Prof. dr. sc. Danilo Feretić

UVOD U NUKLEARNU ENERGETIKU

Drugo dopunjeno izdanje

SADRŽAJ

1 UVOD 8
1.1 Razvoj nuklearne energetike 8
1.2 Današnja primjena nuklearne energetike 8
1.3 Stanje zaliha energetskih sirovina 10
1.4 Utjecaj energetskih postrojenja na okoliš 14
1.5 Princip primjene nuklearne energije u energetici 17
2 NUKLEARNA FIZIKA 20
2.1 Elementarne čestice 20
2.2 Sastav i struktura atoma 21
2.3 Energije elektrona 21
2.4 Mase i dimenzije atoma 23
2.5 Izotopi 26
2.6 Energetske razine atomskih jezgara 28
2.7 Stabilnost atomskih jezgara 29
2.8 Radioaktivnost 31
2.9 Energija veze nukleona u jezgri 37
2.10 Nuklearne reakcije 41
2.11 Udarni presjeci za nuklearne reakcije 43
2.12 Ovisnost udarnih presjeka o energiji neutrona 47
2.13 Udarni presjeci za apsorpciju termičkih neutrona 51
3 PRODIRANJE ZRAČENJA KROZ MATERIJALE 59
3.1 Uvod 59
3.2 Ionizirajuća zračenja 59
3.3 Teške nabijene čestice 60
3.4 Elektroni (β čestice) 63
3.5 Fotoni (γ-zrake) 66
4 FISIJA I LANČANA REAKCIJA 75
4.1 Otkriće fisije 75
4.2 Mehanizam fisije 75
4.3 Karakteristike fisije 78
4.4 Fisijski produkti 79
4.5 Fisijski neutroni 83
4.6 Lančana reakcija 86
5 USPORAVANJE (TERMALIZACIJA) NEUTRONA 90
5.1 Mehanizam usporavanja neutrona u moderatoru 90

5.2 Prosječan gubitak energije neutrona po sudaru ... 94
5.3 Sposobnost usporavanja i odnos moderacije ... 97
5.4 Tok neutrona u procesu usporavanja uz zanemarivu apsorpciju ... 99
5.5 Usporavanje neutrona uz apsorpciju ... 104
6 DIFUZIJA NEUTRONA ... 109
6.1 Difuzijska jednadžba monoenergetskih neutrona ... 109
6.2 Difuzijska konstanta ... 112
6.3 Bilanca neutrona ... 115
6.4 Rubni uvjeti pri difuziji neutrona ... 119
6.5 Rješenje jednadžbe difuzije neutrona ... 122
6.6 Fizikalna interpretacija difuzijske dužine termičkih neutrona ... 129
7 TEORIJA NUKLEARNOG REAKTORA ... 131
7.1 Osnovne karakteristike nuklearnog reaktora ... 131
7.2 Fizikalna teorija nuklearnog reaktora ... 132
7.3 Faktor multiplikacije reaktora ... 132
7.4 Uvjeti kritičnosti homogenih reaktora ... 137
7.5 Uvjeti kritičnosti heterogenih reaktora ... 141
7.6 Bilanca neutrona u kritičnom reaktoru ... 150
7.7 Difuzijska dužina termičkih neutrona i dužina usporavanja neutrona u reaktoru ... 155
7.8 Dimenzije kritičnog reaktora ... 159
7.9 Reaktor s reflektorom ... 165
7.10 Numeričke metode za rješenje jednadžbe bilance neutrona ... 171
7.11 Brzi reaktori ... 177
8 KINETIKA NUKLEARNOG REAKTORA ... 185
8.1 Trajanje usporavanja i difuzije neutrona u reaktoru ... 185
8.2 Brzina promjene neutronskog toka u ovisnosti o reaktivnosti reaktora ... 188
8.3 Aproksimacija s jednom grupom zakašnjelih neutrona ... 198
8.4 Prostorna raspodjela neutronskog toka u potkritičnom reaktoru ... 202
8.5 Približavanje kritičnosti ... 204
8.6 Utjecaj temperature na reaktivnost reaktora ... 205
8.7 Zatrovanje reaktora s fisijskim proizvodima ... 215
8.8 Promjene u nuklearnom gorivu tijekom pogona reaktora ... 225
8.9 Reaktivnost po unošenju apsorbera u jezgru ... 233
8.10 Stabilnost reaktora i njegove prijenosne funkcije ... 241
8.11 Naglo unošenje reaktivnosti u potkritični reaktor ... 252
9 UČINCI I DOZE ZRAČENJA ... 258
9.1 Biološko djelovanje zračenja ... 258

9.2 Doze zračenja 259
9.3 Posljedice akutnih doza zračenja 262
9.4 Posljedice malenih kroničnih doza zračenja 265
9.5 Izvori radioaktivnog zračenja u okolini 266
9.6 Granične doze zračenja 267
9.7 Proračun ekvivalentnih doza zračenja 268
9.8 Štitovi od nuklearnog zračenja 277
10 IZVORI TOPLINE U NUKLEARNOM REAKTORU 285
10.1 Nuklearne reakcije kao izvor topline 285
10.2 Prostorna raspodjela generirane energije u reaktoru 288
11 Prijelaz topline 292
11.1 Vođenje topline 295
11.1.1 Vođenje topline kroz materijale bez unutarnjeg izvora topline 309
11.1.2 Vođenje topline kroz materijale s unutarnjim izvorom topline 351
11.2 Numeričke metode u rješavanju problema vođenja topline 371
11.3 Protok fluida 385
11.4 Strujanje tekućina u cijevima i kanalima 397
11.5 Prijelaz topline na nemetalne rashladne fluide 409
11.6 Prijelaz topline kod prirodne cirkulacije 415
11.7 Prijelaz topline pri ključanju 422
11.8 Prijelaz topline kod hlađenja tekućim metalom 436
11.9 Termički proračun nuklearnog reaktora 439
11.10 Izmjenjivači topline 450
11.11 Prijelaz topline zračenjem (isijavanjem) 461
Dodatak 1 469
Dodatak 2 473
Dodatak 3 476
Dodatak 4 480
Dodatak 5 484
Dodatak 6 488
Dodatak 7 493
Dodatak 8 496

Predgovor prvom izdanju

Nuklearna tehnika relativno je mlada grana tehnike. Započela se razvijati gradnjom prvih nuklearnih reaktora u 40-im godinama ovog stoljeća. U tim su se godinama razvijala i razrađivala osnovna teorijska načela rada nuklearnih reaktora, te stjecala prva praktička iskustva s njihovom gradnjom i pogonom.

Već je tijekom 50-ih godina nuklearna tehnika dosegla stupanj razvoja koji je omogućio njezino iskorištenje u praksi za mirnodopske primjene. Najznačajnija mirnodopska primjena nuklearne tehnike je u oblasti energetike, dakle za proizvodnju električne i toplinske energije. Ta je primjena logički iziskivala da se područje rada inženjera energetičara proširi i na nuklearnu energetiku. Nuklearna je energetika multidisciplinarno područje i obuhvaća veoma širok spektar inženjerskih disciplina, koje je nemoguće obuhvati u jednoj knjizi.

Svrha je ove knjige da razradom najhitnijih specifičnih elemenata nuklearne energetike približi ovo područje budućim energetičarima. Stoga se nastojalo da način prikaza materije opsegom i dubinom teorijske obrade bude prilagođen ponajprije potrebama studenata energetskih usmjerenja kao udžbenik za predmete iz obrađivanih područja. Valja očekivali da će korisno poslužiti i inženjerima elektrotehnike i strojarstva, kao i studentima na završetku studija drugih struka koje zanima ovo područje energetike.

Knjiga je podijeljena na 11 poglavlja u kojima se obraduju osnovna znanja s područja nuklearne i neutronske fizike, prodiranja zračenja kroz materijale, teorije reaktora (statika i kinetika reaktora) djelovanja zračenja, kao i znanja o strujanju fluida i termo tehničkim procesima u nuklearnim reaktorima (značajke izvora topline, specifičnosti vođenja i prijelaza topline u nuklearnom reaktoru).

To je opseg gradiva koji možemo svrstati u uže nuklearno energetsko područje, a u skladu je s opsegom većine sličnih udžbenika u svjetskoj literaturi.

Postoje i druge tehničke discipline koje su također veoma važne za nuklearnu energetiku, kao što su tehnologija nuklearnih materijala i gorivnih ciklusa (neki se uvodni elementi tih oblasti daju i u ovoj knjizi), zatim metalurgija, teorija čvrstoće i naprezanja materijala, upravljanje tehnološkim procesima, dozimetrija, no one nisu predmet proučavanja ove knjige, pa se za te discipline zainteresirani moraju obratiti na specijalističku literaturu.

Većina je izvoda sustavno provedena, s malo neobjašnjenih međukoraka. Mnoge su teorijske postavke, radi lakšeg razumijevanja primjene, popraćene riješenim numeričkim primjerima. Na kraju svakog poglavlja niz je jednostavnih zadataka za vježbu. Isto je tako iza svakog poglavlja popis literature kojom se poglavlje bavi.

Najveća pozornost pridaje se termičkim reaktorima, a znatno manja brzim oplodnim reaktorima. Takav odnos, naime, odgovara ulozi koji će najvjerojatnije ti nuklearni reaktori imali u energetici u toku idućih desetljeća. Fuzijski reaktori se ne obrađuju jer je vjerojatnost njihove primjene u energetici i u idućih pedesetak godina veoma malena.

Rukopis sam u cjelini ili u dijelovima dao mnogim kolegama i suradnicima da ga pročitaju. Oni su upozorili na neke greške u tekstu i u numeričkim primjerima i dali mi mnogo korisnih primjedaba i sugestija za poboljšanje teksta.

Ugodna mi je dužnost zahvaliti svima na pomoći, a posebno, Prof. dr. Miroslavu Furiću s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, Prof dr. Vladimiru Knappu, Prof. dr. Vladimiru Mikuličiću, mr. Dubravku Pevecu, mr. Nikoli Čavlini, mr Nenadu Debrecinu, mr. Davoru Grgiću, Tomislavu Bajsu, dipl.ing. i Srđanu Špalju dipl.ing. s Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu, kao i prof. Marijanu Zorku iz Nuklearne elektrane Krško.

Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj supruzi Nenadi za podršku i strpljenje u toku višegodišnjeg rada na ovoj knjizi.

Danilo Feretić

Zagreb, prosinca 1991.

Predgovor drugom izdanju

Nuklearna energetika je od prvog izdanja knjige znatno napredovala.Unatoč zastoju u gradnji nuklearnih elektrana u posljednjim decenijima njihova proizvodnja i iskorištenje instaliranih snaga konstantno raste.

Znatno je unaprijeđena sigurnost nuklearnih postrojenja.Temelj današnje nuklearne energetike čine lakovodni reaktori (takav tip reaktora ima i NE Krško).Na tim reaktori od kvara na nuklearnoj elektrani Otok tri milje 1979. godine (koji nije uzrokovao praktički nikakvo radiološko zagađenje okoliša) nije bilo ozbiljnijih kvarova.Nuklearni reaktor elektrane u Černobilu (na kojem se je 1986. godine dogodila velika nesreća) je sasvim druge izvedbe od lakovodnih reaktora i nije referentan za nuklearnu sigurnost većine nuklearnih elektrana koje su danas u pogonu.Opsežne studije izrađene u Europskoj Uniji tijekom 90-tih godina su pokazale da je štetan utjecaj na okoliš termoelektrana (posebno onih koje koriste ugljen) znatno veći nego nuklearnih elektrana. Povoljan utjecaj nuklearnih elektrana za okoliš leži i u činjenici da u pogonu ne ispuštaju CO_2 ,tako da se njihovom promjenom smanjuju problemi s globalnim zagrijavanjem i omogućuje zadovoljenje obveza iz Kyoto protokola.

Cijena proizvedene električne energije u nuklearnim elektranama je već sada povoljnija nego u drugim tipovima elektrana, pogotovo će to u biti u budućnosti zbog očekivanih poteškoća s dobavom i povišenjem cijene prirodnog plina.

Iz navedenih razloga gradnja nuklearne elektrane u idućim decenijima ostaje izgledna opcija i za Hrvatsku.

Drugo izdanje knjige sadrži dopunu i ispravke uočenih pogrješaka u prvom izdanju. Dopune se poglavito odnose na prvo poglavlja 1 i 11 knjige . U poglavlju 1 su revidirana predviđanja o potrebama za električnom energijom do sredine ovog stoljeća kao i potencijalne mogućnosti za podmirenje tih potreba uključivši i predviđanja značaja nuklearne energije u budućoj energetici. Znatno je prošireno poglavlje 11 koje se odnosi na vođenje topline u krutim tvarima poglavito na analizama odvoda topline rebrastim površinama, dvodimenzionalnog vođenja topline ,te unutarnjih toplinskih izvora.

Najtoplije zahvaljujem na pomoći i korisnim primjedbama recenzentima Prof. dr.sc. Miroslavu Furiću s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, Prof dr.sc Dubravku Pevecu , Prof. dr.sc. Vladimiru Mikuličiću, Prof.dr.sc.Nikoli Čavlini, te kolegama sa Zavoda za visoki napon i energetiku FER-a doc.dr.sc. Davoru Grgiću , Ilijani Iveković dipl.ing i Srđanu Špalju dipl.ing.

Danilo Feretić

Zagreb, 2007.

1 UVOD

1.1 Razvoj nuklearne energetike

Razvoj nuklearne energetike započeo je pionirskim radovima mnogih znanstvenika u godinama prije drugoga svjetskog rata (J. Curie, Hahn, Stras-sman, Szilard, Fermi i dr.). Ti su radovi rezultirali ostvarenjem prve samo-održavajuće lančane reakcije 2. prosinca 1942. u reaktoru izgrađenom na terenu Sveučilišta u Chicagu. Grupu istraživača i tehničara na izgradnji reaktora vodio je poznati fizičar Enrico Fermi.

Reaktor (poznat pod nazivom Chicago pile l, skraćeno CP-1) bio je izgrađen od blokova grafita s umetnutim šipkama od prirodnog urana. Izgradnja tog reaktora ulazila je u sklop aktivnosti u okviru tzv. Manhattan projekta, kojemu je krajnji cilj bila realizacija atomske bombe. Čovjek je tim dostignućem prvi put ostvario dotad nepoznatu pojavu - oslobađanje energije atomskih jezgri i njezinu upotrebu. Nažalost, ta je energija u početku bila korištena u vojne svrhe.

Iako je fenomen fisije i lančane reakcije bio već dobro teorijski proučen, na mogućnost iznenađenja pri puštanju u pogon prvog reaktora moralo se iz opreza računati. Dramatičnost eksperimenta potvrđuje činjenica da je specijalna ekipa iznad reaktora bila spremna da ga brzo ugasi tekućim kadmijem. Međutim, 28 minuta koliko je trajao eksperiment, prošlo je mirno i u skladu s očekivanjima. Arthur Compton, jedan od sudionika toga povijesnog i veoma tajnog eksperimenta odmah je nakon njegova završetka uputio dogovorenu telefonsku poruku Centru za istraživanja i razvoj u Harvardu. Poruka je glasila: »Talijanski je navigator stigao u novi svijet«,. »Kako je zatekao domoroce?« slijedilo je pitanje. »Vrlo prijateljski« odgovorio je Compton.

Usvajanjem procesa fisije i lančane reakcije čovjek je ovladao proizvodnjom energije fantastične koncentracije u odnosu na bilo koju kemijsku reakciju. Proizvedena energija po jedinici mase aktivnog materijala kod tih je reakcija oko milijun puta veća nego kod najsnažnijih klasičnih eksploziva.

Raspolaganje s energijom velike koncentracije omogućuje izgradnju kompaktnih izvora energije koja sadrže malu masu nuklearnog goriva i čija gradnja traži relativno malo ostalih materijala. Sve to stvara uvjete za djelotvornu i ekonomičnu primjenu takvih izvora energije u energetici.

Upravo primjena nuklearne energije u energetici osnovni je predmet interesa ove knjige.

1.2 Današnja primjena nuklearne energetike

Danas, nakon više od 6 desetljeća od eksperimenta u Chicagu, nuklearna energija dosegla je široku primjenu. Osim mnogih istraživačkih i vojnih nuklearnih reaktora (reaktori za proizvodnju plutoniija, reaktori za propulziju brodova i podmornica, reaktori na umjetnim satelitima) u pogonu su brojni nuklearni energetski reaktori. Pregled tih reaktora dan je u tablici 1.2.1 [1]

Tablica 1.2.1. Pregled energetskih reaktora u svijetu u pogonu i gradnji krajem 2004. godine

Regija i država	Reaktori u pogonu		Reaktori u izgradnji		Godišnje proizvedena električna energija (2004)	
	Broj reaktora	Snaga MW(e)	Broj	Snaga MW(e)	TWh	Udio u ukupnoj proizvodnji električne energije %
Sjeverna Amerika						
Kanada	17	12113			85,3	15,0
SAD	104	98210			788,6	19,9
Latinska Amerika						
Argentina	2	935	1	692	7,3	8,2
Brazil	2	1901			11,5	3,0
Meksiko	2	1310			10,6	5,2
Zapadna Europa						
Belgija	7	5801			44,9	55,1
Finska	4	2656	1(od god. 2005)	1600	21,8	26,6
Francuska	59	63363			426,8	78,1
Nizozemska	1	449			3,6	3,8
Njemačka	18	20679			158,4	32,1
Španjolska	9	7585			60,9	22,9
Švedska	11	9489			75,0	51,8
Švicarska	5	3220			25,4	40,0
Velika Britanija	23	11852			73,7	19,4
Istočna Europa						
Armenija	1	376			2,2	38,8
Bugarska	4	2722			15,6	41,6
Češka Republika	6	3548			26,3	31,2
Litva	1	1185			13,9	72,1
Mađarska	4	1755			11,2	33,8
Rumunjska	1	655	1	655	5,1	10,1
Ruska Federacija	31	21743	4	3775	133,0	15,6
Slovačka	6	2442			15,6	55,2
Slovenija	1 (50% RH)	656			5,2	38,8
Ukrajina	15	13107	2	1900	81,8	51,1
Afrika						
Južna Afrika	2	1800			14,3	6,5
Srednji Istok i Južna Azija						
Indija	14	2550	9	4092	15,0	2,8
Iran			1	915		
Pakistan	2	425			1,9	2,4
Daleki Istok						
Japan	54	45468	3	3237	273,8	29,3
Kina	9	6602	2	2000	47,8	2,2
Republika Koreja	19	15850	1	960	124,0	37,9
Ukupno Svijet	441	367496	26	20826	2618,6	16,0

Tablica pokazuje da je početkom 2005. godine u svijetu bilo u pogonu 441 nuklearnih reaktora ukupne snage 367496 MW koji su u 2004. godini proizveli 2618 TWh ,odnosno oko 16% ukupne proizvodnje električne energije. Usporedbe radi, ukupna potrošnja električne energije 2004.. godine u Hrvatskoj je iznosila oko 15 TWh.Ovisnost mnogih zemalja o nuklearnoj energiji ,posebno u Europi i Dalekom Istoku, je veoma izražena što se vidi iz visokog udjela proizvodnje električne energije u nuklearnim elektranama

Svi scenariji razvoja elektroenergetike u budućnosti daju značajno mjesto uporabi nuklearne energije. Razina te uporabe varira značajno u ovisnosti o polaznim pretpostavkama scenarija posebno u odnosu na visinu električnog konzuma, sigurnosti dobave energije, očekivanom razvoju obnovljivih izvora energije , pretpostavljenoj cijeni i raspoloživosti prirodnog plina u narednim decenijima , stupnju korištenja ugljena zbog ograničenja emisija stakleničkih plinova i ispunjenju očekivanih poboljšanja u izvedbama novih tipova nuklearnih reaktora.

U razdoblju između 2010. i 2020. godine očekuje se početak obnove gradnje nuklearnih postrojenja s poboljšanim tipovima reaktora koji bi trebali početi ulaziti u pogon nakon 2020. godine.Poticaj za gradnju nuklearnih elektrana je u energetskim ,ekonomskim i ekološkim prednostima proizvodnje električne energije u nuklearnim elektranama Dodatni poticaj može dati potreba za proizvodnjom vodika (koja se najekonomičnije može ostvariti u nuklearnim elektranama) i potreba za proizvodnju pitke vode desalinizacijom. Prognoze srednje brzog razvoja nuklearne energetike predviđaju da će proizvodnja električne energije u nuklearnim elektranama nakon 2020. godine rasti i oko 2050. godine doseći razinu od oko 8000-12000 TWh (što je četverostruko povećanje u odnosu na 2006. godinu).Uz tu razinu proizvodnje električne energije nuklearne elektrane bi povećale svoj udio s današnjih 16% na 25-30% svjetske proizvodnje električne energije

1.3 Stanje zaliha energetskih sirovina

Jedan od najhitnijih pokazatelja perspektive i značenja nekog izvora energije je raspoloživost zaliha odgovarajućih energetskih sirovina. Danas se električna energija proizvodi uglavnom u termoelektranama (loženim ugljenom, tekućim gorivom ili plinom), nuklearnim elektranama i hidroelektranama. Ostali tipovi elektrana, kao što su elektrane pokretane energijom vjetra, sunčevom energijom, energijom biomasa ili geotermalnom energijom, imaju za sada (a vjerojatno i u doglednoj budućnosti) malo značenje.

Da bi se dobio uvid u kvantitativan odnos energetskog potencijala klasičnih i nuklearnih goriva, zanimljivo je razmotriti količine energije koje se mogu dobili iz raspoloživih zaliha energetskih sirovina.

Zalihe klasičnih energenata

Iako se klasične energetske sirovine (ugljen, nafta, zemni plin) istražuju već dugi niz godina još ni izdaleka ne postoji suglasnost pojedinih autora o raspoloživim količinama tih sirovina. Treba podsjetiti da se ukupne rezerve sirovina (geološke rezerve) dijele na utvrđene i potencijalne. Utvrđene rezerve sačinjavaju iskoristive (bilančne) i neiskorištene (izvanbilančne) rezerve. Iskoristive rezerve ovise o ekonomskim pokazateljima njihova korištenja, tj. ograničava ih gornja granica podnošljive cijene određene sirovine.

U literaturi se količine energetskih sirovina izražavaju obično s pomoću jedne od sljedećih mjernih jedinica:

- tona ekvivalentnog ugljena (t e. u.)=29.3* 10^9J=29.3GJ

- tona ekvivalentne nafte (t e. n.)=40.5*10^9J=40.5GJ

- TWg (Teravatgodina)=8760TWh=31.5*10^{18}J=31.5EJ

U mnogim se publikacijama nailazi i na upotrebu mnogo veće jedinice energije zvane kvad, kojoj je oznaka Q ($1Q=l.05*10^{21}J=35*10^{9}$ t e. u.)

Fosilna goriva.

Fosilna goriva danas pokrivaju najveći dio energetskih potreba čovječanstva.Prema prognozama to se neće promijeniti u prvoj polovici ovog stoljeća.Problemi s korištenjem fosilnih goriva leže u njihovoj cijeni,raspoloživosti i utjecaju na okoliš (emisije stakleničkih plinova).Pitanje cijene i raspoloživosti je naročito izraženo kod prirodnog plina,koji je danas najvrjednije fosilno gorivo za elektroenergetiku.

Procijenjene zalihe fosilnih goriva su navedene u tablici 1.3.1.

Tablica 1.3.1 Zalihe fosilnih goriva u EJ [2]

	Utvrđene zalihe	**Potencijalne zalihe**
Kruta goriva	**41994**	**142120**
Tekuća goriva	**6113**	**8360**
Plinovita goriva	**5903**	**11681**

Ekonomski iskoristive rezerve energetskih sirovinu samo su manji dio (reda 10 do 20%) ukupnih rezervi. Ekonomski iskoristive rezerve (tj. bilančne) ugljena definirane su sa određenom razinom troškova iskorištenja.

U prognozama potrošnje fosilnih goriva ocjenjuje se da će se u ovom stoljeću utrošiti glavnina danas poznatih rezervi tih goriva. Posebno će se brzo smanjivati količine nafte, pa će se znatne količine preostalog ugljena morati trošiti za likvefakciju radi supstitucije tekućih goriva.

Obnovljivi izvori energije

Obnovljivi izvori energije se koriste odavno.Udio tih izvora (drvo,vjetar,hidroenergija) su bili dominantni za pokriće potreba čovječanstva za energijom do 19. stoljeća.Razvojem elektroenergetike u dvadesetom stoljeću je zadržana znatna uloga hidroenergije (hidroelektrana) u proizvodnji električne energije.Krajem prošlog stoljeća,primarno zbog poteškoća s primjenom fosilnih i nuklearni izvoza zbog utjecaja na okoliš,se obnavlja ideja o korištenju obnovljivih izvora za proizvodnju električne energije.Pri tome se ne misli na veće hidroelektrane, koje se tradicionalno koriste za tu svrhu, već na takozvane nove obnovljive izvore energije u koje spadaju sunce,vjetar,biomase ,mali vodotoci, geotermalna energija plime ,oseke ,valova…..

Iskoristive energetske rezerve obnovljivih izvora energije su manje od rezervi ugljena, nafte i plina.

Procjena iskoristive snage aditivnih izvora energije je data tablicom 1.3.2[4]

Tablica 1.3.2 Iskoristiva snaga aditivnih izvora energije TW

Sunčeva energija	**1000**
Energija vjetra	**10**
Hidroenergija	**0,5-1,0**

Problem u korištenju energije vjetra i sunca za proizvodnju električne energije leži u cijeni gradnje postrojenja,malom vremenu korištenja instalirane snage i nepredvidljivosti pojave raspoložive snage (posebno kod vjetroelektrana) Sigurnost snabdijevanja potrošača traži da se uz takav izvor energije izgradi i elektrana na fosilno gorivo (prirodni plin) koja će zamijeniti vjetroelektranu ili sunčevu elektranu kada ove prestanu isporučivati električnu energiju.

Očekuje se da će obnovljivi izvori energije između 2000. i 2030. godine (dotad bi eventualno mogli biti razvijeni do ekonomski prihvatljive razine) pokriti manje od 10% energetskih potreba svijeta.

Nuklearno gorivo

Pod rezervama fisijskih nuklearnih goriva podrazumijevamo rezerve urana i torija u zemljinoj kori do granice njihova ekonomski prihvatljivog korištenju

Treba uzeti u obzir da je energetski potencijal nuklearnog goriva najvećim dijelom namijenjen za proizvodnju toplinske odnosno električne energije. Energetski potencijal fosilnih goriva ima mnogo širu namjenu, jer se osim u energetici troši u industriji, transportu i širokoj potrošnji. Nadalje, ta goriva služe i kao vrijedna sirovina u kemijskoj industriji. Zbog toga je, gledano samo sa stajališta energetike, relativno značenje nuklearnog goriva mnogo veće nego ono koje proizlazi iz odnosa energetskih potencijala fosilnih i nuklearnih goriva.

Današnji termalni reaktori (takve reaktore imaju gotovo sve današnje nuklearne elektrane) iskorišćuju energetski potencijal urana sa tek oko 1%. Iako je udio cijene nuklearnog goriva u cijeni električne energije kod nuklearnih elektrana s tim tipovima reaktora mnogo manji nego kod fosilnih goriva (cijena koncentrata urana sudjeluje u cijeni električne energije sa oko 5%) količine raspoloživog nuklearnog goriva za termalne reaktore su ipak ograničene ekonomskim razlozima.

Nuklearni reaktori koji neusporedivo djelotvornije iskorišćuju fisijski materijal brzi su oplodni reaktori. Ti su reaktori danas potpuno tehnički razvijeni i nalaze se u pogonu u nekoliko zemalja svijeta (Francuska, V. Britanija, SSSR, Japan, SR Njemačka). Brzi oplodni reaktori u kombinaciji s termalnim reaktorima mogu izvanredno povećati energetski potencijal fisibilnog materijala ne samo zbog mnogo djelotvornijeg iskorištenja energetskog potencijala urana i torija u brzim reaktorima (energetski potencijal nuklearnog goriva u brzim se reaktorima može iskoristili oko 70 pula više nego u termalnim reaktorima) nego i zbog veoma malenog učešća cijene urana u proizvedenoj cijeni energije u nuklearnim elektranama s takvim reaktorima. Nisko učešće cijene nuklearne energetske sirovine u cijeni proizvedene energije znatno povećava njezine ekonomski iskoristive zalihe.

Kod svih mineralnih sirovima iskoristive količine nisu one koje se fizički nalaze u zemljinoj kori nego one koje je isplativo eksploatirati.Cijena eksploatacije ležišta rude raste s smanjivanjem njezine koncentracije u ukupnom materijalu. Uran je jedna od mineralnih sirovima čija je najveću količina sadržana u malim koncentracijama (u granitnim stijenama i morskoj vodi).Mnogo su manje količine urana s većim koncentracijama u rudači koju se danas isplati eksploatirati. Kod urana upotrijebljenog za termalne reaktora smatra se granicom za korištenje cijena koncentrata urana od 130 $/kg. Kao što je već napomenuto ,ekonomski isplative granice iskorištenja zaliha urana znatno proširene kada se on koristi u brzim oplodnim reaktorima,

U tablici 1.3.3. su navedeni podaci o energetskim vrijednostima zaliha urana(EJ) do granica cijene koncentrata 130$/kg za zapadne zemlje i procjena potencijalnih zaliha do iste cijene za cijeli svijet u ovisnosti o načinu korištenja (lakovodni reaktori ili brzi oplodni reaktori)

Tablica 1.3.3 Energetski ekvivalent zaliha urana u svijetu u EJ [3]

	Zalihe urana utvrđene samo u zapadnim zemljama do cijene 130 $/t	Potencijalne zalihe urana do cijene 130 $/kg za cijeli svijet
Nuklearno gorivo pri upotrebi u lakovodnim reaktorima bez recikliranja odzračenog goriva*	1557	7524-9196
Nuklearno gorivo pri upotrebi u lakovodnim reaktorima s recikliranjem plutonija i urana	2090	19030-12540
Nuklearno gorivo pri upotrebi u brzim oplodnim reaktorima s recikliranjem plutonija i urana	>104500	501600-627000

Usporedimo li podatke iz tablica 1.3.3 s onima iz koja sadrži podatke o energetskom potencijalu fosilnih goriva (tablica 1.3.1) vidimo da je energija koja se može dobiti iz potencijalnih zaliha urana ako bi ga koristili u lakovodnim reaktorima istog reda veličine s energijom sadržanom u potencijalnim zalihama tekućih i plinovitih goriva. Tek bi recikliranje nuklearnog goriva i upotreba dobivenih količina plutonija i urana u brzim oplodnim reaktorima omogućila pristup zalihama energije koje mnogostruko prelaze zalihe svih fosilnih goriva.

Kao daljnju ilustraciju navedenog, navesti će se u tablici 1.3.4 i podaci Međunarodne Agencije[2] o energetskoj vrijednosti zaliha urana u funkcije načina korištenja. Energetska vrijednost je izražena brojem godina trajanja godišnje proizvodnje električne energije u nuklearnim elektranama 2004. godine

Tablica 1.3.4 Trajanje zaliha urana u godinama uz proizvodnju električne energije u nuklearnim elektranama iz 2002. godine (2574 TWh) i u ovisnosti o načinu korištenja

Način korištenja nuklearnog goriva	Postojeće i realno očekivane dodatne konvencionalne zalihe urana [1]	Ukupne očekivane (uklj. spekulativne) konvencionalne zalihe urana [2]	Sveukupne potencijalne konvencionalne i nekonvencionalne zalihe urana [3]
Sadašnje korištenje u lakovodnim reaktorima bez prerade goriva	85	270	8200
Jednokratno recikliranje plutonija u lakovodnim reaktorima (MOX gorivo)	100	300	9200
Kombinirani pogon lakovodnih i brzih oplodnih reaktora s recikliranjem goriva	130	410	12000
Brzi oplodni reaktori s recikliranjem goriva	2500	8500	240.000

Rezultati analiza raznih autora i institucija pokazuju da je energetski potencijal fisibilnog nuklearnog goriva (uran i torij) uz optimizirano kombinirano korištenje termalnih i brzih reaktora u

[1] 4,558.700 tU

[2] 14,382.500 tU

[3] 14,382.500 tU + 90% rezerve u fosfatima 22,000.000 t (=19,800.000 tU)+10% rezerve urana u morskoj vodi 4,000.000.000 tU (=400,000.000 tU) što sveukupno daje 434,182.500 tU

energetskom sustavu nekoliko stotina puta veći nego onaj što mogu osigurati poznate iskoristive rezerve ugljena. Brzi oplodni reaktori omogućuju proizvodnju količina energije koje će biti dovoljne u toku nekoliko idućih stoljeća.

Bitno je navesti i činjenicu da su za nuklearnu energetiku budućnosti povrh zaliha urana važne i zalihe torija. Zalihe torija se procjenjuju tri puta većim od zaliha urana.Torij se danas malo koristi u nuklearnoj energetici. Perspektivno je korištenje torija kao oplodnog materijala u nuklearnim reaktorima .Danas se za to smatraju posebno prikladni visoko temperaturni reaktori namijenjeni za proizvodnju električne energije i vodika. Oplodnjom se izotop torija ^{232}Th pretvara u fisibilni izotop urana ^{233}U.

Izvor nuklearne energije koji se, prema današnjim spoznajama, može smatrali konačnim i praktički neograničenim je energija kontrolirane fuzije lakih jezgara (deuterij-tricij odnosno deuterij-deuterij). Taj izvor energije (koja se inače kontinuirano oslobađa na Suncu i zvijezdama) danas je u fazi tehničkog razvoja. S izvjesnom sigurnošću može se očekivati početak rada prvog tehnički zrelog i ekonomski prihvatljivog prototipnog postrojenja za praktično korištenje energije termonuklearne fuzije u drugoj polovici ovog stoljeća,

Grube procjene raspoloživih količina energetskog potencijala kod sirovina za termonuklearnu fuziju pokazuju da su one barem tri reda veličine veće od onih koje se mogu osloboditi u procesima nuklearne fisije.

1.4 Utjecaj energetskih postrojenja na okoliš

Pri ocjenjivanju značenja nekog energetskog izvora za praktičnu primjenu jedan je od bitnih kriterija je utjecaj tog izvora energije na prirodni okoliš. Utjecaj na okoliš je u posljednjim decenijima postao jedan od dominantnih faktora za prihvat energetskog objekta sa strane javnosti.

Svi energetski objekti više ili manje utječu na promjenu životne sredine. Stupnjevanje njihove vrijednosti s tog aspekta moguće je jedino odgovarajućim komparativnim analizama. Kod analize treba uvažiti ne samo izravni utjecaj rada energetskog postrojenja na okoliš (ispuštanje štetnih tvari iz postrojenja, mogućnost kvarova i katastrofalnih događaja, pohranjivanje otpada i si.), nego i utjecaj na okolinu pri proizvodnji materijala (cementa, čelika i dr.) potrebnih za njegovu gradnju, zahvate u okolini u toku gradnje (iskopi, poplavljivanje terena, raseljavanje stanovništva), utjecaj na okolinu pri dobivanju i preradi energetskog goriva (ugljen, nafta, plin, uran), transporta tog goriva i zbrinjavanje otpadnog materijala svih vrsta.

Upotrebljive rezultate mogu dati dakle samo veoma kompleksne multidisciplinarne studije.

Početkom 1990-tih godina prošlog stoljeća je spoznato da nije dostatna samo kvalitativna spoznaja o relativnoj vrijednosti energetskih objekata sa stajališta njihovog utjecaja na okoliš, već da je neophodno doći do kvantitativnih pokazatelja za njihovu usporedbu. U tom je cilju unutar Europske Unije pokrenut opsežan istraživački projekt pod nazivom ExternE (eksterni troškovi kod proizvodnje energije) u koji je bilo uključen veliki broj eksperata iz više zemalja EU. Projekt (čiji je detaljniji prikaz dat u knjizi Elektrane i okoliš [3]) je rađen u nekoliko etapa i trajao je cijelu deceniju. Na području proizvodnje električne energije projekt se je koncentrirao na obradu utjecaja na okoliš temeljnih tehnologija za tu proizvodnju: Termoelektrane na ugljen i plin, elektrane s obnovljivim izvorima energije i nuklearne elektrane . Cilj projekta je bilo kvantificiranje šteta u okolišu izazvanih energijskim lancem svake od navedenih tehnologija. Pod pojmom energijski lanac su obuhvaćene sve faze procesa potrebnog za proizvodnju električne energije (od dobivanja rude za gorivo i materijala za gradnju, cjelokupnog transporta, gradnje objekta,pogona i dugoročnog zbrinjavanja svih otpadnih materijala). Studijom se nastojalo obuhvatiti lokalni,regionalni i globalni utjecaj emisija svih faza energijskog lanca prvenstveno na ljudsko zdravlje (a manje na vegetaciju i ostale elemente okoliša) te štete od emisija stakleničkih plinova (prvenstveno CO_2), te sve štete izraziti u novčanim jedinicama po jedinici proizvedene električne energije u elektrani. Jedinična

cijena prouzročene štete u okolišu je poznata kao eksterni trošak. Za određivanje dijela eksternog troška koji se odnosi na ljudsko zdravlje (koji je posebno značajan za nuklearne elektrane jer kod njih otpada šteta zbog emisija stakleničkih plinova) treba poznavati odnos broja oboljenja ili smrtnih slučajeva s koncentracijom krutih čestica i aerosola koje uzrokuju energijski lanci termoelektrana i koncentracije radioaktivnih tvari, odnosno odgovarajućom dozom zračenja, koje uzrokuje energijski lanac nuklearne elektrane.

Kod elektrana na fosilna goriva se određuje broj oboljenja i smrtnih slučajeva zbog atmosferskih emisija i prizemnih koncentracija polutanata na okolno stanovništvo.Pri tome su se u studiji ExternE pretežno koristile korelacije između koncentracije polutanata i broja oboljenja i smrtnih slučajeva analize te iz SAD. Za te elektrane treba u eksterni trošak uključiti i štetu zbog emisija stakleničkih plinova.

Elektrane s obnovljivim izvorima energije u pogonu nemaju atmosferskih emisija pa nemaju ni tog dijela energijskog lanca. Međutim za gradnju tih elektrana treba utrošiti relativno velike količine materijala po jedinici proizvedene energije i često izvršiti znatne radove na lokaciji. Sve to traži utrošak energije za čiju proizvodnju treba oštetiti okoliš.U pogonu i te elektrane negativno utječu na okoliš (buka,utjecaj na životinjski svijet, opasnosti od lomova) pa sve navedeno treba izraziti eksternim troškom po jedinici proizvedene energije Zbog male proizvodnje električne energije u tim elektranama eksterni trošak nije zanemariv.

Analizu eksternih troškova energijskog lanca nuklearne elektrane su radili francuski stručnjaci, jer oni imaju iskustva sa svim elementima nuklearnog energijskog lanca Veza broja smrtnih slučajevima s eksternim troškom je etički osjetljivo pitanje jer traži kvantificiranje vrijednosti ljudskog života. Ta se veza određuje indirektno kao spremnost društva za ulaganje u sigurnosne mjere (primjerice u poboljšanje sigurnosti transporta ,zdravstvo i sl.) kojima se statistički spašava određeni broj ljudskih života. Za zemlje EU je dobivena vrijednost od oko 3 milijuna eura, za slabije razvijene zemlje je niža. Procijenjene štete od emisija CO_2 u atmosferu variraju u širokim granicama. Najčešće korištene vrijednosti su u granicama 20-25 US$/t.

Kod nuklearnih elektrana (studija ExternE je rađena na temelju analiza elektrana s lakovodnim reaktorima, koje su najzastupljenije u EU) u eksterni trošak ulaze i štete uzrokovane velikim kvarovima.. Ulazni podaci za proračun su vjerojatni interval između sukcesivnih kvarova (odnosno količina proizvedene energije između dva sukcesivna kvara) i mogući broj žrtava zbog kvara.Zbog vrlo male vjerojatnosti velikog kvara s ozbiljnim radiološkim posljedicama u okolišu (jedan slučaj u 10^6-10^7 godina po reaktoru), to je proizvedena količina energije između dva sukcesivna kvara veoma velika pa je iznos štete po jedinici proizvedene energije vrlo malen. Valja naglasiti da nema iskustvenih podataka o žrtvama zbog kvara na lakovodnim reaktorima (jedini relevantni kvar je onaj u SAD na elektrani Otok tri milje, 1979. godine,koji nije rezultirao ni jednom ljudskom žrtvom). Kvar na elektrani Černobil 1986. godine zbog posve drukčije tehnologiju te elektrane, nije bio relevantan za vrednovanje posljedica..

Utjecaj energijskog lanca na okoliš treba računati za cijelo vrijeme trajanja posljedica gradnje i pogona objekta.Budući da je u slučaju nuklearnog energijskog lanca visokoradioaktivni otpad ima dugo vrijeme djelovanja procjena utjecaja tog energijskog lanca na okoliš je izvršena za razdoblje od 100.000 godina.

Rezultat proračuna ukupne kolektivne doze radioaktivnog zračenja od svih elemenata nuklearnog energijskog lanca je dat u tablici 1.4.1. [5]

.

Tablica 1.4.1 Ukupna kolektivna doza radioaktivnog zračenja od svih elemenata nuklearnog energijskog lanca

	Ukupna doza (Sv/TWh)
Dobivanje i prerada rude	**$2,89x10^{-1}$**
Konverzija koncentrata	**$2,32x10^{-3}$**
Obogaćenje urana	**$3,52x10^{-5}$**
Gradnja elektrane [1]	**0**
Pogon reaktora [2]	**2,36**
Razgradnja (dekomisija)	**$2,17x10^{-2}$**
Prerada nuklearnog goriva	**$1,03x10^{1}$**
Skladište RAO niske aktivnosti	**$2,58x10^{-2}$**
Skladište RAO visoke aktivnosti	**$1,36x10^{-1}$**
Transport	**$2,09x10^{-3}$**
Ukupno [3]	**$1,31x10^{1}$**

Pri proračunu kolektivne doze računalo se je za cijelo razdoblje s svjetskom populacijom od 10 milijardi ljudi. Najveći dio kolektivne doze (oko 93%) se odnosi na dozu na globalnoj razini .Pojedinačne doze zračenja su kod toga veoma niske, pa s posljedicama zračenja treba računati u okviru hipoteze o učincima malih doza bez praga djelovanja.

Interesantno je primijetiti da najveći dio kolektivne doze rezultira iz prerade nuklearnog goriva (79%) i pogona reaktora (18%) dok je doprinos drugih dijelova energijskog ciklusa neznatan (primjerice, skladište visokoradioaktivnog otpada usprkos veoma dugom vremenu djelovanja povećava kolektivnu dozi za svega 1%). Utjecaj velikih kvarova je još manji Kolektivne doze zbog velikih akcidenata po jedinici energije su izračunate u granicama 0,001-0,08 Sv/TWh što daje doprinos kolektivnoj dozi manje od 0,6%. Veza između broja oboljenja I smrtnih slučajeva je određena na temelju preporuka Međunarodne komisije za zaštitu od zračenja (ICRP)

Usporedba eksternih troškova energijskih tehnologija

Na temelju naznačenih ulaznih podataka i analiza mogu se odrediti eksterni troškovi svih vrsta elektrana od interesa za elektroenergetski sustav (termoelektrane na kruta, tekuća i plinovita goriva, nuklearne elektrane te relevantni tipovi elektrana na obnovljive izvore energije,kao što su sunčeve elektrane s fotonaponskim ćelijama i vjetrene elektrane i hidroelektrane). Valja napomenutu da dosadašnja saznanja ne daju dovoljno podloga za kvantifikaciju svih eksternih troškova jer brojni aspekti utjecaja na okoliš nisu određeni. Suglasno ranijim napomenama procjena eksternih troškova je uglavnom vrednovana na temelju oštećenja zdravlja i gubitka života ljudi te šteta od emisija stakleničkih plinova,dok ostali aspekti djelovanja polutanata na ekosustav (zemljište, vodotoci, vegetacija, životinjski svijet) nisu kvantificirani. U tom pogledu je procjena

[1] gradnja elektrane ne dovodi do radioloških posljedica

[2] radi se o elektrani snage 1300 MW.Procjena ne uključuje posljedice velikog akcidenta.

[3] Uključenjem velikog akcidenta bi se ukupna kolektivna doza povećala za oko 0.6%..

eksternih troškova podcijenjena kod termoelektrana na fosilna goriva, jer njihove emisije, za razliku od emisija nuklearnih elektrana imaju znatno veći utjecaj upravo na aspekte djelovanja na okoliš (primjerice djelovanje kiselih kiša na vegetaciju) koji nisu obuhvaćeni sadašnjom procjenom eksternih troškova. Treba nadalje primijetiti da je procjena eksternih troškova nuklearnih elektrana u okviru dokumenta ExternE 95/97 izvršena na mnogo detaljnijim analizama nego što je to slučaj kod konvencionalnih elektrana

Tek određivanjem eksternih troškova energijskih tehnologija moguće je izvršiti kvantitativnu usporedbu njihovog djelovanja na okoliš.

Usporedba procijenjenih eksternih troškova energijskih lanaca elektrana je data u tablici 1.4.2[3]

Tablica 1.4.2 Usporedba eksternih troškova energijskih lanaca elektrana

Vrsta elektrane	Eksterni trošak mEUR/kWh
Termoelektrana na ugljen	64
Termoelektrana na tekuća goriva	39,5
Termoelektrana na prirodni plin	21,5
Hidroelektrana	2,4-6
Sunčeva elektrana s fotonaponskim ćelijama	5,2–12,1
Vjetrena elektrana	1,02– 2,6
Nuklearna elektrana	2,5-7,3

Rezultati prikazani u tablici su rezultat rada brojnih stručnih i znanstvenih timova unutar Europske zajednice i predstavljaju prosjek suvremenih saznanja na području vrednovanja ekološkog utjecaja energijskih tehnologija.

Analiza je pokazala da su eksterni troškovi elektrana na fosilna goriva osjetljivo veći od eksternih troškova energijskih tehnologija koje ne koriste ta goriva. Razlog tome su atmosferske emisije krutih čestica,sumpornih, dušičnih i ugljičnih oksida. Među konvencionalnim elektrana je u tom pogledu izrazito nepovoljna termoelektrana na ugljen, dok je najpovoljnija termoelektrana na plinovito gorivo. Eksterni troškovi nuklearnih elektrana (koji su pokazatelji štete izazvane u okolišu od cijelog energijskog lanca tijekom cijelog vremena djelovanja) su za jedan red veličine niži nego kod termoelektrana na fosilna goriva (posebno ako ih uspoređujemo s termoelektranama na ugljen), i istog su reda veličine kao i eksterni troškovi elektrana koje koriste obnovljive izvore energije.

Rezultat pokazuje da su među elektranama koje mogu neograničeno proizvoditi velike količine električne energije u pogledu utjecaja na okoliš najpovoljnije nuklearne elektrane. Pri tome se naravni misli na nuklearne elektrane izgrađene na temelju najnovijih znanstvenih i tehničkih saznanja u primjeni tehnologija i projektnih rješenja.

Iz navedenog slijedi da je neutemeljeno upotrebljavati ekološke razloge za osporavanje razvoja i gradnje nuklearnih elektrana.

1.5 Princip primjene nuklearne energije u energetici

Pod pojmom korištenja nuklearne energije u nuklearnoj energetici na današnjem stupnju razvoja podrazumijeva se korištenje energije fisije atoma urana ili plutonija. Oslobađanje energije fisije odvija se u specifičnim postrojenjima, poznatim kao nuklearni energetski reaktori.

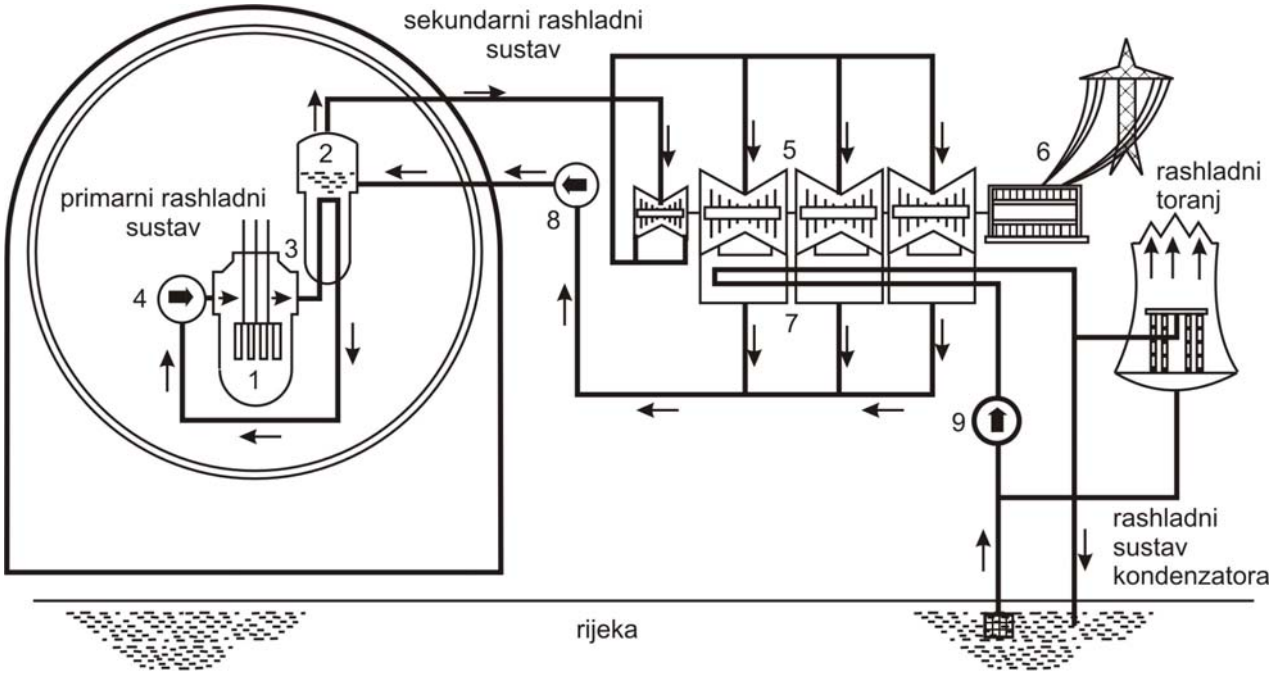
Svaki reaktor sadrži nuklearno gorivo (najčešće izrađeno od šipki urana i/ili plutonija), rashladni fluid i moderator. Moderator je materijal koji služi za usporavanje neutrona u reaktoru i koji je u većine današnjih reaktora istovjetan s rashladnim fluidom. Brzi reaktori nemaju moderatora. Oslobođena energija u fisijama atoma urana i plutonija u materijalu reaktora pretvara se u toplinsku energiju, koja se akumulira u materijalima reaktora (najviše u samom nuklearnom gorivu). Generirana toplinska energija povisuje temperaturu reaktora. Ta bi temperatura brzo oštetila, pa čak i otopila materijal nuklearnog goriva, ako se ne bi osiguralo, djelotvorno hlađenje. Budući da jedino oštećeni gorivni elementi reaktora mogu ugroziti okolinu zbog ispuštanja radioaktivnih tvari, očigledno je da hlađenje nuklearnog reaktora ima presudno značenje za sigurnost nuklearnog postrojenja.

S druge strane, toplinska energija odvedena rashladnim fluidom iz reaktora upravo je ona energija koju iskorišćujemo u energetici. Temperatura koju postiže rashladno sredstvo na izlazu iz reaktora ovisi o izvedbi i namjeni reaktora, a ograničavaju je odabrani materijali za njegovu gradnju.

Korištenje nuklearne energije u energetici svodi se dakle na iskorištenje toplinske energije rashladnog sredstva reaktora.

Takvo se korištenje u biti zasniva na istom principu kao i korištenje toplinske energije vrelih plinova koji nastaju u ložištima pri izgaranju fosilnih goriva. Zbog toga je nuklearna elektrana u osnovi termoelektrana, koja. umjesto korištenja toplinske energije što se stvara u ložištu kotla iskorišćuje toplinsku energiju rashladnog kruga reaktora.

Shematski prikaz principa rada nuklearne elektrane s tlakovodnim reaktorom ilustriran je na slici 1.5.1.



1. jezgra reaktora
2. parogenerator
3. reaktorska posuda
4. primarna pumpa
5. turbina
6. generator
7. kondenzator
8. napojna pumpa
9. cirkulacijska pumpa

Slika 1.5.1 Princip rada nuklearne elektrane

Na slici se razabire nuklearni reaktor i primarni rashladni krug, koji posredstvom parogeneratora predaje toplinsku energiju sekundarnom parnom ciklusu. Radi osiguranja okoline,

reaktor i primarni rashladni krug zatvoreni su u zaštitnoj posudi. U sekundarnom rashladnom krugu toplinska energija pretvara se posredstvom parne turbine u mehanički rad, analogno kao kod klasičnih termoelektrana.

