fields, McGraw-Hill, New York, 1961
22. J. Kraus, Electromagnetics, McGraw Hill, N.Y. 1984
23. K. M. Polivanov: The Theory of Electromagnetic Field, Mir Publishers Moscow, 1983
24. Branko Popović: Elektromagnetika, Akademska misao, Beograd 2004.
25. Bronštejn, Sjemjondjajev, Musiol, Mühlig: Matematički priručnik, Školska knjiga, Zagreb, 2006.
26. Murray R. Spiegel: Vector Analysis, Schaum's series, McGraw-Hill Inc., London 1974
27. Joseph Kolecki: An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering, NASA/TM -2002-211716, Cleveeland, Ohio, September 2002

28. B. M. Budak, S. V. Fomin: Multiple Integrals, Field Theory and Series, Mis Publishers, Moscow, 1978
29. Myshkis A.D.: Advanced Mathematics for Engineers, Mir Publishers, Moscow, 1975
30. Zeldovich Ya.,B., Myshkis A. D.: Elements of Applied Mathematics, Mir Publishers, Moscow, 1976
31. Amanogawa, Digital Maestro Series, 2008:
<http://www.amanogawa.com/archive/ObliqueLossy/ObliqueLossy-2.html>
32. Ivan Slapničar: Matematika 2, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2008., <http://www.fesb.hr/mat2>
33. Wolfram MathWorld: Calculus of Variations, 2009, <http://mathworld.com/>
34. Tomo Bosanac: Teoretska elektrotehnika, I dio, Elektromagnetska polja, Zagreb 1963. (skripta)
35. Danilo Blanuša: Relativistička transformacija elektromagnetskog polja, SEITH „Elektrotehnika“, 3/1969, Elektrotehnički fakultet Zagreb, Zagreb, 1969.
36. J. H. Chow: Time-Scale Modeling of Dynamic Networks with Applications to Power Systems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982
37. Muharem Mehmedović: Identifikacija parametara sustava regulacije uzbude sinkronih strojeva, doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Zagreb, Zagreb, ožujka 1995.

10 KAZALO

- Antena
 - impedantni dijagram, 342
 - napajanje, 341
 - štapna, 330
- Baždarenje
 - Coulombovo, 205
 - Lorentzovo, 202
- Brzina
 - čela vala, 236
 - konstantne faze, 242
- Cilindrični vodič
 - beskonačno dugi, 13
- Dielektrična kugla u homogenom električnom polju, 93
- Dielektrična sredstva
 - dipol, 62
 - dipolni moment, 62
- dielektričnost
 - relativna, 71
- Dielektričnost, 5
- Difuzija, 275
- Dipol
 - Hertzov, 319
 - magnetski, 144
- Dopplerov efekt, 365
- Dubina prodiranja vala, 242
- Dva točkasta naboja, 39
- Dvodimenzionalni problemi potencijala, 53
- Električno polje
 - mnoštvo dipola, 66
 - na granici dvaju sredstava, 72
- Energija
 - dvožičnog voda, 173
 - električnog dipola, 66
 - elektrostatičkog polja, 35, 37
 - magnetska, 155
 - magnetska dviju petlji, 151
 - magnetskog polja, 153
 - prostorna gustoća elektrostatičkog polja, 37
 - strujanje, 248
- Faktor
 - refleksije, 285
 - transmisije, 285
- Funkcija
 - analitička, 53
 - Diracova, 376
- Funkcije
 - Besselove, 312
 - Neumanove, 312
 - vektorske u krivolinijskom koordinatnom sustavu, 349
- Geometrija
 - euklidska, 344
- Gustoća elektrostatičke energije
 - plošna, 74
- Gustoća naboja
 - plošna, 14
 - prostorna, 71, 80
- Hertzov dipol
 - Azimutalna komponenta jakosti električnog polja, 324
 - Azimutalna komponenta jakosti magnetskog polja, 323
 - emisijski dijagram, 327
 - energija isijavanja, 326
 - otpor isijavanja, 328
 - Radijalna komponenta jakosti električnog polja, 323
 - Radijalna komponenta jakosti magnetskog polja, 322
 - Tangencijalna komponenta jakosti električnog polja, 323
 - Tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja, 323
- Histereza, 163
- Identitet
 - Beltramijev, 386, 388, 389, 390, 391
 - Greenov 1., 378
 - Greenov 2., 378
- Impedancija