Bez obzira na vrstu rashladnog sredstva reaktora (koje može biti voda, mješavina vode i vodene pare, plin, tekući metal) u današnjim se nuklearnim elektranama električna energija pretvara u toplinsku korištenjem Rankine-ova kružnog procesa voda-vodena para. U većini nuklearnih elektrana vodena para potrebna za pogon turbine dobiva se hlađenjem rashladnog sredstva reaktora u izmjenjivačima topline (koji se zbog toga nazivaju parogeneratori). U manjem broju nuklearnih elektrana para se dobiva izravno u reaktoru.

Reference uz poglavlje 1.

[1] Nuclear Power Reactors in the World, International Atomic Energy Agency, Ref. Data Series No. 2, 2005.

[2] Nuclear Technology Review 2004,IAEA 2004

[3] D.Feretić,Ž.Tomšić,D.Škanata,N.Čavlina,D.Subašić Elektrane I okoliš,Element Zagreb 2000

[4] B.Sorensen,Renewable energy- technical overview,Energy Policy,May 1991.

[5] EU Directorate General XII, CEPN France. “ExternE ,Externalities of Energy, Vol.5 Nuclear ",1995

2 NUKLEARNA FIZIKA

Nuklearna je fizika dio moderne fizike koja istražuje svojstva atomskih jezgri i procese/reakcije povezane s atomskim jezgrama. Nuklearnim inženjerima i nuklearnim energetičarima je dovoljno razumijevanje samo najbitnijih pojmova iz nuklearne fizike. Opseg potrebnog znanja za inženjere je pretežno vezan uz primjenu u reaktorskoj fizici i djelovanju zračenja na materijale, te će se u ovom poglavlju dati pregled samo tog dijela nuklearne fizike.

2.1 Elementarne čestice

Broj elementarnih čestica od kojih je izgrađen fizikalni svijet je veoma velik, te je stoga i struktura jezgre atoma koja je sastavljena iz tih čestica vrlo zamršena.

Međutim,za potrebe primjena u nuklearnoj tehnici i energetici najčešće je dovoljno promatrati samo vrlo ograničen skup takvih čestica (ne vodeći računa dali su one, po shvaćanju nuklearnih fizičara, elementarne ili složene).Nazivi i karakteristike tih čestica su:

ELEKTRON

Elektron je čestica koja nosi negativni električni naboj od 1.60219×10^{-19} kulona i ima masu u mirovanju (prema relativističkoj teoriji masa čestice je ovisna o njezinoj brzini) 9.10956×10^{-31} kg. U nekim se nuklearnim reakcijama pojavljuje i pozitron. Pozitron je čestica iste mase i naboja kao i elektron, samo joj je predznak naboja pozitivan.

PROTON

Proton ima masu mirovanja 1.67261×10^{-27} kg(masa mu je 1836 puta veća masa od mase elektrona) i električni naboj identičan naboju pozitrona.

NEUTRON

Neutron ima nešto veću mirovanja masu od protona (masa neutrona je 1.67492×10^{-27} kg), a nema električkog naboja. Neutron kao električki neutralna čestica lako penetrira u nuklearne jezgre i izaziva nuklearne reakcije. Nuklearne su reakcije s neutronima osnova fizikalne teorije nuklearnog reaktora. Slobodni neutron (neutron izvan atomske jezgre) nije stabilna čestica već se s vremenom poluraspada od oko 12 minuta raspada na proton, elektron i antineutrino (karakteristike neutrina su navedene u daljem tekstu).

FOTON

Foton je u osnovi kvant elektromagnetskog zračenja, a ne materijalna čestica u običajenom smislu. Foton se samo kod nekih fizikalnih pojava manifestira kao materijalna čestica, a kod drugih kao elektromagnetski val (vidljivo svjetlo, X-zrake, γ-zrake). Foton nema mase mirovanja,a u vakuumu se kreće konstantnom brzinom (brzinom svjetlosti) od 2.9979×10^{-8} m/s.

NEUTRINO

Neutrino je čestica bez mase mirovanja i bez električnog naboja. Nastaje kod nekih nuklearnih raspada (najčešće kod emisija elektrona, poznatim kao β emisije). Neutrino veoma rijetko ulazi u nuklearne reakcije sa materijom, te je materijalni svijet za tu čestici gotovo "prozračan".

2.2 Sastav i struktura atoma

Razmotriti ćemo pojednostavljenu sliku o sastavu i strukturi atoma, koja je dovoljna za razumijevanje najbitnijih pojava u nuklearnoj tehnici i nuklearnoj energetici. Prema toj pojednostavljenoj slici možemo smatrati da su jezgre atoma sastavljene samo od dvije vrste elementarnih materijalnih čestica: protona i neutrona. Cijeli atom se može znatno pojednostavljeno predstaviti kao neki minijaturni planetarni sustav kod kojega oko električki pozitivno nabijene jezgre kruže po određenim putanjama električki negativno nabijeni elektroni (uobičajeno je putanje elektrona skupno označiti kao elektronski plašt oko jezgre).

Broj protona u jezgri atoma(koji se označava sa Z), odgovara broju elektrona u plaštu, tako da je atom u cjelini električki neutralan. Zbroj broja protona i neutrona u jezgri (broj neutrona u jezgri je određen simbolom N) određuje masu jezgre. Uobičajeni simbol za masu jezgre je A,tako da vrijedi A=Z+N. Protoni i neutroni u jezgri atoma se često navode pod zajedničkim nazivom nukleoni (iz čega proizlazi da je simbolom A određen broj nukleona u jezgri atoma).

Osnovni se pojmovi o strukturi elektronskog plašta mogu opisati na slijedeći način:

Moguće putanje elektrona u plaštu atoma se grupiraju u tzv. ljuske koje se, počev od unutrašnje, obilježavaju sa K,L,M,N,O,P. Broj je elektrona u svakoj ljusci ograničen. Ljuska K može sadržati samo 2 elektrona, ljuska L 8 elektrona, ljuska M 18 elektrona... Elementi čiji atomi imaju dovoljno elektrona za potpunu ispunjenje vanjske ljuske (za ljuske K i L), ili ispunjenjem vanjske ljuske s 8 elektrona (odnosno ispunjenje podljuski s i p u ljuskama M,N,O,P) su kemijski vrlo stabilni. To su plemeniti plinovi (He,Ne,Ar.....). Nasuprot tome, elementi koji imaju samo jedan elektron više od plemenitih plinova (alkalni metali Li, Na, K...)ili jedan elektron manje (halogeni elementi F, Cl, Br...) vrlo rado međusobno stupaju u kemijske reakcije radi zajedničkog korištenja suvišnog odnosno, manjkajućeg elektrona.

Valencija kemijskih elemenata se objašnjava težnjom atoma da upotpune ljuske u elektronskom plaštu, jer time postižu veću kemijsku stabilnost. Element je toliko valentan koliko elektrona prima ili daje za upotpunjavanje elektronskih ljuski. Upravo se postojanjem opisanih ljuski u plaštu atoma objašnjavaju zakonitosti periodični sustava kemijskih elemenata.

2.3 Energije elektrona

Zbog sile, koja djeluje između električki nabijenih čestica (prema Coulomb-ovom zakonu sila između nabijenih čestica je upravno proporcionalna produktu njihovih naboja i obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti), svaka takva čestica u električnom polju ima potencijalnu mogućnost vršenja radnje. Kada se električni naboj pomiče u smjeru povećanja njegovog potencijala u elektrostatskom polju, radnju treba trošiti. Na ovoj se pojavi zasniva definicija jedinice energije u nuklearnoj fizici. Ta je jedinica nazvana elektronvolt (kratica eV), definirana kao radnja koju treba utrošiti da se elektron pomakne u elektrostatskom polju nasuprot potencijalnoj razlici od jednog volta. S obzirom da radnja potrebna da se naboj od jednog Kulona (znak C) pomakne nasuprot potencijalnoj razlici od jednog volta iznosi jedan džul (znak J), i da je naboj elektrona e=-1.60219x10^{-19} C, slijedi veza,

$$1\ \text{eV} = 1.60219\text{x}10^{-19}\ \text{J}$$

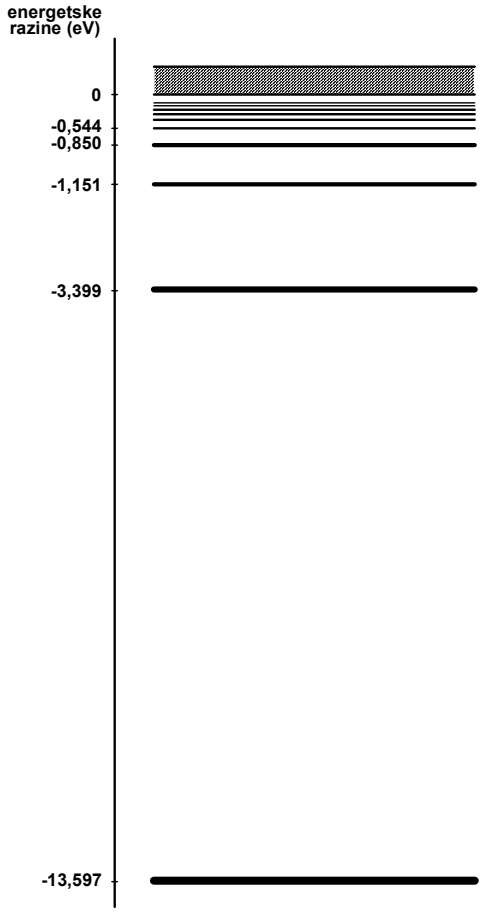
Elektronvolt nije jedinica Međunarodnog SI sustava jedinica. Međutim, zbog prikladnosti upotrebe te jedinice u nuklearnoj fizici i njene široke rasprostranjenosti zakonski je iznimno dopuštena njezina upotreba u toj grani fizike

Elektron koji kruži oko jezgre atoma, ne ponaša prema zakonima klasične elektrodinamike. Taj bi elektron naime, kao svaki oscilator, trebao kontinuirano zračiti elektromagnetsku energiju u okoliš. To bi bilo u suprotnosti s zakonom o očuvanju energije.

Prema zakonima kvantne mehanike elektron se unutar atoma ne može nalaziti na bilo kojoj putanji (putanje se u stručnoj terminologiji označuju kao orbite),već samo u jednoj od niza diskretnih putanja od kojih svaka ima određenu energiju. Putanje više elektrona sa istim energijama čine ranije navedene elektronske ljuske. Dok se elektron nalazi unutar jedne putanje ne izmjenjuje energiju sa okolinom . Izmjena energije nastaje samo kada elektron prelazi iz jedne putanje u drugu i to u iznosu koji odgovara razlici energija tih putanja. Najjednostavniji atom je atom vodika, koji se sastoji iz jednog protona i jednog elektrona. Teoriju energija elektronskih staza vodikovog atoma je postavio poznati danski fizičar Niels Bohr. Prema toj teoriji energije diskretnih elektronskih staza vodikovog atoma se mogu opisati izrazom,

$$\frac{-13.6}{n^2}\text{eV} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

gdje je n=1,2,3,...



Slika 2.3.1 Energije elektronskih staza u vodikovu atomu

Energija najniže putanje (n=1) iznosi -13.6 eV, i zatim redom -3.45 eV (za n=2), -1.53 eV (za n=3) itd. Niz razina energija elektronskih staza u atomu vodika je ilustriran slikom 2.3.1

Razlika između energija pojedinih putanja postaje sve manja što su one dalje od jezgre. Kada n teži u neizmjernost energija teži nuli (to je potencijalna energija slobodnog elektrona). Energija svake staze pokazuje iznos energije koji treba dovesti elektronu da bi se on izbacio iz atoma, tj. da bi se izvršila ionizacija atoma.

Stabilno je stanje atoma, često označavano i kao osnovno stanje, ono kada su sve putanje s najnižim mogućim razinama energije zauzete sa elektronima. To su ujedno i putanje s najmanjim mogućim udaljenostima elektrona od jezgri atoma.

Atom je u pobuđenom stanju kada elektroni zbog apsorpcije točno određene količine energije (bilo apsorpcijom elektromagnetskog zračenja i/ili kolizijom elektrona s nekom materijalnom česticom) prelaze u neku od putanja sa višom potencijalnom energijom. Ako je apsorbirana energija (odnosno energija pobude), dovoljno velika jedan ili više elektrona može biti izbačen iz plašta atoma. Atom koji izgubi jedan ili više elektrona postaje pozitivan ion.

Pobuđeni i ionizirani atomi su nestabilni; vraćaju se u vrlo kratkom vremenu u osnovno stanje tako da elektroni iz vanjskih putanja uskaču u najnižu slobodnu putanju, a elektroni koji nedostaju se zarobljavaju u okolini (rekombinacija iona). Razlika energije elektronskih putanja, kada elektron prelazi iz pobuđenog u osnovno stanje, se emitira iz atoma kao elektromagnetna energija (odnosno

energija fotona). Plank-ov zakon određuje ovisnost frekvencije emitiranog zračenja ν o razlici energije ΔE :

$$\Delta E = h\nu \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

gdje je h Plankova konstanta, $6.6\text{x}10^{-34}$ Js

Ako je razlika energije svega nekoliko eV, emitirana je radijacija vidljivo svjetlo. Međutim, kada razlika energije dosegne iznos reda 10^5 eV (takva se razlika energije može dobiti kod težih atoma kada elektron nakon pobuđenog stanja atoma prelazi direktno u najnižu putanju, tj.u K putanju) dolazi do emisije X-zrake.

Primjer 2.3.1

Kolika je valna dužina emitiranog elektromagnetnog zračenja kada elektron u vodikovom atomu prelazi iz L u K ljusku?

Rješenje:

Razlika energija L i K ljuske iznosi, ΔE=13.6 - 3.4 =10.20eV= $1.66\text{x}10^{-18}$ J.

Frekvencija emitiranog zračenja će biti $\nu = \Delta E / h = 1.66*10^{-18} / 6.6*10^{-34} = 2.5*10^{15}\ s^{-1}$

Odgovarajuća je valna dužina elektromagnetskog zračenja $\lambda = c / \nu$,gdje je brzina svjetlosti c=$3\text{x}10^8$ m/s. Dakle, $\lambda = 3*10^8 / 2.5*10^{15} = 1.2*10^{-7}\ m$. Emitirano zračenje spada u ultraljubičasti dio spektra.

Energetski potencijali elektronskih ljuski ovise o vrsti atoma, odnosno o električnom naboju jezgre. Što je u jezgri veći električki naboj (više protona) to su potencijali donjih elektronskih ljuski negativniji, pa se uskakanjem elektrona u te ljuske dobiva elektromagnetno zračenje manjih valnih dužina (koje se označava i kao tvrđe elektromagnetno zračenje, kao što su primjerice rendgenske ili χ-zrake).

Na postojanju diskretnih energija elektronskih ljuski u plaštu atoma zasniva se tumačenje pojave karakterističnih spektralnih linija kemijskih elemenata.

2.4 Mase i dimenzije atoma

Za jezgre atoma je u nuklearnoj fizici uveden naziv nuklidi.Budući da broj protona u jezgri Z, (koji je kod neutralnog atoma identičan sa brojem elektrona u plaštu atoma)definira kemijski element kojemu pripada dotični nuklid,to je za jednoznačno određenje tipa nuklida i broja čestica koje takav nuklid sadrži dovoljno uz oznaku kemijskog elementa navesti ukupan broj nukleona u jezgri A (A=Z+N,vidi poglavlje 2.2). Tako, radi primjera, simboli nekih nuklida H, C, U , Pu ,... potpuno i jednoznačno određuju brojeve protona i neutrona koje takvi nuklidi sadrže.

Apsolutne mase atoma su veoma malene(reda 10^{-25} kg), pa ih je nepraktično izražavati u jedinicama mase SI sustava (tj. u kilogramima). Zbog toga je u nuklearnu fiziku uvedena praksa izražavanja atomskih masa u relativnim iznosima, uzimajući masu najlakše jezgre (najlakša jezgra je sam proton, odnosno jezgra lakšeg prirodnog izotopa vodika sa oznakom H) približno jednakom jedinici.

Točnije,u atomskoj je fizici usvojena tzv. unificirana atomska masena jedinica AJM kao 1/12 mase nuklida ^{12}C. Iz te definicije proizlazi apsolutni iznos masene jedinice :AJM=$1.660565\text{x}10^{-27}$ kg.

Masa M bilo kojeg nuklida izražena u AJM se dobiva iz relacije,

$$M = 12\frac{masa\,nuklida}{masa\,nuklida\ ^{12}C} \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

Upotreba unificirane atomske jedinice mase AJM je zakonski iznimno dozvoljena u fizici i kemiji.

Mase elementarnih čestica izražene u atomskim jedinicama mase su,

elektron	0.000 55 AJM
proton	1.007 277 AJM
neutron	1.008 665 AJM

Masa nuklida ^{12}C, prema definiciji, iznosi 12 AJM.Mase svih ostalih nuklida nisu cijeli brojevi (npr. masa nuklida ^{16}O je 15.99482 AJM).

Masa od AJM kilograma nekog nuklida (ta se masa u kemiji naziva kilomol) sadrži određeni broj atoma. Dakle, masi od jednog kilomola odgovara 12kg ^{12}C, 15.99482 kg ^{16}O, 1.007277 kg ^{1}H

Evidentno je da kilomol sadrži isti broj bilo koje vrste nuklida (ili isti broj molekula ako se molekularna težina izrazi u AJM). Taj je broj poznat iz kemije kao Avogadrov broj N i iznosi:

$N_A=0.602309x10^{27}$ (točnije:$N=0.602309x(1\pm3x10^{-6})x10^{27}$).

Pomoću Avogadrovog broja i mase od jednog mola moguće je lako izračunati masu svakog pojedinačnog nuklida. Na primjer, masa nuklida ^{16}O iznosi

$15.99482/0.602309x10^{27}=26.56x10^{-27}$ kg.

Mase čestica su ovisne o kinetičkoj energiji odnosno brzini čestice. Na osnovi rezultata specijalne teorije relativnosti tu je ovisnost moguće izraziti relacijom,

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

gdje je,

m masa čestice u kretanju brzinom v

m_0 masa čestice u mirovanju

c brzina svjetlosti ($2.9979x10^8$ m/s)

Kod malenih brzina čestica, odnos v/c postaje zanemariv, a time i razlika između mase čestice u gibanju i mirovanju. Tek kada odnos v/c dosegne iznos od kojih 0.2 (brzina čestice je 20% brzine svjetlosti) povećanje mase čestice postaje primjetno (m/m_0 tada postaje 1.02).

Primjer 2.4.1

Kod kojih energija elektroni i neutroni dosižu brzine v=0.2c, kada treba računati s relativističkim porastom mase?

Rješenje:

Kinetička energija čestice $E = mv^2/2 = \frac{m_0 v^2}{2\left(1 - v^2/c^2\right)}$

Uvrštenjem $v^2 = 0.04 * c^2$, proizlazi $E = 0.0208 * m_0 c^2$

Za elektrone mase m_0=9.10956x10^{-31} kg, energija iznosi,

E=1.70x10^{-15} J=10628 eV=0.0106 MeV

Za neutrone mase m_0=1.67492x10^{-12} kg, energija iznosi,E=3.127x10^{-12} J=19.5 MeV

Energije elektrona s kojima se srećemo u nuklearnoj tehnici su često veće od 0.01 MeV, pa kod ovih čestica treba računati sa relativističkim porastom mase. S druge strane, prosječne su energije neutrona u nuklearnim reaktorima znatno niže od 19.5 MeV, pa se u proračunima njihove mase mogu uzimati jednakim masama mirovanja.

Pojam dimenzija atoma ne treba shvaćati u klasičnom smislu jer se ne radi o sustavu s točno definiranim granicama. Može se samo govoriti o redu veličine dimenzija, koje naravno ovise i o vrsti atoma. Mjerenja su pokazala da se polumjer atomske jezgre može aproksimirati izrazom

$$r = 1.25 * 10^{-15} * A^{1/3}\ m \qquad (2.4.3)$$

A je broj nukleona u jezgri (poglavlje 2.2).

Jednadžba (2.4.3) pokazuje da je r, odnosno volumen jezgre,direktno proporcionalan s brojem nukleona u jezgri A. Ovo navodi na zaključak da je gustoća materijala jezgre konstantna, tj. neovisna o veličini jezgre. Po ovoj je osobini jezgra slična kapljici tekućine, pa se model jezgre kao kapljice tekućine često koristi za objašnjenje međudjelovanja čestica unutar atomske jezgre .

Primjer 2.4.2

Kolika je gustoća materijala atomskih jezgara i koliki dio volumena unutar atoma zauzimaju atomske jezgre,ako se pretpostavi da je polumjer atoma reda 10^{-10} m? Koliki je odnos mase jezgre i cijelog atoma?

Rješenje:

Ako se pretpostavi da se geometrija atomske jezgre može predstaviti kao kuglica polumjera r, izlazi:

Volumen jezgre $V = \frac{4\pi}{3}\left(1.25 * 10^{-15}\right)^3 * A = 8.18 * 10^{-45} * A\ \ m^3$

Prosječna masa nukleona (dobivena kao srednja vrijednost masa protona i neutrona) iznosi 1.673765x10^{-27} kg.

Prema tome, masa jezgre M=1.673765x10^{-27} A kg.

Gustoća materijala atomske jezgre $\rho = M/V = 2 * 10^{17}\ kg/m^3 = 2 * 10^8\ tona/cm^3$!

Gustoća materijala atomskih jezgara od 200 milijuna tona po kubnom centimetru daleko prelazi sve predstave o gustoći materije. U prirodi je gustoća materije tog reda veličine ostvarena jedino kod neutronskih zvijezda.

Ako se uzme A=100 (atomska jezgra prosječne težine), njezin volumen iznosi 8.18x10^{-43} m^3. S druge strane, volumen cijelog atoma je reda 10^{-30} m. Volumen atoma je dakle bilijun puta (10^{12}) veći od volumena jezgre!

Odnos težina jezgre i cijelog električki neutralnog atoma je: masa jezgre/(masa jezgre + masa elektronskog plašta).

Taj odnos je veći od 0.999, jer elektronski plašt nosi manje od tisućinke mase atoma.

Atomska jezgra sadrži praktički cijelu masu atoma, a zaprema neznatan dio njegovog volumena. Fizički svijet sačinjava uglavnom prazan prostor!

2.5 Izotopi

Broj protona u jezgri atoma i odgovarajući broj elektrona u njegovom plaštu određuju prirodu kemijskog elementa. Promjenom se broja neutrona u jezgri atoma ne mijenjaju kemijska svojstva. Zbog toga su s aspekta kemijskih reakcija atomi s različitim brojevima neutrona, ali istim brojevima protona u jezgri, identični. Međutim, fizikalna svojstva tih atoma mogu biti veoma različita. Atomi koji sadrže isti broj protona a različiti broj neutrona su poznati kao izotopi. Izotopi se dijele na stabilne i radioaktivne izotope.

Jedna od karakteristika kemijskih elemenata je podatak o relativnom sadržaju njegovih prirodnih stabilnih ili dugoživućih radioaktivnih izotopa. Većina kemijskih elemenata ima takve izotope (samo 20 kemijskih elemenata sadrže samo jednu vrstu stabilnih nuklida).

Kada je govori o sadržaju izotopa u nekom kemijskom elementu treba obratiti pažnju dali je riječ o atomskom ili masenom sadržaju.

Atomski je sadržaj a_i izotopa definiran je kao:

$$a_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

a maseni udio izotopa kao:

$$w_i = \frac{A_i N_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i N_i} \qquad \textbf{(2.5.2)}$$

gdje je n ukupni broj izotopa u elementu, ,N_i broj atoma izotopa i, a A_i masa atoma izotopa i.

Ako se brojnik i nazivnik izraza (2.5.2) podijeli sa $\sum N_i$, dobiva se prikladnija forma:

$$w_i = \frac{a_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i A_i} \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

U poglavlju 2.4 je naveden uobičajen način oznake nuklida: Uz oznaku vrste kemijskog elementa dovoljno je navesti podatak o masenom broju A, čime je jednoznačno određen broj protona i neutrona u jezgri.

Ovim je načinom omogućeno jednostavno definiranje izotopa svakog kemijskog elementa. Na primjer izotopi kisika se označuju kao ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O,izotopi vodika ^{1}H, ^{2}H, ^{3}H, izotopi urana ^{234}U, ^{235}U, ^{238}U itd. Sadržaj izotopa u svakom elementu je praktički konstantan. Na primjer, analize uzoraka vode iz Londona, Tokija i raznih gradova u SAD su pokazale odnos izotopa $^{1}H/^{2}H$

6700±50, tj.razlike u atomskom odnosu izotopa su jedva nešto veće od 0.01%. U nekim slučajevima su utvrđena nešto veća odstupanja. Na primjer odnos izotopa ugljika $^{12}C/^{13}C$ u karbonatnim stijenama iznosi oko 89.2, a u ugljenu 91.8.

Za nuklearnu su energetiku od posebnog značaja izotopi urana. Udio atoma pojedinih izotopa u prirodnom uranu je ^{234}U -0.057%, ^{235}U -0.72%, ^{238}U -99.27%.

Od važnosti su i izotopi vodika ^{1}H, ^{2}H i ^{3}H.Izotop ^{2}H je stabilan i poznat pod nazivom deuterij, dok je izotop ^{3}H radioaktivan i poznat kao tricij.

Osim stabilnih izotopa u većine kemijskih elemenata utvrđeno je postojanje i nestabilnih odnosno radioaktivnih izotopa. Svi ti izotopi su sistematizirani u tzv. kartama nuklida koje sadrže podatke o preko 1500 stabilnih i radioaktivnih izotopa .

Primjer 2.5.1

Potrebno je izračunati prosječnu masu atoma prirodnog urana.Uran sadrži tri izotopa slijedećih karakteristika:

Izotop	atomski sadržaj a_i %	atomska težina A (AJM)
^{234}U	0.0057	234.0409
^{235}U	0.72	235.0439
^{238}U	99.27	238.0508

Rješenje:

Na osnovi datih podataka o izotopima urana prosječna masa atoma se izračunava kao,

$$M_U = 0.01\sum_{1}^{3} A_i a_i \ .$$

Dakle, M_U=0.01(0.0057x234.0439+0.72x235.0439+99.27x238.0508)

=238.01869 AJM

Masa atoma prirodnog urana je približno 238 AJM.

Primjer 2.5.2

Potrebno je odrediti:

a) Težinski udio ^{235}U u prirodnom uranu

b) Odnos atoma ^{238}U i ^{235}U u uranu sa težinskim udjelom izotopa ^{235}U od 3% (odnosno u 3% obogaćenom uranu).

Rješenje:

a) Maseni udio izotopa ^{235}U u prirodnom uranu suglasno izrazu (2.5.3) iznosi

$$w_{235} = \frac{0.72 * 235}{238}\% = 0.711\% \ .$$

b) Na osnovu izraza (2.5.3) možemo pisati

$$w_{235} = \frac{235\frac{N_{235}}{N_{238}}}{238 + 235\frac{N_{235}}{N_{238}} + 234\frac{N_{234}}{N_{238}}}.$$

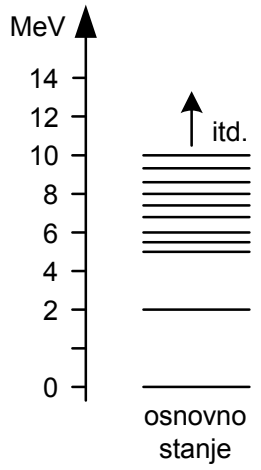
Treći član u nazivniku je zanemariv u odnosu na prvi i drugi član (dva je reda veličine manji od drugog i četiri redova veličine manji od prvog člana), pa traženi odnos atoma ^{238}U i ^{235}U iznosi:

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{0.97 * 235}{0.03 * 238} = 31.93.$$

Za mnoge je primjene u reaktorskoj tehnici potrebno odvajati izotope nekog kemijskog elementa. Od posebne je važnosti odvajanje izotopa urana. Budući da su kemijska svojstva izotopa identična ili vrlo slična, teško ih je odvajati kemijskim metodama. U postupcima za odvajanje izotopa urana se koriste fizikalni postupci koji se zasnivaju na činjenici da atomi izotopa imaju drukčije mase, ili se razlikuju po nekim drugim fizikalnim karakteristikama (npr. po potencijalu ionizacije atoma).

2.6 Energijske razine atomskih jezgara

Jezgre se atoma, slično kao elektroni u atomskom plaštu, mogu nalaziti u osnovnom i u pobuđenom stanju. Kada je atomska jezgra u pobuđenom stanju, njezina unutrašnja energija odgovara jednoj višoj energijskoj razini u odnosu na osnovno stanje. Energijske su razine atomske jezgre, suglasno kvantnoj teoriji, diskretne i karakteristične za svaki nuklid. Kao primjer, energijske su razine jezgre ^{12}C, prikazane na slici 2.6.1



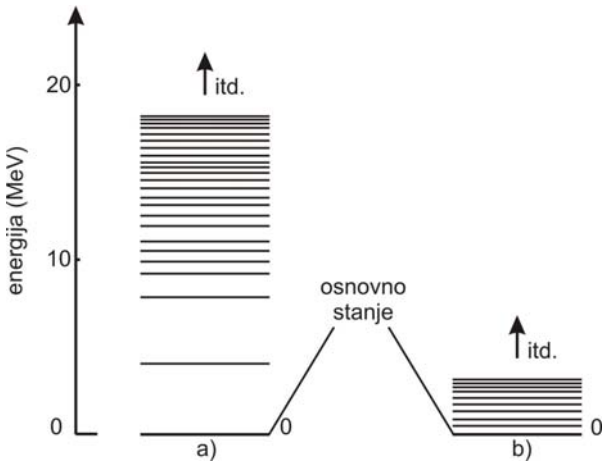
Slika 2.6.1 Energetske razine nuklida ^{12}C

Razlike su između energijskih razina jezgre tim veće što se energetske razina nalaze bliže osnovnom stanju. Dalje od osnovnog stanja razlike energija postaju sve manje i postepeno prelaze u kontinuum (slična zakonitost vrijedi i za energijske razine elektrona u plaštu atoma).Treba nadalje primijetiti da su razlike između energijskih razina u prosjeku manje kod težih nego kod lakših jezgara. To znači da je teže jezgre moguće pobuditi dovođenjem manjih količina energija nego što je to slučaj kod lakših jezgara (slika 2.6.2)

Važno je primijetiti da su energetske razlike između pojedinih razina energetskih stanja jezgre bitno veće (oko milijun puta veće) od energetskih razlika elektronskih putanja u plaštu atoma. Ovu razliku treba tumačiti znatno većim silama koje djeluju izmedju nukleona u jezgri atoma od onih koje djeluju izmedju elektrona u plaštu atoma i jezgre. Isti red veličine su i razlike između energija koje nastaju u nuklearnim i kemijskim reakcijama, jer prve rezultiraju iz procesa unutar jezgre, a druge iz reakcija u plaštu atoma.

Prema Plank-ovom zakonu (pogl. 2.3) frekvencija emitiranog elektromagnetnog zračenja je proporcionalna razlici energije između energijskih razina nukleona u jezgri. Visoki iznos energije između energijskih razina unutar jezgre navodi na zaključak da će emitirano zračenje iz jezgre imati vrlo visoku frekvenciju i odgovarajuće vrlo malenu valnu dužinu. Radi se o vrlo "tvrdom" i prodornom zračenju, poznatom kao γ-zrake.

Upravo analiza energija emitiranih γ-zraka omogućuje indirektno mjerenje razina energija unutar jezgre. Energijski potencijali nukleona (protona i neutrona) unutar jezgre se mogu grafički predstaviti slikom 2.6.3

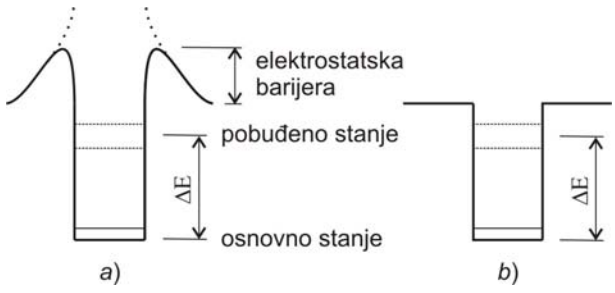


Slika 2.6.2 Energijske razine lakših jezgara (a) i težih jezgara (b)

Protoni su električno nabijene čestice i moraju pri ulazu i izlazu iz jezgre savladati elektrostatsku potencijalnu barijeru. Neutroni su električki neutralni i nemaju takve barijere.

Iz navedenog razloga slijedi da je lakša emisija neutrona iz jezgre kao i njihova penetracija u jezgru nego što je to slučaj kod električki nabijenih protona.

Tumačenje unutarnjih veza nukleona u jezgri je vezano uz objašnjenje unutarnje strukture jezgre modelom kapljice (Bohr-ov model jezgre) i ljuskastim modelom (kojim se unutarnja struktura jezgre tumači na sličan način kao struktura elektronskog plašta).



Slika 2.6.3 Energijski potencijali protona (a) i neutrona (b) unutar jezgre

2.7 Stabilnost atomskih jezgara

Osnovne sile koje određuju stabilnost atomskih jezgara su nuklearne sile i elektrostatska (Coulomb-ova) sila (sila gravitacije koja djeluje između dva spojena nukleona je oko 10^{37} puta slabija od nuklearne sile).

Nuklearne su sile ključne za razumijevanje stabilnosti atomskih jezgara. Bez tih sila jezgre ne bi mogle postojati jer bi elektrostatske odbojne sile između protona onemogućile njihovo formiranje. Neke ključne karakteristike nuklearnih sila su:

- Kratak domet djelovanja.

Nuklearne sile djeluju na udaljenosti koja je istog reda veličine kao promjer jezgre (tj. reda 10^{-13} cm)

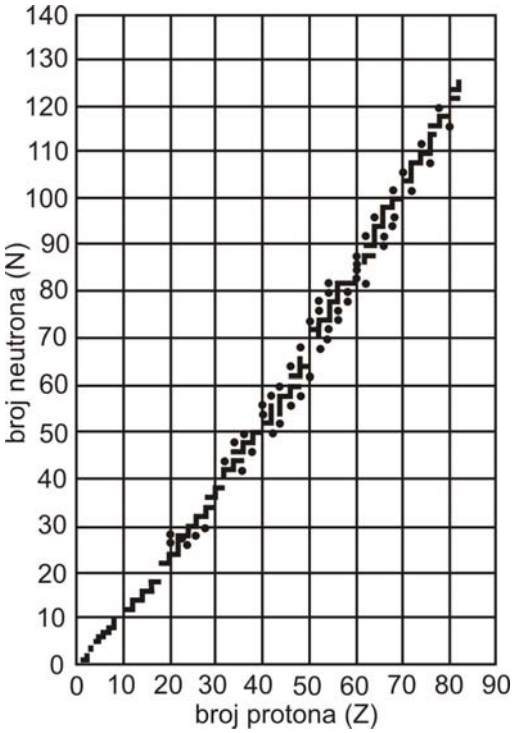
- Nuklearne sile su privlačne i veoma snažne.

Nuklearne sile između nukleona u unutrašnjosti jezgre višestruko nadvladavaju odbojnu elektrostatsku silu (npr. na savladavanje nuklearne sile radi odvajanja jednog nukleona iz jezgre težeg elementa treba utrošiti energiju od oko 8 MeV)

- Nuklearne sile djeluju između parova nukleona i pokazuju svojstvo zasićenja

Elektrostatska je odbojna sila u unutrašnjosti jezgre slabija od nuklearne sile, ali nema svojstvo zasićenja (jedan proton djeluje na sve protone u jezgri). Zbog toga, utjecaj elektrostatske sile raste s povećanjem broja protona u jezgri.

Detaljnije objašnjenje djelovanja sila u jezgri atoma treba potražiti u udžbenicima iz nuklearne fizike.



Slika 2.7.1 Odnos broja protona i neutrona za stabilne nuklide

Od oko 1500 poznatih nuklida, samo 352 postoje u prirodi , a od ovih su 265 stabilni. Ostali nuklidi su umjetno dobiveni putem nuklearnih reakcija. Stabilni nuklidi mogu postojati samo unutar određenih odnosa broja protona i neutrona u jezgri. Ti su odnosi prikazani slikom 2.7.1.

Kod lakih se jezgara (jedino nuklid H nema neutrona u jezgri) se stabilnost postiže kada je broj neutrona N jednak broju protona Z. Međutim, stabilnost jezgara s više od 20 protona je oslovljena većim brojem neutrona od broja protona (tj. s odnosom N/Z većim od jedinice). Odnos N/Z kod težih jezgara sve više raste, tako da kod najtežeg stabilnog nuklida ^{208}Pb postaje 1.53 (za izotop urana ^{238}U iznosi 1.59). Objašnjenje treba tražiti u činjenici da je stabilnost uvjetovana relativnim povećanjem djelovanja nuklearnih sila koje su potrebne za kompenzaciju sve jačih elektrostatskih odbojnih sila među protonima u jezgri.

Postoji još faktora koji utječu na stabilnost atomskih jezgara. Ti su faktori vezani uz specifičnost djelovanja nuklearnih sila i uz unutrašnju strukturu atomske jezgre.

Osim odnosa broja protona i neutrona u jezgri na stabilnost atomskih jezgara još utječe:

- Paran ili neparan broj nukleona u jezgri.

Jezgre sa parnim brojem protona i parnim brojem neutrona su,općenito, stabilnije od onih kod kojih je jedan od ta dva broja neparan, a naročito od onih kod kojih su oba broja neparna. To potvrđuje činjenica da od ukupno prirodnih 265 stabilnih nuklida, njih 157 ima paran broj protona i paran broj neutrona, 53 stabilnih nuklida ima paran broj protona i neparan broj neutrona, a 50 neparan broj protona i paran broj neutrona. U prirodi postoji samo 5 stabilnih nuklida kod kojih je i broj protona i broj neutrona neparan.

- "Magičan" broj protona i neutrona u jezgri.

Atomske jezgre koje sadrže 2,8,20,50 i 82 protona i/ili 2,8,20,50,82 i 126 neutrona su naročito stabilne. Zbog početne neobjašnjivosti ove pojave kada je bila otkrivena udomaćio se je u nuklearnoj fizici za ove brojeve termin "magični brojevi".

Objašnjenje ovih pojava treba tražiti u modelima gradnje jezgre atoma koji tumače stabilnost jezgara vezivanjem neutrona u parove (iz čega proizlazi veća stabilnost jezgara sa parnim brojevima protona i neutrona). Magične pak brojeve treba povezati sa ljuskastim modelom atomske jezgre. Taj model objašnjava periodičnost pojave naročito stabilnih konfiguracija u jezgri popunjenjem unutarnjih ljuski sa nukleonima (slično kao što se objašnjava pojava posebno stabilnih kemijskih elemenata kompletiranjem ljuski u plaštu atoma). Nukleon koji preostaje nakon kompletiranja

ljuske je posebno slabo vezan za jezgru (iz sličnog razloga zbog kojeg je vanjski elektron kod alkalnih metala slabo vezan uz plašt atoma).

2.8 Radioaktivnost

Nuklidi koji se nalaze van područja stabilnosti određenog slikom 2.7.1 ili koji se nalaze u pobuđenom stanju (s unutarnjom energijom višom od osnovne energetske razine) su nestabilni. Kod tih nuklida postoji prirodna težnja da se putem unutarnjih transformacija i/ili putem emisija suvišnih čestica vrate u područje stabilnosti. Ovaj je proces poznat kao radioaktivnost. Radioaktivnim raspadima nestabilne (odnosno pobuđene) jezgre postupno prelaze u stanje stabilnosti.

Vjerojatnost da će se neka nestabilna jezgra raspasti je ovisna o vremenu i prirodi te jezgre. Ako posmatramo N istovrsnih nestabilnih jezgara uočiti ćemo da je broj raspada u jedinici vremena proporcionalan s brojem jezgara N (što se može formulirati i postavkom da je vjerojatnost raspada nestabilne jezgre u svakom vremenskom intervalu konstantna). Konstanta proporcionalnosti, koja daje odnos između broja prisutnih i broja raspadnutih jezgara u nekom vremenskom intervalu Δt, a karakterizira svaku vrstu nestabilnih nuklida,je poznata kao konstanta radioaktivnog raspada λ. Broj raspada na N nestabilnih atomskih jezgara u jedinici vremena će biti λN. Veličina λN određuje aktivnost radioaktivnog materijala.

Na osnovi se navedenih činjenica neposredno se može postaviti zakon radioaktivnog raspada, koji određuje broj raspada dN za N nestabilnih jezgara u vremenu dt:

$$dN = -\lambda N dt$$

Integracijom od 0 do t slijedi poznati izraz za vremensku promjenu količine nestabilnih jezgara N(t):

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(2.8.1)}$$

gdje je N_0 broj nestabilnih jezgara u vremenu t=0.

Vrijeme potrebno da se polovina početno prisutnih radioaktivnih jezgara raspadne se obilježava kao vrijeme radioaktivnog poluraspada $t_{1/2}$. Iz relacije (2.8.1) slijedi:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad \textbf{(2.8.2)}$$

Vremena poluraspada radioaktivnih jezgara variraju od neznatnog dijela sekunde do više milijardi godina.

Jedinica za aktivnost u SI sustavu jedinica je jedan raspad u sekundi. Ime jedinice je Bekerel (Bq=1/s). Stara, mnogo veća i još upotrebljavana, jedinica za aktivnost 1C (Curie)=3.7×10^{10} Bq.

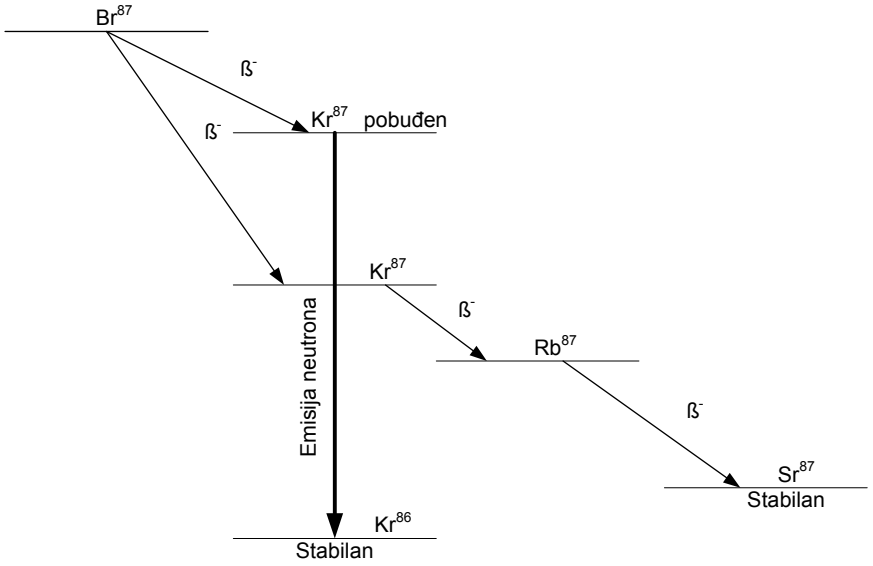
Za nuklearnu su energetiku od posebnog značaja nestabilni nuklidi sa viškom neutrona, jer takvi nuklidi potječu iz fisija teških jezgara (urana ili plutonija). Iz slike (2.7.1), naime, proizlazi da je stabilnost teških atomskih jezgara oslovljena većim odnosom broja neutrona i protona nego što je to slučaj kod lakših jezgara.Pri fisiji, fisijski fragmenti, tj. novonastale lakše jezgre, zadržavaju praktički isti odnos neutrona i protona kao i teška jezgra prije raspada, a to je odnos koji im ne omogućava stabilnost.

Jezgre smanjuju broj neutrona putem jedne od slijedećih nuklearnih reakcija:

- **Emisijom neutrona**

Nuklearna reakcija emisije neutrona je prisutna samo kod nekih veoma pobudjenih nuklida nastalih u fisijama teških jezgara.

Primjer jedne takve reakcije je transformacija izotopa je pretvorba ^{87}Kr u ^{86}Kr prema slici 2.8.1



Slika 2.8.1 Transformacija ^{87}Br u ^{86}Kr i ^{87}Sr uz emisiju neutrona

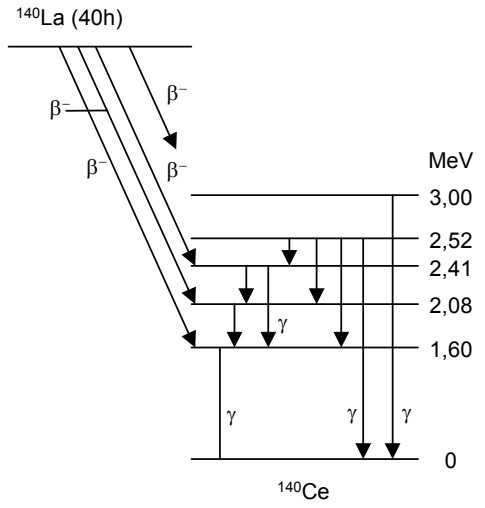
- **Pretvorbom neutrona u proton putem β raspada.**

Emisijom elektrona iz jezgra (β^- raspad) i antineutrina ν neutron se pretvara u proton prema nuklearnoj reakciji ,

$$n = p^+ + \beta^- + \nu .$$

Nuklearna reakcija pretvorbe je mnogo češća od neposredne emisije neutrona iz jezgre, jer traži znatno manje energije.

Primjer nuklearne reakcije pretvorbe je raspad ^{140}La u ^{140}Ce prema slici 2.8.2.



Slika 2.8.2 Radioaktivni raspad nuklida ^{140}La

Emisije materijalnih čestica iz nuklearnih jezgara redovito prate i promjene unutarnjih energijskih razina u jezgri, što se reflektira u emisijama γ-zraka. Energija emitiranog γ-zračenja ovisi o razlici energija između višeg i nižeg energijskog stanja jezgre. Moguća energijska stanja unutar jezgre imaju točno određene energije, a učestalost pojave pojedinih energijskih stanja podliježe statističkim zakonima.

Iz slike 2.8.2 je primjerice vidljivo da se emisijom elektrona iz jezgre ^{140}La dobiva jezgra ^{140}Ce na jednoj od pet mogućih energijskih razina iznad osnovnog energijskog stanja. Povrat jezgre u osnovno

energetsko stanje prate emisije γ-zraka s energijama koje odgovaraju razlikama energije između energijskih razina jezgre.

Emisija β-čestice,odnosno elektrona iz jezgre, povećava se broj protona u jezgri, i time dovodi transformacije jednog kemijskog elementa u drugi sa većim rednim brojem. Emisija γ-zrake iz jezgre ne mijenja prirodu kemijskog elementa.

Ako jezgra sadrži premalen broj neutrona u odnosu na stabilno područje prikazano slikom 2.7.1,dolazi do inverzne pretvorbe, odnosno pretvorbe protona u neutron uz emisiju pozitrona odnosno β^+-čestice (elektron sa pozitivnim nabojem) i neutrina. Ovakve su nuklearne reakcije rijetke i bez značaja za nuklearnu energetiku.

Jezgre najtežih elemenata (najteži stabilni nuklid je ^{209}Bi) su nestabilne, a prema tome i radioaktivne. Teške radioaktivne jezgre se pretežno raspadaju u jedan od izotopa olova. Olovo naime ima "magičan" broj protona što mu omogućuje naročitu stabilnost.

Teške jezgre pored emisije β i γ zraka emitiraju i α-čestice. Te su čestice u stvari jezgre atoma helija (^4He) i sadrže dva protona i dva neutrona. Veoma su stabilne jer sadrže "magičan" broj protona i neutrona. Emisijom α čestice jezgra smanjuje atomsku težinu za 4 i redni broj (tj. broj protona) za 2..

Raspadi teških jezgara se ne događaju u jednom koraku nego se formiraju tzv. radioaktivni nizovi kod kojih "roditelj" niza je nuklid sa najdužim poluvremenom raspada. Prirodni teški radioaktivni elementi pripadaju jednom od 4 radioaktivna niza (uranov, torijev, aktinijev i neptunijev niz) sa karakteristikama :

	"Roditelj" niza	**Vrijeme poluraspada**	
URANOV NIZ	^{238}U,	$4.5x10^9$	god
TORIJEV NIZ	^{232}Th,	$1.32x10^{10}$	god
AKTINIJEV NIZ	^{235}U,	$7.1x10^8$	god
NEPTUNIJEV NIZ	^{238}Np	$2.2x10^6$	god

Roditelj neptunijeva niza ima znatno kraće vrijeme poluraspada od geološke starosti Zemlje (oko $5x10^9$ god), pa se elementi koji pripadaju tom nizu ne mogu više naći u prirodi.

Vremena poluraspada elemenata radioaktivnih nizova su veoma različita. Tako je primjerice kod uranovog niza najduže vrijeme poluraspada je $4.5x10^9$ god., a najkraće $1.64x10^{-4}$ s. Uranov je niz opisan tablicom 2.8.1

Tablica 2.8.1 Uranov niz

Nuklid	Emitirana čestica	Vrijeme poluraspada
$^{238}U_{92}$	α	$4.5*10^9$ god
$^{234}Th_{90}$	β	24.1 dana
$^{234}Pa_{91}$	γ	1.18 min
$^{234}Pa_{91}$	β	6.7 h

$^{234}U_{92}$	α	$2.5*10^5$ god
$^{230}Th_{90}$	α	$8*10^4$ god
$^{226}Ra_{88}$	α	1620 dana
$^{222}Rn_{86}$	α	3.82 dana
$^{218}Po_{84}$	α,β	3.05 min
$^{214}Pb_{82}$	β	26.8 min
$^{218}At_{85}$	α	2.0 s
$^{214}Bi_{83}$	α,β	19.7 min
$^{214}Po_{84}$	α	$1.64*10^{-4}$ min
$^{210}Ti_{81}$	β	1.32 min
$^{210}Pb_{82}$	β	19.4 god
$^{210}Bi_{83}$	α,β	5.0 dana
$^{210}Po_{84}$	α	138.3 dana
$^{206}Ti_{81}$	β	4.2 min
$^{206}Pb_{82}$	stabilan	

Radi lakšeg praćenja slijeda transformacije radioaktivnih nuklida u tabeli, za svaki je nuklid naveden i redni broj (odnosno broj protona u jezgri).

Interesantno je primijetiti da su poluvremena raspada dva osnovna izotopa urana ^{235}U (koji je "roditelj" aktinjevog niza) i ^{238}U dosta razlikuju. Teži izotop urana ima oko 6.3 duže vrijeme poluraspada od lakšeg izotopa, što upućuje na zaključak da je sadržaj ^{235}U u prirodnom uranu u dalekoj prošlosti bio veći.

Primjer 2.8.1

Koliki je bio sadržaj izotopa urana ^{235}U i ^{238}U u prirodnom uranu prije milijardu godina?

Rješenje:

Na temelju jednadžbe (2.8.2) i navedenih vremena poluraspada izotopa urana konstante radioaktivnog raspada ^{235}U i ^{238}U iznose, $9.76x10^{-10}$ god^{-1} i $1.54x10^{-10}$ god^{-1}.

Promjena odnosa broja atoma izotopa urana u prirodnom uranu u prošlosti prema današnjem stanju slijedi iz relacije,

$$\frac{N^{235}(-t)}{N^{238}(-t)} = \frac{N^{235}(t=0)e^{\lambda_{235}t}}{N^{238}(t=0)e^{\lambda_{238}t}}.$$

Uvrštenjem $t=10^9$ god i današnji (tj. za t=0) odnos atoma izotopa ^{235}U i ^{238}U u prirodnom uranu od 0.00717, dobiva se odnos izotopa u prirodnom uranu prije milijardu godina 0.0163. Prirodni uran je tada sadržavao oko 1.6% ^{235}U i po današnjim mjerilima spadao u slabo obogaćeni uran.

Kod velikog se broja radioaktivnih nuklida približavanje stabilnosti vrši u više koraka sukcesivnim raspadom jednog nuklida u drugi po shemi,

$$N_a \rightarrow N_b \rightarrow N_c \ldots,$$

gdje su s N_a, N_b i N_c označeni brojevi atoma radioaktivnih nuklida u nizu. Odgovarajuće su konstante radioaktivnog raspada λ_a, λ_b i λ_c. Vremenska je promjena količine nuklida N_b određena relacijom:

$$\frac{dN_b}{dt} = N_a\lambda_a - N_b\lambda_b = N_{0a}\lambda_a e^{-\lambda_a t} - N_b\lambda_b \qquad \textbf{(2.8.3)}$$

Prvi član na desnoj strani relacije (2.8.3) određuje porast broja atoma nuklida N_b zbog radioaktivnog raspada nuklida N_a, a drugi smanjenje tog broja zbog vlastitog radioaktivnog raspada.

Rješenjem diferencijalne jednadžbe (2.8.3) uz rubni uvjet $(N_b)_{t=0}=0$, dobiva izraz:

$$N_b = \frac{N_{0a}\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}\left(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}\right) \qquad \textbf{(2.8.4)}$$

Iz jednadžbe (2.8.3) proizlazi da je za ravnotežno stanje, tj. kada nema promjene broja radioaktivnih nuklida N_b u nizu, dozvoljeno pisati, $N_a\lambda_a=N_b\lambda_b$.

Isto vrijedi i za bilo koji radionuklid u nizu, pa se općenito, u slučaju ravnotežnog stanja tog niza, može postaviti, $N_i\lambda_i$=const. ili, prema jednadžbi (2.8.2), $N_i/(t_{1/2})_i$=const. Aktivnosti svih radionuklida u nizu su jednake kada je niz u ravnotežnom stanju.

Sadržaj izotopa koji potječu iz radioaktivnog niza u nekom materijalu se može iskoristiti za određivanje starosti tog materijala. Jedan od primjera takvog korištenja je određivanje starosti stijena na temelju odnosa broja atoma urana i olova u stijeni.

Primjer 2.8.2

Potrebno je odrediti starost stijene u kojoj je odnos masa ^{206}Pb i ^{238}U iznosi 0.8.

Rješenje:

Izotop ^{238}U se prema tablici 2.8.1 transformira u stabilni izotop ^{206}Pb nakon niza radioaktivnih raspada. Poluvremena raspada svih nuklida u nizu su mnogo manja od poluvremena raspada ^{238}U (koje iznosi $4.5\text{x}10^9$ godina). Drugo je najduže poluvrijeme raspada nuklida u nizu (to je poluvrijeme raspada nuklida ^{234}U) manje od 0.1% poluvremena raspada "roditelja" niza.

Navedena činjenica dozvoljava bitno pojednostavljenje proračuna vremenske promjene koncentracije izotopa ^{206}Pb u stijeni. Može se naime pretpostaviti da je konačan rezultat gotovo jednak kao da se izotop ^{238}U raspada u stabilni izotop ^{206}Pb u jednom koraku,dakle uz zanemarenje kašnjenja koji u taj proces unose ostali nuklidi u nizu.

U skladu sa tim dozvoljeno je za rješenje postavljenog problema koristiti jednadžbu (2.8.4), u koju treba uvrstiti:

$\lambda_b=0$, $N_b=N_{Pb}$, $N_{0a}=N_U+N_{Pb}$ (početni broj atoma ^{238}U je sadašnji njihov broj + sadašnji broj atoma ^{206}Pb), $\lambda_a=\lambda_U$

Dakle,

$$N_{Pb} = (N_U + N_{Pb})\left(1 - e^{-\lambda_U t}\right), \text{ odnosno,}$$

$$t = \frac{1}{\lambda_U} \ln\left(\frac{N_{Pb} + N_U}{N_U}\right).$$

Uvrštenjem $\lambda_U = 1.54 \times 10^{-10}$ god^{-1} i $N_{Pb}/N_U = 0.8(238/206) = 0.924$ dobiva se tražena starost stijene $t = 4.25 \times 10^9$ god.

Radioaktivni se izotopi često proizvode u nuklearnom reaktoru ili akceleratoru aktivacijom uzoraka neaktivnih materijala.

Ako se, radi jednostavnosti, pretpostavi da se neka vrsta radioaktivnih nuklida proizvodi vremenski ravnomjerno u količini R atoma/s, može se postaviti bilanca broja atoma radioaktivnog nuklida n za vrijeme dt u obliku,

$$dn = -\lambda n\, dt + R\, dt$$

Integracijom dobivano

$$n = n_0 e^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \qquad \textbf{(2.8.5)}$$

gdje je n_0 broj atoma nuklida n u vremenu t=0, a λ konstanta radioaktivnog raspada.

Aktivnost nuklida se određuje množenjem jednadžbe (2.8.5) sa λ. Treba primijetiti da aktivnost $n\lambda$ dostiže maksimalnu vrijednost R kada vrijeme t postaje neizmjerno.

Primjer 2.8.3

Radioaktivni se izotop zlata ^{198}Au, koji ima vrijeme poluraspada 64.8 sati, može dobiti iz stabilnog izotopa zlata ^{197}Au kada se on podvrgne bombardiranju neutronima u nuklearnom reaktoru.

Folija ^{197}Au mase 0.1 g je stavljena u reaktor i nakon 12 sati je izmjerena aktivnost folije od 3.33×10^{10} Bq.

Koja je maksimalna aktivnost koju može doseći ta folija? Koliko vremena treba ozračivati tu foliju da se dobije 80% maksimalne aktivnosti?

Rješenje:

Iz jednadžbe se (2.8.5) može dobiti promjena aktivnosti ozračenog uzorka:

$$(n\lambda) = (n_0\lambda)e^{-\lambda t} + R\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Budući da je početna količina radioaktivnog izotopa ^{198}Au jednaka nuli (tj. $n_0=0$), prvi član na desnoj strani jednadžbe otpada. Konstanta je radioaktivnog raspada ^{198}Au, $\lambda = \ln 2/64.8 = 0.0107$ h^{-1}

Nakon uvrštenja slijedi,

$3.33x10^{10}=R(1-e^{-0.0107*12})$

Maksimalna bi aktivnost folije R bila bi, $2.76x10^{11}$ Bq.

80% se maksimalne aktivnosti ($n\lambda=0.8R$) dobiva nakon ozračivanja folije u vremenu

$t=-\ln(0.2)/0.0107=150$ h.

2.9 Energija veze nukleona u jezgri

Nuklearne su jezgre čvrsto vezani sustav nukleona (protona i neutrona). Sile koje osiguravaju stabilnost atomskih jezgara su nuklearne sile, čije su značajke opisane u poglavlju 2.7. Odvajanje nukleona iz jezgre zahtjeva utrošak energije. Slika 2.6.3 upozorava na činjenicu da je ta energija veća za protone nego za neutrone. Protoni naime, kao električki nabijene čestice, imaju višu potencijalnu barijeru za izlazak iz jezgre, i zbog toga su jače vezani za jezgru od neutrona.

Kod formiranja jezgre dolazi do oslobađanja energije jednake onoj koju bismo morali utrošiti za njezinu dezintegraciju. Atomske jezgre su dakle stabilniji energetski sustav od sustava pojedinačnih nukleona. Općenito, svaka promjena u prirodi kod koje se oslobađa energija rezultira većom energetskom stabilnošću. To vrijedi kako za nuklearne i kemijske reakcije tako i za fizikalne pojave uzrokovane djelovanjem gravitacije, elektromagnetnih polja, unutarnjih sila u materijalima i sl.

Na račun čega se oslobađa energija kod postizavanja veće stabilnosti nuklearnog sustava?

Odgovor daje moderna fizika kroz postavku da je materija neuništiva, i da se ona javlja u dva osnovna vida koja se mogu međusobno transformirati. To su masa i energija. Povećanje energije mora dovesti do smanjenja mase i obrnuto.

Einstein-ova specijalna teorija relativnosti je odredila kvantitativan izraz za ekvivalentnost (odnosno uvjet pretvorbe) mase u energiju. Taj je izraz poznata formula:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \qquad \textbf{(2.9.1)}$$

gdje je,

ΔE promjena energije sustava

Δm promjena mase sustava

c brzina svjetlosti ($2.9979x10^8$ m/s)

Formula (2.9.1) se riječima može opisati na slijedeći način: Svaku promjenu energije sustava prati i odgovarajuća promjena njegove mase, odnosno tako zvani defekt mase. Odnos između defekta mase i promjene energije je veoma visok (kvadrat brzine svjetlosti).

Budući da je atomska jezgra stabilniji sustav od sustava pojedinačnih nukleona koji je sačinjavaju, pri njezinom formiranju mora, u skladu sa jednadžbom (2.9.1), doći do smanjenja mase sustava. Defekt mase koji nastaje kod formiranja jezgre se dobiva kao razlika zbroja masa svih nukleona koji sačinjavaju jezgru (Σm_{nu}) i mase nastale jezgre (m_j). Oslobođena će energija kod formiranja jezgre, prema Einstein-ovoj relaciji, biti

$$\Delta E = \left(\sum m_{nu} - m_j\right) * c^2 \qquad \textbf{(2.9.2)}$$

Zbroj masa nukleona dobiva se iz izraza

$$\sum m_{nu} = Z m_p + (A - Z) m_n$$

gdje je,

m_p, m_n masa protona i neutrona

Z broj protona

A broj nukleona u jezgri.

Treba uzeti u obzir da se u literaturi mase nuklida u pravilu navode kao mase neutralnih atoma, tj. uključuju i mase elektrona.

Primjer 2.9.1

Koliko se energije oslobodi u nuklearnoj reakciji fuzije kod koje se spajanjem tricija (^{3}H) i deuterija (^{2}H) dobiva izotop helija ^{4}He i neutron?

Mase nuklida izražene u AJM su,

M(^{3}H)=3.016049

M(^{2}H)=2.014102

M(^{4}He)=4.002604

M(n)=1.008665

Rješenje:

Pretvaranjem mase 1 AJM=1.660565x10^{-27} kg (poglavlje 2.4) u energiju se na osnovi relacije (2.9.1) dobiva energija, čija količina iznosi,

$$\Delta E = 1.660565*10^{-27}*\left(2.9979*10^{8}\right)^2 = 1.49241*10^{-10}\ J = 931.49\ MeV\ .$$

Defekt mase u razmatranoj nuklearnoj reakciji iznosi,

$$\mathrm{M}\left(^3\mathrm{H}\right)+\mathrm{M}\left(^2\mathrm{H}\right)-\mathrm{M}\left(^4\mathrm{He}\right)-\mathrm{M}(\mathrm{n}) = 0.018882\ \mathrm{AJM}\ .$$

U nuklearnoj se je reakciji izgubilo 0.375% početne mase čestica. Oslobođena energija u nuklearnoj reakciji fuzije iznosi,

$$0.018\,882*931.49 = 17.599\ MeV\ .$$

Primjer 2.9.2

Koliki je defekt mase kod izgaranja jednog kilograma kamenog ugljena?

Rješenje:

Izgaranjem kamenog ugljena se dobiva energija od oko 30000 kJ/kg.

Defekt mase po kilogramu ugljena iznosi:

$$\Delta m = \frac{3*10^{7}}{\left(2.9979*10^{8}\right)^2} = 3.338*10^{-10}\ kg\ .$$

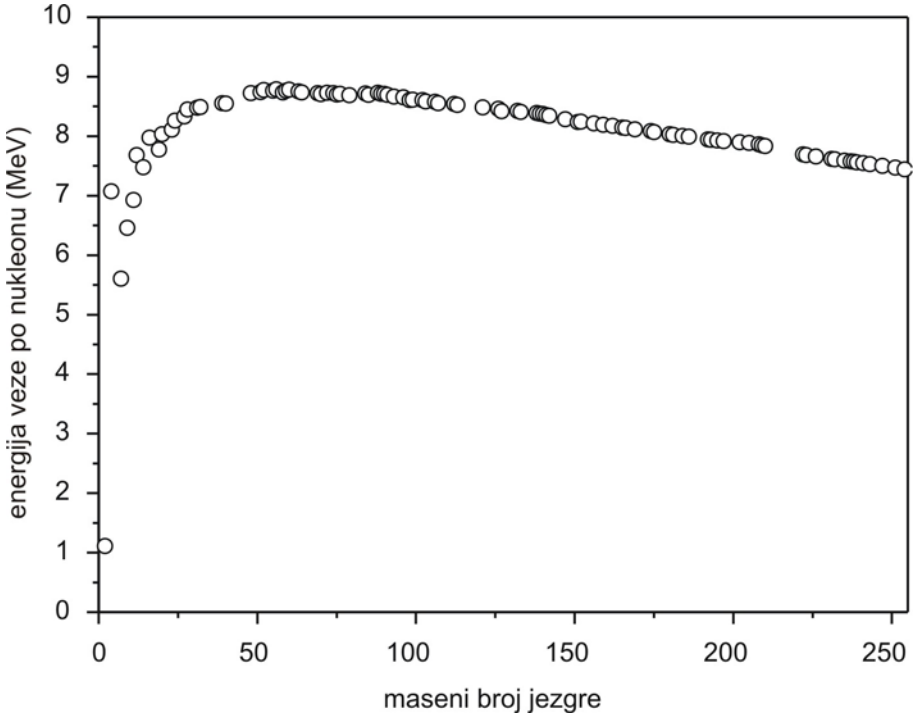
Potrebno je sagorijeti oko 3000 tona ugljena visoke kalorične vrijednosti da bi se izgubio samo jedan gram mase!

U kemijskim reakcijama, kod kojih dolazi samo do interakcija elektronskih plašteva atoma, nije ni najpreciznijim instrumentima moguće ustanoviti defekt mase. Ako se usporedi defekt mase po jedinici masa koje ulaze u reakciju fuzije vodikovih izotopa (primjer 2.9.1) sa netom izračunatim

defektom mase u procesu izgaranja ugljena (primjer 2.9.2) dobiva se odnos reda 10^7. U kemijskim je reakcijama opravdano zanemariti promjenu mase. S druge strane, kod preciznijih proračuna bilance masa u nuklearnim reakcijama defekt mase obavezno treba uzeti u obzir.

Energija koja se oslobađa kod formiranja jezgre iz pojedinačnih nukleona (ili energija koju treba utrošiti da se jezgra razbije na njezine sastavne dijelove) je definirana kao energija veze nukleona u jezgri. Ako tu energiju, kvantificiranu izrazom (2.8.2), podijelimo s brojem nukleona u jezgri (A), dobivamo prosječnu energiju veze po nukleonu E_v.

Prosječna je energija veze po nukleonu,izražena u MeV, u funkciji atomske mase jezgre A prikazana na slici 2.9.1.



Slika 2.9.1 Energija veze po nukleonu u ovisnosti o masenom broju jezgre

Praćenjem toka krivulje na slici 2.9.1, možemo uočiti nagli porast energije veze kod lakih jezgara, postizavanje maksimuma kod jezgara sa masenim brojem A od približno 60, a zatim lagani pad prema teškim jezgrama. Maksimalna vrijednost energije veze po nukleonu je približno 8.8 MeV, da bi kod urana(A=238) pala na približno 7.6 MeV.

Slika 2.9.1 je od temeljnog značaja za razumijevanje nuklearnih procesa koji mogu dovesti do oslobađanja energije atomskih jezgara, dakle do procesa koji se mogu koristiti u nuklearnoj energetici. Najstabilnije su jezgre u okolišu masenog broja 60 jer je kod kojih najviša energija veze po nukleonu. U to područje ulaze npr. jezgre izotopa željeza, nikla, mangana, kroma, bakra, cinka. Lakše ili teže jezgre od ovih su manje stabilne.

Na osnovi provedenog razmatranja proizlazi da je energiju moguće dobiti samo putem onih nuklearnih reakcija iz kojih rezultiraju stabilnije jezgre, to jest jezgre koje imaju veće energije veze po nukleonu od jezgara koje stupaju u nuklearne reakcije.

U praksi se, radi oslobađanja potencijalne energije sadržane u atomskim jezgrama, koriste dva tipa nuklearnih reakcija:

1.Nuklearne reakcije cijepanja(odnosno fisije) teških jezgara

2.Nuklearne reakcije spajanja(odnosno fuzije) lakših jezgara

Jedna i druga nuklearna reakcija rezultira nastankom atomskih jezgara s većom energijom veze po nukleonu.

Primjer 2.9.3

Kolika se energija može osloboditi cijepanjem jezgre ^{235}U na dvije približno jednake polovice?

Rješenje:

Iz slike 2.9.1 može se očitati da je za ^{235}U energija veze po nukleonu približno 7.6 MeV. Fisijski fragmenti (to jest atomske jezgre koje nastaju pri cijepanju jezgre urana) s atomskim težinama oko 117 (kasnije će se pokazati da se uran rijetko cijepa u dva jednaka dijela) imaju,prema slici2.9.1, energiju veze po nukleonu približno 8.5 MeV. Oslobođena energija po nukleonu je dakle oko 0.9MeV. Fisijom se jezgre ^{235}U oslobađa energija veze 235x0.9=211 MeV. Budući da, suglasno primjeru 2.9.1, toliki iznos oslobođene energije odgovara defektu mase od 0.227 AJM, kod fisije se gubi oko 0.1% mase nuklida ^{235}U.

Ovisnost energije veze o masi nuklida, se za većinu nuklida može aproksimirati kontinuiranom krivuljom. Međutim, za neke lake nuklide energija veze je znatno viša od one koja bi se uklapala u opći trend krivulje na slici 2.9.1. To se prvenstveno odnosi na nuklid ^{4}He, a u nešto manjoj mjeri na nuklide ^{12}C i ^{16}O. Razlog treba tražiti u magičnim brojevima i parnim brojevima nukleona u ovim nuklidima.

Krivulja prikazana na slici 2.9.1 se može aproksimirati poluempiričkim izrazom koji je koristan za kvantitativno određivanje energije veze pojedinih nukleona. Jedan od takvih izraza,koji se zasnivaju na modelu atomske jezgre u obliku kapljice tekućine,ima oblik,

$$E_V(MeV) = 14A - 0.584\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - 13.1A^{2/3} - 19.4\frac{(A-2Z)^2}{A} - E_\sigma \qquad \textbf{(2.9.3)}$$

Prvi član na desnoj strani relacije (2.9.3) uključuje utjecaj nuklearne sile na energiju veze nukleaona. Ta je sila proporcionalna s brojem nukleona A. Drugi član uzima u obzir smanjenje energije veze zbog elektrostatskog odbijanja protona. Elektrostatska je sila upravno proporcionalna utjecaju svakog naboja na sve ostale naboje u jezgri, što je kvantificirano produktom Z(Z-1), a obrnuto proporcionalna polumjeru jezgre (koji prema izrazu 2.4.3 ovisi o $A^{1/3}$). Treći član uključuje utjecaj slabije veze nukleona na površini jezgre. Utjecaj je razmjeran površini jezgre, odnosno razmjeran sa $A^{2/3}$. Iskustveno je ustanovljeno da su nuklidi sa istim brojem protona i neutrona u jezgri (tj. oni kod kojih je A=2Z) stabilniji od nuklida kod kojih su ti brojevi različiti. Taj je efekt kvantificiran četvrtim članom u navedenom polu empiričkom izrazu. I konačno peti član uzima u obzir činjenicu da vezivanje nukleona u parove povećava stabilnost atomske jezgre. Jezgre koje imaju parni broj protona i neutrona su stabilnije od onih kod kojih je taj broj neparan.

Faktor E_σ u jednadžbi 2.9.3 poprima slijedeće iznose u ovisnosti o broju protona Z i broju neutrona A-Z:

Za parne vrijednosti Z i A-Z $\qquad E_\sigma = \dfrac{-135}{A}$

Za neparne vrijednosti Z i A-Z $\qquad E_\sigma = \dfrac{135}{A}$.

Za nuklide kod kojih je jedna od dviju vrijednosti parna a druga neparna $\quad E_\sigma = 0$.

Formula (2.9.3) ne uzima u obzir povećanja stabilnosti jezgara sa "magičnim" brojem nukleona (što proizlazi iz ljuskastog modela jezgre), pa treba očekivati da će za takve jezgre dati premalene energije veze nukleona.

Primjer 2.9.4

Potrebno je odrediti energiju veze izotopa urana ^{235}U korištenjem,

a) Polu empiričke formule 2.9.3

b) bilance masa čestica

Rješenje:

a) Uvrštenjem u izraz (2.9.3): A=235, Z=92, E_0 =0 slijedi

E_V=3290-792.3-498.9-214.7=1784.1 MeV

Energija veze po nukleonu nuklida ^{235}U iznosi dakle,1784.1/235=7.59 MeV.

b) Na osnovi podataka o masama čestica,

M(^{235}U)	235.0439 AJM
Neutrona m_n	1.008665 AJM
Protona m_p	1.007277 AJM
Elektrona m_e	0.000055 AJM

može se defekt mase kod formiranja jezgre ^{235}U odrediti iz relacije:

$$\Delta m=Zm_p+(A-Z)m_n-M(^{235}U)+Zm_e=1.9153 \text{ AJM}$$

Energetski ekvivalent tog defekta mase je 931.48x1.9153=1784.1 MeV ili 7.59 MeV/nukleonu, što je identično vrijednosti dobivenoj korištenjem polu empiričke formule (2.9.3)

2.10 Nuklearne reakcije

Pod nuklearnom reakcijom podrazumijevamo proces kod kojeg dolazi do vanjskog utjecaja na nuklearnu jezgru, koji izaziva njezinu transformaciju. To može biti interakcija dva nuklida, nuklida i nukleona ili nuklida i γ-zrake. U nuklearnim reakcijama može nastati nekoliko novih materijalnih čestica ili γ-zraka. Ako se, radi primjera, uzme da nuklidi A i B ulaze u nuklearnu reakciju iz koje proizlaze nuklidi C i D i u kojoj je izmjenjena energija sa okolinom Q (koja može biti pozitivna ili negativna), jednadžba se te nuklearne reakcije može napisati kao:

$$A+B\rightarrow C+D+Q$$

Kod pisanja jednadžbe za bilo koju nuklearnu reakciju treba poštivati pravilo da broj nukleona A, zbroj elementarnih naboja Z, ukupna energija (uključivši i ekvivalentnu energiju masa u mirovanju) i moment gibanja čestica koje ulaze u nuklearnu reakciju moraju biti sačuvani.

Nekoliko primjera nuklearnih reakcija je,

$$^{10}B+n\rightarrow {}^{4}He+{}^{7}Li+Q$$

$$^{3}H+{}^{2}H\rightarrow {}^{4}He+n+Q$$

$$^{27}Al+{}^{4}He\rightarrow {}^{30}P+n+Q.$$

Iz navedenih je primjera nuklearnih reakcija očigledno očuvanje broja nukleona i količine naboja (zbroj atomskih masa i jediničnih naboja ostaje nepromijenjen u nuklearnoj reakciji). Izmijenjena energija sa okolinom Q se određuje na osnovi defekta masa koji nastaje u nuklearnoj

reakciji, odnosno iz razlika energije veze nuklida prije i poslije nuklearne reakcije (poglavlje 2.9). Proračun defekta masa je potrebno zasnivati na masama neutralnih atoma, tj. na masama nuklida zajedno sa elektronskim plaštom. Nuklearne reakcije kod kojih je Q pozitivan (iz nuklearne reakcije se može dobiti energija) se zovu egzotermne nuklearne reakcije. Obratno, nuklearna reakcija je endotermna ako troši energiju.

Primjer 2.10.1

Potrebno je dovršiti jednadžbu nuklearne reakcije:

$^{27}Al+^{4}He\rightarrow ?+^{1}H$

Rješenje:

Budući da jezgra atoma aluminij ima 13 protona, helija 2 a vodika 1, rezultirajuća jezgra mora imati 14 protona. Jezgra s 14 protona je izotop silicija. Atomska težina rezultirajućeg nuklida mora biti 27+4-1=30. Tražena jednadžba nuklearne reakcije je:

$^{27}Al+^{4}He\rightarrow ^{30}Si+^{1}H+Q$

Većina je nuklearnih reakcija izazvana bombardiranjem atomskih jezgara elementarnim česticama (neutroni, protoni,γ-kvanti) ili drugim lakim jezgrama (na primjer, ^{2}H ili ^{4}He, za koje su uobičajene oznake d odnosno deuteron i α-čestica). Iz nuklearnih reakcija većinom proizlaze transformirana atomska jezgra te iste ili druge elementarne čestice. U literaturi je udomaćen skraćeni oblik obilježavanja nuklearnih reakcija:

A(a,b)B

gdje je:

A jezgra prije nuklearne reakcije

a čestica koja je izazvala nuklearnu reakciju

B jezgra koja je nastala u nuklearnoj reakciji

b elementarna čestica koja nastala u nuklearnoj reakciji

Na osnovi ove konvencije, ranije navedeni primjeri nuklearnih reakcija bi bili opisani na slijedeći način:

$^{10}B(n,\alpha)^{7}Li$ $^{3}H(d,n)^{4}He$ $^{27}Al(\alpha,n)^{30}P$

Kod analize pojedinih nuklearnih reakcija, posebno kod razmatranja bilanca momenata gibanja elementarnih čestica i nuklida u nuklearnoj reakciji, pribjegava se u cilju jednostavnijeg objašnjenja fizičkih pojava, pojmu tzv. složene jezgre (taj je pojam korišten i u fizici nuklearnog reaktora). Pri tome se nuklearna reakcija razmatra u dvije faze:

U prvoj se fazi formira složena jezgra iz početnog jezgra i upadne čestice. U drugoj fazi dolazi do raspada složene jezgre na rezultirajuću jezgru i izlaznu česticu.

Nuklearne reakcije s neutronima

U nuklearnoj su energetici posebno značajne nuklearne reakcije koje izazivaju neutroni. Među ovima se po važnosti za nuklearnu energetiku ističu slijedeće:

Elastični sudar

Kod elastičnog sudara jezgre i neutrona dolazi do preraspodjele količina gibanja i kinetičkih energija čestica. Analiza se ove pojave vrši slično kao analiza sraza elastičnih kuglica u klasičnoj

mehanici. Nuklearna se reakcija elastičnog sudara može označiti kao (n,n) reakcija, jer je neutron i ulazna i izlazna čestica iz jezgre.

Neelastični sudar

Ako neutron pri srazu s jezgrom dio svoje kinetičke energije pretvara u energiju pobude jezgre, tada se nakon sudara iz jezgre ne emitira samo neutron nego i γ-zraka čija energija odgovara dijelu energije neutrona utrošene na pobudu. Kod takve je nuklearne reakcije energija izlaznog neutrona dakle manja nego što bi bila da je sudar bio elastičan. Nuklearna reakcija neelastičnog sudara, označavana kao (n,nγ) reakcija, je česta kod interakcije neutrona s teškim jezgrama.

Uhvat neutrona

U mnogim nuklearnim reakcijama jezgra zarobljava neutron. Neutron tada unosi u jezgru svoju energiju veze i svoju kinetičku energiju. Ta energija pobuđuje jezgru i biva emitirana iz nje u vidu fotona, odnosno γ-kvanta. Zbog toga se nuklearna reakcija zarobljavanja neutrona karakterizira kao (n,γ) reakcija.

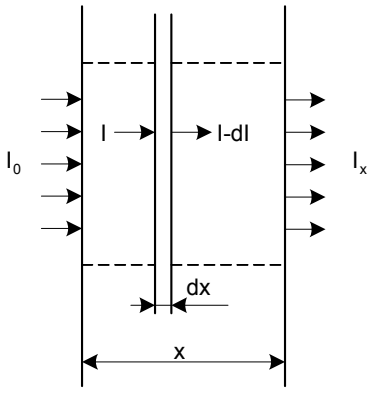
Fisija

Nuklearna reakcija fisije nastaje kada se jezgra, pobuđena uhvatom neutrona, raspada na dva fragmenta. Fisija je od temeljne važnosti za nuklearnu energetiku jer omogućuje praktično korištenje nuklearne energije. Detaljnije razmatranje ove nuklearne reakcije i njezinih posljedica je predmet poglavlja 4 ove knjige.

2.11 Udarni presjeci za nuklearne reakcije

Kod izvođenja konkretnih proračuna u nuklearnoj fizici i nuklearnoj energetici neophodno je raspolagati s pokazateljima koji kvantificiraju mogućnost nastanka pojedinih nuklearnih reakcija. Budući da su nuklearne reakcije pojave u mikrosvijetu svaka se kvantifikacija tih pojava mora zasnivati na principima vjerojatnosti i zakonu velikih brojeva. Parametar koji kvantificira učestalost pojave pojedinih nuklearnih reakcija se u nuklearnoj fizici naziva udarni presjek za dotičnu nuklearnu reakciju. Od interesa su za nuklearnu energetiku udarni presjeci za nuklearne reakcije sa neutronima.

Definicija je udarnog presjeka relativno jednostavna.



Slika 2.11.1 Prolaz neutronske struje kroz materijal

Zamislimo, prema slici 2.11.1, snop neutrona koji upada okomito na ploču debljine x i unutar ploče na sloj materijala debljine dx. Broj jezgara u materijalu presjeka $1m^2$ je Ndx, ako sa N označimo broj jezgara po jedinici volumena (m^3) materijala. Ako presjek jedne jezgre označimo sa σ (za sada se taj presjek može zamisliti kao geometrijsku veličini, iako će iz kasnijeg razlaganja biti očigledno da je analogija udarnog presjeka sa geometrijskim presjekom veoma ograničena), ukupni presjek jezgara unutar sloja dx će biti Nσdx.

S obzirom da je, prema razmatranom pojednostavljenom modelu, unutar presjeka od $1m^2$ okomito na smjer kretanja neutrona Nσdx m^2 zauzeto s atomskim jezgrama, to vjerojatnost kolizije jednog neutrona s bilo kojom jezgrom unutar sloja dx iznosi $N\sigma dx/1m^2 = N\sigma dx$.

Ako sada zamislimo da snop neutrona sadrži n neutrona po m^3 snopa koji se kreću brzinom v m/s, to će broj neutrona koji u sekundi prolaze kroz sloj materijala debljine dx biti nv. Broj kolizija neutrona i jezgara unutar sloja dx u jedinici vremena (koji je ekvivalentan ukupnoj vjerojatnosti kolizije svih neutrona sa jezgrama materijala) iznosi $N\sigma nvdx$. Očigledno je da će broj kolizija, odnosno broj nuklearnih reakcija neutrona s atomskim jezgrama po m^3 i sekundi, biti $N\sigma nv$.

U nuklearnoj se fizici veličina σ naziva mikroskopski udarni presjek za određenu nuklearnu reakciju. Udarni presjek ovisi o vrsti jezgre, tipu nuklearne reakcije i energiji neutrona koji je izaziva. Produkt $N\sigma$ se obilježava simbolom Σ i ima značenje zbroja udarnih presjeka svih jezgara u m^3 materijala. Ta je veličina poznata kao makroskopski udarni presjek. (U literaturi se veoma često Σ odnosi na presjek svih jezgara po cm^3 materijala, jer to vuče porijeklo iz upotrebe starog sustava jedinica).

Broj je nuklearnih reakcija koje izazivaju neutroni u materijalu po m^3 i sekundi određen s izrazom $nv\Sigma$.

Jedinica za mikroskopski udarni presjek σ je m^2, a za makroskopski udarni presjek Σ, m^{-1} ($=m^2/m^3$).

U cilju određivanja makroskopskog udarnog presjeka nekog izotopa potrebno je prethodno izračunati broj atoma dotičnog izotopa po 1 m^3 materijala. Broj atoma po kilogramu materijala (poglavlje 2.4) je $0.6023x10^{27}/A$, gdje je A atomska težina izotopa izražena u AJM. Očigledno je da će broj atoma po jedinici volumena biti,

$$N = \rho \frac{0.6023 * 10^{27}}{A} \qquad \textbf{(2.11.1)}$$

gdje je ρ gustoća materijala.

Atomska težina u izrazu 2.11.1 treba biti izražena u atomskim jedinicama mase. Međutim, kod većine se praktičkih proračuna za A uzima broj nukleona u jezgri, jer je time učinjena greška vrlo malena. Na primjer za ^{235}U, A=235.0439. Ako se A zaokruži na 235 unosi se greška od oko 0.018%, što je daleko ispod nesigurnosti koja se javlja kod određivanja udarnih presjeka.

S obzirom na sićušni presjek atomske jezgre, kvadratni je metar prevelika jedinica za mjerenje te veličine. Zbog toga je svojevremeno bila predložena posebna jedinica za mikroskopske udarne presjeke atomskih jezgara, istog reda veličine kao geometrijski presjek jezgre. Ta je jedinica nazvana barn (b), a iznosi 10^{-28} m^2.

Produkt nv (koji određuje broj neutrona koji u svakoj sekundi prelaze kroz presjek površine $1m^2$) je vektorska veličina poznata kao neutronska struja I. Prolazom kroz materijal dolazi do smanjenja neutronske struje. To smanjenje odgovara smanjenju gustoće neutrona u struji zbog nuklearnih reakcija unutar materijala. Budući da je broj nuklearnih reakcija u materijalu debljine dx jednak $N\sigma nvdx=\Sigma Idx$,može se pisati:

$$dI=-\Sigma Idx$$

Ako se označi, $(I)_{x=0}=I_0$, i izvrši integracija od x=0 do x, dobivamo zakon promjene intenziteta neutronske struje u ovisnosti o debljini materijala i makroskopskom udarnom presjeku

$$I = I_0 e^{-\Sigma x} \qquad \textbf{(2.11.2)}$$

U jezgri se nuklearnog reaktora neutroni kreću svim smjerovima (slično kao molekule plina u nekoj posudi), pa se ne može govoriti o struji neutrona kao vektorskoj veličini.

Zamislimo da se unutar materijala nalaze neutroni s gustoćom n neutrona/m^3 (nekad se to naziva i neutronskim poljem) koji se kreću brzinom v u svim smjerovima. Broj nuklearnih reakcija koje će izazvati svaki neutron u materijalu volumena $1m^3$ u jednoj sekundi će biti $N\sigma v$, dakle ostaje isti kao da je taj neutron dio neutronske struje. Za n neutrona će očigledno broj nuklearnih reakcija biti n puta veći, dakle $nvN\sigma$ (što je po opet obliku identično kao u slučaju neutronske struje). Treba međutim napomenuti da u ovom razmatranju nv više nije vektorska već skalarna veličina. Ta je veličina, od temeljnog značaja u nuklearnoj fizici i teoriji nuklearnog reaktora, poznata kao tok neutrona ϕ. Znači, broj nuklearnih reakcija u m^3 materijala i sekundi je $\phi\Sigma$. Dimenzija neutronskog toka je $1/m^2s$. (Napomena: U literaturi se često tok neutrona mjeri u $1/cm^2s$, pa ćemo se i s tom jedinicom za tok neutrona sretati u daljem tekstu).

Kod definicije pojma udarnih presjeka napomenuto je da te presjeke ne treba shvaćati kao geometrijske veličine (na to upućuje i naziv "udarni presjek"). To su u stvari pokazatelji vjerojatnosti da će doći do određene nuklearne reakcije. Ako je, na primjer, moguće da jezgre nekog nuklida u jednom trenutku stupe u dva tipa nuklearnih reakcija sa neutronima određene energije, to će broj reakcija jednog i drugog tipa biti razmjeran udarnim presjecima za jednu i drugu nuklearnu reakciju.

Ovisnost udarnih presjeka o vrsti nuklearnih reakcija i energiji neutrona će biti razmotrena u poglavljima 2.11.i 2.12.

Kako bismo mogli razlikovati udarne presjeke za nuklearne reakcije atomskih jezgara sa neutronima, uvedeni su, uz oznaku udarnog presjeka, za svaku nuklearnu reakciju karakteristični indeksi. U literaturi su uobičajene slijedeće oznake:

σ_s,Σ_s -elastični sudar

σ_{ie},Σ_{ie} -neelastičan sudar

σ_c,Σ_c -zarobljavanje neutrona

σ_f,Σ_f -fisija

Često se navodi i nuklearna reakcija apsorpcije neutrona kao zbirna nuklearna reakcija kod koje se gubi neutron koji je izazvao nuklearnu reakciju. Neutron se gubi i kod fisije i kod zarobljavanja koji ne dovodi do fisije. Udarni presjek za tu nuklearnu reakciju ima značenje:

$\sigma_a=\sigma_c+\sigma_f$, odnosno,

$\Sigma_a=\Sigma_c+\Sigma_f$

Kod mnogih se proračuna nuklearnih reakcija u materijalu uvodi pojam ukupnog udarnog presjeka za nuklearne reakcije. Ukupni je udarni presjek zbroj udarnih presjeka za sve nuklearne reakcije koje su dotičnom materijalu moguće s neutronima dane energije.

Primjer 2.11.1

Snop neutrona intenziteta $5x10^{12}$ neutrona/m^2s i presjeka $10^{-5}m^2$ pada okomito na grafitnu pločicu izrađenu od izotopa ugljika ^{12}C. Debljina pločice je 0.0005 m, a gustoća grafita 1600 kg/m^3. Ukupni udarni presjek ^{12}C je $2.6x10^{-28}$ m^2.Koliko nuklearnih reakcija nastaje unutar pločice? Kolika je vjerojatnost da će jedan neutron izazvati nuklearnu reakciju?

Rješenje:

Broj atoma u m^3 grafita: $N = \frac{0.6023*10^{27}}{12}*1600 = 8.03*10^{28}$.

Ukupni makroskopski udarni presjek: $\Sigma = 2.6*10^{-28}*8.03*10^{28} = 20.9\ m^{-1}$.

Ako se sa f označi presjek snopa,a sa δ debljinu pločice, broj interakcija u sekundi će biti: $If\delta\Sigma = 5*10^{12}*10^{-5}*0.0005*20.9 = 5.2*10^{5}$.

Broj neutrona koji u sekundi ulaze u pločicu: If=5x10^7 neutrona/s.

Vjerojatnost interakcije jednog neutrona s atomom grafita iznosi 5.2x10^5/5x10^7=1.04x10^{-2}.

Primjer 2.11.2

Termički neutroni prosječne energije 0.0253 eV bivaju apsorbirani po izotopu urana ^{235}U. Nuklearne reakcije koje su time izazvane mogu biti fisija atoma ili zarobljavanje neutrona (n,γ reakcija). Odgovarajući udarni presjeci su: za fisiju 582x10^{-28} m^2, za zarobljavanje neutrona 99x10^{-28} m^2.

Kolika je vjerojatnost da će apsorpcija neutrona rezultirati fisijom nuklida ^{235}U?

Rješenje:

Relativna vjerojatnost nastanka neke nuklearne reakcije je odnos udarnog presjeka dotične nuklearne reakcije i zbroja udarnih presjeka svih nuklearnih reakcija koje se istovremeno mogu dogoditi. Dakle, vjerojatnost da će apsorpcija neutrona energije 0.0253 eV rezultirati fisijom nuklida ^{235}U je,

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_c} = \frac{582}{582 + 99} = 0.855\ (85.5\%)$$

Primjer 2.11.3

U cilju mjerenja neutronskog toka, folija indija površine 10^{-4} m^2 i mase 10^{-6} kg je izložena toku termičkih neutrona u vremenu od 20 minuta. Ozračivanjem indija sa neutronima izotop ^{115}In, koji sačinjava oko 96% prirodnog indija, prelazi u radioaktivni izotop ^{116}In. Taj je izotop je β-emiter sa vremenom poluraspada od 52.4 min.

Tri sata nakon ozračivanja izmjerena je aktivnost folije 30.000 β čestica/min. Apsorpcijski udarni presjek izotopa ^{115}In za termičke neutrone je 136x10^{-28} m^2.

Kolikim je tokom termičkih neutrona bila zračena folija?

Rješenje:

Broj atoma ^{115}In u foliji je $\frac{0.6023*10^{27}}{115}*10^{-6}*0.96 = 5.03*10^{18}$. Ukupni udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona atoma ^{115}In u foliji će biti $\delta\Sigma_a = 5.03*10^{18}*136*10^{-28} = 6.81*10^{-8}$, gdje je δ debljina folije u m.

U rješavanju postavljenog problema korisno će nam poslužiti relacija (2.8.5) i primjer 2.8.2 u poglavlju 2.8.

Kod upotrebe navedene relacije treba uzeti u obzir da je maksimalna aktivnost folije R jednaka $\phi\delta\Sigma_a$. Treba, nadalje, uzeti u račun da je vrijeme zračenja folije t_1=20 min, da je aktivnost folije očitana nakon vremena t=3h (180 min), (čime je njezina aktivnost smanjena za faktor $e^{-\lambda t_2}$), kao i da je početna koncentracija radioaktivnog izotopa ^{115}In jednaka nuli (n=0).

Konstanta radioaktivnog raspada ^{115}In iznosi 0.0128 min. Upotrebom navedenih podataka može se relacija (2.8.5) pisati kao,

$n\lambda = 30000 = 6.81*10^{-8}\Phi(1-e^{-0.0128*20})e^{-0.0128*180}$.

Iz čega slijedi ϕ=1.95x10^{13} neutrona/m^{2}min=3.25x10^{11} neutrona/m^{2}s.

Slobodni put neutrona

Ako s λ označimo slobodni put neutrona između dvije sukcesivne nuklearne reakcije, broj je pređenih slobodnih putova u sekundi po neutronu v/λ (v je prosječna brzina neutrona). Uzevši u obzir da u jedinici volumena imamo n neutrona, broj slobodnih putova tih neutrona u jedinici vremena će biti nv/λ=ϕ/λ. Taj broj mora biti identičan s brojem nuklearnih reakcija po jedinici volumena i jedinici vremena, dakle $\phi/\lambda=\phi\Sigma$ ili

$$\lambda = 1/\Sigma \qquad \textbf{(2.11.3)}$$

2.12 Ovisnost udarnih presjeka o energiji neutrona

U poglavlju 2.11 je napomenuto da udarni presjeci za nuklearne reakcije atomskih jezgara sa neutronima (koji su karakteristični za svaki tip nuklearne reakcije i vrstu nuklida) ovise o energiji neutrona.

Od primarnog su interesa udarni presjeci za nuklearne reakcije s neutronima onih energija koje su prisutne u nuklearnom reaktoru. Neutroni u nuklearnom reaktoru potječu iz fisija jezgara urana i plutonija (o čemu će detaljnije biti govora u poglavlju 4.5), a njihove se energije mijenjaju u širokom opsegu. Raspon energija neutrona obuhvaća cijeli spektar, od energija fisionih neutrona (te se energije neutrona u reaktorskoj tehnici navode i kao energije brzih neutrona) s prosječnom energijom od oko 2 MeV, do energija usporenih, odnosno termičkih neutrona (naziv "termički neutroni" potječe iz činjenice da su usporeni neutroni u termičkoj ravnoteži sa okolnim materijalom). Energija termičkih neutrona se mijenja s temperaturom u reaktoru i iznosi svega nekoliko eV ili manje. Očigledno je da se pod pojmom energija neutrona u reaktoru ne podrazumijevaju jednoznačne vrijednosti nego raspodjele energija unutar nekog energetskog područja. Kod svake raspodjele energija možemo razlikovati najvjerojatniju i prosječnu energiju, o čemu će biti govora kasnije.

Kada se govori o ovisnosti udarnih presjeka nuklearnih reakcija o energiji neutrona treba, kao opću karakteristiku, navesti da se udarni presjeci smanjuju kada energija neutrona raste (dakle veće udarne presjeke treba očekivati za nuklearne reakcije s termičkim neutronima nego za one koje izazivaju brzi neutroni). Pojavu treba tumačiti činjenicom da vjerojatnost nastanka nuklearne reakcije raste sa vremenom zadržavanja neutrona u energetskom polju jezgre. To je vrijeme obrnuto proporcionalno brzini neutrona, odnosno obrnuto proporcionalno kvadratnom korijenu energije neutrona.

U pojedinim se energetskim intervalima javljaju znatna odstupanja od ovakvog trenda. To se poglavito odnosi na takozvano rezonantno područje neutronskih energija, o čemu će biti govora u daljem tekstu.

Različiti izotopi istog kemijskog elementa mogu za iste nuklearne reakcije imati veoma različite udarne presjeke. Udarni su presjeci u većini su slučajeva mjereni na materijalima prirodnog izotopnog sastava. Međutim, kod nekih su materijala važnih za nuklearnu energetiku detaljna mjerenja udarnih presjeka izvršena za njihove pojedinačne izotope. To se prvenstveno odnosi na udarne presjeke izotopa urana i plutonija.

U daljem ćemo tekstu obratiti pažnju na energetsku ovisnost najvažnijih udarnih presjeka nuklearnih reakcija materijala s neutronima.

Udarni presjek za apsorpciju neutrona

Kod mnogih se nuklida, a posebno kod onih sa masenim brojem A većim od 100, ovisnost udarnog presjeka za apsorpciju neutrona o energiji neutrona može podijeliti u tri energetska područja:

1. Područje veoma niskih energija neutrona (niže od 0.1 eV).

U tom je području udarni presjek za apsorpciju neutrona obrnuto proporcionalan brzini neutrona ($\sigma_a \cong 1/v \cong E^{-1/2}$). Zbog te se karakteristike to energetsko područje naziva i "1/v područje".

2. Područje rezonantnih energija neutrona

Područje rezonantnih energija neutrona za teške nuklide obuhvaća područje energije od 0.1 eV do 1000 eV. Kod lakih se nuklida rezonantno područje energija nalazi kod mnogo viših energija (reda nekoliko MeV). Rezonantnu oblast karakterizira naglo povećanje udarnih presjeka kod nekih diskretnih energija neutrona (kao primjer na slici 2.12.1 je prikazan udarni presjek ^{238}U). Neki nuklidi (npr. ^{114}Cd, ^{197}Au), pokazuju pojavu rezonancije samo kod jedne energije neutrona. Druge pak karakteriziraju jako izražene rezonantne apsorpcije u široj oblasti neutronskih energija (u ovu grupu nuklida spadaju izotopi urana i plutonija). Pojavu rezonantnih apsorpcija neutrona uz naglo povećanje udarnih presjeka možemo tumačiti ranije objašnjenim modelom složene jezgre. Ulaskom neutrona u jezgru formira se složena jezgra u znatno pobuđenom stanju. Kada se energija koju neutron unosi u jezgru izjednači sa energijom potrebnom da jezgra dosegne jednu od svojih diskretnih energetskih razina, naglo raste apsorpcija neutrona te energije.

U poglavlju je 2.6 (slika 2.6.2) pokazano je da su energije neutrona potrebne za pobudu lakih jezgara bitno više od onih koje traži pobuda teških jezgara. Zbog toga se i rezonantno područje energija kod lakih jezgara nalazi na višim energijama (na primjer za ^{12}C iznad 2 MeV).

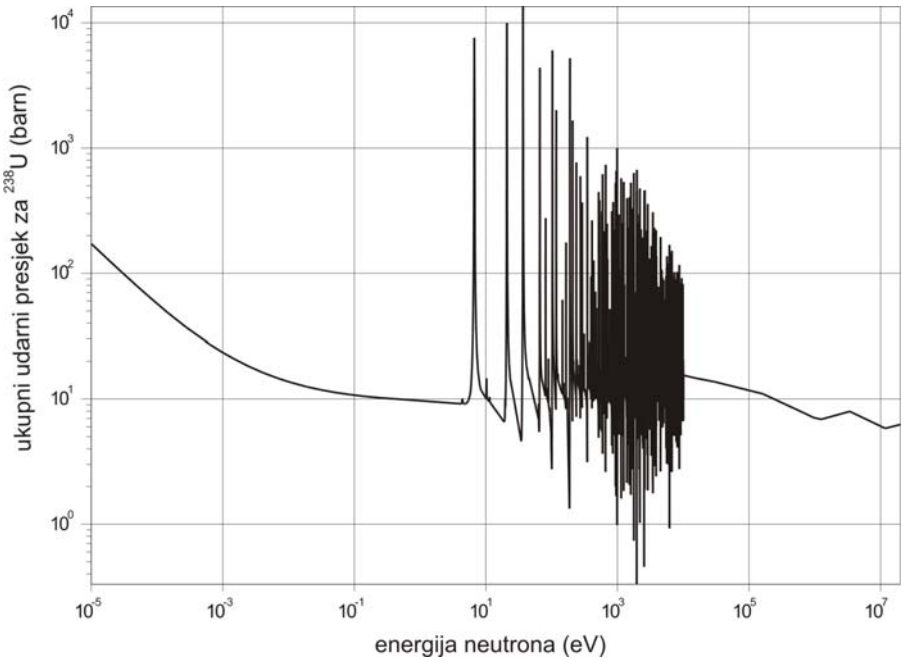
Udarni su presjeci za apsorpciju neutrona kod rezonantnih energija za neke nuklide veoma veliki.Primjerice:

$\sigma_a = 20000 \times 10^{-28}$ m^2, za ^{113}Cd kod energije neutrona 0.17 eV

$\sigma_a = 3400000 \times 10^{-28}$ m^2, za ^{135}Xe kod energije neutrona 0.7 eV

$\sigma_a = 7000 \times 10^{-28}$ m^2, za ^{238}U kod energije neutrona 6.7 eV

Na slici se 2.12.1 može se uočiti oblast rezonantnih apsorpcija izotopa ^{238}U u energetskom području koje se proteže od 6.7 eV do nekoliko stotina eV.



Slika 2.12.1 Ukupni udarni presjek ^{238}U

3. Područje viših energija neutrona

Udarni se presjeci za apsorpciju neutrona naglo smanjuju kod energija neutrona višim od rezonantnih energija, te za teške jezgre, kod energija reda 1 MeV i više postupno poprimaju vrijednosti bliske geometrijskim presjecima jezgara.

Primjer 2.12.1

Koliko je puta udarni presjek nuklida ^{238}U za apsorpciju neutrona rezonantne energije 6.7 eV veći od geometrijskog presjeka te jezgre?

Rješenje:

Na osnovi izraza 2.4.3 geometrijski se presjek jezgre ^{238}U se približno može odrediti kao,

$$f_j = r^2\pi = \left(1.25*10^{-15}*238^{1/3}\right)^2\pi = 1.88*10^{-28}\ m^2$$

Udarni presjek izotopa ^{238}U za apsorpciju neutrona energije 6.7 eV je oko

$7000x10^{-28}$ m^2. Odnos tog presjeka i geometrijskog presjeka jezgre atoma je 7000/1.88=3723.

Ovaj primjer ilustrira ranije ukazanu činjenicu da se udarni presjeci nekih nuklearnih reakcija veoma razlikuju od geometrijskih presjeka atomskih jezgara.

Udarni presjek za elastičan sudar

Udarni je presjek za elastičan sudar kod nižih energija neutrona uglavnom konstantan (neovisan o energiji neutrona). Za sve je nuklide taj udarni presjek malen (ispod $10x10^{-28}$ m^2) i istog reda veličine kao geometrijski presjek jezgre. Kod visokih energija neutrona (ovisno o masi jezgre) i taj presjek pokazuje pojavu rezonancije.

Udarni je presjek za elastičan sudar iznimno visok kod vodika. Vrijednosti se kreću oko $20x10^{-28}$ m^2 kada vodik nije kemijski vezan, a za kemijski vezan vodik i do $100x10^{-28}$ m^2.

Primjer 2.12.2

Udarni je presjek za elastičan sudar nuklida ^{12}C za neutrone niskih energija (ispod 0.01 MeV) $4.8x10^{-28}$ m^2. Kakav je odnos polumjera nuklida koji bi rezultirao iz ovog udarnog presjeka i njegovog stvarnog polumjera?

Rješenje:

Površina jezgre izložena neutronu je $r^2\pi$.

Ako postavimo jednakost $r^2\pi=4.8x10^{-28}$, slijedi $r=1.24x10^{-14}$ m.

S druge se strane,direktnom primjenom izraza(2.4.3) dobiva polumjer nuklida ^{12}C: $r=2.86x10^{-14}$ m.

Iz datog primjera slijedi da je polumjer nuklida ^{12}C koji bi rezultirao iz udarnog presjeka za elastičan sudar 4.33 puta veći od njegovog stvarnog polumjera.

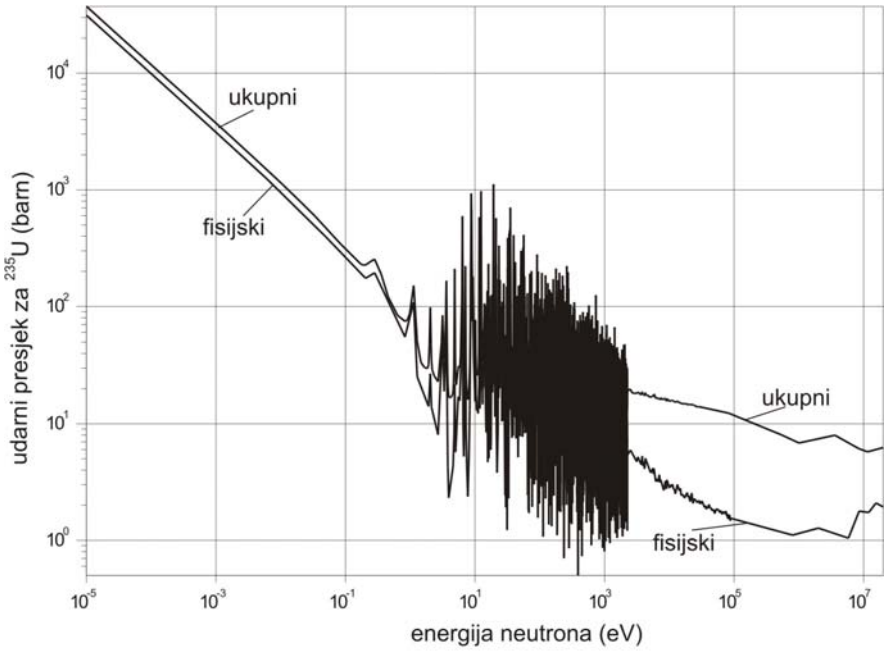
Udarni presjek za neelastičan sudar

Uvjet za nuklearnu reakciju neelastičnog sudara je mogućnost pobude jezgre. Zbog toga, kod ove nuklearne reakcije postoji donji prag energije neutrona ispod koje je udarni presjek jednak nuli.