- koncentrirana, 283
- valna, 237
- Impuls
 - elektromagnetski, 218
- Indukcija
 - magnetska, 109, 134, 204
- Induktivitet
 - prstena kružnog presjeka, 174
 - prstena pravokutnog presjeka, 177
 - unutarnji, 158
 - vanjski, 151
 - vodiča u toru, 220
- Integral
 - kosinus, 339
- Izolatori, 245
- Jakost električnog polja
 - normalna komponenta, 72
 - tangencijalna komponenta, 73
- Jakost magnetskog polja
 - normalna komponenta, 182
 - tangencijalna komponenta, 182
- Jednadžba
 - Besselova diferencijalna, 311
 - Euler- Lagrangeova, 385
 - Helmholtzova, 231
 - Poissonova, 10
- Jednadžbe
 - Fresnelove, 253
 - Maxwellove, 187
 - valne, 187, 198, 199
- Kapacitet
 - dvaju beskonačno dugih cilindara, 51
 - dvije koncentrične kugle, 28
 - dvije paralelne ploče, 29
 - parcijalni, 25
 - suosnog kabla, 29
 - štapne antene, 106
 - usamljene kugle, 26
- Kapacitivni koeficijenti, 24
- Koeficijenti
 - metrički, 347
 - metrički, cilindrični sustav, 360
 - metrički, sferni sustav, 362
- Koeficijenti potencijala, 23
- Komponente vektora
 - kontravarijantne, 348
 - kovarijantne, 348
- Konstanta
 - fazna, 237
 - prigušna, 237
 - valna, 234
- Koordinate
 - krivolinijske koordinate, 345
 - krivolinijske ortogonalne, 345
- Koordinatni sustav
 - cilindrični sustav, 360
 - pravokutni Kartezijev, 352
 - sferni sustav, 362
- Krivolinijski sustav
 - divergencija, 349
 - gradijent, 349
 - plošni element, 348
 - prostorni element, 349
 - rotacija, 350
- Krug
 - istosmjerne struje, 188
 - magnetski, nelinearni, 162
- Kut
 - prostorni, 16
- Linijski naboj i vodljivi cilindar, 47
- Magnetska indukcija
 - normalna komponenta, 181
 - tangencijalna komponenta, 183
- Magnetske veličine na granici dvaju sredstava, 181
- Masa i energija, 123
- Materijali
 - dijamagnetski, 149
 - feromagnetski, 149
 - paramagnetski, 149
- Međuintuktivitet, 150
 - dvaju prstenova, 178
- Metode
 - rješavanje elektrostatičkih problema
odslikavanjem, 39
- Metrika
 - diferencijalna, 344
 - linearna, 344
- Moment
 - električni na dipol, 65