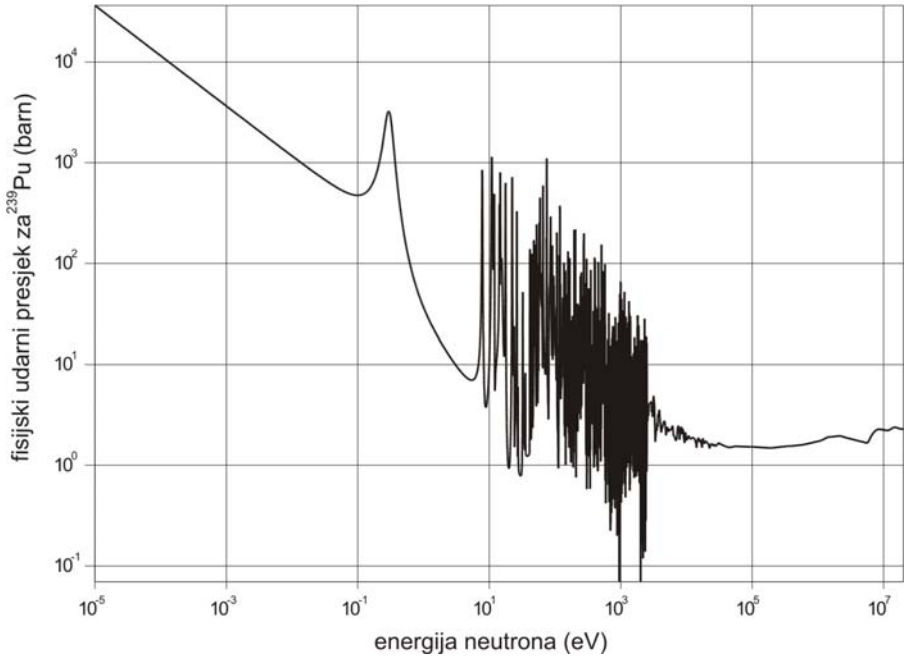
Prag energije je viši kod lakih jezgara. Primjerice, energija praga nuklearne reakcije neelastičnog sudara za ^{12}C je 4.8MeV, a za ^{238}U svega 44keV.

Udarni presjek za fisiju

Ovisnost udarnog presjeka za fisiju o energiji neutrona je približno ista kao i udarnog presjeka za apsorpciju neutrona. Ponovo razlikujemo tri energetska područja: područje neutrona veoma niskih energija u kojoj vrijedi "1/v" ovisnost udarnog presjeka za fisiju o energiji neutrona, područje rezonantnih energija koje karakterizira naglo povećanje udarnog presjeka za niz diskretnih energija neutrona te oblast visokih energija neutrona u kojoj se udarni presjeci za fisiju smanjuju na veoma male vrijednosti. Kao primjer, na slikama 2.12.2 i 2.12.3 su prikazani udarni presjeci za fisiju izotopa ^{235}U i ^{239}Pu. To su najvažniji fisibilni izotopi u nuklearnoj tehnici.

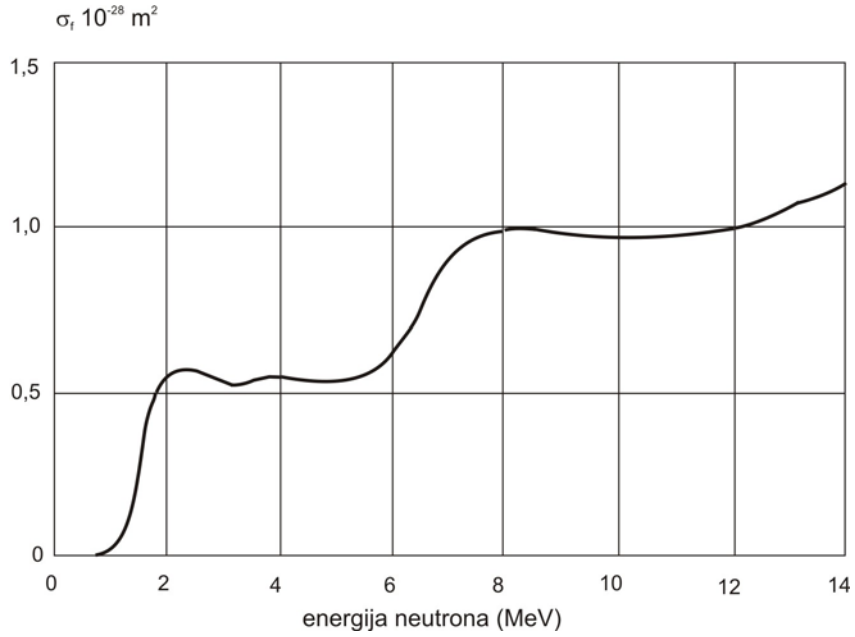


Slika 2.12.2 Ukupni udarni presjek i udarni presjek za fisiju ^{235}U



Slika 2.12.3 Udarni presjek za fisiju ^{239}Pu

Udarni presjek za fisiju je nula ispod praga energije fisije, tj. za energije neutrona koje su nedovoljne da izazovu fisiju. Kao primjer, na slici 2.12.4 je prikazana ovisnost udarnog presjeka za fisiju izotopa ^{234}U o energiji neutrona. Prag fisije ovog izotopa nastaje kod energija neutrona od približno 1 MeV.



Slika 2.12.4 Udarni presjek za fisiju ^{238}U

Fisija i uvjeti za nastanak fisije kod izotopa urana i drugih fisibilnih nuklida su detaljnije diskutirani u poglavlju 4.

2.13 Udarni presjeci za apsorpciju termičkih neutrona

Termički su neutroni značajni za održanje nuklearnih reakcija čija je praktička primjena našla mjesto u nuklearnoj energetici. Pod pojmom termički neutroni podrazumijevamo usporene neutrone koji se nalaze u termičkoj ravnoteži s okolnim materijalom. U nuklearnom reaktoru termički neutroni nastaju usporavanjem brzih (fisionih) neutrona. Energije se termičkih neutrona mogu analizirati primjenom zakonitosti statističke termodinamike.

U slabo apsorbirajućoj sredini kinetička će energija neutrona biti raspodijeljena suglasno sa Maxwell-Boltzmannovim zakonom, izvedenim u okviru kinetičke teorije plinova. Taj se zakon može prikazati jednadžbom,

$$\frac{dn}{n} = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2} dE \qquad \textbf{(2.13.1)}$$

gdje je

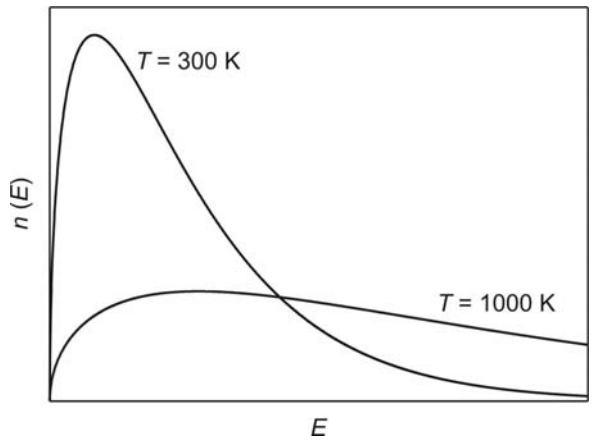
dn	broj neutrona između energije E i E+dE
n	ukupan broj termičkih neutrona
k	Boltzmannova konstanta =1.38*10^{-23} J/K=8.617*10^{-5} eV/K
T	termodinamička (apsolutna) temperatura

Ako se dn u izrazu 2.13.1 zamijeni sa n(E)dE, gdje je n(E) broj neutrona po jedinici energetskog intervala,slijedi,

$$\frac{n(E)}{n} = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2} \qquad \textbf{(2.13.2)}$$

Jednadžba 2.13.2. određuje raspodjelu broja neutrona u funkciji njihove energije uz danu temperaturu.

Raspodjela energija neutrona za dvije odabrane temperature (1000K i 300K) prikazana je slikom 2.13.1.



Slika 2.13.1 Raspodjela broja termičkih neutrona u funkciji energije

Brzina neutrona se može izraziti pomoću njegove energije, $v=(2E/m)^{1/2}$. Uvrštenjem mase neutrona $m=1.67\text{x}10^{-27}$ kg, te računanjem energije neutrona E u elektronvoltima ($1\text{eV}=1.6\text{x}10^{-19}$ J), dobivamo izraz:

$$v=1.38\text{x}10^{4}(E)^{1/2} \text{ (m/s)}.$$

Energija neutrona kod koje, uz danu temperaturu, broj neutrona po jediničnom energetskom intervalu n(E) postiže maksimum je najvjerojatnija energija u spektru. Dobiva se kao ekstrem funkcije 2.13.2. Račun pokazuje da je ovisnost najvjerojatnije energije i temperature određena jednostavnim izrazom: $E_m=kT/2$.

Prosječna se energija neutrona E_s za neku određenu temperaturu dobiva iz relacije,

$$E_s = \frac{1}{n}\int_0^\infty n(E)EdE.$$

Ako se uvrsti izraz za n(E) prema jednadžbi 2.13.2. i izvrši integracija slijedi,

$$E_s = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(kT)^{5/2} = \frac{3}{2}kT \qquad \textbf{(2.13.3)}$$

Uzeto je u obzir da je gama funkcija $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi^{1/2}}{2}$

Prosječna i najvjerojatnija energija neutrona u spektru su direktno proporcionalne apsolutnoj temperaturi, s tim što je prosječna energija tri puta veća.

Prosječne se brzine neutrona v_s mogu izraziti pomoću prosječne energije i/ili temperature: $v=1.38\text{x}10^{4}(E_s)^{1/2}=156.9(T)^{1/2}$. Prosječna je brzina neutrona dakle proporcionalna sa kvadratnim korijenom energije, odnosno kvadratnim korijenom apsolutne temperature.

Kao primjer, prosječne su brzine neutrona za nekoliko različitih temperatura slijedeće,

T(K)	v_s(m/s)

300	2718
400	3138
500	3508
1000	4962

Udarni su presjeci za apsorpciju neutrona mnogih nuklida obrnuto proporcionalni sa brzinom neutrona ("1/v" apsorberi), pa se može pisati,

$$\Sigma_a(E) = \Sigma_a(E_0)\frac{v_0}{v}$$

gdje su s $\Sigma_0(E_0)$ i v_0 označeni udarni presjek i brzina neutrona kod neke referentne energije E_0.

Broj se apsorbiranih neutrona po m^3 i sekundi može izraziti integralom:

$$\int_0^\infty n(E)v\Sigma_a(E)dE = \Sigma_a(E_0)v_0\int_0^\infty n(E)dE = \Sigma_a(E_0)v_0 n\,.$$

Integral broja neutrona po jedinici energetskog intervala n(E) po cijelom području neutronskih energija daje ukupan broj neutrona po jedinici volumena n. Dobiveni izraz pokazuje da kod "1/v" apsorbera broj neutrona koji su apsorbirani po jedinici volumena nije ovisan o energiji neutrona.

Tok termičkih neutrona, suglasno definiciji te veličine, može izraziti kao:

$$\Phi = \int_0^\infty n(E)v\,dE \qquad \textbf{(2.13.4)}$$

Ako se u jednadžbu 2.13.4 uvrsti n(E) iz izraza za Maxwell-Boltzmannove raspodjele energija termičkih neutrona (jednadžba 2.13.2), te uzme u obzir da je brzina neutrona $v=(2E/m)^{1/2}$, slijedi nakom integriranja,

$$\Phi = 2n\left(\frac{2kT}{m\pi}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.13.5)}$$

Kod proračuna apsorpcije termičkih neutrona je potrebno poznavati prosječnu vrijednost udarnog presjeka za tu nuklearnu reakciju. Prosječni presjek za apsorpciju termičkih neutrona Σ_{as} možemo definirati postavkom da produkt tog udarnog presjeka i neutronskog toka mora biti jednak ukupnom broju apsorbiranih neutrona, tj.

$$\Sigma_{as}\Phi = \int_0^\infty n(E)v\Sigma_a(E)dE = \Sigma_a(E_0)v_0 n\,.$$

Ako sada uzmemo u obzir da je $v=(2kT_0/m)^{1/2}$ i uvrstimo za ϕ izraz (2.13.5), slijedi nakon sređivanja,

$$\Sigma_{as} = \Sigma_a(E_0)\frac{\pi^{1/2}}{2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.13.6)}$$

Jednadžba (2.13.6) pruža mogućnost odrediti prosječni udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona temperature T pomoću referentnog presjeka $\Sigma_a(E_0)$ na temperaturi T_0.

U neutronskoj je fizici uobičajeno mjeriti udarne presjeke neutrona kod referentne energije neutrona kT=0.0253 eV. Toj energiji odgovara referentna temperatura 293.61 K i brzina neutrona od približno 2200 m/s.

Neki su karakteristični udarni presjeci izotopa urana i plutonija za nuklearne reakcije s termičkim neutronima referentne energije 0.025 eV prikazani tablicom 2.13.1.

Tablica 2.13.1 Udarni presjeci izotopa urana i plutonija za nuklearne reakcije s neutronima energije 0.0025 eV

	σ_a (10^{-28} m^2)	σ_f (10^{-28} m^2)
^{233}U	588.8	531.1
^{235}U	680.8	582.2
^{238}U	2.71	-
^{239}Pu	1011.3	742.5
^{241}Pu	1377.0	1009.0

U poglavlju 2.12 je napomenuto da su udarni presjeci za nuklearne reakcije s brzim neutronima mnogo manji od udarnih presjeka nuklearnih reakcija sa termičkim neutronima. Radi ilustracije, u tablici su 2.13.2 navedeni su udarni presjeci nekih izotopa urana i plutonija za nuklearne reakcije izazvane fisijskim neutronima.

Tablica 2.13.2 Udarni presjeci u 10^{-28} m2 za nuklearne reakcije s fisijskim neutronima

	σ_f	σ_{ie}	σ_c
^{235}U	1.32	1.05	0.40
^{238}U	0.29	2.46	-
^{239}Pu	1.92	-	0.45
^{241}Pu	2.04	-	0.45

Prosječni udarni presjek za nuklearne reakcije s termičkim neutronima određuje se iz udarnog presjeka sa neutronima referentne energije E_0 korištenjem relacije (2.13.6). Relacija je izvedena uz pretpostavku da u području termičkih neutrona vrijedi "1/v" ovisnost udarnog presjeka o brzini neutrona. Postoji li odstupanje od te ovisnosti, treba kod računanja apsorpcijskih udarnih presjeka, odnosno udarnih presjeka za fisiju, rezultate množiti s korekcijskim faktorima g_a i g_f, čije su vrijednosti za neke izotope urana i plutonija i temperature u rasponu 293 do 1273K dane tablicom 2.13.3.

Tablica 2.13.3 Korekcijski faktori udarnih presjeka za apsorpciju neutrona i fisiju

	^{235}U		^{238}U	^{239}Pu	
T	g_a	g_f	g_a	g_a	g_f
293	0.9780	0.9759	1.0017	1.0723	1.0487
372	0.910	0.9581	1.0031	1.1611	1.1550
473	0.9457	0.9411	1.0049	1.3388	1.2528
673	0.9294	0.9208	1.0085	1.8905	1.6904
873	0.9229	0.9108	1.0122	2.5321	2.2037
1073	0.9182	0.9036	1.0159	3.1006	2.6595
1273	0.9118	0.8956	1.0198	3.5353	3.0079

Primjer 2.13.1

U nuklearnom reaktoru, s 3% obogaćenim uranom, integralni tok termičkih neutrona, koji ima raspodjelu energije prema Maxwell-Boltzmannovom spektru, iznosi $5*10^{17}$ n/m^{2}s.

Gorivo reaktora je UO_2 prosječne gustoće 10500 kg/m^3.

Kolika je apsorpcija termičkih neutrona u izotopu ^{238}U po jedinici volumena kod temperature 1200 K?

Rješenje:

Mikroskopski udarni presjek izotopa ^{238}U za apsorpciju neutrona brzine 2200 m/s , prema tablici 2.13.1. iznosi, $2.71*10^{-28}$ m^2. Atomska težina ^{238}U je 238.0508 AJM (primjer 2.5.1).

Broj atoma ^{238}U po 1 m^3 materijala goriva će približno biti:

$$0.97*\frac{0.6023*10^{27}}{238+32}*10500 = 2.27*10^{28}.$$

(Atomske težine urana i kisika su zaokružene na 238 i 16)

Makroskopski udarni presjek ^{238}U za apsorpciju neutrona brzine 2200 m/s,

$2.71*10^{-28}*2.27x10^{28}=6.16$ m^{-1}.

Prosječni mikroskopski udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona u izotopu ^{238}U kod temperature 1200 K, prema jednadžbi(2.13.6) biti će,

$$\Sigma_{as} = g_a \Sigma_a(E_0)\frac{\pi^{1/2}}{2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} = 1.0183*6.16*0.886*0.495 = 2.75\, m^{-1}.$$

Korekcijski je faktor g_a za ^{238}U određen je interpolacijom iz tablice 2.13.3. Referentna temperatura T_0 koja odgovara brzini neutrona 2200 m/s iznosi 293.6 K.

Nakon izračunavanja prosječnog udarnog presjeka Σ_{as} moguće je neposredno dobiti traženi broj apsorbiranih neutrona n izotopu ^{238}U kod temperature 1200 K:

$n=\phi\Sigma_{as}=5*10^{17}*2.75=1.375*10^{18}$ neutrona/m^{3}s

Zadaci uz poglavlje 2.

1. Potrebno je za vodu nominalne gustoće (ρ=1000 kg/m^3) odrediti broj molekula te broj atoma kisika, vodika i deuterija po 1m^3. Atomske težine vodika i kisika su 1.00797 AJM i 15.9994 AJM. Vodik sadrži 0.015% atoma deuterija.

2. Neki nuklearni reaktor sadrži metalno nuklearno gorivo gustoće 19000 kg/m^3. Težinski sadržaj izotopa ^{235}U u gorivu je 20%, a ostatak je ^{238}U. Koliko atoma ^{235}U i ^{238}U sadrži svaki gorivni štap promjera 0.01m i dužine 1.2m? Atomske mase ^{235}U i ^{238}U zaokružiti na 235 i 238.

3. Fisija ^{235}U oslobađa približno 200MeV energije. Koliko energije u kWh se dobiva fisijom jednog grama tog izotopa?

4. Elektron se ubrzava prijelazom kroz potencijalnu razliku od 5 milijuna volti. Kolika je brzina i masa elektrona nakon ubrzanja? Koliko je puta ukupna energija elektrona E_u veća od energije mirovanja E_0? Masa elektrona u mirovanju m_0=9.10956*10^{-31} kg.

5. Dokazati da se za svaku česticu brzina može izraziti pomoću energije u mirovanju E_0 i ukupne energije E_u na slijedeći način:

$$v = c\left[1-\left(\frac{E_0}{E_u}\right)^2\right]^{1/2}.$$

6. Tricij (^{3}H) se raspada emisijom elektrona (negativna β čestica) sa poluvremenom raspada 12.26 godina. U koji se nuklid raspada tricij? Kolika je masa tricija potrebna za aktivnost od 10^{7}Bq? Atomska težina tricija je 3.016 AJM.

7. Kolika je masa izotopa ^{90}Sr ($t_{1/2}$=28.8 godina) potrebna da se dobije ista aktivnost kao od 0.001 kg ^{60}Co ($t_{1/2}$=5.26 godina)?

8. Prirodni uran sadrži 99.27% atoma ^{238}U, 0.72% atoma ^{235}U i 0.0057% atoma ^{234}U. Pokazati da se sadržaj ^{234}U u prirodnom uranu može objasniti predpostavkom da cijela količina tog izotopa potječe od radioaktivnog raspada ^{238}U. Poluvremena su raspada za ^{238}U i ^{234}U navedena u tablici 2.8.1.

9. Izotop radona ^{222}Rn je radioaktivan plin i nastaje raspadom ^{238}U. Taj plin predstavlja radiološku opasnost u rudnicima i drugim zatvorenim prostorijama ako izostane dobra ventilacija. Kolika je aktivnost ^{222}Rn po toni prirodnog urana? Podaci o poluvremenima raspada izotopa dani su u tablici 2.8.1.

10. Radioizotopni električni generator (čiji se princip rada zasniva na pretvorbi energije radioaktivnog zračenja u toplinsku energiju i preko nje u električnu energiju) punjen sa 0.5kg plutonijskog karbida (^{238}PuC) gustoće 12500 kg/m^3. Izotop ^{238}Pu ima poluvrijeme raspada 89

godina. Kod svakog se raspada oslobađa energija od 5.6 MeV, koja se u potpunosti pretvara u toplinsku energiju. Efikasnost pretvorbe toplinske u električnu energiju je 5.5%. Kolika je proizvodnja toplinske i električne energije u radioizotopnom generatoru? Atomsku težinu ^{238}Pu uzeti približno jednakom 238 AJM.

11. Radioaktivni izotop Y se proizvodi izlaganjem izotopa X neutronskom toku, pri čemu nastaje nuklearna reakcija X(n,γ)Y.

Ako se bombardiranje neutronima izvodi u vremenu jednakom poluvremenu raspada radioaktivnog izotopa Y, koliki će se dio maksimalne aktivnosti tog izotopa postići? Predpostaviti da je početna koncentracija radioaktivnog izotopa Y jednaka nuli.

12. Folija zlata debljine $2x10^{-4}$ m i površine 10^{-4} m^2 je ozračivana u toku jednog sata u nuklearnom reaktoru pri temperaturi 350K. Tok termičkih neutrona u reaktoru, čija raspodjela odgovara Maxwell-Boltzmannovom spektru, iznosi 10^{16} neutrona/m^{2}s. Zlato ima apsorpcijski udarni presjek $98.7*10^{-28}$ m^2 za neutrone brzine 2200 m/s, poluvrijeme raspada 64.8 sati i gustoću 19300 kg/m^3. Kolika će biti aktivnost folije nakon njezinog vađenja iz reaktora? Ako se aktivnost folije mjeri 60 dana nakon ozračenja sa brojačem efikasnosti 1% koliki će biti mjereni broj impulsa u sekundi?

Pretpostaviti da apsorpcijski udarni presjek zlata ima idealnu "1/v" karakteristiku.

13. Odrediti makroskopski udarni presjek urana prirodnog izotopnog sastava za fisiju i apsorpciju termičkih neutrona s Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom. Specifična težina urana je 19000 kg/m^3.

Podaci o udarnim presjecima izotopa urana i korekcijskim faktorima su navedeni u tablicama 2.13.1 i 2.13.3.

14. Potrebno je izračunati prosječan put neutrona energije 1eV u grafitu. Ukupni udarni presjek grafita za neutrone te energije je $4.8x10^{-28}$ m^2.

15. Jedna vrsta nehrđajućeg čelika koji se upotrebljava za gradnju mnogih komponenata u nuklearnim postrojenjima ima specifičnu težinu 7680 kg/m^3 i slijedeći težinski sastav: ugljik 0.08%, krom 19%, nikal 10% i ostatak željezo. Izračunati makroskopski udarni presjek tog nehrđajućeg čelika za apsorpciju neutrona energije 0.0253eV.

Atomske težine i udarni presjeci za apsorpciju neutrona energije 0.0253eV pojedinih materijala prirodnog izotopnog sastava su:

	A	σ_a
Ugljik	12.011	$0.0034*10^{-28}$ m^2
Krom	51.996	$3.1*10^{-28}$ m^2
Nikal	58.71	$4.43x10^{-28}$ m^2
željezo	55.847	$2.55*10^{-28}$ m^2

16. Tok neutrona brzine 2200 m/s u običnoj vodi temperature 570 K i gustoće 700 kg/m^3 iznosi 1.5x10^{17} neutrona/m^2s. Kolika je apsorpcija termičkih neutrona u vodi? Pretpostaviti "1/v" ovisnost udarnog presjeka o brzini neutrona. Podaci o atomskim težinama i udarnim presjecima materijala su:

	A	σ_a
Vodik	1.00797	$0.332*10^{-28}$ m^2
Kisik	15.9994	$0.00027*10^{-28}$ m^2

Reference uz poglavlje 2.

[1] Kaplan I.,Nuclear Physics.Addison-Wesley Publ.Co,2nd edition, Reading Massachusetts 1963.

[2] Richards J.A.,Sears F.W.,Wehr M.R.,Zemansky M.W.,Modern University Physics,chapters 42,43 and 44,Addison Wesley Publ.Co.,Reading,Massachusetts,1963

[3] Halliday D.,Introductory Nuclear Physics,John Willey Inc.NeW York 1955

[4] Glasstone S.,Sesonke A.,Chapters 1 and 2,Nuclear Reactor Engineering,Van Nostrand Reinhold Co,New York,1967

[5] Lamarsh J.R.,Introduction to Nuclear Engineering,Chapter 2,Addison Wesley Publ. Co,Reading,1975

[6] Feretić D.,Osnove teorije nuklearnog reaktora,poglavlje 1,Liber,Zagreb 1987

[7] Popović D.,Osnovi nuklearne tehnike,poglavlje 1,Naučna knjiga,Beograd 1970

[8] Knapp V.,Uvod u nuklearnu fiziku,poglavlje I,Liber,Zagreb,1977

[9] Levin V.E.,Jadernaja fizika i jadernie reaktori,poglavlje 1,2,3 i 4,Atomizdat,Moskva 1966.

3 PRODIRANJE ZRAČENJA KROZ MATERIJALE

3.1 Uvod

Kod projektiranja, gradnje i pogona naprava i postrojenja u nuklearnoj tehnici i energetici je potrebno poznavati međudjelovanje nuklearnog zračenja i materijala. U ovom će nas poglavlju poglavito interesirati oni aspekti prodiranja zračenja kroz materijale koji su povezani s utjecajem zračenja na žive organizme, radijacijskim oštećenjem materijala od značaja za nuklearnu energetiku te proračunom bioloških štitova.

Nuklearna zračenja koja se javljaju u nuklearnom reaktoru sastoje se iz neutrona te α, β i γ zraka. Neutroni nastaju u fisijama izotopa urana i plutonija, α zrake kod radioaktivnog raspada teških izotopa materijala nuklearnog goriva, β i γ zrake pretežno kao posljedica raspada fisijskih produkata. Dio γ zraka potječe direktno iz fisija i nuklearnih reakcija zarobljavanja neutrona (n, γ reakcije).

Nuklearni reaktori su također najintenzivniji izvori antineutrina. Radi praktički zanemarivih udarnih presjeka oni ne predstavljaju nikakvu opasnost za ljude i okoliš, no odigrali su povijesnu ulogu pri utvrđivanju egzistencije i svojstava neutrina

Kao posebnu vrstu nuklearnog zračenja treba navesti i fisijske fragmente u nuklearnim reaktorima, premda je njihov utjecaj najčešće ograničen na najužu okolinu mjesta fisije.

Sva ta zračenja izazivaju probleme, s jedne strane zbog potrebe osiguranja biološke zaštite, a s druge, zbog djelovanja na strukturu materijala u nuklearnom postrojenju.

Nuklearna zračenja izazivaju kemijske, fizikalne i biološke promjene u materijalu kroz koji prolaze. Kemijske se promjene sastoje u efektu razbijanja kemijskih veza u molekulama pod djelovanjem zračenja. Tu, kao primjer, ulazi pojava disocijacije vode (obične i teške) u radijacijskom polju.

Fizikalni se utjecaj zračenja na materiju može promatrati kroz dvije karakteristične dominantne pojave:

1. Izbacivanje elektrona iz elektronskog plašta. Ova je pojava poznata kao ionizacija, pa se i zračenje koje je izaziva obično zove ionizirajuće zračenje.

2. Promjena položaja atoma čvrstih tijela u kristalnim rešetkama, kao posljedica sudara jezgara atoma sa česticama koje čine nuklearno zračenje.

Promjene položaja atoma u kristalnim rešetkama uzrokuju iskrivljenja tih rešetki sa rezultatom koji je sličan onom kod kaljenja metala (povećava se krhkost i tvrdoća, smanjuje žilavost, toplinska i električka vodljivost čime, struktura materijala prelazi u stanje koje možemo karakterizirati kao zamrznuto stanje)

Biološki efekti nuklearnog zračenja se manifestiraju u djelovanju zračenja na žive organizme. Nuklearno zračenje dovodi do kemijskih promjena unutar živih stanica, a može uzrokovati i njihovo uništavanje.

3.2 Ionizirajuća zračenja

Brze nabijene čestice (α čestice, β čestice, fisijski fragmenti) prolazom kroz materijal izbacuju elektrone iz elektronskih plašteva i time dovode do stvaranja pozitivno nabijenih atoma. Sustav pozitivni atom i stvoreni slobodni elektron čini ionski par.

Intenzitet ionizacije se može mjeriti tzv. specifičnom ionizacijom, koju određuje broj nastalih ionskih parova po jedinici dužine puta čestice u materijalu. Specifična ionizacija ovisi o masi, brzini i naboju čestice, kao i o gustoći elektrona u materijalu.

Ovisnost je specifične ionizacije o masi čestice veoma izražena. Tako, na primjer, dok α čestica izvjesne energije proizvodi u materijalu $5x10^6$ do $10x10^6$ ionskih parova po metru dužine puta, β će čestica iste energije proizvesti samo 3000 do 30000 ionskih parova po metru dužine puta.

Proizvodnja ionskih parova troši energiju čestice.

Nabijena čestica gubi u zraku prosječno oko 32.5eV energije po svakom proizvedenom ionskom paru.

Iz ovog podatka možemo procijeniti broj ionskih parova koji bi u zraku proizvela neka nabijena čestica određene energije. Kao primjer, α čestica energije 5MeV bi u zraku proizvela,

$$\frac{5*10^5}{32.5} = 1.5*10^5 \text{ ionskih parova}$$

Uz specifičnu ionizaciju α-čestice $5*10^6$ ionskih parova po metru, njezin bi domet u zraku bio:

$$\frac{1.5*10^5}{5*10^6} = 0.03\ m$$

Radi usporedbe, efektivni bi domet β čestice iste energije u zraku bio oko 1000 puta veći. Specifična bi ionizacija bila dakle isto toliko puta manja. Zbog male mase β čestica često mijenja smjer putanje.

Neutroni i γ zrake nemaju električnog naboja, te ne spadaju u direktnu ionizirajuću radijaciju. Međutim, γ zrake mogu izbacivati elektrone iz plašta atoma a ti elektroni izazivaju ionizaciju. γ zrake su dakle indirektno ionizirajuće zračenje.

Neutroni također djeluju kao indirektno ionizirajuće zračenje. Oni naime, mogu izazivati nuklearne reakcije iz kojih rezultiraju električki nabijene čestice i/ili γ zrake. Nastale električno nabijene čestice (pozitivni ioni, elektroni), odnosno γ zrake, dovode do ionizacije materijala na opisane načine.

Svako nuklearno zračenje uzrokuje dakle ionizaciju, bilo na direktan bilo na indirektan način.

3.3 Teške nabijene čestice

Utjecaj teških nabijenih čestica na materijale.koji se razmatra u okviru nuklearne energetike, u najvećoj mjeri se odnosi na α čestice i fisijske fragmente.

Alfa čestice

Svi su teški nuklidi koji spadaju u nuklearna goriva radioaktivni i emitiraju α čestice. Poluvremena raspada i energije α čestica nekih nuklida su navedeni u tablici 3.3.1.

Tablica 3.3.1 Karakteristike nekih α-emitera

Nuklid	Vrijeme poluraspada (god)	Energija α-čestice (MeV)
^{232}Th	$1.4*10^{10}$	4.0
^{238}U	$4.5*10^9$	4.2
^{235}U	$7.1*10^8$	4.4/4.6
^{233}U	$1.6*10^5$	4.8
^{239}Pu	$2.4*10^4$	5.1

Domet α ćestice ovisi o njezinoj energiji, atomskoj težini i gustoći elektrona u materijalu. Empirički izraz za prosječni domet te čestice u zraku sobne temperature ima oblik,

$$\mathbf{R_z=0.0032E^{1.5}\ m} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

gdje je E energija α-čestice u MeV.

Na osnovi poznatog dometa α čestica u zraku, moguće je odrediti taj domet u drugim materijalima korištenjem Bragg-Klemanove formule:

$$R = R_z\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)\left[\frac{M}{M_z}\right]^{1/2} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

R_z, ρ_z i M_z su domet α čestica u zraku, gustoća i prosječna atomska težina zraka. Ostale se vrijednosti odnose na materijal u kome određujemo domet α čestica.

Ako u izraz (3.3.2) uvrstimo podatak za gustoću zraka kod temperature 288 K, 1.25 kg/m^3 i za prosječnu atomsku težinu zraka, 14.5 AJM izlazi,

$$R = 0.328R_z\frac{M^{1/2}}{\rho} \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

U koliko se materijal sastoji iz smjese atoma raznih izotopa, te ako definiramo udjel svakog atoma u smjesi s a_i, može se pisati,

$M^{1/2}=a_1M^{1/2}+a_2M^{1/2}+...$

Uobičajeno je računati relativnu moć usporavanja α čestica u materijalu, kao odnos,

$$\frac{R_z}{r} = 3.049\frac{\rho}{M^{1/2}} \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Približne vrijednosti za relativnu moć usporavanja α čestica u nekim materijalima jesu,

- papir, voda, biološko tkivo 1000
- aluminij 1600
- olovo 5000

Primjer 3.3.1

Koliki je domet u zraku α čestice koju emitira izotop ^{238}U? Kolika bi debljina aluminijske folije bila dovoljna da zaustavi te čestice?

Rješenje:

Izotop ^{238}U, prema tablici 3.3.1, emitira α čestice energije 4.2 MeV.

Domet je α čestica te energije u zraku:

$R_z=0.0032*(4.2)^{1.5}=0.028m=2.8cm$

Podaci su za aluminij (prilog 1):

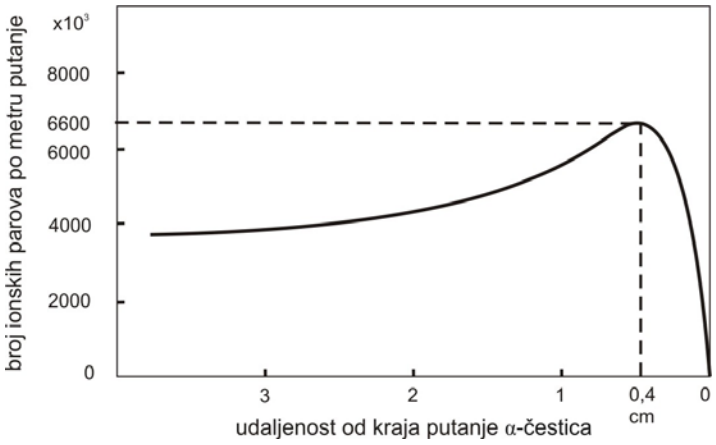
atomska masa - 26.98

gustoća - 2700 kg/m^3

Uvrštenjem u izraz 3.3.4. izlazi $R_z/R=1584$.

Aluminijska folija debljine $0.028/1584m=1.76*10^{-5}m=0.0176mm$ zaustavlja α čestice energije 4.2MeV.

Domet α cestica u zraku je nekoliko centimetara. Taj je domet kroz tkivo oko tisuću puta kraći, dakle reda od nekoliko stotinki milimetra! Ovo ukazuje da vanjsko α zračenje nije opasno jer ga zaustavlja već vanjski sloj kožnog tkiva. Opasnost od α čestica je međutim vrlo velika ako dođe do inhalacije ili gutanja materijala koji emitiraju te čestici, jer to može izazvati lokalna oštećenja unutarnjeg tkiva zbog velike lokalne ionizacije.



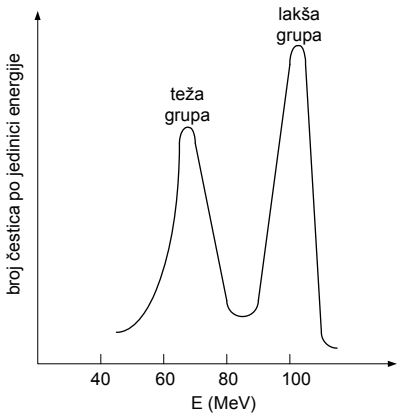
Slika 3.3.1 Prostorna raspodjela gustoće ionskih parova u zraku nastalih prolazom α čestice

Prostorna raspodjela količine ionskih parova koje stvara α čestica u zraku je prikazana na slici 3.3.1.

Krivulja na slici.koja je inače poznata kao Braggova krivulja, pokazuje da proizvedeni broj ionskih parova raste prema kraju putanje α čestice, dakle s opadanjem njezine energije. Najviša se specifična ionizacija ($6.6*10^6$ ionskih parova po metru) postiže kada α čestica dopre na oko 0.4cm od kraja svoje putanje, na tom mjestu energija čestice iznosi oko 0.75MeV. Pri kraju putanje α čestica zarobljavanjem elektrona prelazi u neutralni atom ^{4}He.

Fisijski fragmenti

Kod fisije teške jezgre (urana ili plutonija) nastaju dva fisijska fragmenta. Iz zakona o održanju momenta gibanja proizlazi da su brzine fisijskih fragmenata obrnuto proporcionalne njihovim masama. Isti vrijedi i za njihove kinetičke energije. Ovi zaključci neposredno proizlaze iz relacija očuvanja momenta gibanja i kinetičke energije:



Slika 3.3.2 Raspodjela energije fisijskih fragmenata

$$M_1v_1=M_2v_2$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{M_1v_1^2}{M_2v_2^2}=\frac{M_2}{M_1}.$$

Fisijski fragmenti manje mase imaju višu energiju. Raspodjela energija fisijskih fragmenata je prikazana slikom 3.3.2.

Lakši fisijski fragmenti oko masenog broja 95 odnose više energije (oko 140 MeV), a teži oko masenog broja 140 manje energije (oko 100 MeV). Maksimumi energije prikazani slikom 3.3.2 su u skladu s slikom 4.4.1, jer su fisijski fragmenti kod kojih se ti maksimumi javljaju najzastupljeniji među produktima fisije. Fisijski fragmenti bivaju

odbačeni velikom energijom kroz elektronski plašt originalnog atoma i nikada ne dospijevaju odmah zarobiti dovoljno elektrona da bi iz njih nastali neutralni atomi. Ti su fragmenti pozitivni ioni sa velikim nabojem (lakši fragmenti imaju oko +20e, a teži oko +22e naboja, gdje je s e označen naboj protona).

Zbog velikog naboja čestica, specifična ionizacija koju fisijski fragmenti izazivaju u materijalu je veoma visoka, radi čega je njihov domet u materijalu vrlo malen.

Domet fisijskih produkata u nekim materijalima je dat u tablici 3.3.2.

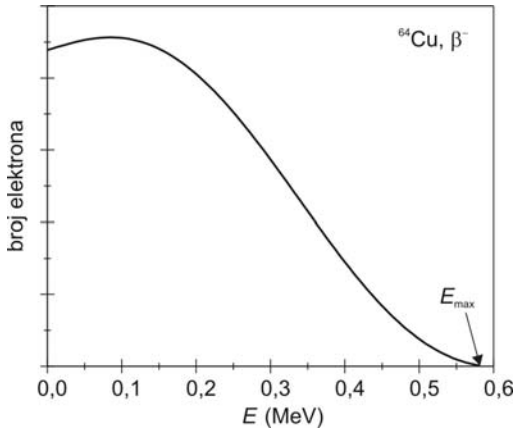
Tablica 3.3.2 Domet fisijskih proizvoda u nekim materijalima

Materijal	Domet u 10^{-3} cm
aluminij	**1.4**
bakar	**0.59**
srebro	**0.53**
uran metal	**0.66**
uran oksid	**1.4**

Bijeg fisijskih fragmenata iz gorivih elemenata se sprječava oblaganjem nuklearnog goriva s metalnom oblogom. Debljina obloge zbog veoma kratkog dometa fisijskih produkata može biti malena (svega nekoliko desetinki milimetra).

3.4 Elektroni (β čestice)

Analiza prodiranja β čestica kroz materijale je teža nego što je to slučaj kod α čestica. To s jedne strane proizlazi iz činjenice da energija β čestica nema jednoznačni iznos, već slijedi raspodjelu prikazanu na slici 3.4.1., a s druge, što radi male mase ta čestica neprekidno mijenja smjer putanje.

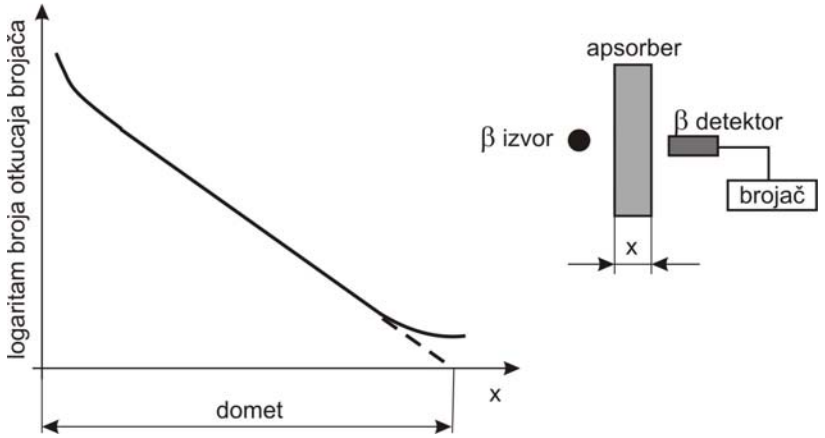


Slika 3.4.1 Energija β-čestica

Raspodjela energija β čestica objašnjava se činjenicom da emisije elektrona iz jezgre prate i emisije neutrina, koji odnose dio energije nuklearne transformacije. Diobu energije između emitiranih elektrona i neutrina se može promatrati statistički, s tim da u prosjeku elektroni odnose jednu trećinu energije a neutrini dvije trećine energije.

Iako je detaljnije tumačenje prodiranja β čestica kroz materijale dosta kompliciranо, eksperimentalno je utvrđeno da se ta pojava može sa dovoljnom točnošću opisati jednostavnim matematičkim formulacijama.

Mjerenjem intenziteta mlaza β čestica ustanovljeno je da logaritam broja izmjerenih čestica linearno opada sa debljinom materijala x kroz koji prolaze čestice. Ta pravilnost, međutim, ne vrijedi za vrlo tanke ili vrlo debele apsorbere, kao što je vidljivo iz slike 3.4.2.



Slika 3.4.2 Ovisnost intenziteta β-zračenja o debljini apsorbera

Linearna ovisnost logaritma intenziteta mlaza β čestica i debljine apsorbera dozvoljava postavljanje relacije:

$$\ln(I)_x - \ln(I)_{x=0} = -\mu x \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

gdje je

I	intenzitet snopa β čestica
μ	linearni apsorpcioni koeficijent β čestica
x	debljina materijala

Jednadžba se 3.4.1 može napisati u obliku,

$$I_x = I_{x=0} e^{-\mu x} = I_{x=0} e^{-(\mu/\rho)\rho x} \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

U jednadžbu (3.4.2) je uvedena gustoća materijala ρ jer je maseni apsorpcijski koeficijent μ/ρ gotovo neovisan o atomskoj težini materijala kroz koji prolaze β čestice.

Aproksimativan je numerički odnos μ/ρ ovisan samo o energiji β čestica. Može se odrediti iz relacije, koja je zasnovana na mjerenjima na aluminiju,

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{1.7}{E_{max}^{1.14}} \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

E_{max} je najviša energija elektrona u spektru u MeV (slika 3.4.1).

Izrazi 3.4.2 i 3.4.3. daju mogućnost da se za bilo koji materijal izračuna faktor slabljenja β zračenja.

Primjer 3.4.1

Kolika je približno potrebna debljina aluminijske ploče da bi se intenzitet β zračenja sa maksimalnom energijom od 3MeV smanjio na 20% početne vrijednosti? Kolika bi debljina trebala u slučaju da je ploča izrađena iz olova?

Gustoća aluminija je 2699kg/m^3, a olova 11340kg/m^3.

Rješenje:

Maseni apsorpcijski koeficijent za elektrone maksimalne energije 3MeV, prema jednadžbi (3.4.3) iznosi,

$\mu/\rho=1.7*3^{-1.14}=0.486\ m^2/kg$

Na temelju jednadžbe (3.4.2) možemo pisati:

$$x = -\frac{\ln(I/I_0)}{\rho(\mu/\rho)} = -\frac{\ln(0.2)}{0.486\rho}.$$

Uvrštenjem danih podataka o gustoći materijala izlazi tražena debljina ploče x kojom možemo smanjiti intenzitet mlaza β-čestica na 20% početne vrijednosti:

- za aluminij $x=1.23*10^{-3}$ m=1.23 mm.
- za olovo $x=2.92*10^{-4}$ m=0.292 mm.

Treba uzeti u obzir da linearna ovisnost između logaritma intenziteta ionizacije izazvane snopom β čestica i debljine apsorbera ne vrijedi za veće debljine apsorbera, jer tada ionizacija izazvana zračenjem ostaje gotovo konstantna.

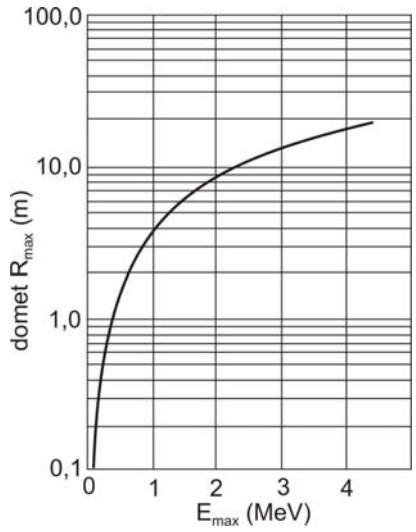
Tumačenje ove pojave treba povezati s činjenicom da brzi elektroni mogu ionizirati atome izbacivanjem elektrona iz unutarnjih ljuski atomskog plašta. Atomi se vraćaju u osnovno energetsko stanje emisijom x-zraka. Ovim putem nastale x-zrake se zovu zračenje zbog kočenja elektrona odnosno zakočno zračenje (u literaturi poznato pod nazivom Bremsstrahlung). X zrake imaju veliku moć penetracije kroz materijale i njima treba tumačiti "rep" krivulje na slici 3.4.2.

S ovim fenomenom treba računati kod projektiranja zaštite od β zraka.

Dio energije elektrona koji je utrošen na stvaranje x-zraka je proporcionalan s brojem naboja u jezgri Z i s energijom elektrona E, a može se približno odrediti iz relacije,

$$F=1.1*10^{-3}ZE \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

E je energija elektrona u MeV.



Slika 3.4.3 Domet β-čestica u zraku

Relacija ukazuje da će pojava zakočnog zračenja će biti izraženija kod prolaza elektrona visoke energije kroz materijale koji sadrže teške atomske jezgre. Tako će na primjer za β čestice energije 1MeV kod aluminija (Z=11) F iznositi oko 1%, a kod olova (Z=82) oko 9%.

Mjerenje dometa β čestica u materijalu mnogo je kompliciranije od mjerenja dometa α-čestica. Domet se određuje iz empiričkih formula zasnivanih na mjerenjima, koje povezuju domet β čestice R_{max}, gustoću materijala ρ kroz koji čestica prolazi i maksimalnu energiju čestice E_{max}. Jedna od takvih formula ima oblik:

$$R_{max}\rho = 4.12E_{max}^{(1.265+-0.0954\ln(E_{max}))} \quad \text{za } E_{max} < 2.5MeV$$

$$R_{max}\rho=5.3E_{max}-1.06 \quad \text{za } E_{max} > 2.5MeV \quad \textbf{(3.4.5)}$$

Primjećeno je da numerički izrazi (3.4.4.) daju preniske vrijednosti $R_{max}\rho$ kada se radi o dometu β čestica u zraku. Zbog toga treba domet β čestica u zraku treba odrediti iz slike 3.4.3.

Primjer 3.4.2

Potrebno je odrediti domet ß čestica maksimalne energije 2 MeV u aluminiju i uporediti sa dometom α čestica iste energije.Gustoća

aluminija je 2699 kg/m .

Rješenje:

Primjenom relacije (3.4.4),možemo odrediti domet ß čestica energije 2MeV u aluminiju gustoće 2699 kg/m .Rezultat je,

$$R_{max} = \frac{4.12}{2699}2^{(1.265-0.0954\ln 2)} = 3.50 * 10^{-3}\ \text{m} = 3.50\ \text{mm}$$

Korištenjem relacija (3.3.1) i (3.3.2) možemo izračunati je domet α-čestica energije 2 MeV u zraku: $R_z=9.05*10^{-3}$ m (9.05 mm), i u aluminiju: $R=5.71*10^{-6}$ m (0.0057 mm).

Domet β-čestica energije 2MeV u aluminiju je više od 600 puta veći od dometa α-čestica iste energije.

Primjer 3.4.3

Izotop ^{24}Na koji se upotrebljava u medicinskoj dijagnostici emitira β-čestice maksimalne energije 1.39MeV. Koliki je maksimalni domet tih čestica u ljudskom tkivu?

Rješenje:

Gustoća tkiva je približno jednaka gustoći vode (1000 kg/m^3).

Na temelju izraza (3.4.5.) možemo pisati,

$1000*R_{max}=4.12*1.39^{(1.265-0.00954\ln(1.39))}$

iz čega slijedi, $R_{max}=6.18*10^{-3}$ m=6.18 mm.

3.5 Fotoni (γ-zrake)

Gama(γ) zrake su snopovi fotona. Foton je kvant energije, odnosno "energetski paket", bez mase mirovanja (vidi poglavlje 2.1). Frekvencija i valna dužina γ-zrake u funkciji energije su određene Planck-ovim zakonom (jednadžba 2.3.2):

$$\Delta E=h\nu=hc/\lambda \quad \textbf{(3.5.1)}$$

gdje je

h Planck-ova konstanta

c brzina svjetlosti i

λ valna dužina γ-zrake.

Interakcja γ-zraka s materijom se odvija putem tri nuklearne reakcije:

1. Fotoelektrični efekt
2. Comptonovo raspršenje
3. Stvaranje parova

Svaki od tih procesa karakterizira posebna vrijednost mikroskopskog udarnog presjeka σ, pa da se ukupni udarni presjek za interakciju γ-zraka za materijom dobiva kao zbir tih udarnih presjeka:

$$\sigma=\sigma_{pe}+\sigma_c+\sigma_{pp}. \qquad (3.5.2)$$

Indeksi pe, c i pp odnose se na udarne presjeke za fotoelektrički efekt, Compton-ovo raspršenje i stvaranje parova.

Neke bitnije karakteristike navedenih nuklearnih reakcija su:

Fotoelektrična apsorpcija

Fotoelektrična apsorpcija je pojava u kojoj foton reagira s atomom u cjelini, izbacujući pri tome jedan elektron iz njegove ljuske. Kinetička energija izbačenog elektrona je jednaka razlici energije fotona (odnosno γ-kvanta) i energije veze tog elektrona u atomu. U ovom procesu biva, dakle, potpuno apsorbirana energija upadnog fotona. Zakon o očuvanju momenta gibanja u ovom procesu može biti ispunjen jedino ako atom dobije moment gibanja suprotan momentu gibanja izbačenog elektrona. Zbog toga efekt fotoelektrične apsorpcije (koji nastaje i u fotoćelijama djelovanjem vidljivog svjetla na atome) nije moguć sa slobodnim elektronom. Udarni presjek za fotoelektričnu apsopciju je značajan kod niskih energija γ-zraka i brzo opada sa porastom energije tih zraka. Ovisnost se udarnog presjeka o energiji može izraziti relacijom:

$$\sigma_{pe} \approx \frac{1}{E^n} \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

gdje je E energija γ-zraka.

Eksponent n iznosi približno 3.

Udarni presjek σ_{pe} ovisi u znatnoj mjeri o rednom broju atoma Z. Proporcionalan je sa Z, gdje m ovisno o energiji γ-zraka varira izmedju 4 i 5. Efekt će fotoelektrične apsorpcije dakle biti mnogo izrazitiji kod težih atoma.

Compton-ovo raspršenje

Compton-ovo raspršenje je nuklearni proces u kojemu također dolazi do interakcije γ-kvanta sa elektronom u plaštu atoma. Za razliku od fotoelektričke apsorpcije u ovom procesu ne dolazi do potpune apsorpcije γ-zrake, jer se pored izbačenog elektrona emitira i γ-zraka, ali sa smanjenom energijom.

Bilanca se energije za Compton-ovo raspršenje može prikazati slijedećom jednadžbom:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} + \frac{mv^2}{2} + Q.$$

Lijeva strana jednadžbe daje energiju upadne γ-zrake, a desna redom energiju izlazne γ-zrake ($\lambda 1<\lambda 2$), kinetičku energiju emitiranog elektrona i energiju veze elektrona u atomu Q.

Budući da se Compton-ovo raspršenje manifestira u interakcijama γ-kvanta sa elektronima, udarni presjek za tu nuklearnu reakciju mora biti srazmjeran sa brojem elektrona po jedinici volumena materijala ($=0.6023*10^{27}\rho Z/A$) i udarnim presjekom za Compton-ovo raspršenje po elektronu σ', dakle,

$$\mu_c=N\sigma_c=0.6023*10^{27}\rho Z\sigma'/A.$$

Odnos Z/A kod većine materijala varira u granicama 0.4-0.5, te se kod grublje procjene može smatrati konstantnim. Udarni presjek σ' ne ovisi o Z, nego samo o energiji γ-zraka (smanjuje se kod porasta energije).

Stvaranje parova

Nuklearna reakcija stvaranja parova je proces pretvaranja energije u masu. U toj nuklearnoj reakciji foton, odnosno γ-kvant, reagira s energetskim poljem atomske jezgre, biva anihiliran i pri tome stvara par materijalnih čestica elektron-pozitron.

Prema Einstein-ovoj formuli $\Delta E=\Delta mc^2$ (vidi poglavlje 2.9), energetski ekvivalent masi mirovanja para elektron-pozitron iznosi 1.02MeV. To je ujedno i minimalna energija γ-zrake koja može dovesti do stvaranja parova. Drugim riječima, udarni je presjek nuklearne reakcije stvaranja parova σ_{pp} jednak nuli za energije γ-zraka niže od 1.02MeV.

Kinetička će energija stvorenog para elektron-pozitron E_{pp} biti niža od energije γ-zrake E_γ, jer mora vrijediti relacija,

$$E_{pp}=E_\gamma-1.02\ \text{MeV}$$

Detaljnija teorija procesa stvaranja parova pokazuje da je σ_{pp} proporcionalan sa Z^2.

Pozitron koji nastaje u nuklearnoj reakciji stvaranja parova je veoma kratkog vijeka. Taj pozitron biva brzo anihiliran s elektronom, pri čemu se stvaraju 2 γ-kvanta energije od po 0.51MeV koji odlaze na suprotne strane.

Promjena intenziteta snopa γ-zraka pri prolazu kroz materiju

Eksperimentalno je potvrđen jednostavan matematički zakon za slabljenje snopa onog dijela γ-zraka koje prolazeći kroz materijal gustoće ρ ne reagiraju sa materijalom. Taj zakon ima oblik:

$$I=I_0e^{-\mu x}=Ie^{-(\mu/\rho)\rho x} \qquad \textbf{(3.5.3)}$$

Parametar μ, sa dimenzijom m^{-1}, je linearni koeficijent za slabljenje mlaza γ-zraka zbog prolaza kroz materijal.

Koeficijent μ ima značaj makroskopskog udarnog presjeka za nuklearne reakcije izmedju γ-zraka i materijala, pa se slično kao i kod nuklearnih reakcija sa neutronima (vidi poglavlje 2.11), može pisati,

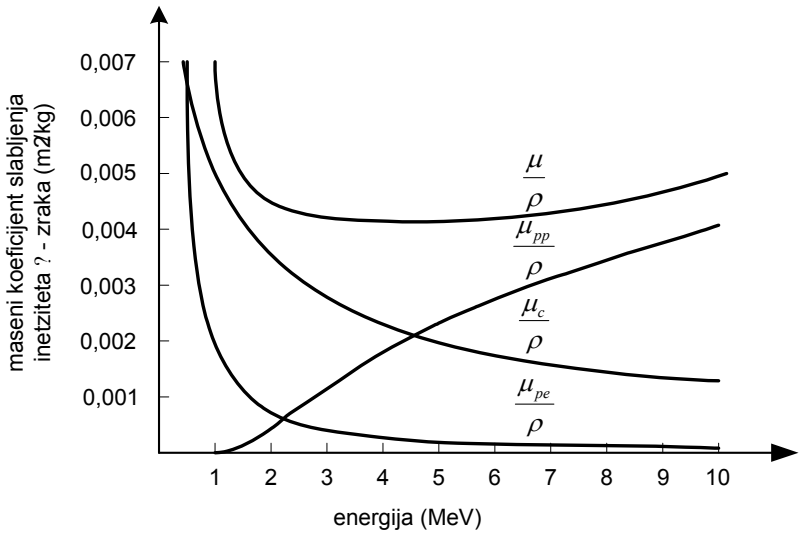
$$\mu=N\sigma=N(\sigma_{pe}+\sigma_c+\sigma_{pp})=\mu_{pe}+\mu_c+\mu_{pp} \qquad \textbf{(3.5.4)}$$

Gdje je σ mikroskopski udarni presjek, a N broj atoma po jedinici volumena materijala.

Odnos je μ/ρ, koji se mjeri u m^2/kg, poznat kao maseni koeficijent slabljenja intenziteta γ-zraka.

Udarni presjeci nuklearnih reakcija fotoelektrične apsorpcije, Compton-ovog raspršenja i stvaranja parova ovise o energiji γ-zraka. Kod niskih energija prevladava utjecaj fotoelektrične

apsorpcije, kod srednjih Compton-ovog raspršenja, a kod najviših stvaranja parova. Na isti način kao udarni presjeci mijenjaju se, naravno, i maseni koeficijenti za svaku od navedenih nuklearnih reakcija. Kao primjer, ovisnost masenog koeficijenta o energiji γ-zraka za olovo je prikazana slikom 3.5.1



Slika 3.5.1 Maseni koeficijent slabljenja intenziteta γ-zraka (μ/ρ) za olovo. Prikazan je utjecaj fotoelektrične apsorpcije (μ_{pe}/ρ), Comptonova raspršenja (μ_c/ρ) i stvaranja parova (μ_{pp}/ρ)

Općenito se može primijetiti da je koeficijent μ/ρ ovisan o energiji i u priličnoj mjeri, kod date energije, konstantan za razne materijale (posebno u području energija γ-zraka od 1 do 3MeV, kod kojih prevladava utjecaj Compton-ovog raspršenja). Ovo pokrepljuju podaci iz tablice 3.5.1 i slike 3.5.2.

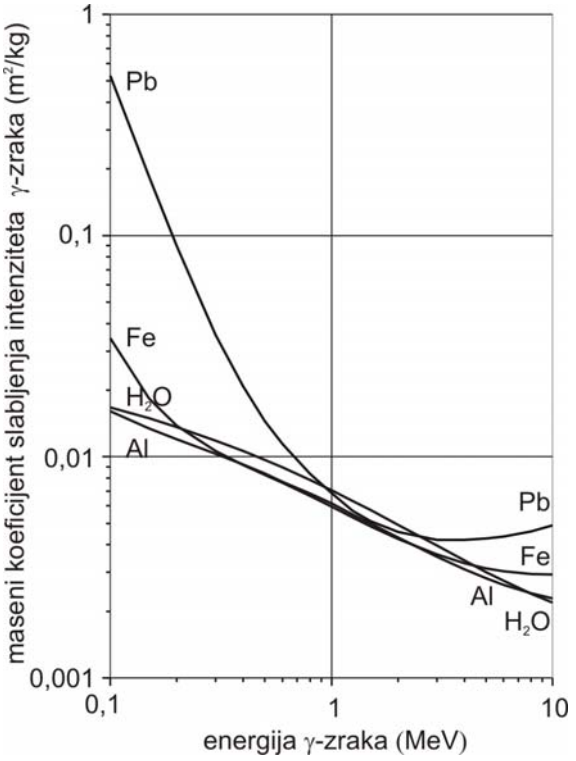
Tablica 3.5.1 Maseni koeficjent za slabljenje snopa γ-zraka (γ/ρ) za nekoliko materijala (m^2/kg) u ovisnosti o energiji γ-zraka u MeV

MeV	Olovo	Beton	Željezo	Aluminij	Voda	Tkivo	Zrak
0.1	0.529	0.0169	0.0344	0.0161	0.0167	0.0163	0.0151
0.15	0.284	0.0139	0.0183	0.0134	0.0149	0.0144	0.0134
0.2	0.0896	0.0124	0.0138	0.0120	0.0136	0.0132	0.0123
0.3	0.0356	0.0107	0.0106	0.0103	0.0118	0.0115	0.0106
0.4	0.0208	0.00954	0.00919	0.00922	0.0106	0.0100	0.00953
0.5	0.0145	0.00870	0.00828	0.00840	0.00966	0.00936	0.00868
0.6	0.0144	0.00804	0.00762	0.00777	0.00896	0.00867	0.00804
0.8	0.00836	0.00706	0.00664	0.00683	0.00786	0.00761	0.00706
1.0	0.00684	0.00635	0.00595	0.00614	0.00706	0.00683	0.00655
1.25	0.00569	0.00630	0.00531	0.00548	0.00630	0.00600	0.00567
1.5	0.00512	0.00517	0.00485	0.00500	0.00575	0.00556	0.00517
2.0	0.00457	0.00445	0.00424	0.00432	0.00493	0.00478	0.00445
3.0	0.00421	0.00363	0.00361	0.00353	0.00396	0.00384	0.00357
4.0	0.00420	0.00317	0.00330	0.00339	0.00329	0.00329	0.00307
5.0	0.00426	0.00287	0.00313	0.00282	0.00301	0.00292	0.00274
6.0	0.00436	0.00268	0.00304	0.00264	0.00275	0.0267	0.00250
8.0	0.00459	0.00243	0.00295	0.00241	0.00240	0.00233	0.00220
10.0	0.00489	0.00229	0.00294	0.00229	0.00219	0.00212	0.00202

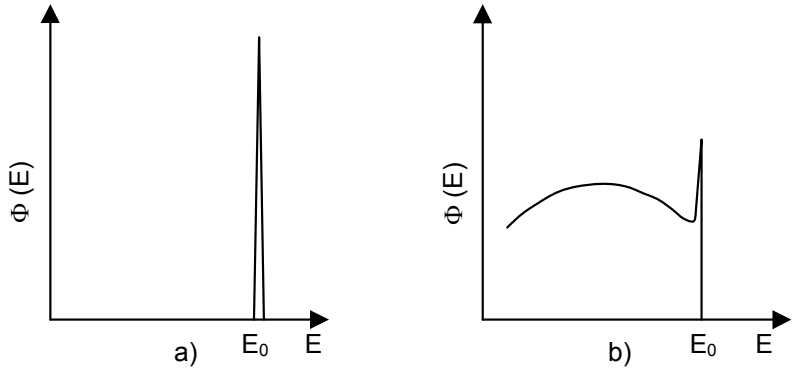
Treba uzeti u obzir da bi se izraz (3.5.5) mogao primijeniti na određivanje promjene intenziteta snopa γ zbog prolaza kroz materijal, kada bi svaka interakcija γ-kvanta sa materijom

dovela do nestanka te γ-zrake. Taj izraz određuje dakle intenzitet dijela snopa γ-zraka koji nije kolidirao s materijalom (nekolidirani snop).

Međutim, apsorpcija γ zrake nastaje samo kod fotoelektričkog efekta. Compton-ovo raspršenje i stvaranje parova generiraju nove γ zrake, čime se povećava intenzitet γ zraka pri prolazu kroz materijal u odnosu na rezultat koji se dobiva primjenom izraza (3.5.3). Spektar energije γ zraka na ulazu i na izlazu iz materijala je prikazan slikom 3.5.3.



Slika 3.5.2 Maseni koeficijent slabljenja intenziteta γ-zraka za razne materijale



Slika 3.5.3 Spektar monoenergetskih γ-zraka, (a) na ulazu u materijal (b) na izlazu iz materijala (šiljak na kraju spektra odnosi se na izlazni tok γ-zraka koje nisu kolidirale s materijalom)

Točan je proračun povećanja intenziteta γ zračenja zbog raspršenih zraka koje nastaju u procesima Comptonovog raspršenja i uslijed stvaranja parova vrlo težak. Povećanje se iskazuje tzv. faktorom nakupljanja (u literaturi poznat kao buildup factor) koji se primjenjuje kod proračuna bioloških štitova. Taj faktor ovisi o energiji γ-zraka i geometriji biološkog štita. Vrijednosti faktora nakupljanja mogu doseći iznos od 10 pa i više, te nisu nipošto zanemarive.

Korigirani bi se oblik izraza (3.5.5) mogao napisati kao,

$$I=I_0Be^{(\mu/\rho)\rho x} \qquad (3.5.7),$$

gdje je B faktor nakupljanja.

U slučaju ravnih štitova i za paralelan snop γ-zraka se može za prvu i veoma grubu aproksimaciju uzeti,

$$B=1+(\mu/\rho)\rho x \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

Primjer 3.5.1

Kolika je, prema gruboj ocjeni, debljina betonskog zida gustoće 2400 kg/m^3 potrebna da se intenzitet snopa γ-zraka energije 2MeV smanji za 100 puta?

Rješenje:

Iz tablice 3.5.1 se može očitati maseni apsorpcioni koeficijent betona 0.00445 m^2/kg za γ-zrake energije 2MeV.

Primjenom jednadžbi (3.5.7) i (3.5.8), ako traženu debljinu zida označimo sa δ, slijedi,

$$\frac{I}{I_0}=0.01=\left(1+0.00445*2400\delta\right)e^{-0.00445*2400\delta}.$$

Rješenjem jednadžbe se dobiva δ=0.62m=62cm.

Faktor nakupljanja u ovom primjeru iznosi 7.62

Izvedeni primjer pokazuje da je prodornost γ-zraka kroz materijale neusporedivo veća od prodornosti β i α čestica. Zbog toga se štitovi za zaštitu okoline od zračenja nuklearnih postrojenja (ti štitovi se najčešće izrađuju iz betona ili olova) projektiraju za zaštitu od γ-zraka.

Oslobođena energija u materijalu

Interakcijom γ-zraka sa materijalom se oslobađa energija. Poznavanje je oslobođene energije od posebnog značaja kod proračuna brzine doze zračenja od γ-zraka.

Po analogiji izrazom $\phi\Sigma$ koji određuje broj nuklearnih reakcija materijala i neutrona po jedinici volumena (poglavlje 2.11) može se i za γ-zrake definirati broj interakcija po jedinici volumena materijala sa Iμ. Nadalje, broj interakcija po jedinici mase materijala će biti Iμ/ρ, a oslobođena energija po jedinici mase materijala $EI\mu_a/\rho$. E je energija γ-zraka, a μ_a maseni apsorpcijski koeficijent onih nuklearnih reakcija između γ-zraka i atoma materijala kod kojih se oslobađa energija.

Na temelju analize tri osnovna nuklearna procesa između γ-zraka i materijala (fotoelektrički efekt, Compton-ovo raspršenje i stvaranje parova), može se zaključiti da energija γ-kvanta nakon interakcije ostaje većim dijelom zarobljena u materijalu. To ne vrijedi za onaj dio energije koji odnosi sekundarna γ-zraka stvorena u procesu Compton-ovog raspršenja.

Slijedom navedenog je moguće pisati,

$$\mu_a=\mu_{pe}+\mu_{ca}+\mu_{pp}, \qquad \textbf{(3.5.6)}$$

gdje je,

$$\mu_{ca} = \frac{E_e}{E}\mu_c .$$

S E_e je označena energija elektrona izbačenog iz atoma kod Compton-ovog raspršenja, a sa E energija ulaznog γ-kvanta. Očigledno je da mora biti $E_e<E$, iz čega slijedi, $\mu_{ca}<\mu_c$ i $\mu_a<\mu$.

Odnos μ_a/ρ zove se maseni apsorpcioni koeficijent.

Maseni apsorpcioni koeficijenti za neke materijale su dati u tablici 3.5.2

Tablica 3.5.2 Maseni apsorpcijski koeficjent (μ_a/ρ) (m^2/kg) za neke materijale u ovisnosti o energiji γ-zraka u MeV

MeV	Željezo	Olovo	Zrak	Beton	tkivo
0.1	**0.0225**	**0.5193**	**0.00223**	**0.00416**	**0.00271**
0.15	**0.00810**	**0.1753**	**0.00251**	**0.00300**	**0.00282**
0.2	**0.00489**	**0.0821**	**0.00268**	**0.00289**	**0.00293**
0.4	**0.00307**	**0.0156**	**0.00296**	**0.00297**	**0.00317**
0.6	**0.00287**	**0.00738**	**0.00296**	**0.00295**	**0.00319**
0.8	**0.00274**	**0.00505**	**0.00289**	**0.00287**	**0.00311**
1.0	**0.00261**	**0.00402**	**0.00280**	**0.00278**	**0.00300**
2.0	**0.00231**	**0.00293**	**0.00238**	**0.00239**	**0.00256**
4.0	**0.00224**	**0.00330**	**0.00194**	**0.00203**	**0.00296**
6.0	**0.00231**	**0.00373**	**0.00172**	**0.00188**	**0.00182**
8.0	**0.00239**	**0.00412**	**0.00160**	**0.00180**	**0.00168**
10.0	**0.00250**	**0.00450**	**0.00153**	**0.00177**	**0.00160**

Primjer 3.5.2

Čelični kontejner sadrži radioaktivnu tekućinu. Intenzitet γ-zraka na unutrašnjoj strani kontejnera je $3*10^{15}$ γ-zraka/m^2s. Prosječna energija γ-zraka je 0.8MeV. Kolika se energija oslobađa na površini kontejnera?

Rješenje:

Maseni apsorpcijski koeficijet μ_a/ρ za čelik približno je jednak tom koeficijentu za željezo, a za γ-zrake energije 0.8MeV iznosi 0.00274 m^2/kg.

Oslobođena energija po jedinici mase čelika na površini kontejnera biti će,

$$\frac{EI\mu_a}{\rho} = 0.8*3*10^{15}*0.00274 = 6.58*10^{12}\ MeV/kg, s = 1.05\,W/kg .$$

Zadaci uz poglavlje 3

1.Potrebno je odrediti domet α-čestica energije 5MeV u slijedećim sredinama: Zrak, voda, aluminij, olovo. Odrediti također i relativnu moć usporavanja α-čestica te energije za vodu, aluminij i olovo.

2. Usporediti domet α i β čestica energije 3MeV u zraku sobne temperature i atmosferskog tlaka.

3. Odrediti debljinu aluminijske ploče koja će propustiti 5% β čestica radioaktivnog izotopa ^{90}Sr. Maksimalna energija β-čestica koje emitira navedeni izotop iznosi 0.55MeV.

4. Kuglasti spremnik unutarnjeg promjera 1m sadrži radioaktivnu tekućinu koja emitira γ-zrake prosječne energije 1.5MeV. Zahtjeva se da stjenka spremnika smanji intenzitet γ-zračenja za 500 puta. Potrebno je procijeniti približnu težinu spremnika ako se on izvede iz:

a) olova

b) željeza

c) betona

Računati pomoću izraza za ravnu ploču !

5. Udarni je presjek za fotoelektričku apsorpciju γ-zraka energije 0.6MeV u olovu približno $18*10^{-28}$ m^2. Unutar kojih bi se vrijednosti mogao nalaziti udarni presjek za fotoelektričku apsorpciju γ-zraka iste energije u uranu?

6. Maseni koeficijent olova za slabljenje intenziteta γ-zraka energije 0.15MeV iznosi 0.184 m^2/kg. Kod te energije osnovna nuklearna reakcija interakcije γ-zraka za materijalom je fotoelektrički efekt. Kolika je debljina olova potrebna da smanji intenzitet snopa γ zraka energije 0.15 MeV 1000 puta?

7. Za γ-zrake energije 1MeV udarni presjek za Compton-ovo raspršenje po elektronu σ_c iznosi $0.2112*10^{-28}$ m^2, dok je udarni presjek za apsorpciju po elektronu σ_{ca} $0.0929*10^{-28}$ m^2. Kolika je prosječna kinetička energija elektrona koji je izbačen kod Compton-ovog raspršenja?

8. Izračunati maseni koeficijent slabljenja intenziteta γ-zraka μ_c i maseni koeficijent za apsorpciju energije μ_{ca} u nuklearnoj reakciji Compton-ovog raspršenja γ-zraka energije 1MeV za:

a) aluminij

b) vodu.

9. Snop γ-zraka energije 0.1MeV intenziteta $5*10^{10}$ γ-zraka/m^{2}s pada na foliju aluminija. Kolika će biti deponirana energija po jedinici težine aluninija? Pretpostaviti da je dominantna nuklearna reakcija fotoelektrički efekt.

Reference uz poglavlje 3.

[1] D.Feretić,Osnove nuklearnih energetskih postrojenja, poglavlje 4 i 5,Zagreb,Liber.1978

[2] D.Popović,Osnove nuklearne tehnike,glava II,Naučna knjiga,Beograd,1970

[3] J.R.Lamarsh,Introduction to Nuclear Engineering,Chapter 3,Addison Wesley Publ. Co Reading Pa,1975.

[4] E.N.Jenkins,Radioactivity,Wykeham Publ.,London 1979

[5] H.Etherington,Nuclear Engineering Handbook,Section 7,Mc Graw Hill,N.York 1958

[6] Tehnička Enciklopedija JAZU,knjiga 9/535,Zagreb,1984.

[7] D.Halliday,Introductory Nuclear Physics,Chapter 7,J.Wiley Inc

4 FISIJA I LANČANA REAKCIJA

4.1 Otkriće fisije

Otkrićem neutrona (neutron je 1932.godine otkrio engleski fizičar Chadwick), dobiven je djelotvoran projektil za izazivanje nuklearnih reakcija. Ta čestica, naime, nema električkog naboja i zbog toga lako penetrira u atomska jezgra.

Grupa talijanskih fizičara na čelu sa E.Fermijem počela je 1934 godine istraživački program na dobivanju umjetnih radioizotopa putem bombardiranja neaktivnih materijala s neutronima. Taj je program obuhvaćao i istraživanje tzv. transuranskih elemenata (elemenata težih od urana kojih nema u prirodi) koji su dobivani izlaganjem uzoraka urana snopu neutrona. Ozračeni su uzorci slani u razne laboratorije radi analize. Nakon nekoliko godina takvog rada senzaciju, a i nevjericu je izazvao rad Irene J.Curie sa P.Savićem kao koautorom, objavljen 1938 godine, u kojem se je tvrdilo da ozračeni uzorci urana sadrže pored ostalih i mnogo lakše elemente, srodne lantanu i bariju. To se je moglo tumačiti jedino cijepanjem (fisijom) atoma urana. Nalaz je nešto kasnije (početkom 1939 godine) potvrđen od njemačkih istraživača Hahna i Strassmana, a nakon toga i od niza drugih radiokemijskih laboratorija.

Na temelju saznanja o realnosti fisije atoma urana, a koristeći model atomske jezgre u vidu kapljice tekućine (koji je postavio danski fizičar N.Bohr još 1936.godine), njemački su fizičari Frisch i Meitner u veljači 1939. godine publicirali teoriju fisije atoma urana čiji su najbitnije postavke da se u tom procesu ne oslobađa samo energija već i dodatni neutroni koji omogućuju ostvarenje tzv. lančane reakcije.

Početkom drugog svjetskog rata istraživanja na ovom polju postaju tajna.

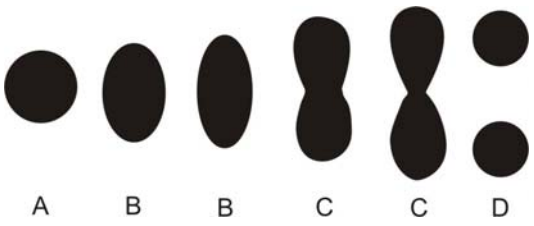
4.2 Mehanizam fisije.

Jezgra atoma urana kada apsorbira neutron stvara tzv. složenu jezgru, koja se može, ali ne mora raspasti. Na primjer, kod lakšeg izotopa urana (^{235}U) proces teče prema shemi,

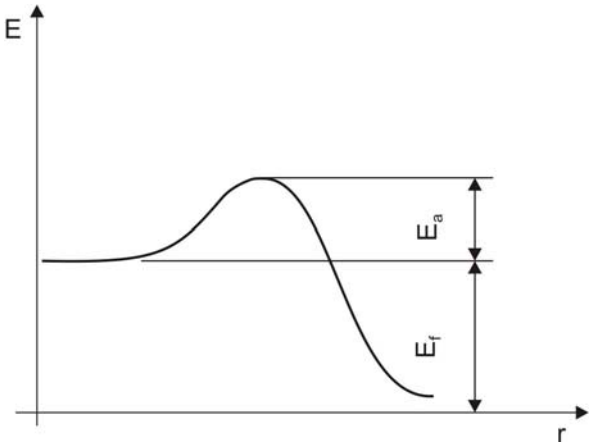
$$^{235}\mathrm{U}+\mathrm{n}\rightarrow{}^{236}\mathrm{U}$$

Složena je jezgra u pobuđenom stanju jer neutron ulaskom u jezgru oslobađa svoju energiju veze (ta energija, opisana u poglavlju 2.9, kod uranovih izotopa iznosi oko 8 MeV)

Mehanizam fisije se može tumačiti modelom jezgre u vidu kaplice tekućine: Energija unešena u jezgru oslobađanjem energije veze nukleona unosi poremećaj u ravnotežu sila koja djeluju unutar jezgre što dovodi oscilacija i deformacije jezgre. U jezgri, prema tom modelu, djeluje sila površinske napetosti (tj.nuklearna sila između površinskih nukleona) koja nastoji jezgri dati kružni oblik i elektrostatička odbojna sila između protona u jezgri. Ukoliko je površinska sila dovoljno jaka jezgra se vraća u kružni oblik i izbacuje suvišnu energiju u vidu γ-kvanta. S druge strane, kod teških jezgara sa velikim brojem protona i jakim odbojnim silama, deformacija jezgre može dovesti do polarizacije naboja i razbijanja jezgre na dva dijela, tj. do fisije atoma. Faze fisije su prikazane na slici 4.2.1



Slika 4.2.1 Faze fisije jezgre atoma urana



Slika 4.2.2 Potencijalna energija fisijskih fragmenata u ovisnosti o njihovom razmaku

Uvjete za nastanak fisije možemo kvantificirati uvidom u energetska stanja jezgre.

Potencijalna je energija fisijskih produkata u ovisnosti o njihovom razmaku prikazana slikom 4.2.2. Fisijski produkti, kao pozitivno nabijeni nuklidi, moraju savladati energiju aktivacije E_a prije nego se razdvoje. Tek se tada oslobađa energija fisije E_f. Uvjeti za fisiju nastaju kada je oslobođena energija veze zahvaćenog neutrona veća od energije aktivacije. Približna se vrijednost energiju veze koja se zahvatom neutrona oslobađa u jezgri može odrediti iz izraza (2.9.3.), kao razlika ukupne energiju veze nastale složene jezgre i energije veze jezgre prije zahvata neutrona.

Primjer 4.2.1.

Kolika se energija veze oslobađa zahvatom neutrona u nuklidima ^{235}U i ^{238}U?

Rješenje:

Zahvatom neutrona u nuklidu ^{235}U nastaje pobuđeni nuklid ^{236}U. Oslobođena se energija veze zahvaćenog neutrona dobiva kao razlika energija veze nuklida ^{236}U i nuklida ^{235}U, tj. $\Delta E=(E_v)_{236}-(E_v)_{235}$

Prema izrazu (2.9.3) energija veze je

$$E_v = 14A - 0.584\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - 13.1A^{2/3} - 19.4\frac{(A-2Z)^2}{A} - E_\delta .$$

Za nuklid ^{236}U, s podacima Z=92, A=236 i E_δ=-135/A, dobivamo,

$(E_v)_{236}$=3304-791.17-500.28-222.28+0.57=1790.84 MeV.

Na isti se način račun za ^{235}U (Z=92, A=235, E_δ=0) daje, $(E_v)_{235}$=1784.12.

Energija veze ΔE, koja se oslobađa zarobljavanjem neutrona u nuklidu ^{235}U će, dakle, biti, 1790.84-1784.12=6.72 MeV.

Ako je pak neutron zarobljen u nuklidu ^{238}U, istim postupkom dobivamo, $\Delta E=(E_v)_{239}-(E_v)_{238}=1808.10-1802.82=5.28$ MeV

U prvom je slučaju nastala složena jezgra ^{236}U s parnim brojem protona i neutrona, dok je u drugom slučaju, u složenoj jezgri ^{239}U, broj neutrona neparan. Jezgra s parnim brojevima nukleona je stabilnija i zbog toga, kao što pokazuje izvedeni račun, dolazi kod njezinog formiranja do oslobađanja veće energije veze.

Energija aktivacije

Energiju aktivacije jezgara je moguće kvantificirati jednostavnim poluempiričkim izrazom, koji su, na osnovi modeliranja atomske jezgre sa kapljicom tekućine, postavili Bohr i Wheeler:

$$E_a = 0.89A^{2/3} - 0.02\frac{Z^2}{A^{1/3}}\ \text{MeV} \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

Primjer 4.2.2

Kolike su energije aktivacije složenih jezgara ^{236}U i ^{239}U?

Rješenje

Izraz (4.2.1) za ^{236}U, (Z =92, A=236) daje, E_a=6.6 MeV, a za ^{239}U, (Z=92, A=239), E_a=7.0 MeV

Uporedbom rezultata primjera 4.2.1 i 4.2.2 vidimo da je za nuklid ^{236}U energija aktivacije manja od energije veze. Oslobođena je energija veze neutrona dovoljna, dakle, za fisiju tog nuklida.

Obratno, kod nuklida ^{239}U energija aktivacije je veća od energije veze. Energije veze zarobljenog neutrona nije dovoljna za fisiju.

Energija fisije

Energija dobivena fisijom ^{235}U iznosi oko 200 MeV. Budući da je $1eV=1.60219*10^{-19}$ J, za dobivanje snage od 1W treba oko $3.1*10^{10}$ fisija/s. Energija koja nastaje u procesu fisije se raspoređuje na čestice koje nastaju u tom procesu na način prikazan tablicom 4.2.1. Interesantno je napomenuti da je iznos energije koja nastaje u fisiji veći od energije koju možemo iskoristiti u nuklearnom reaktoru. Razlika nastaje zbog energije nastalih neutrina koji prate emisije β-čestica. Neutrino ima ekstremno mali presjek interakcije sa materijom i zbog toga je materija praktički "prozračna" za prolaz tih čestica. Drugi dio razlike leži u energiji prodornih γ-zraka koje nastaju u procesima zarobljavanja neutrona u materijalu (sekundarne γ-zrake). Ta se energija dijelom oslobađa u biološkom štitu reaktora.

Tablica 4.2.1 Raspodjela energije fisije ^{235}U

	Generirana energija MeV	Iskoristiva energija Mev
fisijski fragmenti	168	168
raspad fisijskih proizvoda		
β-zrake	8	8
γ-zrake	7	7
neutrini	12	-
promptne γ-zrake	7	7
kinetička energija fisijskih neutrona	5	5
sekundarne γ-zrake	-	3
Ukupno	207	198

Iz tabele je vidljivo da se energija fisije manifestira najvećim dijelom (preko 80%) kao kinetička energija fisijskih fragmenata. Ta se energija putem sudara fisijskih fragmenata sa atomima okolnog materijala pretvara u toplinsku energiju.

Primjer 4.2.3

Kolika se snaga generira u reaktoru u kojemu se fisijama gubi 1 gram ^{235}U dnevno?

Rješenje:

Jedan gram ^{235}U sadrži $6.023*10^{23}/235=2.56*10^{21}$ atoma, a toliki je i broj fisija tog nuklida po danu.

Odgovarajući broj fisija na sekundu iznosi $2.96*10^{16}$, što odgovara energiji od 955.8 kW.

4.3 Karakteristike fisije

Fisija atoma nekih izotopa urana i plutonija je najvažnija nuklearna reakcija za praktično korištenje nuklearne energije. Važnost fisije za nuklearnu energetiku se zasniva na dvije činjenice:

1. U fisiji se oslobađa znatna količina energije jer fisijski produkti imaju veću energiju veze od jezgre koja se cijepa (vidi sliku 2.9.1). Kod nuklida ^{235}U oslobođena energija iznosi približno 200MeV po fisiji.

2. Fisiju prati emisija neutrona koji mogu inicirati nove fisije. Ovim je omogućena tzv. "lančana reakcija" odnosno nuklearni proces koji se sam podržava.

Uvjeti za nastanak fisije nisu u svim izotopima urana i plutonija jednaki. Osnovna je razlika u potrebnoj energiji neutrona za izazivanje fisije. Već je u diskusiji rezultata primjera 4.2.1 i 4.2.2 uočeno da je energija aktivacije manja od oslobođene energije veze kada dođe do zahvata neutrone sa strane izotopa ^{235}U. Obratna situacija nastaje kada se neutron apsorbira u izotopu ^{238}U. Oslobođena energija veze je nedovoljna za izazivanje fisije nuklida ^{238}U, jer je energija aktivacije od nje veća za oko 1.7 MeV (Mjerenja pokazuju da je ta razlika nešto manja, iznosi oko 1.1 MeV).

Ovo praktički znači da je nuklid ^{235}U podložan fisiji sa neutronima bez kinetičke energije, dok je za fisiju nuklida ^{238}U potreban neutron sa kinetičkom energijom koja odgovara razlici između energije aktivacije i oslobođene energije veze.

Slično kao ^{235}U se ponašaju i drugi neparni izotopi urana i plutonija: ^{233}U, ^{239}Pu, ^{241}Pu. Ti se izotopi označuju kao fisibilni izotopi. S druge strane, parni izotopi urana torija i plutonija (^{232}Th, ^{234}U, ^{236}U, ^{240}Pu...) pokazuju sličnost sa opisanim ponašanjem izotopa ^{238}U (oslobođena energija veze je nedovoljna za fisiju).

U izvjesnim uslovima fisija može nastati spontano, tj. bez apsorpcije neutrona. Uvjeti za spontanu fisiju su ispunjeni za jezgre kod kojih je energija aktivacije jednaka nuli. Postavkom E=0 u jednadžbu (4.2.1), proizlazi da spontane fisije mogu nastati uz uvjet da je $(Z^2/A)>45$.

Jezgre atoma izotopa urana i plutonija koji su značajni za nuklearnu energetiku (^{233}U, ^{235}U, ^{238}U, ^{239}Pu, ^{240}Pu) imaju odnos Z^2/A manji od 45 (vrijednosti se kreću od 35 do 37).

Iz navedenog bi se moglo zaključiti da kod tih nuklida ne postoje uvjeti za spontanu fisiju. To nije sasvim točno jer modeliranje jezgre sa kapljicom tekućine ne uzima u obzir kvantno mehanički tunelski efekt koji dozvoljava izvjesnu vjerojatnost prodora fisijskih fragmenata kroz potencijalnu barijeru jezgre. Tako je npr. izmjeren broj spontanih fisija (izražen brojem fisija po kilogramu materijala na sat i odgovarajućim poluvremenom raspada) najznačajnijih nuklida:

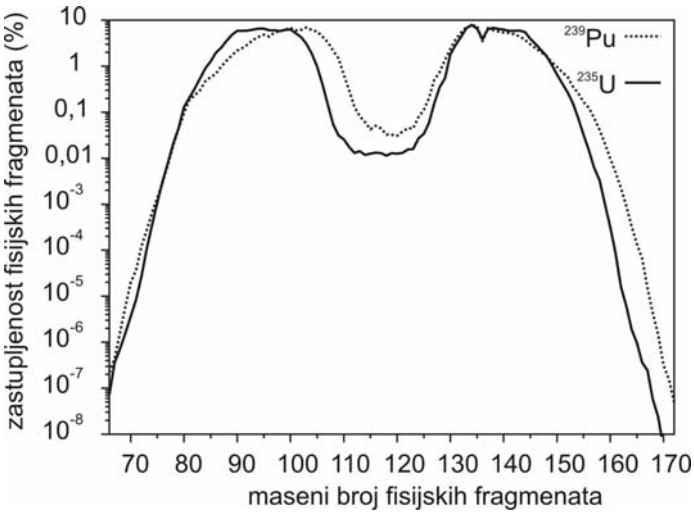
^{235}U	1000 fisija/kg,h	$t_{1/2}=1.8*10^{17}$ god.
^{238}U	25000 fisija/kg,h	$t_{1/2}=8.0*10^{15}$ god.
^{239}Pu	36000 fisija/kg,h	$t_{1/2}=5.5*10^{15}$ god.
^{240}Pu	$1.6*10^{9}$ fisija/kg,h	$t_{1/2}=1.2*10^{11}$ god.

Nije na odmet primijetiti da su osim kod izotopa urana i plutonija fisije ostvarene i kod atoma nekih drugih elemenata (bizmut, olovo, talij, platina, zlato). Upotrebljene su energije neutrona za ostvarenje fisije bile veoma visoke (oko 40 MeV) i bitno veće od energija dobivenih fisijskih neutrona. Kod tih je nuklida nemoguće ostvariti samoodržavajuću lančanu reakciju, pa su oni bez značaja za nuklearnu energetiku.

4.4 Fisijski produkti

Mase fisijskih fragmenata

Jezgre fisibilnih atoma se mogu cijepati na 30 do 40 raznih načina, što znači da će se među produktima fisije naći 60 do 80 raznih fisijskih fragmenata. Ako se količine fisijskih produkata sortiraju po masenim brojevima, moguće je uočiti da zastupljenost masenih brojeva među fisijskim fragmentima nije jednolika. Kod fisije ^{235}U najviše ima fisijskih fragmenata sa masenim brojevima oko 95 i oko 140 (zastupljeni su sa po 6.6% od svih fisijskih fragmenata). Raspodjela masa fisijskih produkata u funkciji masenog broja prikazana je slikom 4.4.1.



Slika 4.4.1 Zastupljenost fisijskih fragmenata ^{235}U i ^{239}Pu u ovisnosti o masenom broju

Jezgra se urana najčešće cijepa na dva fragmenta čiji je odnos masa približno 2:3. Mnogo je rjeđe cijepanje jezgre na dva jednaka fragmenta (prema slici 4.4.1 vjerojatnost simetrične fisije je kod fisija izazvanih termičkim neutronima oko 600 puta manja). Isto je tako zanemariva količina fisijskih fragmenata čiji su maseni brojevi manji od 70 i veći od 170. Vjerojatnost simetričnog cijepanja jezgre raste sa porastom energije neutrona. Ako se, primjerice, fisija ^{235}U vrši sa neutronima energije 14MeV, raspodjela masa fisijskih fragmenata ostaje približno ista kao da fisiju izazivaju termički neutroni, s tim što vjerojatnost simetrične fisije raste oko 100 puta. Kod veoma visokih energija neutrona (reda 90MeV) simetrična fisija postaje dominantna.

Radioaktivnost fisijskih produkata.

Jedna od najbitnijih značajki fisijskih produkata je njihova radioaktivnost. U poglavlju 2.8 je radioaktivnost fisijskih produkata objašnjena viškom neutrona u jezgrama atoma fisijskih fragmenata u odnosu na područje stabilnih jezgara (koje je prikazano slikom 2.7.1). Višak neutrona upućuje na zaključak da fisijski produkti moraju biti β i γ aktivni. Emisijom elektrona iz jezgre neutron se pretvara u proton, a emisijom se γ kvanta jezgra rješava viška unutarnje energije. U rijetkim slučajevima visoko nestabilni fisioni fragmenti mogu direktno emitirati i neutrone (jedna od takvih transformacija je prikazana slikom 2.8.1). Riječ je o tzv. zakašnjelim neutronima o kojima će biti dosta govora kasnije, jer su od bitnog značaja za rad nuklearnih reaktora.

U većini je slučajeva potrebno više uzastopnih β i γ raspada prije nego što jezgra fisijskog fragmenta dosegne stabilnost. Tipičan je primjer radioaktivni raspad nuklida ^{140}Xe. (Ovaj nuklid spada među najzastupljenije fisijske produkte, a u toku svog raspada generira radioaktivne izotope lantana i barija koji su doveli do otkrića fisije). Shema radioaktivnog niza kod raspada nuklida ^{140}Xe:

$$^{140}_{54}Xe \xrightarrow[\beta]{16\,s} {}^{140}_{55}Cs \xrightarrow[\beta]{66\,s} {}^{140}_{56}Ba \xrightarrow[\beta]{12.8\,d} {}^{140}_{57}La \xrightarrow[\beta]{40\,h} {}^{140}_{58}Ce \text{ (stabilan)}$$

Uz svaki je nuklid u nizu naveden redni i maseni broj i poluvremena raspada.

Slično kao u prikazanom primjeru raspada ^{140}Xe, i drugi fisijski fragmenti u raspadima stvaraju nizove radioaktivnih izotopa. U prosjeku ti nizovi sadrže po tri radioaktivna nuklida. Ako uzmemo u obzir da kod fisije urana nastaje 60 do 80 različitih fisijskih fragmenata može očekivati da će se među produktima urana naći preko 200 različitih radioaktivnih izotopa s vremenima poluraspada koji variraju od djelića sekunde do više tisuća godina.

Detaljna bi se analiza radioaktivnosti fisijskih produkata trebala zasnivati na proračunu radioaktivnog raspada svakog izotopa koji je sadržan u fisijskim produktima. Za praktične je potrebe, međutim, dovoljno razmotriti radioaktivnost fisijskih produkata u cjelini. Ta je radioaktivnost određena eksperimentalnim putem, a računa se empiričkim izrazima.

Ako razmotrimo vremena duža od 10 s nakon fisije, broj je radioaktivnih čestica koje emitiraju fisijski produkti je moguće odrediti jednostavnim relacijama:

- γ zrake $1.9*10^{-6}\ t^{-1.2}$, γ zraka na sekundu po fisiji

- β čestice $3.8*10^{-6}\ t^{-1.2}$, β čestica na sekundu po fisiji, gdje je t vrijeme nakon fisije u danima.

Ako sada uzmemo u obzir da γ zrake fisijskih produkata imaju prosječnu energiju 0.7MeV, a β čestice 0.4MeV, moguće je gornje izraze pretvoriti u izraz koji određuje energiju radioaktivnog zračenja fisijskih produkata u ovisnosti o vremenu:

$$E=2.8*10^{-6}\ t^{-1.2},\ \text{MeV/fisiji,s} \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

Dobiveni izraz možemo pretvoriti u relaciju kojom je dana količina energije koju svojim radioaktivnim raspadima proizvode fisijski produkti nastali fisijom jednog kilograma ^{235}U:

$$E=1.1*10^{6}\ t^{-1.2}\ \text{W/kg}\ ^{235}U. \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

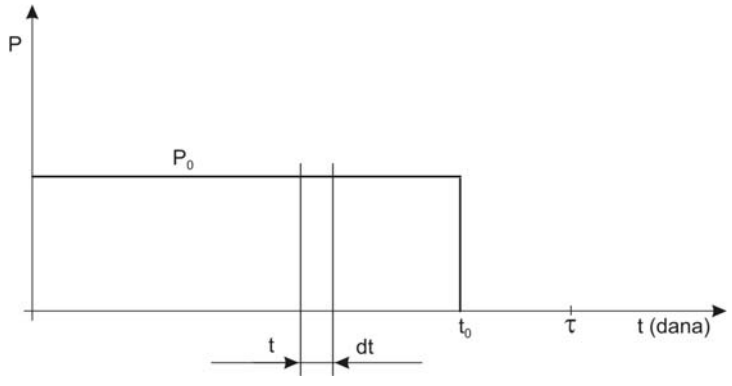
Neposredno nakon prestanka lančane reakcije, oko 6% snage se i dalje generira u fisijskim produktima, a nakon toga se u njima proizvedena snaga mijenja s vremenom suglasno s relacijom (4.4.2).

Ta činjenica je od bitne važnosti za reaktorsku tehniku, jer ukazuje na potrebu da se i nakon obustave lančane reakcije i dalje mora hladiti reaktorska jezgra.

Generirana snaga u obustavljenom reaktoru

Često treba odrediti snagu koju generiraju fisijski produkti u reaktoru koji je obustavljen, nakon što je određeno vrijeme radio na nekoj snazi.

Uzmimo da je, prema slici 4.4.2, t_0 vrijeme tokom kojeg je reaktor radio sa snagom P_0, a τ-t_0 vrijeme nakon obustave reaktora.



Slika 4.4.2 Vrijeme rada i obustava reaktora

Snaga koja se generira u vremenu τ od fisijskih produkata nastalih u vremenu t bit će na osnovi izraza (4.4.1),

$2.8*10^{-6}(\tau-t)^{-1.2}$ MeV/fisiji,s.

Budući da $3.1*10^{10}$ fisija/s ili $2.68*10^{15}$ fisija/dan daje snagu od jednog vata, broj fisija u dt dana biti će, $2.68*10^{15}$Pdt,gdje je P snaga reaktora izražena u vatima.

Snaga koju u vremenu τ daju fisijski produkti nastali u elementu vremena dt u vremenu t bit će na osnovi navedenog,

$7.5*10^9\ Pdt(\tau-t)^{-1.2}$ MeV/s

Obično nas interesira ukupna snaga koju nakon obustave reaktora generiraju fisijski produkti nastali u toku pogona. Ako s t=0 označimo početak rada reaktora, a s $t=t_0$ vrijeme njegove obustave, rezultat dobivamo integracijom gornjeg izraza u tim granicama (kod čega se moramo prisjetiti da je $\tau>t$, i da je $\tau-t_0$ vrijeme nakon obustave pogona reaktora):

$$P = 7.5*10^9 P_0 \int_0^{t_0} (\tau - t)^{-1.2}\, dt\ ,$$

iz čega proizlazi

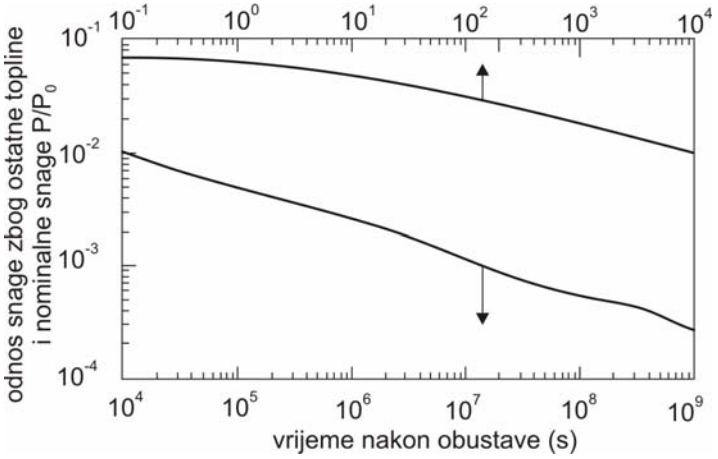
$$P = 3.8*10^{10} P_0 \left[(\tau - t_0)^{-0.2} - \tau^{-0.2} \right] \text{MeV/s}$$

ili, uzevši u obzir da je 1 MeV/s=$1.6*10^{-13}$ W, može se postaviti odnos snage koju daju fisijski produkti u vremenu t i snage na kojoj je reaktor radio prije obustave,

$$\frac{P}{P_0} = 6.1*10^{-3}\left[(\tau - t_0)^{-0.2} - \tau^{-0.2} \right]. \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

Treba podsjetiti da su u izrazu (4.4.3) vremena mjerena u danima. Izraz daje približne rezultate.

U literaturi se susreću i točnije relacije za izračunavanje generirane snage u reaktoru nakon obustave lančane reakcije, posebno za vrlo kratka vremena nakon obustave. Na slici 4.4.3 je prikazan odnos P/P_0 za reaktor sa uranskim gorivom koji radi neograničeno dugo vremena na snazi P (rezultati se mogu bez velike greške koristiti ako je vrijeme pogona reaktora bilo duže od mjesec dana)



Slika 4.4.3 Snaga proizvedena u fisijskim proizvodima u ovisnosti o vremenu obustave reaktora

Primjer 4.4.1

Potrebno je odrediti snagu koja se generira u jezgri nuklearnog reaktora mjesec dana nakon njegove obustave. Reaktor je kontinuirano radio sa snagom 1900 MW u periodu od 10 mjeseci.

Rješenje:

Vrijeme nakon obustave reaktora $\tau-t_0$=1 mjesec=30 dana.

Vrijeme rada i obustave τ=11 mjeseci=330 dana

Uvrštenjem u izraz (4.4.3) izlazi,

$$\frac{P}{P_0} = 6.1*10^{-3}\left(30^{-0.2} - 330^{-0.2}\right) = 1.18*10^{-3}.$$

Približno isti rezultat se može očitati i iz slike 4.4.2, za vrijeme nakon obustave reaktora od mjesec dana=$2.6*10^6$s.

Generirana snaga u jezgri reaktora mjesec dana nakon obustave pogona iznosi, $1.18*10^{-3}*1900$=2.24 MW.

4.5 Fisijski neutroni

Pod pojmom fisijski neutroni podrazumijevamo neutrone koji su nastali kao posljedica fisije atomske jezgre. Proces fisije prati emisija neutrona, jer u toj nuklearnoj reakciji nastaju jezgre sa suviše velikim brojem neutrona u odnosu na područje stabilnosti nuklida (slika 2.7.1).

Kod fisije ^{235}U, ako je ona izazvana termičkim neutronima, nastaje oko 2.5 fisijskih neutrona. Kod fisije plutonija (^{239}Pu i ^{240}Pu) je taj broj nešto veći, oko 2.9. Uobičajeno je broj neutrona dobivenih u fisiji obilježavati sa ν. Taj je parametar u priličnoj mjeri ovisan o energiji neutrona koji izaziva fisiju.

Promptni i zakašnjeli fisijski neutroni.

Fisijski se neutroni dijele u dvije kategorije:

1.Promptni neutroni

Promtni neutroni nastaju neposredno u procesu fisije ili u vrlo kratkom vremenu nakon fisije (reda 10^{-14} s). Najveći broj (preko 99%) fisijskih neutrona su promptni neutroni.

2.Zakašnjeli neutroni

Zakašnjeli neutroni nastaju u nuklearnim reakcijama raspada nekih fisijskih fragmenata. Ti neutroni bivaju emitirani sa znatnim kašnjenjem u odnosu na promptne neutrone. Jedan takav primjer je ilustriran slikom 2.8.1. Udio zakašnjelih neutrona u ukupnom broju fisijskih neutrona iznosi kod ^{235}U 0.65%, kod ^{239}U 0.2%, te kod ^{233}U 0.26%. S obzirom da zakašnjeli neutroni potječu od raznorodnih fisijskih fragmenata za očekivati je da će njihova vremena kašnjenja biti raznovrsna .

Radi lakše analize, zakašnjeli su neutroni, prema vremenu kašnjenja, grupirani u više grupa (najčešće šest grupa), od kojih svaku karakterizira udio u količini zakašnjelih neutrona (β_i) i konstanta radioaktivnog raspada fisijskih fragmenata iz kojih nastaju zakašnjeli neutroni (λ_i). Karakteristike grupa zakašnjelih neutrona za fisije ^{235}U i ^{239}Pu su dane u tablici 4.5.1.

Tablica 4.5.1 Karakteristike grupa zakašnjelih neutrona ^{235}U i ^{239}Pu

grupa	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
λ_i s^{-1}	**0.00124**	**0.0305**	**0.111**	**0.301**	**1.1**	**3.0**
$10^4\beta_i(^{235}U)$	**2.15**	**14.2**	**12.7**	**25.7**	**7.5**	**2.7**

$10^4\beta_i(^{235}U)$	**0.689**	**5.957**	**4.23**	**6.52**	**1.71**	**0.885**
energija(MeV)	**0.25**	**0.46**	**0.41**	**0.45**	**0.41**	**-**

U skladu s prijašnjom napomenom ukupan broj zakašnjelih neutrona

$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i$ iznosi

- za ^{235}U 0.0065 (0.65%)
- za ^{239}Pu 0.0020 (0.2%)

Energije fisijskih neutrona

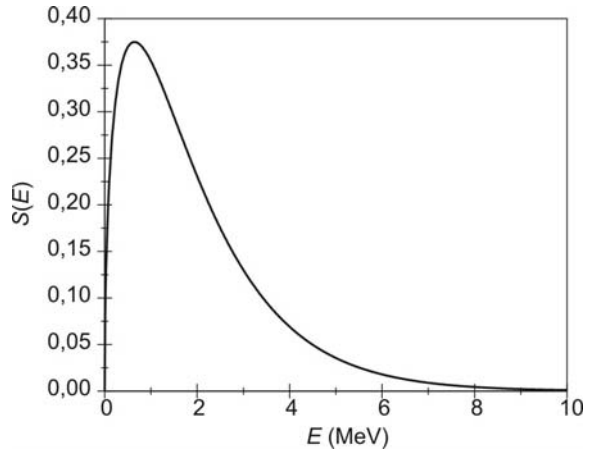
Energije fisijskih neutrona slijede zakon raspodjele definiran izrazom:

$$S(E) = Ae^{-E}\sinh(\sqrt{2E}), \qquad \textbf{(4.5.1)}$$

gdje je S(E) broj neutrona po jedinici energetskog intervala, a E energija neutrona u MeV.

Ako se funkcija S(E) normalizira tako da je $\int_0^\infty S(E)dE = 1$, konstanta A u izrazu (4.5.1) postaje 0.484.

Normalizirana raspodjela energije fisijskih neutrona je prikazana slikom 4.5.1.



Slika 4.5.1 Raspodjela energije fisijskih neutrona

Prosječna energija fisijskih neutrona E_{sr} određena je izrazom,

$$E_{sr} = \frac{\int_0^\infty S(E)EdE}{\int_0^\infty S(E)dE} \qquad \textbf{(4.5.2)}$$

Uvrštenjem S(E) iz izraza (4.5.1), dobiva se prosječna energija fisijskih neutrona E_{sr}=1.94 MeV.

Ponekad je od interesa odrediti i maksimalnu vrijednost S(E) (tj.energiju kod koje je u jediničnom energetskom intervalu najveći broj fisijskih neutrona).

Izračunavanjem ekstrema funkcije S(E) dobiva se maksimum funkcije za energiju neutrona E_{max}=0.645 MeV.

U literaturi se navode i druge slične poluempiričke formule koje opisuju raspodjelu energija fisijskih neutrona. Kao primjer, prema Lamarsh-u[4], jedna od takvih formula je,

$$S(E)=0.453e^{-1.036E}\sinh(2.29E)^{1/2} \qquad \textbf{(4.5.3)}$$

Broj fisijskih neutrona po zarobljenom neutronu u nuklearnom gorivu.