- Multiplikator
 - Lagrangeov, 387
- Naboj
 - kratki linijski, 100
 - točkasti, 5, 7, 9, 12, 39
- Naboj i dvije beskonačne tanke ploče, 42
- Naboj točkasti, 12
- Naprezanja
 - u dielektričnom sredstvu, 79
- Naprezanje
 - električno, na granici dvaju sredstava, 84
 - u elektromagnetskom polju, 216
- Odslikavanje
 - na dielektričnoj ravni, 86
 - u magnetskom poluprostoru, 184
- Operator
 - D'Alembertov, 204
 - Laplaceov, 201
 - nabla, 228
- Permeabilnost
 - magnetska, 148
- Poissonova jednadžba
 - dokaz o jedinstvenosti rješenja, 382
 - drugo rješenje (Greenovim funkcijama), 378
 - Helmholtzov teorem, 372
 - rješenje Fourierovom transformacijom, 372
 - točkasti naboj, 376, 377
- Pokus
 - Michelson - Morleyev, 111
- Polarizacija
 - električna, 68
 - eliptička, 244
 - kružna, 244
 - linearna, 244
 - magnetska, 148
- Polarizacija
 - vala, 244
- Polje
 - električno, 6
 - električno, jakost, 6, 10, 26, 28, 64, 91, 95, 96, 200, 204, 300, 311, 314, 315, 323, 331, 332, 336, 392
 - električno, štapna antena, sinusna razdioba, 337
 - elektrostatičko, 5
 - magnetsko, 148
 - magnetsko, jakost, 141, 184, 297, 298, 299, 300, 305, 310, 312, 313
 - na granici, elektromagnetsko, 250
 - u sredstvu s gubicima, 240
- Potencijal, 7, 8
 - Hertzov, 207, 319
 - magnetski vektorski, 144, 150
 - magnetski, skalarni i vektorski, 140
 - razlika potencijala, 7
 - vektorski, magnetski, 320
- Potencijali
 - elektromagnetski, 187, 199
 - retardirani, 207
- Pregled Maxwellovih jednadžbi, 196
- Preslikavanje
 - konformno, 58
- Prijenosnici energije, 266
- Prostor
 - matematički, 344
 - Minkowskog, 119
- Prvokutni Kartezijev sustav
 - vektorske funkcije složenih veličina, 355
- Razdioba naboja po vodiču, 16
- Relacije
 - građe, 197
 - građe (konstitucijske relacije), 198
- Relaksacija naboja, 191
- Rješenje
 - Poissonove jednadžbe, 10, 144
 - Poissonove jednadžbe, opće, 31
 - valnih jednadžbi, 231
- Samoinduktivitet, 150
- Separacija varijabli, 231
- Sila
 - između ploča pločastog kondenzatora, izolirani sustav, 76
 - između ploča pločastog kondenzatora, neizolirani sustav, 77
 - Lorentzova, 138, 218
 - na nabijene vodiče, 74
 - na vodič u utoru, 221
- Sile
 - u elektrostatičkom polju, 74
 - u magnetostatičkom polju, 179
- Silocijev, 32