Broj fisijskih neutrona koji se dobiva po apsorbiranom neutronu u nuklearnom gorivu, tj. faktor umnožavanja neutrona u procesu fisije atoma, je važan parametar za karakterizaciju nuklearnog goriva. Taj se broj obilježava sa η; uvijek je manji od broja neutrona dobivenih u fisiji ν, jer svaka apsorpcija neutrona u nuklearnom gorivu ne dovodi do fisije.

Izraz koji definira η za uran je,

$$\eta = \nu\frac{\Sigma_{f235}}{\Sigma_{a235}+\Sigma_{a238}} = \nu\frac{\sigma_{f235}}{\sigma_{a235}+\frac{N_{238}}{N_{235}}\sigma_{a238}}. \qquad \textbf{(4.5.4)}$$

Indeks 235 se odnosi na izotop ^{235}U, a indeks 238 na izotop ^{238}U.

Faktor η ovisi o energiji neutrona koji izazivaju fisiju.(vidi sliku 8.8.1)

Primjer 4.5.1

Potrebno je odrediti broj fisijskih neutrona po zarobljenom termičkom neutronu energije 0.025 eV u uranu za slučaj prirodnog urana, 3% (tež.) obogaćenog urana i čistog izotopa ^{235}U.

Rješenje:

Kod zadanih udjela izotopa u nekoj mješavini, pažnju treba obratiti je li riječ o atomskom ili težinskom udjelu.

Atomski je udio ^{235}U u prirodnom uranu 0.72%, iz čega neposredno proizlazi da je za prirodni uran odnos N_{238}/N_{235} približno jednak 139.

Za 3% obogaćeni uran (tj. uran kod kojega maseni udio izotopa ^{235}U iznosi 3%) je odnos broja atoma ^{238}U i ^{235}U izračunat u primjeru 2.5.2, gdje je dobiven rezultat 31.93.

Podatke za udarne presjeke nuklearnih reakcija izotopa urana za termičkim neutronima energije 0.025 eV preuzeti ćemo iz tablice 2.13.1, pa imamo,

-za ^{235}U: $\sigma_a=680.8*10^{-28}$ m^2 $\sigma_f=582.2*10^{-28}$ m^2

-za ^{238}U: $\sigma_a=2.71*10^{-28}$ m^2

Broj neutrona ν dobiven po fisiji ^{235}U iznosi 2.42

Broj se fisijskih neutrona po apsorbiranom termičkom neutronu u nuklearnom gorivu dobiva neposrednim uvrštavanjem brojčanih vrijednosti u jednadžbu (4.5.4):

Za prirodni uran,

$$\eta = 2.42\frac{582.2}{680.8+139*2.71} = 1.33$$

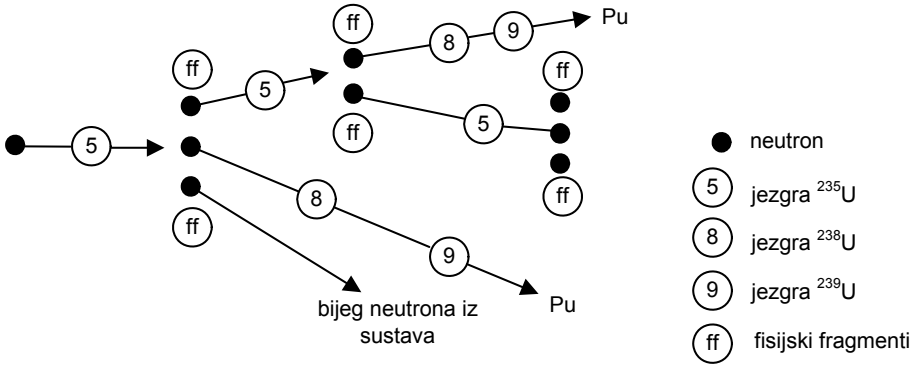
Za 3% obogaćeni uran,

$$\eta = 2.42 \frac{582.2}{680.8 + 31.93 * 2.71} = 1.84 .$$

4.6 Lančana reakcija

Budući da je proces fisije atoma urana i plutonija praćen emisijom neutrona, postoji mogućnost da se ti neutroni iskoriste za izazivanje daljnjih fisija i time proces nastavi bez unošenja dodatnih neutrona u nuklearno gorivo. Takav je proces poznat kao lančana reakcija.

Lančana je reakcija shematski prikana slikom 4.6.1.



Slika 4.6.1 Shematski prikaz lančane reakcije

Svi neutroni koji nastaju u fisijama nisu raspoloživi za nastavak lančane reakcije, jer se jedan dio gubi zbog bijega (umicanja) iz sustava, a drugi zbog apsorpcija u materijalima koje ne rezultiraju fisijom. Upravo je analiza mogućnosti reprodukcije fisijskih neutrona, tj. analiza mogućnosti ostvarenja samoodržavajuće lančane reakcije unutar određenog sustava, jedan od osnovnih elemenata teorije nuklearnog reaktora. Uvjeti za samoodržavajuću lančanu reakciju su ispunjeni ako se početni broj neutrona sadržan u sustavu ne smanjuje, tj. ako je sustav sposoban generiranjem novih neutrona nadoknaditi gubitak neutrona.

Analiza mogućnosti ostvarenja samoodržavajuće lančane reakcije u neograničenom bloku čistog prirodnog urana.

Jedini fisijski materijal, raspoloživ u prirodi, je prirodni uran. Veoma je značajno, radi razumijevanja osnovnih principa rada nuklearnih reaktora, razmotriti mogućnost ostvarenja samoodržavajuće lančane reakcije u prirodnom uranu. Radi jednostavnosti pretpostaviti ćemo da se radi o neograničeno velikom bloku materijala (kako bismo isključili utjecaj bijega neutrona), te da je materijal idealno čist (kako bi se apsorpcija neutrona mogla ograničiti samo na uran).

Zamislimo da je u jednom trenutku unutar takvog bloka prisutno 100 fisijskih neutrona. Raspored energija fisijskih neutrona odgovara slici 4.5.1. Prag je fisije izotopa ^{238}U iznad 1MeV (vidi poglavlje 4.3), iz čega slijedi da će svega oko 50% fisijskih neutrona imati dovoljno energije da izazove fisiju atoma kod oba izotopa urana. Preostalih će 50% neutrona moći dovesti do fisije samo u izotopu ^{235}U.

50 fisijskih neutrona čija je energija viša od 1MeV mogu na više načina reagirati s jednim i drugim izotopom urana. Među tim su nuklearnim reakcijama za potrebu ove analize najvažnije slijedeće:

-Fisija ^{238}U

-Fisija ^{235}U

-Neelastični sudar

Podaci o udarnim presjecima za nuklearne reakcije s fisijskim neutronima dani su u tablici 2.13.2. Iz tih podataka slijedi da za prirodni uran i imenovane nuklearne reakcije makroskopski udarni presjeci imaju slijedeće vrijednosti:

$\Sigma_{f238}=0.138\ m^{-1}$, $\Sigma_{f235}=0.0046\ m^{-1}$, $\Sigma_{ie238}=1.18\ m^{-1}$, $\Sigma_{ie235}=0.0036\ m^{-1}$.

Iz odnosa udarnih presjeka za neelastični sudar i fisiju može se zaključiti da će svega oko 12% neutrona sa energijama višim od 1 MeV izazvati fisiju u jednom ili drugom izotopu urana. Preostali će neutroni biti neelastično raspršeni. Nuklearna reakcija neelastičnog sudara (koja je dominantna u području energija fisijskih neutrona) znatno smanjuje energiju neutrona, pa je opravdana pretpostavka da neutroni nakon te nuklearne reakcije neće imati energiju dovoljnu za fisiju ^{238}U.

Kao zaključak iznesene analize slijedi zaključak da će od 50 fisijskih neutrona svega oko 6 neutrona izazvati fisiju u području energija višim od praga fisije ^{238}U. Iz tih bi fisija nastalo oko 15 novih fisijskih neutrona.

Fisijski neutroni čija je energija bila manja od praga fisije ^{238}U, zajedno sa neutronima koji rezultiraju iz neelastičnih sudara (ukupan je broj tih neutrona, suglasno gornjoj analizi, oko 94 neutrona na svakih početnih 100 fisijskih neutrona) ne mogu izazivati fisije težeg izotopa urana. Ti neutroni sudarima sa jezgrama atoma urana postepeno gube energiju sa mogućnošću da budu apsorbirani u jednoj od slijedećih nuklearnih reakcija:

$^{235}U(n,\gamma)^{236}U$

$^{235}U(n,2.5n)ff$

$^{238}U(n,\gamma)^{239}U$

Prva je nuklearna reakcija zarobljavanje neutrona u izotopu ^{235}U, druga fisija tog izotopa, a treća zarobljavanje neutrona u izotopu ^{238}U.

Analizom iznosa udarnih presjeka u epitermičkom području neutronskih energija (područje energije više od termičke energije, a koje obuhvaća i područje energije rezonantnih apsopcija neutrona) dolazi se do zaključka da su u prvom približenju udarni presjeci za apsorpciju neutrona kod oba izotopa urana istog reda veličine. Prirodni uran sadrži svega 0.7% izotopa ^{235}U, pa je vjerojatnost zahvata neutrona sa strane ovog izotopa u području epitermičkih energija malena.

Na temelju te pojednostavljene analize s dovoljnom sigurnošću može se tvrditi da će manje od 10% neutrona koji se usporavaju unutar neograničenog bloka prirodnog urana izazvati fisiju ^{235}U. Iz tih bismo fisija dobili nešto više od 20 fisijskih neutrona. Ako se ovom broju dodaju i fisijski neutroni dobiveni u fisijama kod viših energija, slijedi da se od početnih 100 fisijskih neutrona u neograničenom bloku od prirodnog urana može reproducirati najviše jedna trećina. Ovakav rezultat potvrđuje i točniji račun.

Izvršena analiza ukazuje da se u neograničenom bloku od čistog prirodnog urana ne može ostvariti samoodržavajuća lančana reakcija.
Razlog pojavi je prvenstveno u,

-visokom odnosu makroskopskih udarnih presjeka za neelastični sudar i fisiju prirodnog urana u području energija višim od praga fisije ^{238}U

-vrlo velikom udarnom presjeku za zahvat neutrona izotopa ^{238}U u području rezonantnih energija. Presudan utjecaj ovog faktora dolazi do izražaja zbog malenog udjela izotopa ^{235}U u prirodnom uranu.

Do posve drukčijeg zaključka dolazimo ako posmatramo fisije izazvane samo termičkim neutronima (to bi, u našem primjeru, bio slučaj kada bi početnih 100 fisijskih neutrona imali termičku energiju). U području termičkih energija neutrona udarni presjek za fisiju izotopa ^{235}U je oko 214 puta veći od udarnog presjeka za apsorpciju neutrona u izotopu ^{238}U (Tablica 2.13.1), što nadvladava nepovoljan utjecaj malenog sadržaja fisibilnog izotopa (^{235}U) u prirodnom uranu. Faktor η za prirodni uran, koji kvantificira reprodukciju termičkih neutrona u tom materijalu iznosi oko 1.3 (primjer4.5.1). Ovo znači da bismo u zamišljenom bloku prirodnog urana mogli, kada bi se u fisijama dobivali termički neutroni, reproducirati 30% više neutrona nego što ih se utroši zbog apsorpcije.

Iz predhodne analize slijedi veoma važan zaključak:

U bloku prirodnog urana mogli bismo ostvariti samoodržavajuću lančanu reakciju uz uvjet da se fisijski neutroni uz malo gubitaka uspore do energije termičkih neutrona.

Provedena diskusija upućuje da se samoodržavajuča lančana reakcija u uranu može ostvariti ako je ispunjen jedan od slijedeća dva uvjeta:

1.Postojanje načina za efikasno usporavanje fisijskih neutrona do termičkih energija (tj. usporavanje neutrona uz što manje gubitaka), u koliko kao fisijski materijal koristimo prirodni ili malo obogaćeni uran. Efikasnim usporavanjem neutrona se možemo stvoriti slične uvjete kao da fisijski neutroni imaju energije termičkih neutrona.

2.Upotreba urana sa visokim sadržajem izotopa ^{235}U (visoko obogaćeni uran). Kod takvog je nuklearnog goriva povećana vjerojatnost zahvata neutrona u izotopu ^{235}U, čime se djelomično kompenzira nepovoljni učinak apsorpcije usporavajućih neutrona epitermičkih energija u težem izotopu urana.

Prvi uvjet je ostvaren u termičkim, a drugi u brzim nuklearnim reaktorima.

Proces usporavanja fisijskih neutrona do termičkih energija zove se moderacija, a materijal čija je namjena usporavanje neutrona, moderator. Moderacija se vrši putem elastičnih sudara neutrona sa jezgrama atoma moderatora, koji je u jezgri reaktora prisutan zajedno s nuklearnim gorivom.

Efikasna je moderacija neutrona moguća uz uvjet da materijal moderatora posjeduje određena svojstva u pogledu atomske mase i udarnih presjeka, o čemu će biti govora u okviru teorije nuklearnog reaktora.

Gornje je razmatranje ukazalo na činjenicu da samoodržavajuća lančana reakcija u termičkim reaktorima (dakle reaktorima sa prirodnim ili slabo obogaćenim uranom) nije moguća bez moderatora. Naprotiv, kod brzih reaktora (kod kojih je uran visoko obogaćen) za takvu reakciju moderator nije potreban.

Zadaci uz poglavlje 4.

1. Kolika se energija veze oslobađa zahvatom neutrona u nuklidima ^{239}Pu i ^{240}Pu? Kolika je energija aktivacije nastalih nuklida ^{239}Pu i ^{240}Pu?

Iz dobivenih rezultata zaključiti o potrebnoj energiji neutrona za fisiju izotopa ^{239}Pu i ^{240}Pu.

2. Jezgra ^{239}Pu se zahvatom termičkog neutrona razdijelila na dvije jezgre: ^{141}Ce i ^{96}Mo i tri neutrona. Izračunati energiju dobivenu iz te fisije.

3. Reaktor snage 100 MW je radio kontinuirano godinu dana. Koliki je utrošak ^{235}U u tom reaktoru i kolika je β i γ aktivnost nastalih fisijskih produkata iz fisija ^{235}U tri tjedna nakon obustave reaktora?

(Koristiti izraze za broj γ i β čestica emitiranih od fisijskih produkata iz poglavlja 4.4. te integrirati u datom vremenskom intervalu!)

4. Koliki broj neutrona dobivenih po fisiji ^{235}U ima energiju veću od 1.5MeV?

5. Nuklearni reaktor snage 10 MW tri je mjeseca radio na punoj snazi i zatim, nakon pauze od 2 mjeseca, nastavio sa radom još jedan mjesec. Kolika se energija proizvodi u fisijskim produktima reaktora tjedan dana nakon druge obustave?

(Snagu proizvedenu u fisijskim produktima računati kao zbroj snage proizvedene u fisijskim produktima zbog rada reaktora u prvom i drugom periodu)

6. Izračunati broj fisijskih neutrona po zarobljenom neutronu u nuklearnom gorivu η za slučaj 2.5% obogaćenog urana i za temperaturu urana 1073K.

(Koristiti ovisnosti udarnih presjeka o temperaturi i korekcione faktore za σ_a i σ_f prema poglavlju 2.13.)

7. Kod izotopa ^{238}U broj spontanih fisija iznosi 1 fisija po gramu u svakih 100 sekundi. Dokazati da je to ekvivalentno poluvremenu raspada tog izotopa zbog spontanih fisija od $5.5*10^{15}$ godina.

8. Aktivnost fisijskih proizvoda u vremenu t_0 iznosi α_0. Treba pokazati da je aktivnost tih proizvoda u vremenu $t=7^n t_0$ približno jednaka $\alpha = \frac{a_0}{10^n}$.

Reference uz poglavlje 4.

[1] D.Feretić, Osnove teorije nuklearnog reaktora, Poglavlje 1.13 do 1.17, Zagreb, Liber, 1987.

[2] D.Halliday, Introductory Nuclear Physics, Chapter 14, John Willey, New York, 1957.

[3] I.Kaplan, Nuclear Physics, Chapter 19, Addison WesleyPubl. Co. Reading Pa, 1963.

[4] J Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapters 3 and 4, Addison Wensley, Publ.Co, Reading, Pa,1975.

[5] V.Levin, Jadernaja fizika i jadernie reaktori, glava 3 i 10, Atomizdat, Moskva, 1966.

[6] R.Cameron, Nuclear Fission Reactors, Chapter 2, Plenum Press, New Brunwich, 1982.

5 USPORAVANJE (TERMALIZACIJA) NEUTRONA

5.1 Mehanizam usporavanja neutrona u moderatoru

Provedena diskusija o fizikalnim uvjetima za ostvarenje samoodržavajuće lančane reakcije u reaktorima sa prirodnim ili malo obogaćenim uranom (takvo nuklearno gorivo ima velika većina današnjih reaktora) je upozorila na činjenicu da takva reakcija nije moguća bez efikasnog usporavanja neutrona u reaktoru. Usporavanje neutrona je povjereno posebnom materijalu, zvanom moderator, koji je uz nuklearno gorivo sastavni dio nuklearnog reaktora, i od bitne je važnosti za njegov rad.

Mehanizam usporavanja se u osnovi svodi na elastične sudare neutrona sa jezgrama atoma moderatora, pa se proces dobrim dijelom može tretirati zakonima klasične mehanike. Pri analizi se primjenjuju poznati principi održanja količine gibanja i kinetičke energije sustava neutron-jezgra atoma moderatora.

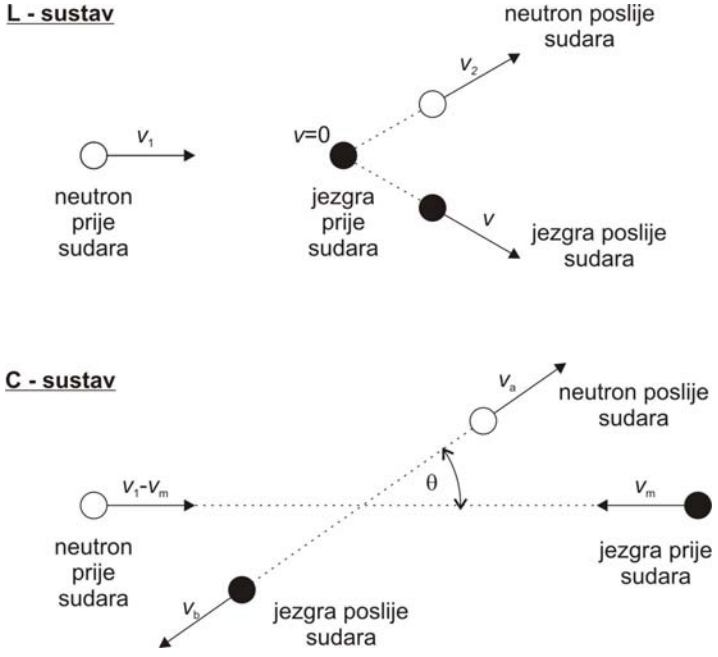
Kvantitativnu analizu usporavanja neutrona prikladno je izvesti paralelnim promatranjem te pojave u dva koordinatna sustava:

1.Koordinatni sustav u kojem je jezgra atoma moderatora prije sudara u stanju mirovanja.

2.Koordinatni sustav u kojemu je centar masa (centar inercije) neutrona i jezgre prije i poslije sudara u stanju mirovanja.

Uobičajeno je prvi sustav zvati laboratorijski sustav (skraćeno L-sustav), a drugi sustav centra masa (skraćeno C-sustav). Iako je L-sustav prirodniji sa stajališta vanjskog promatrača (centar se masa jezgara atoma moderatora može smatrati nepomičnim u odnosu na centar mase cijelog reaktora), C-sustav omogućuje jednostavniju matematičku analizu.

Slika 5.1.1. daje shematski prikaz prilika u sustavu jezgra atoma moderatora-neutron prije i poslije sudara.



Slika 5.1.1 Neutron i jezgra prije i poslije sudara u L-sustavu i C-sustavu

U L-sustavu se neutron mase m kreće brzinom v_1 prema jezgri mase M, čija je brzina v=0. Nakon sudara se formira složena jezgra mase M+m s brzinom v_m. Brzina složene jezgre određuje se iz zakona o očuvanju količine gibanja.Dakle,

$mv_1=v_m(M+m)$ ili,

$$v_m = \frac{v_1 m}{M+m} = \frac{v_1}{A+1}, \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

gdje je sa A označen odnos mase jezgre i mase neutrona M/m, a koji je približno jednak masenom broju jezgre atoma moderatora.

Budući da je složena jezgra centar masa sustava to je njezina brzina ujedno i relativna brzina L-sustava i C-sustava. Brzina će neutrona u C-sustavu suglasno navedenom biti:

$$v_1 - v_m = \frac{A v_1}{A+1}. \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

Brzina jezgre prije sudara u C-sustavu slijedi iz uvjeta da je zbroj momenata gibanja sustava prije i nakon sudara jednak nuli. Ta brzina je jednaka -v/(A+1), jer za tu brzinu jezgre zbroj momenata gibanja jezgre i neutrona prije sudara iznosi,

$$\frac{A v_1}{A+1} - A\frac{v_1}{A+1} = 0.$$

Složena jezgra koja se formira u sudaru neutrona i jezgre atoma moderatora će imati količinu gibanja jednak nuli (odnosno, brzinu jednaku nuli), čime su ispunjene pretpostavke navedene kod definicije C-sustava.

U nastavku će se analizirati brzina neutrona i jezgre nakon sudara u C-sustavu. Brzine će se obilježiti s v_a i v_b. Primjenom zakona o održanju količine gibanja i zakona o održanju kinetičke energije slijede relacije,

$mv_a+Mv_b=0$

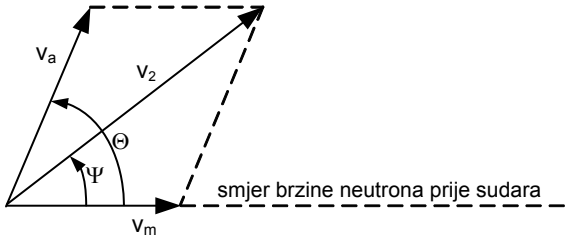
$$\frac{m}{2}\left(\frac{A v_1}{A+1}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{v_1}{A+1}\right)^2 = \frac{m}{2}v_a^2 + \frac{M}{2}v_b^2. \qquad \textbf{(5.1.3)}$$

Rješenjem se sustava jednadžbi (5.1.3) dobiva,

$$v_a = \frac{A v_1}{A+1} \text{ i } v_b = -\frac{v_1}{A+1}.$$

Vidimo da su u C-sustavu brzine neutrona prije i poslije sudara identične, što je jedna od prednosti u korištenju tog sustava.

Na početku razmatranja bila je s v_1 označena brzina neutrona prije sudara sa jezgrom moderatora u L-sustavu. Od interesa je odrediti kolika je brzina neutrona nakon sudara u tom istom sustavu. Ta će se brzina, koju ćemo označiti s v_2, dobiti kao vektorski zbroj brzine neutrona nakon sudara u C-sustavu v_a i relativne brzine C-sustava u odnosu na L-sustav v_m. Trokut brzina je prikazan slikom 5.1.2.



Slika 5.1.2 Brzine neutrona nakon sudara u L-sustavu i C-sustavu

Ako, prema slici, kut odraza neutrona u C-sustavu označimo s θ, a kut odraza neutrona u L-sustavu s ψ, iz trokuta brzina slijedi odnos,

$$v_2^2 = v_m^2 + v_a^2 + 2v_a v_m \cos(\theta).$$

Uvrštenjem se ranije utvrđenih vrijednosti za v_m i v_a dobiva se nakon sređivanja,

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{A^2 + 2A\cos(\theta) + 1}{(A+1)^2}. \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

Primjer 5.1.1

Koliki je gubitak energije neutrona koji, nakon sudara sa jezgrom atoma vodika, biva odbačen u smjeru koji je otklonjen 40^0 u odnosu na smjer neutrona prije sudara.

Rješenje:

Iz jednadžbe (5.1.4) uz A=1 i cosθ=0.766 slijedi,

$$\frac{E_2}{E_1} = 0.883$$

Neutron je u sudaru izgubio 11.7% energije.

Jednadžba (5.1.4) određuje ovisnost energije neutrona prije i poslije sudara o masi atoma moderatora i kutu odraza neutrona u C-sustavu.

Od značaja je primijetiti da kut odraza neutrona u C-sustavu ne ovisi o smjeru neutrona prije sudara. Ova se činjenica, koja je potvrđena i eksperimentom, može tumačiti postavkom da složena jezgra s brzinom nula, koja nastaje nakon sudara jezgre atoma moderatora i neutrona u C-sustavu, izbacuje neutron s jednakom vjerojatnošću u bilo kojem smjeru (pojava se naziva izotropnim raspršenjem neutrona). Zakon održanja količine gibanja na jednak način je ispunjen za bilo koji smjer odraza neutrona.

Naprotiv, u L-sustavu, kod kojeg složena jezgra ima brzinu v_m, izotropno raspršenje ne postoji (osim kod teških jezgara kada se brzina složene jezgre može bez velike greške zanemariti).

Jednadžba (5.4.1) se može koristiti za promatranje dva karakteristična granična slučaja sudara neutrona s jezgrom atoma moderatora:

1. θ=0 $\qquad \frac{E_2}{E_1} = \left[\frac{E_2}{E_1}\right]_{max} = 1$

2. $\theta=\pi$ $$\frac{E_2}{E_1}=\left[\frac{E_2}{E_1}\right]_{min}=\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2=\alpha .$$

U prvom je slučaju kut skretanja neutrona nakon sudara jednak nuli i gubitak energije neutrona u sudaru također jednak nuli. U drugom pak slučaju, u kojemu je smjer kretanja neutrona nakon sudara suprotan smjeru kretanja neutrona prije sudara, gubitak energije u sudaru maksimalan, te iznosi,

$$\left[\frac{E_1-E_2}{E_1}\right]_{max}=1-\alpha .$$

Zanimljivo je usporediti vrijednosti α odnosno $1-\alpha$ raznih moderatora. One ovise jedino o atomskoj težini jezgre atoma moderatora, a navedene su u tablici 5.1.1. Radi usporedbe u tablici su navedene i odgovarajuće vrijednosti za uran.

Tablica 5.1.1 Vrijednosti α i $1-\alpha$ za jezgre moderatora i urana

	Atomska težina	α	$1-\alpha$
vodik	1	0	1
deuterij	2	0.111	0.889
ugljik	12	0.716	0.284
uran	238	0.983	0.017

Podaci iz tablice 5.1.1 pokazuju da neutron samo u jednom sudaru sa jezgrom atoma vodika može izgubiti svu energiju. Kod sudara neutrona sa jezgrama atoma deuterija i ugljika gubitak energije neutrona može doseći najviše 88.9% odnosno 28.4%, a kod sudara neutrona sa jezgrom atoma urana tek 1.7% .

Iz navedenog proizlazi da su za usporavanje neutrona najefikasnije lake jezgre (ili točnije rečeno jezgre čija je masa najbliža masi neutrona), a posebno jezgre atoma vodika.

Ranije je napomenuto da izotropno raspršenje neutrona karakterizira samo C-sustav, u kojemu je kut odraza neutrona označen sa θ. Slika 5.1.2 pruža mogućnost da se na veoma jednostavan način utvrdi veza između kuta odraza neutrona θ i kuta odraza neutrona u L-sustavu ψ. Naime, iz slike je očigledna jednakost,

$v_2\cos\psi=v_a\cos\psi+v_m$.

Nakon uvrštenja ranije utvrđenih vrijednosti za v_2,.v_a i v_m slijedi,

$$\cos(\psi)=\frac{A\cos(\theta)+1}{\left(A^2+2a\cos(\theta)+1\right)^{1/2}}. \qquad \textbf{(5.1.5)}$$

Lako je,na temelju relacije (5.1.5), utvrditi da se kod teških jezgara (A»1) kut θ približava kutu ψ. Raspršenje neutrona u interakcijama s teškim jezgrama i u L-sustavu postaje izotropno. Takav zaključak proizlazi iz činjenice da je brzina v_m teških složenih jezgara vrlo malena, pa se brzina neutrona nakon sudara v_2 u L-sustavu približava brzini neutrona nakon sudara u C-sustavu v_a.

Primjer 5.1.2

Koliki je kut odraza neutrona u L-sustavu u primjeru 5.1.1? Koliki bi bio kut odraza u L-sustavu da je uz istu vrijednost, $\theta=40^0$, moderator bio grafit?

Rješenje:

Iz jednadžbe (5.1.5), a uz A=1 i $\theta=40^0$ slijedi,

$\psi=20^0$

Za grafit (A=12) istim postupkom dobivamo $\psi=37^0$.

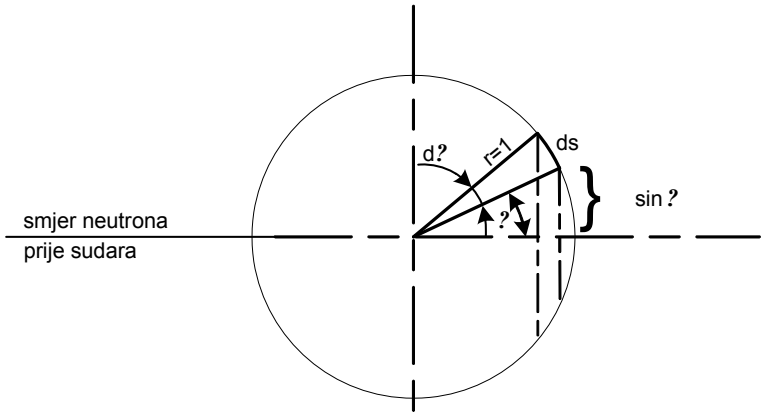
Razmatrani primjer pokazuje da je kod vodika kut odraza neutrona u L-sustavu dva puta manji od kuta odraza neutrona u C-sustavu. Kod grafita su razlike mnogo manje (oko 10%) što potvrđuje zaključak da je pretpostavka o izotropnom raspršenju neutrona kod težih jezgara dovoljno točna.

5.2 Prosječan gubitak energije neutrona po sudaru

Relacija (5.1.4) pokazuje promjenu energije neutrona u elastičnom sudaru s jezgrom atoma moderatora u ovisnosti o kutu odraza θ. Zbog veoma velikog broja sudara neutrona sa jezgrama atoma moderatora u procesu usporavanja, pojavu usporavanja neutrona ima smisla promatrati samo statistički, kroz analizu prosječnog gubitka energije neutrona po sudaru.

Analiza koja slijedi se zasniva na već diskutiranom izotropnom raspršenju neutrona u C-sustavu. Izotropno raspršenje znači sa je vjerojatnost raspršenja neutrona nakon sudara u svim smjerovima jednaka, tj., da će se nakon sudara unutar svakog prostornog kuta naći isti broj neutrona.

U cilju kvantitativnog razmatranja ove pojave zamislimo,prema slici 5.2.1, kuglu jediničnog promjera u čijoj se sredini nalazi složena jezgra u stanju mirovanja koja emitira n neutrona.



Slika 5.2.1 Kutovi raspršenja neutrona u C-sustavu

Odrediti ćemo broj neutrona koji nakon sudara prolaze kroz određeni dio površine zamišljene kugle. Ako se dio površine kugle definira kao segment ds koji se nalazi između prostornih kutova θ i θ+dθ, on se može izraziti u ovisnosti o kutu θ kao,

$ds=2\pi\sin\theta d\theta$.

Broj neutrona koji će se nakon sudara naći unutar ds iznosi,

$$dn = n\frac{ds}{4\pi} = \frac{n}{2}\sin(\theta)d\theta . \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

Zbog jednake vjerojatnosti raspršenja neutrona u svim smjerovima, dio se neutrona koji prolaze kroz ds dobiva kao odnos te površine i površine jedinične kugle.

Odnos energije neutrona prije i poslije sudara, koji je određen jednadžbom (5.1.4), svrsishodno je prikazati u logaritamskom odnosu jer je raspon promjene energija usporavajućih neutrona velik (6 do 7 redova veličina). Zbog toga ćemo pisati,

$$\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = -\ln\left[\frac{A^2 + 2A\cos(\theta) + 1}{(A+1)^2}\right]. \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

Jednadžbe (5.2.1) i (5.2.2) se mogu kombinirati radi dobivanja logaritma odnosa energije onih samo neutrona koji su nakon sudara prošli kroz površinu ds:

$$-\frac{n}{2}\ln\left[\frac{A^2 + 2A\cos(\theta) + 1}{(A+1)^2}\right]\sin(\theta)d\theta \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

Prosječna vrijednost logaritma odnosa energije neutrona prije i poslije sudara dobiva se integracijom izraza (5.2.3) po cijeloj površini jedinične kugle (odnosno za kut θ u rasponu od 0 do π) i diobom sa brojem neutrona n.

Integracija se najlakše provodi zamjenom funkcije pod logaritmom sa novom varijablom uz odgovarajuću promjenu granica integracije. Prosječna se vrijednost logaritma odnosa energije neutrona po sudaru u teoriji reaktora obilježava sa ξ.

Kao rezultat integracije se dobiva,

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\alpha). \qquad \textbf{(5.2.4)}$$

Budući da ξ ima značaj prosječne promjene logaritma energije neutrona u jednom sudaru sa jezgrom atoma moderatora, moguće je koristeći taj parametar lako odrediti potreban broj sudara za usporenje neutrona između energija E_1 i E_2 . Taj se broj dobiva iz izraza $\ln(E_1/E_2)/\xi$.

Prosječan broj sudara do usporenja neutrona

Od interesa je, kao poseban slučaj, razmotriti potreban broj sudara za usporenje neutrona od fisijske energije (prosječno 2MeV) do termičke energije 0.025eV. Pri tome treba uzeti u obzir da je logaritam odnosa tih energija približno 18.2. Potreban broj sudara fisijskih neutrona do termičke energije dakle biti će $18.2/\xi$.

Parametri α i ξ ovise isključivo o masi jezgre atoma moderatora.

U tablici 5.2.1 navedene su vrijednosti ξ i $18.2/\xi$ raznih moderatora, te samo radi komparacije i odgovarajuće vrijednosti za uran.

Tablica 5.2.1 Karakteristični parametri za usporenje neutrona

	α	ξ	$18.2/\xi$
vodik	0.0	1.0	18.2
deuterij	0.111	0.725	25
ugljik	0.716	0.158	115
uran	0.983	0.00855	2129

Podaci iz tablice 5.2.1 ukazuju da prosječan broj sudara,potreban za usporenje neutrona,naglo raste sa povećanjem mase atoma sa kojima se neutron sudara.

Primjer 5.2.1

Koliko je sudara u prosjeku potrebno da se neutron uspori u području energije od 1keV do 6eV (koje približno odgovara oblasti rezonantne apsorpcije neutrona u izotopu ^{238}U), ako je moderator vodik ili grafit ?

Rješenje:

Razlika logaritma energija između kojih se neutron usporava iznosi 5.12. Ako je moderator vodik prosječno potreban broj sudara neutrona za usporenje u danom području energije iznosi 5.15/1.0=5.12. Kada bi moderator bio grafit, bilo bi za usporenje neutrona u istom rasponu energije, potrebno 5.12/0.158=32.4 sudara.

Ako na usporavanje neutrona djeluje više nuklida (vodik i deuterij vezani su sa kisikom u molekule H_20 i D_20, tako da se kao moderator javlja obična ili teška voda), tada se parametar ξ treba odrediti kao prosječnu vrijednost za nuklide prisutne u molekuli, uzimajući u račun vrijednosti ξ pojedinih nuklida u molekuli i odgovarajuće mikroskopske udarne presjeke za elastični sudar σ_{si}, prema izrazu,

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{i} \xi_i \sigma_{si}}{\sum_{i=1}^{i} \sigma_{si}}. \qquad \textbf{(5.2.5)}$$

Primjer 5.2.2

Kolika je prosječna vrijednost logaritma odnosa energije neutrona prije i poslije sudara ξ_i za H_2O i D_2O?

Rješenje:

Prosječne vrijednosti mikroskopskih udarnih presjeka za elastični sudar u epitermičkom energetskom području: Za vodik $20*10^{-28}$ m^2, za deuterij $3.4*10^{-28}$ m^2, i za kisik $3.8*10^{-28}$ m^2.

Na temelju relacije (5.2.5) može se za običnu vodu pisati,

$$\xi_{H_2O} = \frac{2\sigma_{s(H)}\xi_H + \sigma_{s(O)}\xi_O}{2\sigma_{s(H)} + \sigma_{s(O)}}.$$

Atomska težina kisika je 16, iz čega slijedi da je α_O=0.779. Upotrebom izraza (5.2.4) dobiva se ξ_O=0.120.

Uvrštenjem danih veličina proizlazi $\xi_{H_2O} = 0.924$.

Istim se postupkom dobiva $\xi_{D_2O} = 0.508$.

Prosječan kut raspršenja neutrona u L-sustavu

Jednadžbom je (5.1.5) definiran je kut raspršenja neutrona u L-sustavu ψ u funkciji kuta raspršenja neutrona u c-sustavu θ i atomske težine atoma moderatora A. Ta jednadžba pruža mogućnost da se, postupkom sličnim onome koji je primjenjen za određivanje srednjeg gubitka energije po sudaru,odredi prosječna vrijednost kuta ψ. Rezultat dobivamo rješenjem integrala,

$$(\cos(\psi))_{sr} = \frac{1}{n}\int_{\theta=0}^{\pi}\cos(\psi)dn,$$

gdje je, suglasno jednadžbi (5.2.1), dn definiran sa

$$dn = \frac{n}{2}\sin(\theta)d\theta = -\frac{d(\cos(\theta))}{2}n.$$

Granice integracije funkcije cosθ su od 1 do -1, što odgovara promjeni kuta θ od 0 do π.

Rezultat integracije daje jednostavnu ovisnost prosječnog kuta raspršenja neutrona u L-sustavu o masi atoma moderatora:

$$(\cos(\psi))_{sr} = \frac{2}{3A}. \qquad \textbf{(5.2.6)}$$

Što je jezgra sa kojom se neutron sudara teža, $(\cos(\psi))_{sr}$ postaje manji i približava se prosječnoj vrijednosti cos(θ) (koji je za sve jezgre jednak nuli). Ovo ponovo ukazuje na ranije navedenu činjenicu da sudari neutrona s težim jezgrama dovode do približno izotropnog raspršenja neutrona i u L-sustavu.

5.3 Sposobnost usporavanja i odnos moderacije

U poglavljima 5.1 i 5.2 diskutirani su neki bitni pokazatelji koji određuju usporenje neutrona u moderatorskoj sredini. Ustanovljeno je da su moderatori čije jezgre imaju manje atomske težine efikasniji za usporenje neutrona. Ta se efikasnost ogleda u većoj vrijednosti ξ. Taj je parametar, naime, obrnuto razmjeran potrebnom broju sudara neutrona do usporenja (vidi tablicu 5.2.1).

Međutim, sam parametar ξ nije dovoljan za karakteriziranje efikasnosti moderatora za usporavanje neutrona. Od značaja je, naravno, također i stupanj vjerojatnosti da će doći do elastičnih sudara neutrona sa jezgrama atoma moderatora, a čiji je pokazatelj makroskopski udarni presjek za tu nuklearnu reakciju Σ_s (broj nuklearnih reakcija elastičnog sudara po jedinici volumena i vremena iznosi $\phi\Sigma_s$).

Zbog toga je uveden produkt $\xi\Sigma_s$ kao karakteristični pokazatelj za moderatore, poznat kao sposobnost usporavanja neutrona u dotičnom moderatoru. Efikasnost moderatora za usporavanje neutrona je direktno razmjerna toj veličini.

(Usput rečeno, međusobnim utjecajem veličina ξ i Σ_s, odnosno σ_s, treba tumačiti i izraz (5.2.5), gdje je račun prosječne vrijednosti ξ povezan s σ_s)

Od dobrog se moderatora traži da brze neutrone sa što manje gubitaka usporava do termičkih energija, dakle da sam ne apsorbira neutrone ni u jednom energetskom području. Zbog toga sposobnost usporavanja neutrona nije dovoljan pokazatelj kvalitete moderatora. Značajno je da moderator ima i maleni udarni presjek za apsorpciju neutrona Σ_a. Kao zbirni pokazatelj kvalitete moderatora uveden je odnos moderacije predstavljen odnosom, $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$. Numeričke vrijednosti za sposobnost usporavanja neutrona i odnos moderacije za običnu vodu, tešku vodu i grafit su dane u tablici 5.3.1. Računato je sa udarnim presjecima za energije neutrona 0.025eV.

Tablica 5.3.1 Sposobnost usporavanja i odnos moderacije

Moderator	Sposobnost usporavanja	Odnos moderacije
	$\xi\Sigma_s$ [cm^{-1}]	$\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
obična voda	1.35	61
teška voda	0.179	1900
grafit	0.064	170

Iz tablice je vidljivo da je obična voda mnogo efikasniji moderator za usporavanje neutrona od teške vode, a pogotovo od grafita. Razlog leži u velikoj vrijednosti ξ za običnu vodu i velikoj vrijednosti udarnog presjeka vodika za elastični sudar. S druge strane, obična voda,zbog većeg udarnog presjeka za apsorpciju neutrona, ima oko 30 puta manji odnos moderacije od teške vode i 2.8 puta manji od grafita, pa je po tom pokazatelju ona najlošiji moderator.

Visoki odnos moderacije stavlja tešku vodu na prvo mjesto po kvaliteti moderatora. Razlog leži u njezinom veoma malenom udarnom presjeku za apsorpciju neutrona. Zbog toga svojstva upotreba teške vode kao moderatora omogućava korištenje nuklearnog goriva koje sadrži malo fisibilnih nuklida (prirodni uran). I grafit omogućuje upotrebu prirodnog urana kao nuklearnog goriva (iako je kao moderator znatno manje efikasan od teške vode). Izbor pak obične vode kao moderatora traži, zbog njezinog malog odnosa moderacije, nuklearno gorivo sa povećanim udjelom fisibilnih nuklida (obogaćeni uran).

S druge strane, faktor sposobnosti usporavanja neutrona daje indikaciju o potrebnom odnosu broja atoma moderatora i nuklearnog goriva u jezgri nuklearnog reaktora. Što je sposobnost usporavanja veća to će trebati manja masa moderatora u jezgri. Velika sposobnost usporavanja obične vode (7.5 puta veća od sposobnosti usporavanja teške vode, a čak 21 puta veća od te vrijednosti kod grafita) pokazuje da će reaktori čiji je moderator obična voda imati najkompaktniju jezgru. Nasuprot tome, grafitom moderirani reaktori imaju jezgre većih dimenzija od lakovodnih i teškovodnih reaktora.

5.4 Tok neutrona u procesu usporavanja uz zanemarivu apsorpciju

U diskusiji o procesu usporavanja neutrona i parametrima moderatora, koja je provedena u poglavlju 5.1 i 5.2, bilo je govora o energetskim promjenama usporavajućih neutrona i o parametrima pomoću kojih je te promjene moguće kvantificirati.

Proračun nuklearnih reakcija koje izazivaju neutroni u fazi usporavanja traži poznavanje toka neutrona koji se usporavaju i njegovu ovisnost o energiji.

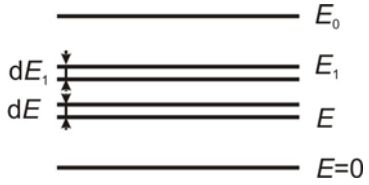
U svrhu što jednostavnije analize zamisliti ćemo neutrone kao kontinuum čestica, koje se uz zanemarivu apsorpciju usporavaju u prostorno neograničenom moderatoru. Zamisliti ćemo, nadalje da se prostor koji zaprema moderator homogeno napaja brzim neutronima (tj. neutronima fisijske energije), koji se u sudarima sa jezgrama atoma moderatora usporavaju do termičke energije.

Vodik se od drugih moderatora razlikuje u jednom bitnom svojstvu. To se svojstvo sastoji u činjenici da neutron može u jednom sudaru sa atomom vodika izgubiti svu svoju energiju. Kod drugih moderatora najveći gubitak energije u sudaru neutrona na energiji E može biti E-αE. Vrijednosti za α su dane u tablici 5.1.1.

Zbog toga se analiza usporavanja neutrona u vodiku razlikuje od one kod drugih moderatora, pa će se i ovdje zasebno razmotriti.

Usporavanje neutrona u vodiku

Raspon energija unutar kojeg se neutron usporava proteže se od energije fisijskih neutrona (E_0) do energije potpuno usporenih neutrona. Tu ćemo energiju, radi jednostavnosti smatrati zanemarivom u odnosu na E_0, odnosno smatrati je jednakom nuli.



Slika 5.4.1 Energetske razine neutrona tijekom usporavanja

Zamisliti ćemo, prema slici 5.4.1, unutar raspona energije u kojem se neutroni usporavaju energetski interval dE na energiji E. Nadalje, u cilju provedbe analize odrediti ćemo drugi energetski interval dE_1 na energiji E_1 višoj od E, te izračunati broj neutrona sa energijama unutar dE_1 koji nakon sudara sa jezgrama atoma moderatora (vodika) dospijevaju u energetski interval dE. Broj kolizija neutrona sa jezgrama moderatora na energiji E_1 ovisi o toku neutrona i udarnom presjeku za elastični sudar na toj energiji. Tok neutrona $\phi(E)$, definirati ćemo kao tok neutrona po jediničnom energetskom intervalu na energetskoj razini E. Po toj će definiciji broj sudara neutrona sa jezgrama moderatora u jediničnom energetskom intervalu na energiji E_1 iznositi $\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)$, gdje je $\Sigma_s(E_1)$ udarni presjek za elastični sudar neutrona sa jezgrama atoma moderatora na energiji E_1. Broj sudara po jedinici volumena unutar energetskog intervala dE_1 suglasno navedenom iznosit će $\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)dE_1$.

Neutroni energije E_1 mogu u sudarima sa jezgrama vodika biti sa jednakom vjerojatnosti usporeni na bilo koju energiju u rasponu od E_1 do 0 (uz zanemarenu energiju termalnih neutrona), pa će vjerojatnost da će se neutron naći unutar energetskog intervala dE biti, dE/E_1.

Suglasno navedenom, broj neutrona po jedinici volumena koji nakon sudara s jezgrama atoma moderatora unutar energetskog intervala dE_1 dospijevaju u energetski interval dE iznosi,

$$\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{dE}{E_1}dE_1 . \qquad \textbf{(5.4.1)}$$

Ukupan broj neutrona koji nakon sudara s jezgrama atoma moderatora, unutar bilo kojeg energetskog intervala dE_1 na energiji E_1 većoj od E, dospijevaju u energetski interval dE, dobiva se integracijom izraza 5.4.1 u granicama od $E_1=E_0$ do $E_1=E$.

Osim navedenih, u energetski interval dE mogu dospjeti i oni neutroni koji potječu iz prve kolizije neutrona sa jezgrama atoma moderatora. Brzi (fisijski) neutroni, naime, imaju prije sudara energiju E_0 koja nije uključena ni u jedan energetski interval dE_1 (jer se u tim energetskim intervalima mogu naći samo neutroni koji potječu iz prethodnih sudara).

Ako s q označimo broj brzih (fisijskih) neutrona koji se generiraju po jedinici volumena i jedinici vremena, te uzmemo u obzir da se energija neutrona nakon sudara s jezgrom atoma vodika može s jednakom vjerojatnošću smanjiti na bilo koju vrijednost između E_0 i nule, broj neutrona koji nakon prve kolizije mogu dospjeti u energetski interval dE iznositi,

$$\frac{qdE}{E_0} .$$

S druge strane, broj neutrona koji ulaze u energetski interval dE mora biti u stacionarnom stanju identičan sa brojem neutrona koji u toku procesa usporavanja iz tog energetskog intervala izlaze. Taj je broj jednak broju nuklearnih reakcija elastičnih sudara u tom energetskom intervalu, što se, suglasno sa ranijom diskusijom, može izraziti kao,

$$\phi(E)\Sigma_s dE .$$

Na osnovi navedenog dopušteno je postaviti jednakost,

$$\phi(E)\Sigma_s dE = \frac{qdE}{E_0} + \int_E^{E_0} \phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{dE}{E_1}dE_1 . \qquad \textbf{(5.4.2)}$$

Ako se izraz (5.4.2) podijeli sa dE i diferencira po energiji E, proizlazi

$$\frac{d(\phi(E)\Sigma_s(E))}{dE} = -\frac{\phi(E)\Sigma_s(E)}{E} . \qquad \textbf{(5.4.3)}$$

Opće je rješenje diferencijalne jednadžbe (5.4.3) ima oblik,

$$\phi(E) = \frac{C}{\Sigma_s(E)E} .$$

Konstantu integracije C odrediti ćemo iz jednadžbe (5.4.2) postavkom $E=E_0$. Nakon uvrštenja se dobiva,

$$\phi(E_0) = \frac{C}{\Sigma_s(E_0)E_0} = \frac{q}{\Sigma_s(E_0)E_0} .$$

Konstanta integracije C je dakle identična s q.

Provedenom je analizom dokazano da se tok neutrona koji se uz zanemarenu apsorpciju usporavaju u vodiku može odrediti iz relacije

$$\phi(E) = \frac{q}{\Sigma_s(E)E} . \qquad \textbf{(5.4.4)}$$

Tok neutrona po jedinici energetskog intervala neutrona je upravo proporcionalan broju neutrona koji se generiraju u moderatoru u jedinici volumena i jedinici vremena, a obrnuto proporcionalan s energijom neutrona.

Usporavanje neutrona u moderatorima težim od vodika

Tok neutrona koji se usporavaju, kod moderatora veće atomske težine od vodika, je teže odrediti zbog činjenice da energija neutrona nakon prvog sudara ne može obuhvatiti cijelo područje usporavanja neutrona nego samo područje energije između E_0 i αE_0 (za vodik je α jednak nuli). Zbog te činjenice moramo doprinos neutrona koji rezultiraju iz prvog sudara računati i ispod energije αE (tj. računati s doprinosom neutrona koji potječu iz prve kolizije i nakon višestrukih sudara sa jezgrama moderatora). Ovaj je račun dosta kompliciran i van okvira analiza koje je moguće provesti u ovoj knjizi.

Međutim, detaljnije studije usporavanja neutrona su pokazale da se utjecaj prvog sudara na tok neutrona može zanemariti kod energija neutrona nižim od $\alpha^3 E_0$ (to odgovara energiji neutrona nižoj od 2.7keV za deuterij i energiji nižoj od 0.7MeV za grafit). U reaktorskoj nas fizici naročito interesiraju energije neutrona u području rezonantnih apsorpcija uranovih izotopa. Te su energije znatno niže od navedenih (vidi slike 2.12.1 i 2.12.2). Zbog toga za moderatore veće atomske težine od vodika ima opravdanja računati tok neutrona koji se usporavaju uz zanemarenje neutrona koji potječu iz prvog sudara (to je tzv. analiza asimptotskog slučaja usporavanja neutrona).

Za ilustraciju takve analize koristiti ćemo ponovo sliku 5.4.1 i odrediti broj neutrona koji nakon sudara sa jezgrama atoma moderatora unutar energetskog intervala dE_1 bivaju usporeni ispod energije E. Budući da cijeli raspon energija koji neutroni energije E_1 mogu imati nakon sudara iznosi E_1-αE_1, to će očigledno biti dio neutrona koji su usporeni ispod energije E,

$$\frac{E-\alpha E_1}{E_1-\alpha E_1}.$$

Iz navedenog slijedi da će broj neutrona, koji po jedinici volumena i jedinici vremena, nakon sudara unutar energetskog intervala dE bivaju usporeni ispod energije E iznosi,

$$\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{E-\alpha E_1}{E_1-\alpha E_1}dE_1. \qquad \textbf{(5.4.5)}$$

U narednom ćemo koraku odrediti ukupni broj neutrona koji, u jedinici volumena i vremena, u procesu usporavanja prelaze energetsku razinu E. Energetsku razinu E mogu doseći oni neutroni koji su prije sudara imali energiju između E/α i E. Prema tome, ukupan se broj neutrona koji prelaze energetsku razinu E može dobiti kao integral izraza (5.4.5) sa granicama integracije od E/α do E.

Međutim, ako nema apsorpcije, broj neutrona koji prelaze bilo koju razinu energije u toku usporavanja, mora biti jednak broju neutrona q koje generira izvor.

Dozvoljeno je dakle pisati,

$$q=\int_{E}^{E/\alpha}\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{E-\alpha E_1}{E_1-\alpha E_1}dE_1. \qquad \textbf{(5.4.6)}$$

Rješenje integrala uvjetovano je poznavanjem ovisnosti neutronskog toka o energiji neutrona. Tu ćemo ovisnost odrediti upotrebom istog postupka kao kod razmatranja usporavanja neutrona u vodiku tj. izjednačenjem broja neutrona koji ulaze i koji izlaze iz energetskog intervala dE.

Broj neutrona koji zbog sudara unutar energetskog intervala dE_1 ulaze u energetski interval dE biti će,

$$\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{dE}{E_1-\alpha E_1}dE_1 .$$

Jednadžba kojom možemo izjednačiti broj neutrona koji ulaze i koji izlaze iz energetskog intervala dE ima dakle oblik

$$\phi(E)\Sigma_s(E)dE = \int_E^{E/\alpha}\phi(E_1)\Sigma_s(E_1)\frac{dE}{E_1-\alpha E_1}dE_1 . \qquad \textbf{(5.4.7)}$$

Uvrštavanjem je lako provjeriti gornju relaciju zadovoljava izraz

$$\phi(E)=\frac{C}{\Sigma_s(E)E} . \qquad \textbf{(5.4.8)}$$

Tok neutrona koji se usporavaju, definiran izrazom (5.4.8) treba uvrstiti u jednadžbu (5.4.6) radi određivanja konstante integracije C. Rješenje je:

$$q=\frac{C}{1-\alpha}\int_E^{E/\alpha}\left(\frac{E}{E_1^2}-\frac{\alpha}{E_1}\right)dE_1 = C\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\alpha)\right)=C\xi .$$

Parametar ξ definiran je u poglavlju 5.2 (jednadžba 5.2.4).

Rezultat pokazuje da konstanta integracije C iznosi q/ξ pa, uvrštenjem u jednadžbu (5.4.8), dobivamo konačan izraz za tok neutrona koji se usporavaju u moderatoru kojemu je svojstven parametar ξ (vidi tablicu 5.2.1), u obliku,

$$\phi(E)=\frac{q}{\Sigma_s(E)\xi E} . \qquad \textbf{(5.4.9)}$$

Usporedbom s izrazom (5.4.4.) koji je dobiven za vodik(za vodik ξ=1), vidi se da izraz (5.4.9) vrijedi za sve moderatore, s tim što gornja granica energije za njegovu upotrebljivost kod vodika ne postoji.

Letargija

U mnogim je analizama procesa usporavanja neutrona uobičajeno energije neutrona izražavati u bezdimenzionim logaritamskim odnosom energije E i energije fisijskih neutrona E_0.

Uvedena je i jedinica za tako izraženu energiju, poznata pod nazivom letargija, čija je definicija,

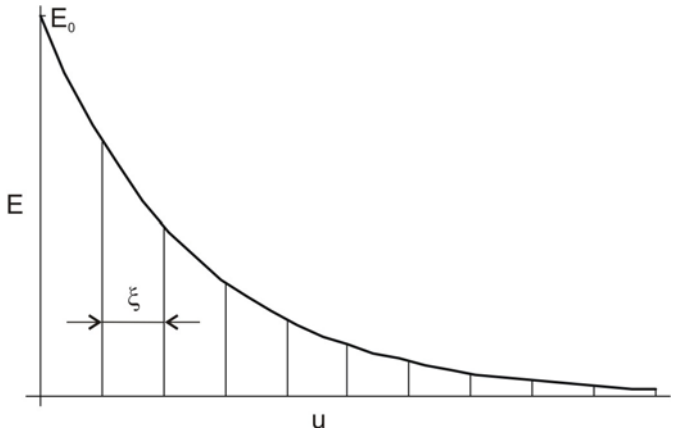
$$u=\ln\left(\frac{E_0}{E}\right) . \qquad \textbf{(5.4.10)}$$

Letargija fisijskih neutrona, jednaka je nuli. Iz definicije faktora ξ (poglavlje 5.2) proizlazi da prosječna promjena letargije u sudaru neutrona sa jezgrom atoma moderatora iznosi upravo ξ.

Ovisnost energije i letargije se može napisati i u obliku,

$E=E_0e^{-u}$.

Ta ovisnost je ilustrirana slikom 5.4.2.



Slika 5.4.2 ovisnost energije i letargije

Iz slike se razabire da je gubitak energije neutrona po sudaru kod viših energija znatno veći nego kod nižih energija iako je promjena letargije neutrona po sudaru konstantna.

Primjer 5.4.1

Kolika je promjena letargije neutrona koji je usporen sa energije 1MeV na energiju 5keV ?

Rješenje:

Promjena letargije između dvije razine energije iznosi,

$$u_2 - u_1 = \ln\left(\frac{E_0}{E_2}\right) - \ln\left(\frac{E_0}{E_1}\right) = \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right).$$

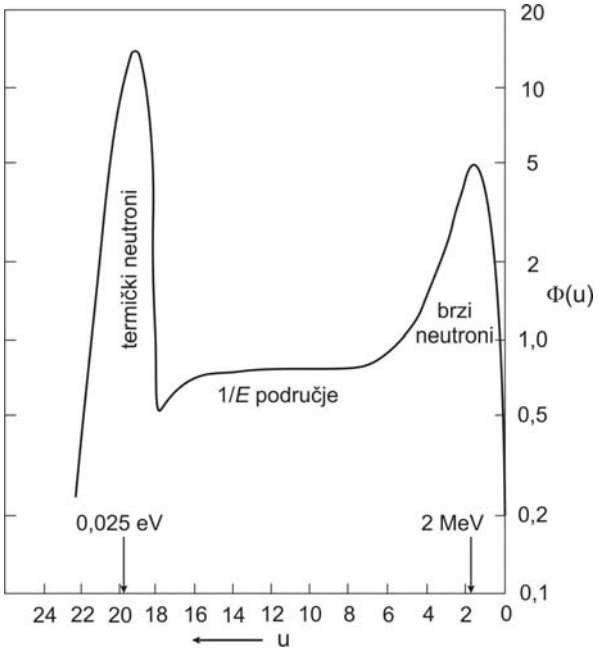
Uvrštenjem zadanih vrijednosti energija se dobiva, u_2-u_1=5.3.

Kod analize usporavanja neutrona se često definira tok neutrona koji se usporavaju po jedinici letargije $\phi(u)$, umjesto po jedinici energije $\phi(E)$. Vezu tih veličina određuje relacija,

$$\phi(u) = -\phi(E)\frac{dE}{du} = E\phi(E). \qquad (5.4.11)$$

Usporedbom jednadžbi (5.4.9) i (5.4.11) možemo zaključiti da je tok neutrona po jedinici letargije praktički neovisan o energiji (ako se zanemari mala ovisnost udarnog presjeka za elastični sudar o energiji neutrona).

Ovisnost $\phi(u)$ o letargiji kod neograničenog termičkog reaktora moderiranog vodom je prikazana slikom 5.4.3



Slika 5.4.3 Tok neutrona po jedinici letargije u ovisnosti o letargiji kod vodom moderiranih raeaktora

Iz slike se razabire raspodjela neutronskog toka u osnovnim područjima energija neutrona u reaktoru: Brzi fisijski neutroni, usporavajući neutroni (tok neutrona je obrnuto razmjeran sa energijom neutrona) i termički neutroni.

Potrebno je, nadalje, uočiti da razlika letargije između brzih neutrona energije 2MeV i termičkih neutrona energije 0.025eV iznosi oko 18, što odgovara podatku iz tablice 5.2.1

5.5 Usporavanje neutrona uz apsorpciju

U poglavlju je 5.4 razmatrano usporavanje neutrona u neograničenoj moderatorskoj sredini uz zanemarivu apsorpciju neutrona. U praktičkim slučajevima treba računati da će dio neutrona koji se usporavaju biti apsorbiran, posebno kada se oni usporavaju u reaktoru gdje mogu biti zahvaćeni u energetskom području veoma izraženih rezonantnih apsorpcija uranovih izotopa. Ideje i izrazi obrađeni u okviru poglavlja 5.4 će korisno poslužiti za analizu zamršenijih prilika, kada se nuklearne reakcije elastičnih sudara i apsorpcije odvijaju istovremeno.

Posljedica je apsorpcije neutrona u toku njihovog usporavanja smanjenje količine neutrona koji prelaze svaku energetsku razinu (što nije uzeto u obzir u poglavlju 5.4, kada se promatralo usporavanje neutrona uz zanemarivu apsorpciju).

Pretpostaviti ćemo da je energetskom području dE svojstvena apsorpcija neutrona koju karakterizira makroskopski udarni presjek $\Sigma_a(E)$. Smanjenje količine neutrona unutar tog energetskog područja biti će

$$dq = \phi'(E)\Sigma_a(E)dE\,. \qquad \textbf{(5.5.1)}$$

S $\phi'(E)$ označen je tok neutrona u tom energetskom intervalu dE (taj je tok neutrona nešto drugačiji od neutronskog toka $\phi(E)$, kada u tom energetskom intervalu ne bi bilo apsorpcije neutrona). Razmotriti ćemo nuklearne reakcije u nekom energetskom intervalu dE unutar kojeg postoji apsorpcija neutrona.

U poglavlju 5.4 napomenuto je da u stacionarnom stanju isti broj neutrona ulazi i izlazi iz svakog energetskog intervala. Ova postavka vrijedi bez obzira na apsorpciju. Kada se računa s apsorpcijom, "izlaz" neutrona iz energetskog intervala je određen njihovom apsorpcijom i usporenjem u niže energetske razine, a što se može izraziti zbrojem nuklearnih reakcija apsorpcije i elastičnih sudara neutrona u tom energetskom intervalu.

Što se pak tiče ulaza neutrona u energetski interval dE, taj je ostao isti kao što bi bio da u tom energetskom intervalu nema apsorpcije, odnosno isti s brojem neutrona koji bi iz tog intervala izašli kada ne bi bilo apsorpcije.

Provedena diskusija dozvoljava postavljanje bilance neutrona u energetskom intervalu dE, kako slijedi,

$$\phi'(E)[\Sigma_s(E)+\Sigma_a(E)]dE = \phi(E)\Sigma_s(E)dE = \frac{qdE}{\xi E}. \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

U jednadžbi (5.5.2) iskorišten je izraz (5.4.9), iz kojega proizlazi,

$$\phi(E)\Sigma_s(E) = \frac{q}{\xi E}.$$

S druge strane, na temelju relacije (5.5.1) možemo pisati,

$$\phi'(E)dE = \frac{dq}{\Sigma_a(E)} \qquad (5.5.3)$$

Iz jednadžbi (5.5.2) i (5.5.3) neposredno proizlazi odnos,

$$\frac{dq}{q} = \frac{\Sigma_a(E)}{\xi(\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E))}\frac{dE}{E}. \qquad (5.5.4)$$

Dobili smo izraz kojim je izražen odnos broja neutrona koji su zarobljeni u energetskom intervalu dE i ukupnog broja neutrona koji prelaze energetsku razinu E. Taj izraz je od posebnog značaja za razvoj fizikalne teorije nuklearnog reaktora.

Izraz se 5.5.4 može interpretirati i kao vjerojatnost da će neutron biti zarobljen u energetskom intervalu dE. (Budući da su obično od interesa maleni, ali konačni energetski intervali, koji odgovaraju širini rezonantnih apsorpcija, u daljem tekstu će se umjesto dE pisati ΔE.)

Suglasno tome je, vjerojatnost da neutron neće biti zarobljen u energetskom intervalu ΔE, određena relacijom,

$$p = 1-\frac{\Delta q}{q} = 1-\frac{\Sigma_a(E)}{\xi(\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E))}\frac{\Delta E}{E}.$$

Očigledno je, nadalje, ako se apsorpcija neutrona u procesu usporavanja događa u dva uzastopna energetska intervala dE_1 i dE_2 na energetskim razinama E_1 i E_2, vjerojatnost da neutroni neće biti apsorbirani ni u jednom od ta dva intervala dana je izrazom

$$p_2 = \left[1-\frac{\Sigma_a(E_1)}{\xi(\Sigma_a(E_1)+\Sigma_s(E_1))}\frac{\Delta E_1}{E_1}\right]\left[1-\frac{\Sigma_a(E_2)}{\xi(\Sigma_a(E_2)+\Sigma_s(E_2))}\frac{\Delta E_2}{E_2}\right].$$

Ili općenito, vjerojatnost izbjegavanja apsorpcije neutrona u n uzastopnih energetskih intervala je

$$p_n = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{\Sigma_a(E_i)}{\xi(\Sigma_a(E_i)+\Sigma_s(E_i))}\frac{\Delta E_i}{E_i}\right].$$

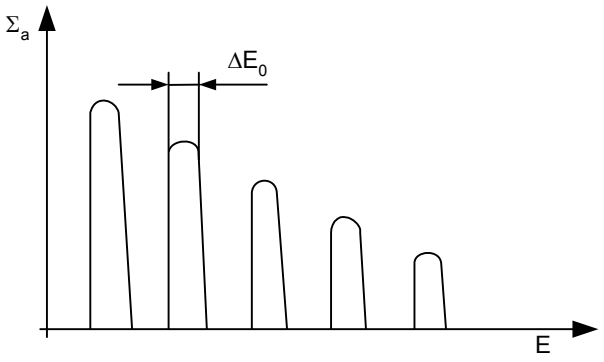
Logaritmiranjem gornjeg izraza dobiva se

$$\ln(p_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1 - \frac{\Sigma_a(E_i)}{\xi(\Sigma_a(E_i)+\Sigma_s(E_i))}\frac{\Delta E_i}{E_i}\right]. \qquad \textbf{(5.5.3)}$$

Obično je $\Delta E << \xi E_i$ (pojas energija rezonantne apsorpcije neutrona je uzak), pa se razvojem logaritamske funkcije u red može zadržati samo prvi član. Time se dobiva,

$$\ln(p_n) = -\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \frac{\Sigma_a(E_i)}{\xi(\Sigma_a(E_i)+\Sigma_s(E_i))}\frac{\Delta E_i}{E_i}\right]. \qquad \textbf{(5.5.4)}$$

U fizikalnim je proračunima nuklearnih reaktora od značaja proračun izbjegavanja apsorpcije neutrona u rezonantnom području izotopa $_{238}U$. Rezonantno se područje tog izotopa (Slika 2.12.1) može aproksimirati s nizom diskretnih energetskih intervala, između kojih je apsorpcija zanemariva (Slika 5.5.1)



Slika 5.5.1 Energetski intervali apsorpcije neutrona

Uz takvu je aproksimaciju evidentno da vjerojatnost izbjegavanja rezonantne apsorpcije u cijelom rezonantnom području ostaje približno ista kao da se, prema jednadžbi (5.5.6),u obzir uzimaju samo energetski intervali unutar kojih je prisutna intenzivna apsorpcija neutrona.

Ako se, nadalje, energetski intervali u jednadžbi (5.5.6) podijele na vrlo malene segmente, moguće je sumu zamijeniti integralom. Faktor p, koji je inače u teoriji reaktora poznat kao faktor vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije se u tom slučaju može prikazati izrazom:

$$p = e^{-\int_{E_2}^{E_1} \frac{\Sigma_a}{\xi(\Sigma_a+\Sigma_s)} * \frac{dE}{E}} \qquad \textbf{(5.5.5)}$$

Područje integracije proteže se kroz cijelu energetsku oblast rezonantnih apsorpcija. Radi jednostavnosti, makroskopski su udarni presjeci $\Sigma_a(E)$ i $\Sigma_s(E)$, u relaciji (5.5.7), pisani kao Σ_a i Σ_s.

Zadaci uz poglavlje 5.

1. Treba dokazati da se odnos gubitka energije neutrona u sudaru i njegove početne energije može odrediti iz izraza:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - e^{-\xi}.$$

2. Treba pokazati da kod sudara neutrona sa teškim jezgrama postotni gubitak energije neutrona iznosi približno,

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{200}{A}\% .$$

3. Koliko postotaka početne energije gubi neutron u svakom sudaru sa,

a) vodikom.

b) uranom.

4. Koliko je u prosjeku potrebno sudara da se neutron uspori u rasponu energija od 100eV do 6eV (koje odgovara najintenzivnijem području rezonantne apsorpcije ^{238}U) ako je moderator,

a) obična voda

b) teška voda

c) grafit

5. Odrediti prosječan broj sudara potrebnih da se neutron u teškoj vodi, koja sadrži 2% težinskog udjela obične vode, uspori od 2MeV na 1eV?

Numeričke podatke potrebne za proračun uzeti iz primjera 5.2.2.

6. Neutroni energije 1.5MeV se unose u neograničeni blok grafita gdje se elastičnim sudarima sa jezgrama atoma ugljika usporavaju. Broj neutrona koji ulaze u blok je $2*10^6$ neutrona/cm^{2}s. Koliki je broj nuklearnih reakcija elastičnog sudara po 1cm^3 materijala u rasponu energija od 0.5MeV do 0.3MeV?

Treba pretpostaviti da je makroskopski udarni presjek ugljika za elastični sudar u danom energetskom intervalu konstantan, te da iznosi 0.411 cm^{-1}.

7. Neutroni se usporavaju u homogenoj mješavini urana i grafita u kojoj je odnos broja atoma urana i grafita 1:400. Koliko će u postotku neutrona biti zarobljeno u energetskom intervalu 0.1eV na energiji 6.7eV, u kojem mikroskopski udarni presjek za apsorpciju neutrona iznosi $6500*10^{-28}$ m^2 (to su pretpostavljene karakteristike jedne od rezonantnih apsorpcijskih intervala ^{238}U). Mikroskopski udarni presjek za elastični sudar grafita je $4.75*10^{-28}$ m^2.

Pri proračunu zanemariti apsorpciju neutrona u grafitu i usporavanje neutrona u uranu.

8. Kako bi se u primjeru 7. mijenjao postotak zarobljenih neutrona u istom energetskom intervalu kada bi odnos broja atoma urana i grafita iznosio 1:200 i 1:600.

9. Izotop ^{238}U ima veoma izražene udarne presjeke za apsorpciju neutrona kod energija 6.7, 22 i 36eV. Mikroskopski udarni presjeci za apsorpciju neutrona kod tih energija iznose redom $6500*10^{-28}$ m^2, $5500*10^{-28}$ m^2 i $5000*10^{-28}$ m^2. Pretpostaviti širinu svakog apsorpcijskog intervala od 0.1eV, i između njih zanemarivu apsorpciju. Ako se neutroni usporavaju u homogenoj mješavini prirodnog urana i vode sa odnosom atoma vodika i urana 10:1, kolika je vjerojatnost da neutron neće biti zarobljen od ^{238}U ni u jednom od tri zadana uzastopna energetska intervala?

Mikroskopski udarni presjek vodika za elastični sudar je $20*10^{-28}$ m^2. Utjecaj kisika treba zanemariti.

Reference uz poglavlje 5.

[1] S.Glasstone, A.Sesonke, Nuclear Reactor Engineering, Chapter 3, Van Nostrand Reinhold Co, NeW York, 1967.

[2] S.Glasstone, C.Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, Chapter VI, Van Nostrand Co., Toronto, 1952.

[3] S.Glasstone, Principles of Nuclear Reactor Engineering, chapter 3, Macmillan, London, 1956.

[4] D.Feretić, Osnove teorije nuklearnog reaktora, poglavlje 2.3 do 2.7, Liber, Zagreb, 1987.

[5] J.Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapter 5, Addison Wensley Publ.Co., Reading 1975.

[6] I.Kaplan, Nuclear Physics, Chapter 18, Addison Wensley Publ. Co, Reading 1963.

[7] R.Meghreblian, D.Holmes, Reactor Analysis, Chapter 4, Mc Graw Hill, NeW York 1960.

[8] A.Weinberg, A.Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, Section II chapt. 11, The Univ.Chicago Press, 1959.

[9] A.Henry, Nuclear Reactor Analysis, Chapter 2.5, The MIT Press, Cambridge Mass., 1980.

6 DIFUZIJA NEUTRONA

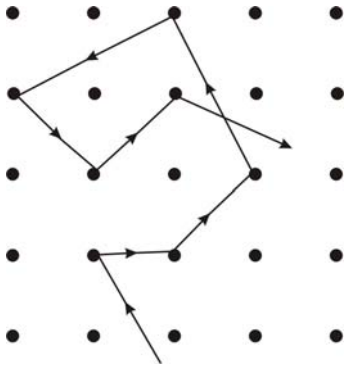
6.0 Uvod

U poglavlju 5.4 promatrali smo promjene energije neutrona zbog nuklearnih reakcija u materijalima, smatrajući pri tome da se te nuklearne reakcije događaju u prostorno neograničenoj i homogenoj sredini. Zbog toga je i neutronski tok bio smatran nepromjenjivim u prostoru.

U praktičkim se slučajevima, s jedne strane, svojstva materijala obično mijenjaju u prostoru (heterogena struktura, apsorberi u moderatoru, različito obogaćenje goriva), a s druge, reaktori su prostorno ograničeni, pa se zbog bijega neutrona njihov tok od centra prema periferiji reaktora smanjuje.

Poznavanje raspodjele neutronskog toka u prostoru je bitno za određivanje prostorne raspodjele nuklearnih reakcija izazvane neutronima.

Rigorozno tretiranje prostorne raspodjele neutronskog toka je vrlo zamršeno. Neutroni difundiraju kroz krute tvari u cik-cak putanjama sudarajući se sa jezgrama materijala, kao što je to ilustrirano slikom 6.0.1.



Slika 6.0.1 Putanja neutrona tijekom difuzije

Ovaj se proces, naravno, može promatrati samo statistički. Iako su putanje pojedinih neutrona sasvim nepravilne, statistički promatrano, veća je vjerojatnost rezultantnog kretanja neutrona od mjesta njihove veće gustoće prema mjestu manje gustoće. Zbog izvjesne sličnosti s procesom difuzije plinova, kretanje neutrona kroz krute tvari je nazvano neutronska difuzija.

Jednadžba koja opisuje kretanje neutrona, a zasniva se na principu očuvanja broja neutrona, je Boltzmann-ova transportna jednadžba. Jednadžba je predložena još 1870. godine kod studije difuzije plinova. U jednadžbi se kao ovisna varijabla pojavljuje kutna raspodjela vektora neutronskih brzina, kojom se izražava broj neutrona na prostornom položaju $\vec{r}$, koji se kreću brzinom v unutar jediničnog prostornog kuta u smjeru Ω. Primjena Boltzmann-ove jednadžbe na kretanje neutrona rezultira formuliranjem relacije poznate kao transportna jednadžba neutrona. Jednadžba je integralno diferencijalnog tipa i može se aproksimativno riješiti samo za specijalne slučajeve. Ako je kutna raspodjela neutronskih brzina izotropna (jednaka za sve smjerove u prostoru) matematičko se tretiranje kretanja neutrona bitno pojednostavljuje. U tom slučaju, naime, smjer neutronskih brzina otpada kao ovisna varijabla, a neutronski tok postaje skalarna veličina. Time se transportna jednadžba kretanja neutrona reducira u difuzijsku jednadžbu.

6.1 Difuzijska jednadžba monoenergetskih neutrona

Najjednostavniji oblik na koji se može svesti transportna jednadžba neutrona je elementarna jednobrzinska difuzijska jednadžba. Ova jednadžba promatra samo monoenergetske neutrone, a

može se, uz izvjesne aproksimacije, i direktno izvesti. U praksi se takva jednadžba primjenjuje i na neutrone čije energije variraju u određenom opsegu, bilo da se radi o termičkim neutronima, bilo da se radi o neutronima koji se usporavaju unutar određenog raspona energija.

Najbitnije aproksimacije koje se primjenjuju kod izvoda difuzijske jednadžbe neutrona su:

- Neutroni su monoenergetski. Za neutrone se definira prosječna energija i njoj odgovarajuće vrijednosti udarnih presjeka za nuklearne reakcije.

- Apsorpcija neutrona u sredini unutar koje se kreću je slaba ($\Sigma_a << \Sigma_s$). Uvjet je dosta dobro ispunjen kod čistih moderatora (posebno kod D_2O i grafita), ali ne i kod mješavine moderatora i nuklearnog goriva. Zbog toga je dominantna nuklearna reakcija kod analize difuzije neutrona nuklearna reakcija elastičnog sudara.

-Kutna raspodjela vektora neutronskih brzina je izotropna. Ovaj je uvjet već i ranije naveden kao osnovna pretpostavka za redukciju transportne jednadžbe neutrona u difuzijsku jednadžbu. Izotropnoj raspodjeli kutnih brzina se možemo približiti ako je prostorna promjena neutronskog toka malena (takve prilike nastaju daleko od neutronskih izvora i jakih apsorbera), jer tada nema preferiranog smjera kretanja neutrona.

- Raspršenje neutrona je izotropno u laboratorijskom sustavu. Analiza u poglavlju 5.1 je pokazala da se takvom svojstvu možemo približiti jedino kod sudara neutrona sa teškim jezgrama. Kada se promatraju sudari neutrona sa lakim jezgrama atoma moderatora izotropno raspršenje neutrona nije ni približno ispunjeno (a posebno nije kada je moderator obična voda).

- Sredina u kojoj se neutroni kreću je homogena. Računa se, dakle, s nepromjenjivim svojstvima materijala u prostoru (ili se pak može računati sa prosječnim svojstvima materijala u prostoru).

Navedeni uvjeti navode na pomisao da je praktična primjena jednogrupne difuzijske jednadžbe kretanja neutrona vrlo ograničena. Pokazati će se, međutim, da je upravo obrnuto. Ta se jednadžba mnogo koristi, ali uz uvjet da se u nju unesu izvjesne korekcije koje proizlaze iz točnije jednadžbe transporta neutrona.

Osnova difuzijske jednadžbe neutrona je poznati Fickov zakon, koji je originalno izveden pri razmatranju problema kemijske difuzije (miješanje otopina različitih koncentracija). Fickov zakon, primijenjen na neutronsku difuziju, u svom elementarnom obliku izveden je u Dodatku 2.

Veoma značajan problem koji ovaj zakon rješava se može formulirati slijedećim: Koliki rezultantni broj monoenergetskih neutrona u jedinici vremena prolazi kroz proizvoljno postavljenu jediničnu površinu unutar sredine u kojoj ti neutroni difundiraju? Pod rezultantnim brojem neutrona podrazumijevamo razliku neutrona koji kroz jediničnu površinu prelaze u naznačenom smjeru i onih koji kroz tu površinu prelaze u suprotnom smjeru.

Fickov zakon (čiji je izvod naveden u dodatku 2) za naznačeni problem daje slijedeće rješenje,

$$\vec{I} = -D\,\mathrm{grad}\left(\phi\left(\vec{r}\right)\right), \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

gdje je $\vec{I}$ vektor neutronske struje u smjeru $\vec{r}$ (vidi definiciju neutronske struje u poglavlju 2.11), a D tzv. difuzijska konstanta neutrona, koja ovisi o svojstvima materijala kroz koji se neutroni kreću.

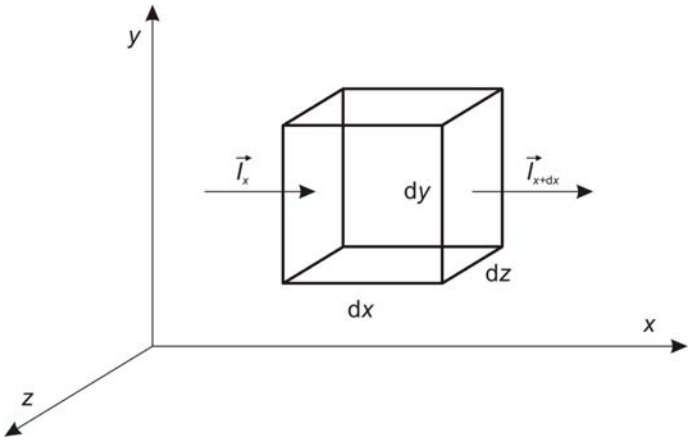
Jednadžba (6.1.1) pokazuje da je neutronska struja proporcionalna difuzijskoj konstanti i negativnom gradijentu neutronskog toka u smjeru vektora neutronske struje. Neutroni se, dakle, kreću u smjeru u kojem opada neutronski tok.

Fickov zakon u pravokutnom koordinatnom sustavu ima oblik,

$$\vec{I} = \vec{I}_x + \vec{I}_y + \vec{I}_z = -D\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right), \qquad \textbf{(6.1.2)}$$

gdje su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori u smjerovima x, y i z.

Napisana relacija daje mogućnost neposrednog odgovora i na slijedeće, također veoma značajno, pitanje: Koliki rezultantni broj neutrona u jedinici vremena izlazi iz jediničnog volumena materijala unutar sredine kroz koju oni difundiraju? Odgovor na ovo pitanje ima neposrednu primjenu kod određivanja prostorne raspodjele neutronskog toka u materijalu.



Slika 6.1.1 Istjecanje neutrona iz elemenata volumena

Ako, prema slici 6.1.1, zamislimo element volumena dV=dxdydz, broj neutrona koji izlaze iz tog elementa volumena u smjeru x biti će,

$$\left(\vec{I}_{x+dx} - \vec{I}_x\right)dydz = \frac{\vec{I}_{x+dx} - \vec{I}_x}{dx}dxdydz = \frac{\partial\vec{I}_x}{\partial x}dV\,.$$

Ili za sve smjerove,

$$\left(\frac{\partial\vec{I}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{I}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{I}_z}{\partial z}\right)dV = \mathrm{div}\left(\vec{I}\right)dV = \nabla\vec{I}\,dV\,. \qquad \textbf{(6.1.3)}$$

Ako, nadalje, iskoristimo i izraz (6.1.1), možemo također pisati,

$$\nabla\vec{I} = -\nabla\left(D\nabla(\phi)\right). \qquad \textbf{(6.1.4)}$$

Ako se difuzijska konstanta D može smatrati neovisnom o prostornim koordinatama izraz (6.1.4) svodi se na,

$$\nabla\vec{I} = -D\nabla^2\phi\,. \qquad \textbf{(6.1.5)}$$

Broj neutrona koji izlaze iz jediničnog volumena je, naravno, skalarna veličina koju možemo kvantificirati pomoću Laplaceovog operatora ∇^2. Ako je tok neutrona promjenjiv u prostoru i vremenu, tada se izlazak(odnosno bijeg) neutrona iz jediničnog volumena izražava pomoću vremenski ovisne funkcije neutronskog toka, tj. kao, $-D\nabla^2\phi\left(\vec{r},t\right)$.

Matematički je oblik Laplaceova operatora:

- u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- u simetričnom cilindričnom koordinatnom sustavu:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- u simetričnom kuglastom koordinatnom sustavu:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

6.2 Difuzijska konstanta

U prethodnom poglavlju je napomenuto da difuzijska konstanta ovisi o vrsti materijala kroz koji difundiraju neutroni. Elementarni izvod Fickovog zakona, prikazan je u Dodatku 2, dovodi do izraza za difuzijsku konstantu neutrona u obliku,

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s}. \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

Upotreba Fickovog zakona s difuzijskom konstantom prema izrazu (6.2.1),dala bi netočne rezultate jer ni jedan moderator (posebno ne obična voda) ne ispunjava pretpostavke navedene u poglavlju 6.1. Između tih pretpostavki najslabije je ispunjena ona koja se odnosi na izotropno raspršenje neutrona u laboratorijskom sustavu.

Iz navedenog razloga potrebno je pri upotrebi Fickovog zakona za proračun difuzije neutrona upotrijebiti korigiranu vrijednost difuzijske konstante. Korigirana se difuzijska konstanta dobiva primjenom teorije transporta neutrona, a ima oblik,

$$D = \frac{1}{3\Sigma(1-\mu)\left[1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\frac{\mu}{1-\mu} + \ldots\right]}, \qquad \textbf{(6.2.2)}$$

gdje je,

- μ srednja vrijednost kuta raspršenja neutrona u laboratorijskom sustavu, koja je identična sa $\left(\cos(\psi)\right)_{sr} = \frac{2}{3A}$ (vidi jednadžbu 5.2.6)

- Σ totalni udarni presjek za nuklearne reakcija materijala sa neutronima za energiju koja odgovara energiji monoenergetskih neutrona

- Σ_a makroskopski udarni presjek za apsorpciju neutrona

Jednadžba (6.2.2) može se alternativno pisati i kao,

$$D = \frac{\lambda_t}{3} \qquad \textbf{(6.2.3)}$$

Gdje je s λ_t označen srednji put transporta neutrona.

U poglavlju 2.11 (jednadžba 2.11.5) slobodni put neutrona definiran je kao inverzna vrijednost udarnog makroskopskog presjeka određene nuklearne reakcije. U skladu s tim možemo definirati i makroskopski udarni presjek za transport neutrona kao,

$$\Sigma_t = \frac{1}{\lambda_t}.$$

Ako je sredina u kojoj se neutroni kreću slab apsorber, tj. ako je $\Sigma_a << \Sigma_s$, možemo izraz (6.2.2.) pojednostaviti (npr. za običnu vodu koja više apsorbira neutrone od drugih moderatora odnos Σ_a/Σ_s je, prema podacima iz tablice 5.3.1, svega oko 0.015). U tom je, naime, slučaju dozvoljeno pisati $\Sigma \approx \Sigma_s$ i $\Sigma \approx 0$, pa se difuzijska konstanta svodi na,

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s\left[1 - \frac{2}{3A}\right]}. \qquad \textbf{(6.2.4)}$$

Iz jednadžbe (6.2.4) proizlazi i odgovarajuće pojednostavljena definicija za λ_t i Σ_t.

Za teške jezgre faktor $\frac{2}{3A}$ postaje zanemariv u odnosu na jedinicu, pa se izraz (6.2.4) svodi na relaciju (6.2.1). U takvu je dakle slučaju, korekcija koja proizlazi iz transportne jednadžbe neutrona nepotrebna.

Primjer 6.2.1

Potrebno je odrediti difuzijsku konstantu grafita za termičke neutrone.

Gustoća grafita je 1600 kg/m^3, mikroskopski udarni presjek za elastičan sudar $4.75*10^{-28}$ m^2, a atomska težina 12.

Rješenje:

Makroskopski udarni presjek za elastičan sudar na osnovi danih podataka biti,

$$\Sigma_s = \frac{0.6023*10^{27}}{12}*1600*4.75*10^{-28} = 38.15\ m^{-1}.$$

Iz jednadžbe (6.2.4) neposredno se dobiva difuzijska konstanta

$$D = \frac{1}{3*38.15\left(1 - \frac{2}{3*12}\right)} = 0.009\,25\ m.$$

Difuzijsku konstantu najčešće je potrebno odrediti za neutrone čija energija varira u određenim granicama. Takvi su i termički neutroni, čiji je energetski spektar objašnjen u poglavlju

2.13. U tom slučaju treba difuzijsku konstantu računati kao prosječnu vrijednost unutar energetskog spektra:

$$\overline{D} = \frac{\int D(E)\phi(E)dE}{\int \phi(E)dE}. \qquad \textbf{(6.2.5)}$$

Potrebno je, nadalje, primijetiti da difuzijska konstanta neutrona ovisi o temperaturi i gustoći medija kroz koji se neutroni kreću. Naime, iz relacije (6.2.4) proizlazi da je ta konstanta obrnuto proporcionalna makroskopskom udarnom presjeku za elastični sudar $\Sigma_s=N\sigma_s$. Broj atoma po jedinici volumena N je direktno proporcionalan gustoći materijala ρ. Dakle,

$$\overline{D} \approx \frac{1}{\rho}.$$

Ovisnost difuzijske konstante o temperaturi treba dovesti u vezu s temperaturnom ovisnošću mikroskopskog udarnog presjeka za elastičan sudar. Ta se ovisnost za običnu i tešku vodu može izraziti kao,

- za H_20 $\quad \overline{D} \approx T^{0.470}$

- za D_20 $\quad \overline{D} \approx T^{0.112}$

gdje je T apsolutna temperatura.

Na temelju se navedenog može zaključiti, da promjenu difuzijske konstante neutrona, kada se mijenja temperatura i tlak medija, određuje relacija:

$$\overline{D}(\rho,T) = \overline{D}(\rho_0,T_0)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^m, \qquad (6.2.6)$$

gdje je eksponent m jednak 0.470 za H_20 i 0.112 za D_20.

Primjer 6.2.2

Potrebno je odrediti difuzijsku konstantu termičkih neutrona za vodu tlaka 16Mpa i temperature 570 K. Gustoća vode kod danih parametara je oko 700kg/m^3. Račun treba temeljiti na podatku da difuzijska konstanta vode temperature 293K i gustoće 1000kg/m^3 iznosi 0.0016 m (iz tablice 6.4.1).

Rješenje:

Primjenom jednadžbe (6.2.6) slijedi:

$$\overline{D} = 0.0016\left(\frac{1000}{700}\right)\left(\frac{570}{293}\right)^{0.470} = 0.00313\,m.$$

Rezultat pokazuje da je difuzijska konstanta vode zadanih parametara gotovo dvostruko veća od one za hladnu vodu.

6.3 Bilanca neutrona

Bilanca neutrona odražava princip očuvanja broja neutrona, koji se svodi na postavku da razlika proizvedenih i izgubljenih neutrona u nekom proizvoljnom volumenu mora odgovarati izmijenjenom broju neutrona koje taj volumen sadrži.

Proizvodnja neutrona u promatranom volumenu određena je s unutarnjim izvorom neutrona. Gubitak neutrona može biti uzrokovan njihovom apsorpcijom i/ili bijegom neutrona iz tog volumena.

Promatrati ćemo bilancu neutrona u jediničnom volumenu i unutar jedinice vremena.

Neka jedinični volumen sadržava $n(\vec{r},t)$ neutrona. Promjena broja neutrona u jediničnom volumenu i u jedinici vremena biti će $\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t}$.

Izvor neutrona u jediničnom volumenu možemo označiti sa $S(\vec{r},t)$.

S druge strane, broj apsorbiranih neutrona u jedinici volumena i vremena određen je produktom, $\phi(\vec{r},t)\Sigma_a(\vec{r})$, a broj neutrona koji u jedinici vremena izlaze (istječu) iz jediničnog volumena, prema jednadžbi (6.1.2) i (6.1.5) s, $-D\nabla^2\phi(\vec{r},t)$.

Na osnovi navedenog, bilanca neutrona za jedinični volumen materijala u jediničnom vremenu postaje,

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = S(\vec{r},t) - \phi(\vec{r},t)\Sigma_a(\vec{r}) + D\nabla^2\phi(\vec{r},t). \qquad \textbf{(6.3.1)}$$

Kasnije će se pokazati (poglavlje 7), da je dobivena jednadžba od temeljnog značaja u teoriji nuklearnog reaktora.

Veoma se često jednadžba (6.3.1) primjenjuje u stacionarnom stanju. U tom je slučaju vremenska promjena broja neutrona jednaka nuli, pa se bilanca neutrona svodi na,

$$S(\vec{r}) - \phi(\vec{r})\Sigma_a(\vec{r}) + D\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0. \qquad \textbf{(6.3.2)}$$

Bilanca neutrona s različitim energijama

U dosadašnjih se razmatranjima pretpostavljalo da su neutroni monoenergetski, tj. da imaju iste prosječne energije. Međutim, u stvarnosti unutar nuklearnog reaktora raspored energija neutrona odgovara širem energetskom spektru, koji se proteže od energija fisijskih neutrona (čija se gornja granica nalazi na oko 10MeV) do energija termičkih neutrona (s prosječnom energijom nižom od 1eV). U procesu usporavanja neutroni postepeno prelaze u sve niže energetske razine, dok ne postignu termičku ravnotežu sa jezgrama atoma moderatora.

Budući da se difuzijska jednadžba neutrona može primijeniti samo na monoenergetske neutrone, bilancu neutrona s energijama koje se protežu u širem spektru možemo postaviti samo ako taj energetski spektar podijelimo na više diskretnih energetskih grupa, pa tek onda napišemo za svaku od takvih grupa bilancu neutrona kao da se radi o monoenergetskim neutronima.

Pretpostavimo da smo spektar neutronskih energija podijelili na N energetskih grupa. Uobičajeno je energetsku grupu najviše energije u spektru označiti sa 1 a najnižu s N.

Razmotrimo sada bilancu neutrona neke energetske grupe g koja se nalazi između 1 i N.

Za razliku od bilance monoenergetskih neutrona, koja je opisana jednadžbom (6.3.2), kod pisanja bilance neutrona grupe g treba uzeti u obzir slijedeće činjenice:

1. Neutroni koji ulaze u energetsku grupu g nisu strogo uzevši monoenergetski (osim ako je obuhvaćeno energetsko područje veoma usko), nego imaju energije koje se protežu unutar određenog raspona. Zbog toga sve parametre o kojima ovisi bilanca neutrona treba tretirati kao ponderirane srednje vrijednosti u tom rasponu energija.

2.Izvor neutrona grupe g nije određen samo neutronima koji se unutar te energetske grupe generiraju u fisijama, nego i svim neutronima koji u tu grupu ulaze u procesu usporavanja iz viših energetskih grupa.

3.Gubitak neutrona grupe g je prouzrokovan apsorpcijom neutrona u toj energetskoj grupi, ali i izlaskom neutrona iz energetske grupe zbog usporavanja.

Suglasno navedenom, bilanca neutrona energetske grupe g se može napisati kao,

$$D_g \nabla^2 \phi_g - \Sigma_{ag} \phi_g - \sum_{h=g+1}^{N} \Sigma_{g \to h} \phi_g + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \to g} \phi_h = -S_g \qquad \textbf{(6.3.3)}$$

Značenje pojedinih članova jednadžbe (6.3.3) je sljedeće:

- Prvi član određuje bijeg neutrona energetske grupe g i po značenju je ekvivalentan odgovarajućem članu u jednadžbi (6.2.2)

- Drugi član uzima u obzir apsorpciju neutrona energetske grupe g

- Treći član uključuje gubitak neutrona energetske grupe g zbog izlaska iz te grupe svih neutrona koji su kod usporavanja izbačeni u jednu od nižih energetskih grupa (dakle energetskih grupa između g+1 i N). Broj nuklearnih reakcija koje su mjerodavne za izbacivanje neutrona iz grupe g u grupu h (sa h je označena energetska grupa na nižoj razini od g) ovisi o makroskopskom udarnom presjeku za takve reakcije $\Sigma_{g \to h}$ i o toku neutrona ϕ_g u energetskoj grupi g.

- Četvrti član, koji je po strukturi sličan trećem članu, uzima u obzir neutrone koji u procesu usporavanja iz viših energetskih grupa (tj. energetskih grupa od 1 do g-1) ulaze u energetsku grupu g. Broj tih neutrona ovisan je o makroskopskom udarnom presjeku za izbacivanje neutrona iz viših grupa u grupu g, $\Sigma_{h \to g}$ i tokovima neutrona ϕ_h u tim energetskim grupama .

- Broj neutrona grupe g koji nastaju u fisijama je obuhvaćen članom S_g na desnoj strani jednadžbe (6.3.3).

Rješenje jednadžbe (6.3.3), s ciljem da se ustanovi iznos i prostorna raspodjela neutronskog toka u svakoj energetskoj grupi kao i veličina izvora neutrona koji zadovoljava jednadžbu (to je u stvari, kao što će se pokazati u poglavlju 7 u okviru teorije nuklearnog reaktora, uvjet kritičnosti sustava), zahtjeva da se prethodno utvrde udarni presjeci i drugi parametri energetskih grupa (koji su inače poznati kao grupne konstante). Određivanje grupnih konstanti je predmet opsežnih analiza koje prelaze okvire ove knjige.

Nekoliko pojednostavljenih primjera rješenja multienergetske bilance neutrona dano je u poglavlju 7, dok su neke elementarne informacije o načinu određivanja grupnih konstanti navedene i u ovom poglavlju.

Grupne konstante.

Energija neutrona u termičkom nuklearnom reaktoru (vrste nuklearnih reaktora su navedene u poglavlju 7) mogu se podijeliti na četiri karakteristična područja:

1. Brzi neutroni, 10MeV do 0.05MeV (područje neelastičnih sudara),

2. Usporavajući neutroni, 0.05MeV do 0.5keV (područje elastičnih sudara),

3. Rezonantni neutroni, 0.5keV do 0.625eV,

4. Termički neutroni, ispod 0.625eV.

S obzirom na veliki raspon energije unutar svakog od navedenih energetskih područja (koje ćemo označiti kao makro energetska područja), promjene udarnih presjeka unutar tih područja biti će znatne. Unutar jednog energetskog područja je moguće riješiti jednadžbu bilance neutrona (jednadžba 6.3.3) samo uz konstantne parametre materijala, tj. uz fiksne vrijednosti grupnih konstanti.

Iz tog je razloga potrebno odrediti prosječne ponderirane vrijednosti grupnih konstanti u svakom energetskom području. Kriterij za ponderiranje grupnih konstanti unutar jednog energetskog područja je očuvanje broja nuklearnih reakcija u jedinici vremena, tj.

$$\bar{\Sigma}_g = \frac{\int_g \Sigma(E)\phi(E)dE}{\int_g \phi(E)dE} \qquad \textbf{(6.3.4)}$$

gdje je sa $\bar{\Sigma}_g$ označena ponderirana prosječna vrijednost udarnog presjeka u energetskom području g.

Očigledno je da izračunavanje tako definiranih prosječnih vrijednosti grupnih konstanti traži poznavanje energetske ovisnosti toka neutrona u danom energetskom području. Točnost proračuna je naravno, tim veća što je odabrani raspon energija manji.

Za dovoljnu bi točnost proračuna bilo potrebno svaku od navedene četiri energetske makrogrupe podijeliti na 50 do 100 energetskih mikrogrupa, čime bi se broj bilanci neutrona (određenih jednadžbom 6.3.3) koje treba riješiti popeo na nekoliko stotina. Budući da je prostornu ovisnost neutronskog toka svake energetske grupe u svakoj dimenziji potrebno definirati u velikom broju (reda stotinu) točaka, kod proračuna bi se dobio sustav jednadžbi teško savladiv i za najveća računala.

Zbog toga je uobičajeno da se grupne konstante svake energetske makrogrupe određuju sintezom iz grupnih konstanti pripadajućih mikrogrupa koristeći slijedeći pojednostavljeni postupak:

- Iz biblioteke udarnih presjeka odredi se ovisnost presjeka prisutnih materijala o energiji. Kod toga je prilično komplicirano određivanje udarnih presjeka za izbacivanje neutrona iz jedne energetske grupe u drugu. Ti udarni presjeci ovise o udarnim presjecima materijala za elastične i neelastične sudare kao i o vjerojatnostima da će se nakon sudara neutroni naći u određenom energetskom intervalu.

- Ponderirane prosječne vrijednosti udarnih presjeka unutar mikrogrupa se izračunavaju kao obične srednje vrijednosti, ili kod usporavajućih neutrona, uz pretpostavku da je promjena toka neutrona unutar mikrogrupe obrnuto proporcionalna energiji.

- Vrijednosti neutronskog toka svake mikrogrupe se određuju uz zanemarenje bijega neutrona (tj. uz zanemarenje prvog člana u jednadžbi 6.3.3). Ako se proračun počne od mikrogrupe najviše energije (grupa 1), može se neposredno odrediti tok neutrona ϕ_1, jer u tu grupu ne ulaze neutroni iz drugih grupa, pa njezina bilanca ovisi samo o ϕ_1. Uz poznatu vrijednost ϕ_1, može se iz druge mikrogrupe izračunati neutronski tok ϕ_2, zatim ϕ_3 itd.

- Nakon što je za svaku mikrogrupu poznata ovisnost udarnog presjeka i toka neutrona o energiji vrši se sinteza prosječnog ponderiranog presjeka makrogrupe numeričkom integracijom izraza (6.3.4). Broj makrogrupa koji zadovoljava praktične primjene kod termičkih vodom moderiranih reaktora je obično 4, dok se kod brzih reaktora mora računati sa znatno većim brojem (reda deset ili više) makrogrupa.

- Kod izračunavanja grupnih konstanti termičkih neutrona treba računati s činjenicom da u toku difuzije neutroni mogu zbog elastičnih sudara sa jezgrama atoma moderatora ne samo gubiti nego i dobivati energiju.

U praksi se izračunavanje grupnih konstanti vrši uz pomoć specijalnih računarskih programa.

Primjer 6.3.1

Udarni presjeci natrija za tri energetske grupe navedeni su u tablici 6.3.1. Uz pretpostavku da tokovi neutrona u tim energetskim grupama iznose: $\phi_1=6*10^{18}$, $\phi_2=1*10^{19}$, $\phi_3=3*10^{19}$ neutrona/m^2,s, treba odrediti broj neutrona po m^3/s koji se apsorbiraju u natriju kao i broj neutrona koji po m^3/s prelaze iz prve energetske grupe u drugu.

Tablica 6.3.1 Udarni presjeci natrija za tri energetske grupe u 10^{-28} m^2

g	Energija [MeV]	σ_a	σ_{tr}	$\sigma_{g\to g+1}$	$\sigma_{g\to g+2}$
1	1.35-∞	0.0005	2.0	0.24	0.06
2	0.4-1.35	0.001	3.2	0.18	-
3	0-0.4	0.001	3.7	-	-

Rješenje:

Podaci za natrij iz tablice D.1 u dodatku 1 su:

Atomska težina A=22.9898, gustoća ρ=970 kg/m^3.

Broj atoma natrija po m^3 biti će prema izrazu 2.11.1

$$N = 970\frac{0.6023*10^{27}}{22.9898} = 2.54*10^{28}.$$

Broj apsorbiranih neutrona unutar sve tri energetske grupe iznosi

$$F_a = \sum_{g=1}^{3}\Sigma_{ag}\phi_g = N\sum_{g=1}^{3}\sigma_{ag}\phi_g .$$

Uvrštenjem zadanih veličina izlazi $F_a=1.09*10^{17}$ neutrona/m^3,s.

Broj neutrona koji prelaze iz prve u drugu grupu je

$$F_{1\to 2} = N\sigma_{1\to 2}\phi_1 = 2.54*10^{28}*0.24*10^{-28}*6*10^{18} = 3.66*10^{18}\ neutrona/m^3, s$$

6.4 Rubni uvjeti pri difuziji neutrona

Kod praktične primjene difuzijske jednadžbe neutrona, redovito se postavlja pitanje definicije rubnih uvjeta. Rubni se uvjeti najčešće odnose na:

a) Rasprostiranje neutronskog toka na rubu materijala (tj. na granici između materijala i vakuuma).

b) Rasprostiranje neutronskog toka na granici dvaju materijala različitih svojstava.

Jedan i drugi rubni uvjet ćemo jednostavno riješiti uz primjenu rezultata dobivenih u toku izvoda Fickovog zakona, u dodatku 2. Izvod je rezultirao relacijom koja određuje broj neutrona koji kroz jediničnu površinu, postavljenu u ravnini x-y u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava, prolaze u smjeru pozitivnog i negativnog poluprostora (smjer ±z). Relacija ima oblik

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_{\pm} = \frac{\phi_0}{4} \pm \frac{D}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 . \qquad \textbf{(6.4.1)}$$

Ekstrapolirana dužina

Zamislimo graničnu plohu između materijala u kojem difundiraju neutroni i vakuuma. Radi jednostavnosti, neka je ta granična ploha ravnina x-y u pravokutnom koordinatnom sustavu. Ako iskoristimo rezultat izražen jednadžbom (6.4.1) i uzmemo u obzir očiglednu činjenicu da iz vakuuma u jediničnu plohu ne ulaze neutroni, možemo pisati,

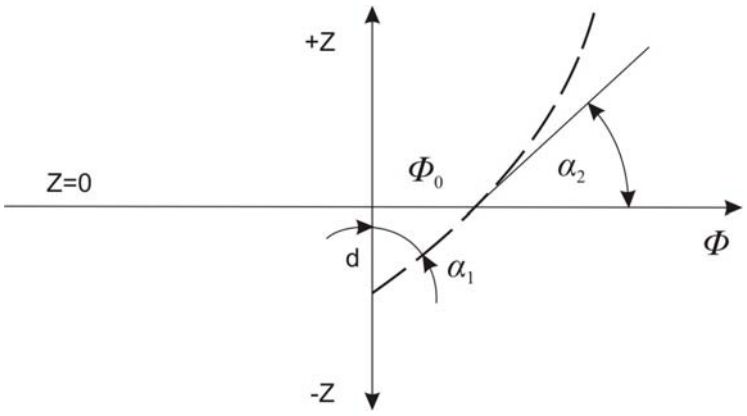
$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_{-} = \frac{\phi_0}{4} - \frac{D}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 = 0 .$$

Izvod funkcije neutronskog toka na graničnoj plohi između materijala i vakuuma je dakle

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 = \frac{\phi_0}{2D},$$

gdje je ϕ_0 iznos neutronskog toka na graničnoj plohi.

Iz slike 6.4.1. proizlazi da se izvod iste funkcije može izraziti i kao ϕ_0/d, gdje je d dužina koju određuje presjecište osi z i tangente povučene na funkciju prostorne ovisnosti neutronskog toka u graničnoj plohi



Slika 6.4.1 Ekstrapolirana dužina

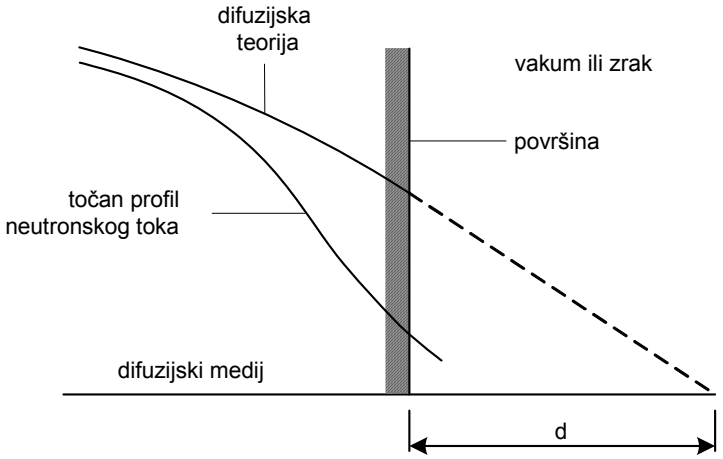
Dužina d je poznata kao ekstrapolirana dužina prostorne funkcije toka monoenergetskih neutrona.