Skin efekt

faktor djelatnog otpora i induktiviteta, 304, 317

lim u magnetskom polju, 304

okrugli vodič, 310

vodljiva ploča, 297

Skin efekt (površinski učinak), 293

Slaganje

brzina, 120

Stavak

Stokesov, 371

struja

transverzalna, 205

Struja

gustoća, 154

gustoća, jednolika, 165

linijska, 164

linijska gustoća (oblog), 182

longitudinalna, 206

pomačna, 194

Susceptibilnost

dielektrična, 71

magnetska, 148

Sustav

koordinatni, 344

Štapna antena

emisijski dijagram, 333

sinusna razdioba struje, 333

trokutasta razdioba struje, 332

Tanka beskonačna ploča, 14

Tenzor, 71

električnog naprezanja, 82

komponenta kontravarijantnog tenzora, 368

komponenta kovarijantnog tenzora, 368

konvencija o zbrajanju, 368

metrički simetrični, 348

napetosti ranga 2, 367

ranga 0, 365

ranga 2, 366

simetrični, asimetrični (kososimetrični) i nesimetrični, 369

ukupnog naprezanja, 217

Tenzori

općenito, 365

Osnovne operacije s tenzorima, 369

Teorem

Earnshaw, 12

Gaussov, 79, 191, 371

Greenov, 378

Greenov recipročnosti, 19

Helmholtzov, 371

Shwarz - Christoffelov, 61

Stokesa, 152

Tait i McAulayev, 383

Thomsonov, 78

Teorija

specijalna teorija relativnosti, 109

Točkasti izvor struje, 90

Točkasti naboj i vodljiva kugla, 44

Tok

električni, 32

magnetski, 150

magnetski, ulančani, 156

vektora, 32

Transformacija

baždarska, 202

brzina, 120

duljine štapa, 118

Fourierova, 373

frekvencije, 365

Galilejeva, 110

koordinata, 345, 367

Lorentzova, 114

potencijala, 202

sile, 126

vremena, 117

Uže

zaštitno, 97

Val

dubina prodiranja, 294

harmonijski, 237

na granici dvaju dielektričnih sredstava, 256

na granici izolator - vodič, 260

putujući na vodu, 283

ravni, 187, 226

refleksija (odbijanje) i refrakcija (lom), 250

u čvorištu na vodu, 284

u sredstvu bez gubitaka, 235

Varijacija

- funkcije, 384
- mase s brzinom, 121
- Varijacijski račun
 - brahistokrona, 388
 - drugi Newtonov zakon, 387
 - funkcional, 384
 - krivulja provjesa teškog lanca, 389
 - najkraća krivulja između dvije točke u ravni, 388
 - osnove, 384
 - primjer iz elektrostatičke, 392
 - Snelliusov zakon loma, 390
- Vektor
 - električnog pomaka, 70
 - Hertzov, 208, 319
 - jakosti magnetskog polja, 148
 - Poyntingov, 211
 - Poyntingov, štapna antena, 337
- Vektor električnog pomaka
 - normalna komponenta, 72
 - tangencijalna komponenta, 73
- Vod
 - bez distorzije, 275
 - bez gubitaka, 275
 - bez odvoda s malim gubicima, 276
 - doseg vala, 274
 - dvožični, naponska jednačba, 267
 - dvožični, realni, 165
 - dvožični, strujna jednačba, 268
 - fazna brzina vala, 274
 - fazna konstanta, 274
 - kratki, 279
 - kratki spoj, 279
 - pi shema, 280
 - prazni hod, 278
 - prigušna konstanta, 274
 - prijelazi na vodu, 286
 - prijenosni, dvožični, 266
 - rješenje jednačbi, 272
 - sekundarne konstante, 271
 - T shema, 280
 - valna impedancija, 273
- Vodiči, 247
- Vodiči i izolatori, 245
- Zakon
 - Ampèreov, kružni, 139
 - Ampèreov, kružni, 138
 - Biot - Savartov, 138, 139
 - Colulombov, 6
 - Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, 193
 - Gaussov, 8, 10
 - Jouleov, 189
 - Ohmov, 188
 - Snelliusov 1. refleksije (odbijanja), 252
 - Snelliusov 2. loma, 253



ENERGOCONTROL ZAGREB d.o.o.

Inženjering, projektiranje i proizvodnja opreme za energetska postrojenja

Kovinska 30, 10090, ZAGREB

tel: +385 1 34 36 333

fax: +385 1 34 36 334

info@energocontrol.hr

www.energocontrol.hr

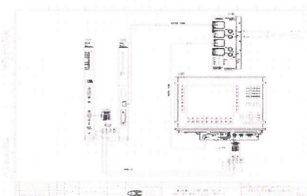
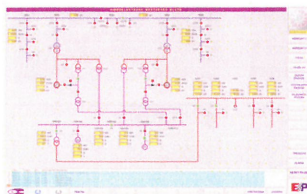


EnergoControl Zagreb je trgovačko društvo u privatnom vlasništvu, utemeljeno 1992. godine. Osnovne djelatnosti su projektiranje, nadzor, ispitivanje, montaža i proizvodnja opreme za energetska postrojenja (hidroelektrane, termoelektrane, trafostanice i ostala postrojenja za proizvodnju, prijenos i korištenje električne energije uključujući i industriju).

Djelatnici EnergoControla Zagreb su vrhunski stručnjaci, upoznati s najnovijim tehnologijama i rješenjima, čija znanja i iskustvo pokrivaju cjelokupno područje djelatnosti, čime smo u mogućnosti ponuditi sva rješenja po principu "ključ u ruke".

Područja djelatnosti:

- Savjetovanje i studije
- Projektiranje sustava upravljanja, nadzora, zaštita i uzbude
- Proizvodnja opreme i aplikacijskog softvera
- Montaža i puštanje u pogon postrojenja i elektrana
- Eksploatacijska ispitivanja



Najznačajnije reference:

HIDROELEKTRANE

- HE MOSTARSKO BLATO
- HE RAMA
- HE MOSTAR
- HE JAJCE I
- HE JAJCE II
- PHE ČAPLJINA
- HE ZAKUČAC
- HE VINODOL
- HE RIJEKA

TERMoeLEKTRANE

- TE TO LJUBLJANA
- TE TRBOVLJE
- TE RIJEKA
- TE KAKANJ
- TE TO OSIJEK
- PTE OSIJEK
- EL TO ZAGREB

TRAFOSTANICE

- TS 400/220/110/35/10(20)kV MOSTAR 4
- TS 400/220/110/35/10(20)kV BANJA LUKA 6
- TS 110/20/6,3kV BANJALUKA 7
- TS 400/220/110/35/10(20)kV SARAJEVO 20
- TS 400/220/110kV TREBINJE

INDUSTRIJSKA POSTROJENJA

- SLADORANA ŽUPANJA
- PLIVA HRVATSKA
- INA RAFINERIJA
- ABB
- HAC
- SISECAM SODA LUKAVAC