Iz provedene diskusije proizlazi da je ,

$$d = 2D \qquad \textbf{(6.4.2)}$$

Ekstrapolirana dužina je jednaka dvostrukoj vrijednosti difuzijske konstante. Ta dužina fizikalno predstavlja zamišljenu udaljenost van materijala, kod koje bi, neutronski tok, kada bi opadao sa istim gradijentom kao na graničnoj plohi, postao jednak nuli. Ekstrapolirana je dužina neovisna o neutronskom toku na graničnoj plohi, a nailazi na neposrednu primjenu kod izračunavanja kritičnih dimenzija nuklearnog reaktora.

Treba se, međutim, podsjetiti da je ekstrapolirana dužina izražena jednadžbom (6.4.2) dobivena na osnovi elementarne difuzijske teorije. Kod točnijih proračuna treba uzeti u obzir korekcije koje unosi transportna teorija neutrona. Slika 6.4.2 ukazuje na razliku između izračunatog neutronskog toka na granici medija po difuzijskoj teoriji i njegove stvarne vrijednosti .



Slika 6.4.2 Tok neutrona na granici difuzijskog medija i vakuuma ili zraka

Ako kombiniramo jednadžbe (6.4.2) i (6.2.3), možemo pisati

$$d = \frac{2}{3}\lambda_t ,$$

gdje je λ_t transportna dužina neutrona određena jednadžbom(6.2.2). Točniju vrijednost ekstrapolirane dužine daje transportna teorija neutrona:

$$d = 0.71\lambda_t . \qquad \textbf{(6.4.3)}$$

Iz jednadžbi (6.4.3) i (6.2.3) dalje slijedi,

$$d = 2.13D \qquad \textbf{(6.4.4)}$$

Numerički podaci o ekstrapoliranim dužinama moderatora navedeni su u tablici 6.4.1.

Tablica 6.4.1 Difuzijske konstante i ekstrapolirane dužine termičkih neutrona

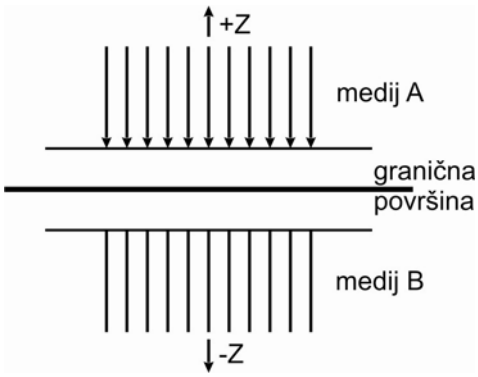
Moderator	Difuzijska konstanta m	Ekstrapolirana dužina m
obična voda	0.0016	0.0034
teška voda (99.7% D_2O)	0.0085	0.0181
grafit (reaktorska kvaliteta)	0.0084	0.0179

Iz danih podataka je vidljivo da su ekstrapolirane dužine svih moderatora malene.

Difuzija neutrona na granici dvaju medija

Analiza rasprostiranja neutronskog toka na granici dvaju materijala ima primjenu kod rješavanja niza praktičnih problema.

Pretpostaviti ćemo da se, u analizi predočenoj u dodatku 2, jedinična površina na plohi x-y nalazi na granici dvaju medija, koje ćemo označiti kao medij A i medij B. Zamislimo sada, prema na slici 6.4.3, da se na malenoj udaljenosti od granične površine između dva medija i paralelno s njom nalaze dvije dodatne jedinične plohe od kojih je jedna u mediju A, a druga u mediju B.



Slika 6.4.3 Difuzija neutrona kroz graničnu plohu između dva medija

Očigledno je da broj elektrona koji u jedinici vremena smjeru +z i -z prolaze kroz obje jedinične plohe mora biti isti.

Primjena jednadžbe (6.4.1) na ovaj slučaj rezultira relacijama:

$$\frac{\phi_A}{4} + \frac{D_A}{2}\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial z}\right) = \frac{\phi_B}{4} + \frac{D_B}{2}\left(\frac{\partial \phi_B}{\partial z}\right) \text{ i}$$

$$\frac{\phi_A}{4} - \frac{D_A}{2}\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial z}\right) = \frac{\phi_B}{4} - \frac{D_B}{2}\left(\frac{\partial \phi_B}{\partial z}\right).$$

Zbrajanjem i odbijanjem gornjih jednadžbi slijede uvjeti koji moraju biti ispunjeni na graničnoj površini dvaju medija. To su:

$$\phi_A = \phi_B \qquad \textbf{(6.4.5)}$$

$$D_A\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial z}\right) = D_B\left(\frac{\partial \phi_B}{\partial z}\right). \qquad \textbf{(6.4.6)}$$

Dobiveni rubni uvjeti pokazuju da u neposrednoj blizini granične plohe neutronski tok i neutronska struja imaju iste iznose u oba medija.

Primjer 6.4.1

Termički neutroni difundiraju kroz medij koji se sastoji iz sloja vode i grafitne ploče. Aktivacijskom metodom ustanovljeno je da broj nuklearnih reakcija s neutronima u vodi je za 10% veći na udaljenosti 5 cm od granične plohe nego neposredno uz nju. Koliki će približno biti odnos toka termičkih neutrona 4cm u unutrašnjosti grafitnog bloka i onog na graničnoj površini?

Rješenje:

Broj nuklearnih reakcija aktivacije direktno je proporcionalan s tokom neutrona.

Ako neutronski tok i difuzijsku konstantu u vodi označimo sa ϕ_H i D_H, a odgovarajuće vrijednosti u grafitu sa ϕ_G i D_G, možemo na osnovi jednadžbe (6.4.6) postaviti približnu relaciju,

$$D_H \frac{\Delta \phi_H}{\Delta z_H} = D_G \frac{\Delta \phi_G}{\Delta z_G}.$$

Uzeti ćemo sada u obzir jednadžbu (6.4.5) i označiti tok termičkih neutrona na graničnoj plohi između vode i grafita s ϕ_0.

Iz zadanih vrijednosti slijedi:

$\Delta\phi_H=0.1\phi_0$, $\Delta z_H=0{,}05$m, $\Delta z_G=0.04$m

Difuzijske konstante za termičke neutrone preuzeti ćemo iz tablice 6.4.1: $D_H=0.0016$m, $D_G=0.0084$m.

Ako promjenu toka termičkih neutrona u grafitu u zadanoj udaljenosti označimo sa $x\phi_0$, možemo pisati,

$$0.0016\frac{0.1\phi_0}{0.05} = 0.0084\frac{x\phi_0}{0.04}.$$

Iz čega slijedi x=0.015

Tok termičkih neutrona 4cm unutar grafitne ploče približno je 1.5% manji od onog na površini ploče.

6.5 Rješenje jednadžbe difuzije neutrona

Rješenje jednadžbe difuzije neutrona je jedan od primarnih zadataka teorije reaktora. Ovdje će se ta jednadžba primijeniti samo na razmatranje nekih najjednostavnijih slučajeva raspodjele termičkog neutronskog toka u moderatoru unutar kojeg nema izvora neutrona.

Pretpostaviti će se da neutroni ulaze u moderator iz vanjskog izvora neutrona i razmotriti primjeri kada taj izvor ima pločastu ili točkastu geometriju. Analizom je obuhvaćena raspodjela neutronskog toka u prostorno neograničenom moderatoru, te u moderatoru konačnih dimenzija.

Pločasti izvor neutrona

Zamisliti ćemo da izvor termičkih neutrona ima oblik neograničene beskonačno tanke ploče (tj. ravnine) iz koje neutroni ulaze u prostorno neograničeni moderator. Budući da unutar moderatora nema izvora neutrona (S=0), bilanca se neutrona, dana jednadžbom 6.3.2, za ovaj slučaj svodi na,

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi = 0. \qquad \textbf{(6.5.1)}$$

Difuzijska konstanta i makroskopski udarni presjek za apsorpciju neutrona odgovaraju prosječnim vrijednostima za termičke neutrone.

Geometrija neutronskog izvora uvjetuje primjenu pravokutnog koordinatnog sustava te promjenu neutronskog toka samo u smjeru okomitom na izvor neutrona (koji ćemo označiti kao smjer x).

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{\phi}{\left(\frac{D}{\Sigma_a}\right)} = 0. \qquad \textbf{(6.5.2)}$$

Raspodjela neutronskog toka u smjeru x ovisi jedino o materijalnom parametru D/Σ_a. Taj je parametar (čija je dimenzija m^2) veoma značajan u fizici nuklearnog reaktora. Označava se sa L^2, pri čemu je za L uveden naziv difuzijska dužina neutrona. Difuzijske dužine termičkih neutrona (T=293K) su dane u tablici 6.5.1.

Koristeći se definicijom difuzijske dužine jednadžba (6.5.2) može se napisati kao

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{\phi}{L^2} = 0. \qquad \textbf{(6.5.3)}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (6.5.3) jest

$$\phi = Ae^{-\frac{x}{L}} + Be^{\frac{x}{L}}. \qquad \textbf{(6.5.4)}$$

Zamislit ćemo da je izvor neutrona ravnina x=0.

Rubni uvjeti koje treba razmotriti u navedenom slučaju odnose se na:

a) Tok neutrona veoma daleko od izvora (tj. kada x teži u neizmjernost)

b) Tok neutrona neposredno uz izvor (tj. za x=0)

Prvi nam uvjet neposredno određuje da integracijska konstanta B mora biti jednaka nuli, jer tok neutrona na neizmjernoj udaljenosti od izvora mora, zbog apsorpcije neutrona u materijalu, težiti nuli.

Drugi rubni uvjet dovodi do zaključka da rezultantna neutronska struja koja neposredno iz izvora neutrona ulazi u materijal u smjeru +x mora biti jednaka polovici broja neutrona koje emitira izvor (jer se emisija neutrona vrši simetrično u smjeru +x i -x).

Primjena Fick-ovog zakona daje

$$\vec{I}_x = -D\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{DA}{L} = \frac{S}{2}.$$

Dobiveni izraz određuje integracijsku konstantu: $A = \frac{SL}{2D}$.

Provedena analiza dozvoljava da se promjena toka neutrona u ovisnosti o udaljenosti od izvora izrazi relacijom

$$\phi = \frac{SL}{2D} e^{-\frac{|x|}{L}}. \qquad \textbf{(6.5.5)}$$

Apsolutna udaljenost od izvora |x| u jednadžbi (6.5.5) upućuje na činjenicu da tok neutrona monotono i simetrično opada sa udaljavanjem od izvora neutrona u smjeru +x i -x. Na udaljenosti od izvora x=L tok neutrona se smanjuje e puta.

Osnovni parametri termičkih neutrona dani su u tablici 6.5.1.

Tablica 6.5.1 Parametri termičkih neutrona temperature 293 K*

Moderator	σ_a	σ_s	Σ_a	Σ_s	L
H_2o	0.664	103	2.22	344.3	0.028 5
D_2o	0.001 33	13.6	0.004 4	45.2	1.41
grafit	0.003 4	4.75	0.027	38.1	0.56

* Dimenzije mikroskopskih udarnih presjeka jesu $10^{-28}m^2$, makroskopskih udarnih presjeka m^{-1}, a difuzijskih dužina m.

Primjer 6.5.1

Potrebno je na udaljenosti 0.1 m od neograničenog pločastog izvora termičkih neutrona odrediti odnos tokova tih neutrona za slučaj da je moderator obična voda i teška voda.

Rješenje:

Ako se prisjetimo da je $D/\Sigma=L$ i primjenimo relaciju (6.5.5), dobivamo traženi odnos:

$$\frac{\phi_H}{\phi_D} = \frac{\Sigma_{aD}}{\Sigma_{aH}} \frac{L_D}{L_H} e^{x\left(\frac{1}{L_D} - \frac{1}{L_H}\right)}.$$

Indeks D je korišten za tešku, a indeks H za običnu vodu.

Korištenjem numeričkih podataka iz tablice 6.5.1., te za x=0.1 m dobivamo,

$$\frac{\phi_H}{\phi_D} = 0.003\,15.$$

Tok neutrona u običnoj vodi, zbog znatno manje difuzijske dužine neutrona, udaljavanjem od izvora neusporedivo brže opada nego u teškoj vodi.

Osvrnimo se sada na slučaj pločastog izvora neutrona u moderatoru neograničene površine ali konačne debljine a.

Rješenje diferencijalne jednadžbe raspodjele neutronskog toka (jednadžba 6.5.4) ostaje identično kao i u slučaju neograničenog moderatora, ali se mijenja rubni uvjet koji se odnosi na iznos neutronskog toka daleko od izvora (ranije naveden kao rubni uvjet a). U slučaju moderatora konačne debljine taj uvjet se mijenja u uvjet isčezavanja neutronskog toka kod ektrapolirane debljine moderatora a+d (odnosno kod -(a+d)). Ekstrapolirana dužina d definirana je u poglavlju 6.4.

Primjena rubnog uvjeta za x=a na jednadžbu (6.5.4) daje,

$\phi_{a+d} = Ae^{-(a+d)/L} + Be^{(a+d)/L} = 0$, ili,

$B = -Ae^{-2(a+d)/L}$.

Tok neutrona određen je relacijom,

$\phi = A\left(e^{-x/L} - e^{x/L-2(a+d)}\right)$.

Integracijsku konstantu A odredit ćemo na isti način kao u slučaju prostorno neograničenog moderatora, tj. iz uvjeta,

$$-D\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{S}{2}.$$

Iz toga proizlazi

$$A = \frac{SL}{2D}\left[1 + e^{-2(a+d)/L}\right]^{-1}.$$

Funkcija koja određuje promjenu neutronskog toka u ovisnosti o udaljenosti od izvora neutrona x ima oblik,

$$\phi = \frac{SL}{2D}\frac{e^{-|x|/L} - e^{|x|/L-2(a+d)/L}}{1 + e^{-2(a+d)/L}}. \qquad \textbf{(6.5.6)}$$

Udaljenost od izvora neutrona x je, kao i u analizi neograničenog moderatora, zamijenjena sa apsolutnom vrijednošću |x|, da se istakne simetrija raspodjele neutronskog toka u smjeru +x i -x.

Relacija (6.5.6) može se kraće napisati kao

$$\phi = \frac{SL}{2D}\frac{sh\left[(a+d-|x|/L)\right]}{ch\left[(a+d)/L\right]}. \qquad \textbf{(6.5.7)}$$

Primjer 6.5.2

Pločasti izvor termičkih neutrona nalazi se na površini grafitnog bloka. Koliki je odnos tokova neutrona unutar bloka na udaljenosti 10cm od površine, ako računamo da je:

a) debljina grafitnog bloka neograničena

b) debljina grafitnog bloka je iznosi 1 m.

Rješenje:

Dijeljenjem izraza (6.5.6) s izrazom (6.5.5) dobiveni je odnos tokova neutrona u konačnoj i neograničenoj ploči na udaljenosti x=a od površine,

$$\frac{\phi_a}{\phi_\infty} = \frac{1 - e^{2(x-a-d)/L}}{1 - e^{-2(a+d)/L}}.$$

Podaci za grafit iz tablica 6.4.1 i 6.5.1 su:

d=0.0179m, L=0.56m

Odnos tokova neutrona 0.1 metar od izvora u ploči neograničene debljine i ploči debljine a=1m dobiva se uvrštenjem u gornji izraz. Rezultat je:

$$\left[\frac{\phi_a}{\phi_\infty}\right]_{x=0.1} = 0.937.$$

Točkasti izvor neutrona

Zamislimo u neograničenom moderatoru točkasti izvor termičkih neutrona. Raspodjelu neutrona u moderatoru opet ćemo riješiti korištenjem jednadžbe (6.5.1), s tim što je u ovom slučaju prikladnije prilike promatrati u kuglastom koordinatnom sustavu. Diferencijalna jednadžba, mjerodavna za rješenje postavljenog problema, je,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{L^2} = 0. \qquad \textbf{(6.5.8)}$$

Uvođenjem zamjene y=rϕ, jednadžba (6.5.8) svodi se na.

$$\frac{d^2y}{dr^2} - \frac{y}{L^2} = 0. \qquad \textbf{(6.5.9)}$$

Dobivena jednadžba istog je oblika kao jednadžba (6.5.3), pa se njezino rješenje može, koristeći relaciju (6.5.4), odmah napisati. Pri tome moramo uzeti u obzir očigledan rubni uvjet da neutronski tok s udaljavanjem od izvora mora monotono padati. Uz te napomene rješenje dobiva oblik,

$y = Ae^{-(r/L)}$ ili, vraćanjem zamjene,

$$\phi = \frac{A}{r}e^{-(r/L)}. \qquad \textbf{(6.5.10)}$$

Integracijsku konstantu A odrediti ćemo istim postupkom kao u slučaju izvora u obliku ravne ploče: Struja neutrona koji neposredno uz izvor izlaze u moderator mora biti jednaka broju neutrona S koje emitira izvor, dakle

$$-D\left(4r^2\pi\frac{d\phi}{dr}\right)_{r=0}=S. \qquad \textbf{(6.5.11)}$$

iz čega se dobiva

$$A=\frac{S}{4\pi D}.$$

Uvrštenjem izračunate vrijednosti integracijske konstante u jednadžbu (6.5.10) slijedi

$$\phi=\frac{S}{4\pi Dr}e^{-(r/L)}. \qquad \textbf{(6.5.12)}$$

Primjer 6.5.3

Točkasti izvor termičkih neutrona nalazi se u neograničenom teškovodnom moderatoru. Koliki se dio neutrona koje emitira izvor apsorbira u moderatoru do udaljenosti 0.5m od izvora? Koliki bi taj postotak bio da je moderator grafit?

Rješenje:

Apsorpciju neutrona u moderatoru izraziti ćemo integralom

$$aS=\int_0^r\phi\Sigma_a dV=\int_0^r\frac{S}{4\pi Dr}e^{-(r/L)}\Sigma_a\left(4r^2\pi dr\right),$$

iz kojega se nakon integracije dobiva

$$a=1-e^{-(r/L)}\left(\frac{r}{L}+1\right).$$

Lijeva strana jednadžbe izražava traženi dio emitiranih neutrona koji se apsorbiraju unutar polumjera r.

Uvrštenjem numeričkih vrijednosti r=0.5m i L=1.41m (tablica 6.5.1) dobiva se, a=0.05.

U teškoj se vodi unutar kugle polumjera 0.5m oko točkastog izvora termičkih neutrona apsorbira 5% neutrona.

Istim se postupkom za grafit (L=0.59) dobiva a=0.208. Grafit, dakle, unutar kugle istog polumjera oko točkastog izvora apsorbira 20.8 % emitiranih neutrona.

Od interesa je i za slučaj točkastog izvora razmotriti utjecaj konačne sredine na rasprostiranje toka neutrona oko izvora. Zamislimo da se točkasti izvor nalazi u središtu kugle polumjera R.

Ovaj ćemo slučaj analizirati na identičan način kao i u slučaju pločastog izvora neutrona u ploči konačne debljine.

Osim rubnog uvjeta kojeg definira jednadžba (6.5.11), na jednadžbu (6.5.10) ćemo primijeniti i rubni uvjet o isčezavanju toka neutrona na ekstrapoliranom polumjeru kugle, tj. uvjet,

$(\phi)_{R+d}=0$.

Primjenom navedenih uvjeta možemo odrediti integracijske konstante A i B:

$B=-Ae^{-2(R+d)/L}$ i

$$A + B = \frac{S}{4\pi D}.$$

Jednadžba koja određuje tok neutrona unutar kugle polumjera R će na osnovi navedenog biti

$$\phi = \frac{S}{4\pi D\left(1 - e^{-2(R+d)/L}\right)}\left[\frac{e^{-r/L}}{r} - e^{-2(R+d)/L}\,\frac{e^{r/L}}{r}\right]. \qquad \textbf{(6.5.13)}$$

ili, nakon sređivanja

$$\phi = \frac{S}{4\pi D r \,\mathrm{sh}\left(\frac{R+d}{L}\right)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{R+d-r}{L}\right). \qquad \textbf{(6.5.14)}$$

Istjecanje (bijeg) neutrona iz materijala

Rješenje mnogih praktičkih problema vezano je uz izračunavanje bijega neutrona iz sredine u kojoj oni difundiraju. Pretpostaviti ćemo da se ta sredina nalazi u vakuumu ili zraku, tako da je broj neutrona koji se nakon bijega vraćaju u materijal zbog raspršenja u okolnom prostoru zanemariv. Uzmimo, nadalje, da je materijal unutar kojeg neutroni difundiraju znatne debljine (više od 3 difuzijske dužine neutrona u tom materijalu). Može se pokazati da je u tom slučaju broj neutrona koji istječe kroz graničnu plohu praktički isti kao da je debljina materijala neograničena.

U dodatku 2 dobiven je izraz kojim se određuje broj neutrona koji po jedinici površine istječu iz neograničenog pozitivnog poluprostora

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_+ = \frac{\phi_0}{4} + \frac{D}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0. \qquad \textbf{(6.5.15)}$$

Difuzijska teorija daje vezu između difuzijske konstante i difuzijske dužine (jednadžba 6.2.4): d=2D. Nadalje, u toku je analize ekstrapolirane dužine u poglavlju 6.4. pokazano da se izvod neutronskog toka na graničnoj plohi može prikazati kao odnos neutronskog toka na graničnoj plohi ϕ_0 i ekstrapolirane dužine d tj.

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 = \frac{\phi_0}{d}.$$

Uvrštenjem poznatih veličina u jednadžbu (6.5.15) slijedi da se bijeg neutrona po jedinici površine može prikazati jednostavnim izrazom,

$$\frac{dn}{ds} = 0.5\phi_0. \qquad \textbf{(6.5.16)}$$

Uzmemo li u obzir korekciju koja proizlazi iz transportne teorije neutrona, a prema kojoj je d=2.13D, jednadžba (6.5.16) postaje,

$$\frac{dn}{ds} = 0.485\phi_0. \qquad \textbf{(6.5.17)}$$

6.6 Fizikalna interpretacija difuzijske dužine termičkih neutrona

Zamislimo točkasti izvor iz kojega izlaze termički neutroni. Kretanje tih neutrona, zbog sudara sa jezgrama atoma okolnog materijala, odvija se u veoma nepravilnim cik-cak putanjama. Ipak, na osnovi analize primjera 6.5.1 i 6.5.2 možemo zaključiti da se oni raspodjeljuju ravnomjerno oko izvora te da im gustoća opada s udaljavanjem od izvora. Svaki neutron dospijeva do površine neke zamišljene kugle čije je središte u izvoru neutrona prije nego što je apsorbiran. Moguće je, dakle, definirati neku prosječnu veličinu površine tako zamišljene kugle do koje dospijevaju termički neutroni toku difuzije. Srednju vrijednost kvadrata polumjera tako zamišljene kugle dobivamo iz relacije

$$\bar{r}^2 = \frac{\int_0^r r^2 \left(\phi \Sigma_a 4r^2 \pi dr\right)}{\phi \Sigma_a 4r^2 \pi dr}. \qquad \textbf{(6.6.1)}$$

Nazivnik izraza (6.6.1) jednak je neutronskom izvoru S, jer određuje ukupan broj apsorbiranih neutrona.

Ako se izraz za tok termičkih neutrona oko točkastog izvora u neograničenom moderatoru uvrsti u relaciju (6.6.1) iz jednadžbe (6.5.8), nakon integracije slijedi,

$$\bar{r}^2 = 6L^2. \qquad \textbf{(6.6.2)}$$

Dobivena jednadžba može poslužiti za fizikalnu interpretaciju difuzijske dužine:

Kvadrat difuzijske dužine može se fizikalno interpretirati kao šestina srednje vrijednosti kvadrata udaljenosti koju neutron pređe od izvora do mjesta apsorpcije.

Zadaci uz poglavlje 6.

1. Točkasti izvor termičkih neutrona unutar neograničenog grafitnog bloka emitira 10^6 neutrona/s. Odrediti vrijednost neutronskog toka na udaljenostima 27, 54 i 108cm od izvora.

Usporediti dobivene vrijednosti neutronskog toka sa onima koji bi se dobili na istim udaljenostima unutar grafitne kugle polumjera 1.5m u čijoj je sredini isti izvor neutrona.

2. Točkasti je izvor termičkih neutrona koji emitira 10^{10} neutrona/s smješten u sredini grafitne kugle promjera 30cm. Koliko neutrona u sekundi izlazi iz kugle? Koliko bi se rezultat proračuna bijega neutrona promijenio kada bi materijal kugle bila obična voda?

3. Koliki je rezultantni broj neutrona koji u toku difuzije unutar prostorno neograničenog medija prolaze po jedinici površine kroz plohu udaljenu 5 cm od neograničenog pločastog izvora neutrona intenziteta 10^{15} neutrona/cm^{2}s. Medij u kojem se neutroni kreću je obična voda.

Koliko bi neutrona prelazilo plohu na istoj udaljenosti od izvora kada bi debljina sloja vode s jedne i druge strane pločastog izvora bila 20cm.

4. Izvor neutrona je ravnina u sredini neograničenog grafitnog bloka debljine 2m. Emisija neutrona iz izvora je 10^8 neutrona/cm^{2}s. Koliko se neutrona apsorbira po jedinici površine grafitnog bloka?

5. Bijeg neutrona iz grafitnog bloka debljine 50cm u čijoj je središnjoj ravni izvor neutrona iznosi 10^5 neutrona/cm^2s.

Kako se mijenja istjecanje neutrona iz moderatora ako se uz isti intenzitet izvora neutrona i istu debljinu moderatora grafit zamijeni sa teškom vodom ?

6. Potrebno je odrediti grešku kod računanja difuzijske konstante termičkih neutrona koja se unosi zanemarenjem apsorpcije neutrona u moderatoru (tj. greške koje se javljaju kod primjene izraza 6.2.2 umjesto 6.2.4) za slučaj obične vode, teške vode i grafita.

Računati sa konstantama materijala iz tablice 6.5.1.

Reference uz poglavlje 6.

[1] S. Glasstone, M.E. Edlund, The elements of Nuclear Reactor Theory, Chapter V, Van Nostrand Co Inc., New York, 1952

[2] D.Feretić, Osnove teorije nuklearnog reaktora, poglavlje 2.8 do 2.11, Liber, Zagreb, 1987.

[3] O.C: Jones, Jr,Nuclear Safety Heat Transfer, Chapter 1, Hemisfere Publ.Inc.Washington, 1981.

[4] P.F. Zweifel, Reactor Physics, Chapters 2 and 3, Mc Graw Hill, New York, 1973.

[5] J.R. Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Engineering, Chapters 5 and 6, Addison Wesley Publ. Co., Reading Mass. 1975.

[6] S. Glasstone, A. Sesonke, Nuclear Reactor Engineering, Chapter 3, Van Nostrand Publ. Co., New York, 1967.

[7] S.Feinberg, S.Šihov, V.Trojanskij, Teorija jadernih reaktorov, Atomizdat Moskva 1978.

[8] G.Batja, Osnovi teorii i metodi rasčota jadernih energetičeskih reaktorov, glava 4, Atomizdat, Moskva 1982.

[9] R. Stephenson, Introduction to Nuclear Engineering, Chapter 4, Mc Graw Hill, New York, 1958.

[10] T.Kahan, M.Gauzit, Fizika i rasčot jadernih reaktorov (prevod sa francuskog), glava 4, Atomizdat, Moskva 1960.

7 TEORIJA NUKLEARNOG REAKTORA

7.1 Osnovne karakteristike nuklearnog reaktora

Nuklearni su reaktori postrojenja u kojima se odvijaju nuklearne reakcije fisije izotopa urana, plutonija ili torija.

Prema energiji neutrona koji izazivaju pretežan broj fisija, nuklearni reaktori se dijele na termičke reaktore (kod kojih najveći broj fisija izazivaju termički neutroni) i brze reaktore (kod kojih fisije uglavnom izazivaju brzi, odnosno neusporeni neutroni).

Suštinske komponente svakog nuklearnog reaktora su, pored nuklearnog goriva, moderator (ako se radi o termičkom reaktoru) i rashladno sredstvo (čija je funkcija posebno važna kod energetskih reaktora).

Kod reaktora koji su moderirani s običnom vodom u pravilu moderator vrši i funkciju rashladnog sredstva.

Toplinska se energija, dobivena kao rezultat fisija, smatra osnovnim korisnim proizvodom u energetskim reaktorima, dok je u kod istraživačkih reaktora ta energija u većini slučajeva samo štetan nusprodukt.

Energetski su reaktori temeljna komponenta nuklearnih elektrana. Oni su izvor toplinske energije, koja se u nuklearnoj elektrani na konvencionalan način pretvara u električnu energiju.

Istraživački su reaktori jaki izvori neutrona. Zbog toga su podobni za niz istraživačkih aktivnosti vezanih uz ispitivanje nuklearnih reakcija sa neutronima i njihovih udarnih presjeka, promjene fizikalnih svojstava materijala u neutronskom polju, radijacijska oštećenja organskih i neorganskih materijala , proizvodnja radioaktivnih izotopa.

Osim za istraživanja i proizvodnju energije nuklearni se reaktori u nekim zemljama koriste i za dobivanje aktivnog fisibilnog materijala (plutonija). Pri tome se neaktivni (odnosno tzv. oplodni) materijal, prvenstveno izotop ^{238}U, izlaže neutronskom polju u reaktoru i kod toga dolazi do nuklearne reakcije,

$$^{238}U+n\rightarrow{}^{239}U\rightarrow{}^{239}Np\rightarrow{}^{239}Pu.$$

U toj nuklearnoj reakciji izotop ^{238}U apsorpcijom neutrona prelazi u izotop ^{239}U, a ovaj se putem dviju uzastopnih β emisija transformira najprije u ^{239}Np, a zatim u ^{239}Pu.

U uvodu je napomenuto da su najbitnije komponente termičkog reaktora nuklearno gorivo (sastavljeno iz izotopa urana i/ili plutonija) i moderator. Na funkcioniranje reaktora ima utjecaj i prostorni raspored tih komponenata u jezgri reaktora. Možemo primjerice zamisliti reaktor kod koga je nuklearno gorivo jednoliko raspršeno u moderatoru (disperzija sitnih čestica urana u grafitu, otopina soli urana u vodi) ili reaktor kod kojega je nuklearno gorivo sadržano u šipkama koje su uronjene u moderator. Prvi tip reaktora poznat je kao homogeni reaktor, a drugi kao heterogeni reaktor. Praktički svi današnji reaktori su heterogeni (iznimka su veoma rijetki primjeri starijih istraživačkih reaktora). Homogeni reaktori se ipak redovito spominju u udžbenicima reaktorske tehnike, jer su veoma prikladni za primjenu elementarne teorije reaktora, čiji se dijelovi tada jednostavno modificiraju u oblik primjenjiv i na heterogene reaktore.

7.2 Fizikalna teorija nuklearnog reaktora

Zadatak fizikalne teorije nuklearnog reaktora je ispitati uvjete pod kojima se u određenoj kombinaciji nuklearnog goriva i moderatora te geometrijskim oblicima i veličini reaktorske jezgre može ostvariti samoodržavajuća lančana reakcija, odnosno uvjeti pod kojima jedan reaktor može biti kritičan.

U narednim ćemo razmatranjima imati u vidu samo termičke reaktore. Neki aspekti teorije brzih reaktora će biti predmet razmatranja u poglavlju 7.11.

Bilanca neutrona (razmatrana u poglavlju 6.3) ukazuje da se kritičnost reaktora postiže kada je proizvodnja neutrona u procesima fisije dovoljna za nadoknadu izgubljenih neutrona zbog njihove apsorpcije ili bijega u okolinu. Kod bilanciranja neutrona jedne od energetskih grupa, treba u izvor i gubitak neutrona računati neutrone koji su u tu grupu ušli ili iz nje izašli u toku procesa usporavanja, kao što je to opisano u diskusiji jednadžbe (6.3.3).

Bilanciranje neutrona se u načelu može izvesti na dva načina:

1) Fizikalnom analizom nuklearnih reakcija neutrona u toku njegovog postojanja u reaktoru (tj. od nastanka neutrona u fisiji do trenutka izazivanja nove fisije). Kod toga se uspoređuju upliv na broj neutrona u reaktoru onih nuklearnih reakcija u kojima neutroni nastaju i onih u kojima se oni gube. Ova se analiza vrši razmatranjem takozvanih ciklusa neutrona u reaktoru, a rezultira definicijom četiriju odnosno šest faktora, o kojima ovisi kritičnost neograničenog odnosno ograničenog reaktora. Bitno ograničenje ove metode leži u činjenici da je ona primjenjiva na reaktore sa jednolikim prostornim rasporedom fisijskog i apsorpcijskog materijala (homogeni ili homogenizirani reaktori).

2) Neposrednim numeričkim rješenjem jednadžbi bilance neutrona u više energetskih grupa (jednadžba 6.3.3).

Prvi je način bio veoma popularan u prvo vrijeme razvoja reaktorske tehnike, posebno kod analize starijih grafitom moderiranih reaktora. Elementi te metode se koriste u znatnoj mjeri i danas, ne toliko za konkretna izračunavanja kritičnosti reaktora, koliko za analizu utjecaja pojedinih faktora na parametre reaktora i za fizikalno razumijevanje procesa u reaktoru.

Numerička metoda je razvojem suvremenih računala i kompleksnih računarskih programa dobila na značaju i danas se univerzalno koristi. Mana te metode je u težem praćenju i razumijevanju pojava u reaktoru.

Najpogodnije je paralelno razmatrati elemente jedne i druge metode, jer se i u primjeni najčešće tako postupa. Takav je pristup odabran i kod ove knjige.

7.3 Faktor multiplikacije reaktora

U nuklearnom se reaktoru paralelno odvijaju nuklearne reakcije u kojima neutroni nastaju sa onima koje dovode do njihove apsorpcije. Broj nuklearnih reakcija je u jedinici volumena i jedinici vremena određen produktom neutronskog toka i makroskopskog udarnog presjeka za tu nuklearnu reakciju, $\phi\Sigma$ (poglavlje 2.11). U općem su slučaju u nuklearnom reaktoru neutronski tok i udarni presjeci funkcije položaja $\vec{r}$ i energije neutrona E. Broj se nuklearnih reakcija u jedinici vremena može dobiti integriranjem funkcije $\phi(\vec{r},E)\Sigma(\vec{r},E)$ po volumenu reaktora i po cijelom spektru energija, odnosno rješenjem integrala,

$$\int_V \int_E \phi(\vec{r},E)\Sigma(\vec{r},E)\,dE\,dV\,.$$

Odnos broja generiranih i apsorbiranih neutrona u jedinici vremena u reaktoru je određen relacijom,

$$k_{ef} = \frac{\int\int_{V_g E} \phi(\vec{r},E)\nu\Sigma_f(\vec{r},E)dVdE}{\int\int_{V_r E} \phi(\vec{r},E)\Sigma_a(\vec{r},E)dVdE + \Delta}. \qquad \textbf{(7.3.1)}$$

Brojnik jednadžbe (7.3.1) kvantificira broj nastalih neutrona. To su neutroni proizvedeni u nuklearnim reakcijama fisije. Taj broj ovisi o produktu neutronskog toka, makroskopskog udarnog presjeka za fisiju i broju neutrona po fisiji ν. U nazivniku, prvi član određuje apsorpciju neutrona u reaktoru i ovisi o volumenu reaktora V_r te produktu neutronskog toka i makroskopskog udarnog presjeka za apsorpciju neutrona (jedan i drugi su ovisni o energiji neutrona E i položaju u prostoru), a drugi član, označen kao Δ, određuje gubitak neutrona zbog njihovog bijega iz sustava. Taj je član veoma kompleksan a ovisi o energiji i gustoći neutrona, geometriji sustava te materijalima moderatora i reflektora .

Treba upozoriti da se integracija u brojniku vrši samo po volumenu goriva V_g (jer se fisije događaju samo u nuklearnom gorivu) a u nazivniku po cijelom volumenu i površini reaktora (jer se neutroni apsorbiraju po cijelom volumenu reaktora, a istječu po cijeloj njegovoj površini.).

Faktor k_{ef}, koji, prema izrazu (7.3.1), određuje odnos broja proizvedenih i izgubljenih neutrona je u teoriji reaktora poznat kao efektivni multiplikacijski faktor reaktora. U teoriji reaktora se vrlo često barata i pojmom multiplikacijskog faktora neograničenog reaktora k_∞. Taj se pojam odnosi na reaktor bez bijega neutrona i s tim u vezi konstantnim tokom neutrona u prostoru. Odnos k_{ef}/k_∞ određuje utjecaj bijega neutrona na kritičnost reaktora.

Izraz (7.3.1) je praktički nemoguće riješiti jer pretpostavlja poznavanje kontinuirane ovisnosti neutronskog toka,bijega neutrona i udarnih presjeka o energiji i položaju u prostoru. Zbog toga se taj izraz mora shvatiti više kao definicija k_{ef}, nego kao uputa za izračunavanje tog faktora.

U elementarnoj teoriji nuklearnog reaktora k_∞ prikazuje se kao produkt četiriju faktora, s oznakama ε, η, p i f, koji na bitno pojednostavljen način interpretiraju fizikalne procese u reaktoru.

Formula koja određuje k_∞, inače poznata kao formula četiriju faktora, dana je izrazom,

$$k_\infty = \varepsilon p f \eta . \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

Definicije faktora iz relacije (7.3.2) zasnivaju se na odnosima broja nuklearnih reakcija u širem rasponu neutronskih energija, a mogu se interpretirati na slijedeći način:

Faktor ε

Faktor ε daje odnos ukupnog broja neutrona koji su usporeni ispod praga fisije izotopa ^{238}U (tj. na energiju nižu od oko 1 MeV) i broja neutrona koji su dobiveni u fisijama koje su izazvali termički neutroni.

Faktor ε je redovito nešto veći od jedinice. Postoji naime izvjesna vjerojatnost da će brzi neutroni unutar gorivnog elementa izazvati dodatne fisije bilo ^{238}U, bilo ^{235}U. Doprinos posljednjih kod termičkih reaktora je vrlo malen zbog malog sadržaja izotopa ^{235}U u gorivim elementima tih reaktora.

Faktor p

Faktor p, poznat kao faktor vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije, izražava odnos broja neutrona koji su usporeni do termičke energije (ispod 1eV) i onih koji su u procesu usporavanja prešli gornji prag energije rezonantnog područja izotopa ^{238}U.

Očigledno je da faktor p mora biti manji od jedinice jer je broj neutrona nakon rezonantnog područja umanjen za one neutrone koji su u tom području apsorbirani.

Zahvati neutrona koji se usporavaju po izotopu ^{238}U (koji bi morali rezultirati dodatnim fisijama), su zanemareni. To je zanemarenje podnošljivo kod grafitom moderiranih reaktora jer je kod tih reaktora dobra termalizacija neutrona. Mnogo je manje podnošljivo kod vodom moderiranih reaktora zbog znatnog udjela epitermičkih fisija.

Izvod i matematički oblik izraza koji definira faktor p dan je u poglavlju 5.5.

Faktor f

Faktor f, koji je u teoriji reaktora označen kao faktor iskorištenja termičkih neutrona, je vezan uz nuklearne reakcije u području energija termičkih neutrona. Taj faktor određuje odnos broja termičkih neutrona koji su apsorbirani u nuklearnom gorivu (u fisibilnim i nefisibilnim izotopima) i broja termičkih neutrona koji su apsorbirani u svim apsorberima u reaktoru (uključivši i nuklearno gorivo).

Očigledno je da faktor f mora uvijek biti manji od jedinice.

Treba primijetiti da je utjecaj svih prisutnih apsorbera u reaktoru (moderator konstrukcijski materijali i drugo) na apsorpciju neutrona uzet u račun samo u području termičkih neutrona (gdje su udarni presjeci za apsorpciju najveći), a zanemaren u području neutronskih energija višim od termičke.

Faktor η

Faktor η određuje odnos broja neutrona dobivenih u fisijama i broja apsorbiranih termičkih neutrona u nuklearnom gorivu.

Taj je faktor definiran u poglavlju 4.5, gdje je određena i njegova ovisnost o izotopnom sastavu nuklearnog goriva.

Valja podsjetiti da faktor η bitno ovisi o energiji neutrona koji izazivaju fisiju. U pravilu je veći kod fisija izazvanih brzim neutronima, dok u području rezonantnih energija pokazuje znatne oscilacije. Međutim, kada govorimo o faktoru η radi određivanja multiplikacijskog faktora reaktora uvijek, u smislu dane definicije, mislimo na faktor η za fisije izazvane termičkim neutronima. Numerička vrijednost tog faktora, prema relaciji (4.5.3), ovisi o obogaćenju urana i varira od približno 1.33 za prirodni uran do oko 2.07 za čisti izotop ^{235}U.

Uz objašnjenja fizikalnog značenja faktora ε, p, f i η navedene su aproksimacije i zanemarenja koje njihova primjena uključuje. Uočljivo je da primjena formule četiriju faktora pretpostavlja koncentraciju specifičnih nuklearnih reakcija u tri područja neutronskih energija:

a) Područje energije fisijskih neutrona u kojemu se uzima u obzir mogućnost fisije u oba izotopa urana.

b) Područje rezonantnih energija neutrona u kojemu je jedina nuklearna reakcija s kojom se računa zahvat neutrona u izotopu ^{238}U.

c) Područje termičkih energija neutrona. U tom se području energija računa i s apsorpcijama neutrona u materijalima reaktora koji ne spadaju u nuklearno gorivo i s apsorpcijama neutrona u nuklearnom gorivu. Dio apsorbiranih neutrona u nuklearnom gorivu dovodi do fisija izotopa ^{235}U.

Kao što je već napomenuto, formula s četiri faktora je nastala u ranoj dobi razvoja teorije nuklearnog reaktora, kada je njezina primjena bila vrlo praktična jer ona ne zahtjeva detaljno poznavanje udarnih presjeka materijala, nego samo odnose specifičnih nuklearnih reakcija u širem energetskom rasponu. Ti su odnosi, osim toga, bili pristupačni i direktnim mjerenjima.

Isto tako valja ponovo naglasiti da je aproksimacija k_∞ putem formule s četiri faktora točnija kod reaktora s dobrom termalizacijom neutrona (reaktori moderirani grafitom ili teškom vodom), nego kod lakovodnih reaktora, gdje veći broj fisija izazivaju epitermički neutroni. Kod tih posljednjih, naime, zbog gustog pakovanja nuklearnog goriva u jezgri je termalizacija neutrona prilično slaba.

Kod proračuna brzih reaktora aproksimacija faktora multiplikacije neutrona sa četiri faktora nije primjenjiva.

Faktor multiplikacije neizmjerno velikog reaktora je pokazatelj mogućnosti ostvarenja kritičnosti u reaktoru kod kojega je zanemaren bijeg neutrona u okolinu.

U stvarnom je reaktoru bijeg neutrona prisutan, što dovodi do povećanog gubitka neutrona, a time i do smanjenja faktora multiplikacije.

Faktor bijega neutrona daje odnos broja neutrona koji je preostao u procesu i broja neutrona koji bi bili prisutni zanemarenjem njihovog bijega iz sustava (tj. kada bi reaktor bio neizmjerno velik). Uobičajeno je faktore bijega neutrona posebno računati za termičke neutrone, a posebno za neutrone viših energija. Oznake tih faktora su L_t i L_b.

Umnožak k_∞ s faktorima bijega neutrona daje brojčano manji pokazatelj (jer je očigledno je da su faktori bijega uvijek manji od jedinice), poznat kao faktor multiplikacije reaktora konačnih dimenzija, odnosno efektivni multiplikacijski faktor k_{ef}.

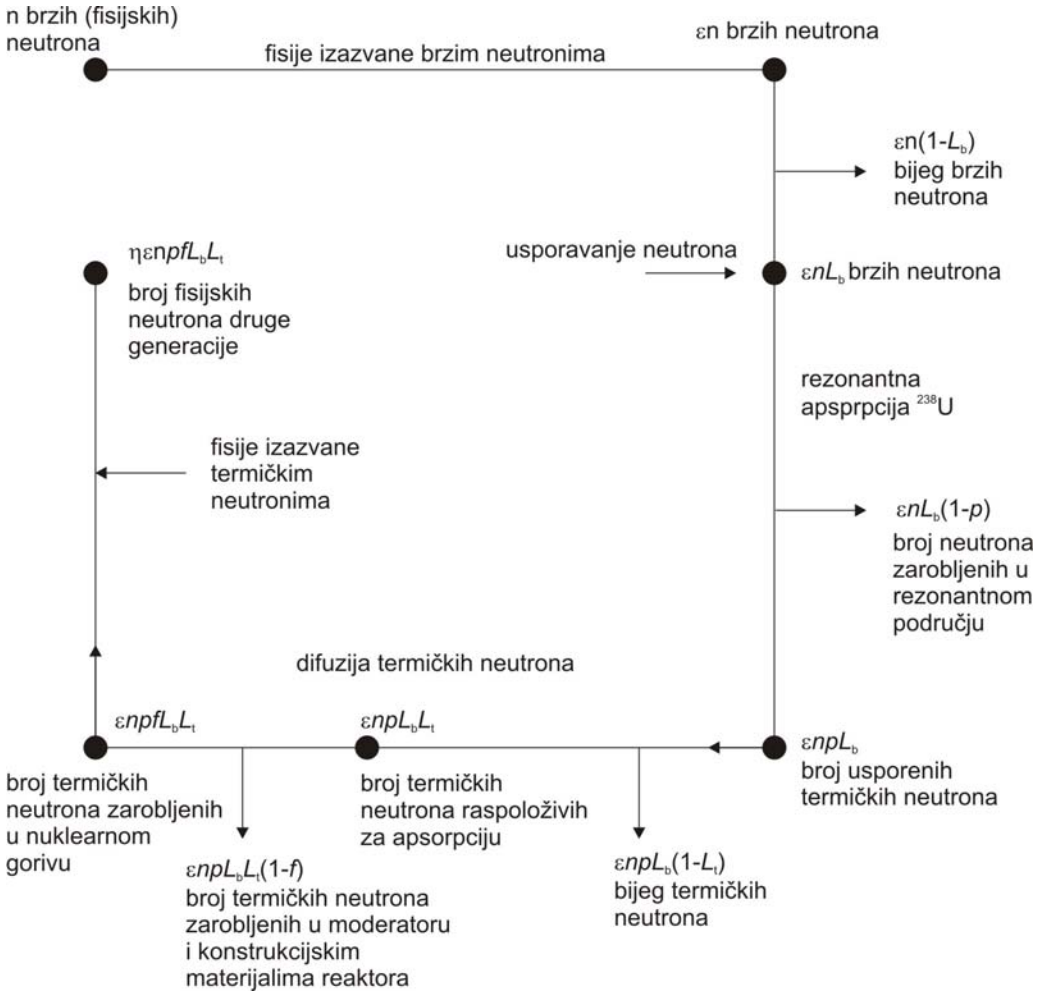
Dakle,

$$k_{ef} = k_\infty L_b L_t = \varepsilon p f \eta L_b L_t . \qquad \textbf{(7.3.3)}$$

Formula (7.3.3.) se ponekad imenuje kao formula šest faktora.

Iz definicije faktora bijega proizlazi da kod povećavanja dimenzija reaktora faktori bijega neutrona teže jedinici, a vrijednost faktor k_{ef} se približava faktoru k_∞.

Iako je ranije razmotreno fizikalno značenje svih faktora u jednadžbi (7.3.3), nije očigledna logična veza tih faktora s faktorom multiplikacije neutrona, odnosno s uvjetom za kritičnosti reaktora. Tu ćemo vezu utvrditi analizom tzv. ciklusa neutrona u reaktoru, koji je prikazan na slici 7.3.1.



Slika 7.3.1 Ciklus neutrona u reaktoru

U okviru ciklusa neutrona u reaktoru se promatraju nuklearne reakcije jedne generacije neutrona, tj. od nastanka fisijskih neutrona do ponovne apsorpcije usporenih (termičkih) neutrona u nuklearnom gorivu.

Zamislimo n neutrona koji su nastali u fisijama u reaktoru i popratimo njihov tok u neutronskom ciklusu. Od n fisijskih neutrona, ćemo, zbog nuklearnih reakcija brze fisije, dobiti nε brzih neutrona. Od tih će, uzevši u obzir bijeg brzih neutrona, do rezonantnih energija biti usporeno $n\varepsilon L_b$ neutrona. Zbog rezonantne apsorpcije, ukupan broj neutrona koji dospijevaju u područje termičkih energija će dakle biti $n\varepsilon pL_b$. Nadalje, od tih će neutrona za apsorpciju biti raspoloživo $n\varepsilon pL_bL_t$ neutrona, jer faktor L_t određuje dio termičkih neutrona koji nisu izbjegli u okolinu. Nuklearno će gorivo apsorbirati $n\varepsilon pfL_bL_t$ termičkih neutrona, i zbog toga u fisijama nastaje $n\eta\varepsilon pfL_bL_t$ fisijskih neutrona. Budući da smo analizu ciklusa neutrona započeli s n fisijskih neutrona, to je faktor umnožavanje neutrona u ciklusu jednak $\eta\varepsilon pfL_bL_t$.

Usporedbom sa jednadžbom (7.3.3) proizlazi da je faktor umnožavanja neutrona istovjetan sa k_{ef}.

Budući da se uvjet za održavanje samoodržavajuće lančane reakcije u reaktoru, odnosno uvjet kritičnosti reaktora, ekvivalentan uvjetu da se broj neutrona u sistemu ne smanjuje, evidentno je da kod kritičnog reaktora mora biti, $k_{ef} \geq 1$.

Uvjet kritičnosti reaktora se dakle može izraziti relacijom,

$$\eta\varepsilon pfL_bL_t = k_\infty L_bL_t = k_{ef} \geq 1 \qquad \textbf{(7.3.4)}$$

U svakom je reaktoru $k_\infty > k_{ef}$ (jer su faktori bijega neutrona manji od jedinice).

Primjer 7.3.1

U nekom je reaktoru s prirodnim uranom kao nuklearnim gorivom ustanovljeno da povećanje broja neutrona zbog fisija izazvanih brzih neutronima iznosi 3%, da se 6% neutrona gubi zbog bijega u toku usporavanja, te da 9% neutrona biva apsorbirano u području rezonantnih energija. Nadalje, u području termičkih energija se 5% neutrona gubi zbog bijega, a 92% od preostalih termičkih neutrona apsorbira nuklearno gorivo.

Jesu li u takvom reaktoru ispunjeni uvjeti za samoodržavajuću lančanu reakciju i koliki je k_∞?

Rješenje:

Iz danih podataka proizlazi da faktori o kojima ovisi k_{ef} iznose redom,

$\varepsilon=1.03$, $L_b=0.94$, $p=0.91$, $L_t=0.95$, $f=0.92$.

Za prirodni urana η iznosi približno 1.33.

Za reaktor s navedenim karakteristikama jednadžba (7.3.4) daje,

$k_{ef}=1.024$; $k_\infty=1.147$

Rezultat pokazuje da u reaktoru postoje uvjeti za ostvarenje samoodržavajuće lančane reakcije.

7.4 Uvjeti kritičnosti homogenih reaktora

Razmatranje uvjeta kritičnosti homogene mješavine nuklearnog goriva i moderatora, bez obzira što se iz praktičnih razloga takvi reaktori ne izvode, može biti koristan uvod u analizu pokazatelja o kojima ovisi kritičnost reaktora.

U poglavlju 7.3. definirano je značenje faktora ε, f, p i η, kao parametara koji, uz naznačena zanemarenja i pojednostavljenja, mogu indicirati da li neka struktura sastavljena od nuklearnog goriva i moderatora može biti kritična.

Pokazatelj moguće kritičnosti je faktor k_∞, koji za kritičan reaktor mora biti veći od jedinice.

Problem koji sada treba razmotriti se svodi na određivanje faktora ε, f, p, η te k_∞ korištenjem poznatih materijalnih konstanti (udarni presjeci i gustoća materijala) homogene mješavine.

Faktor brze fisije (faktor ε)

Faktor ε je definiran kao faktor brze fisije. Taj faktor ovisi o vjerojatnosti da neutron, koji je nastao u fisiji, neusporen reagira sa drugim atomom nuklearnog goriva. Ako se fisijski neutron kreće unutar gorivne šipke (kod heterogenih reaktora) takva vjerojatnost nije zanemariva zbog znatne koncentracije atoma urana unutar takve šipke.

Naprotiv, kada je u pitanju razrijeđena homogena mješavina urana i moderatora, možemo zamisliti kao da su atomi urana okruženi atomima moderatora, pa neutron ima mnogo veću mogućnost da se sudarom s atomom moderatora uspori na energiju nižu od praga fisije ^{238}U nego da izazove fisiju.

Iz navedenog razloga možemo za razrijeđene homogene mješavine pretpostaviti da je faktor ε približno jednak jedinici.

To, međutim, ne vrijedi za veoma koncentrirane homogene mješavine, jer je kod njih vjerojatnost sudara fisijskog neutrona s atomom nuklearnog goriva mnogo veća.

Faktor iskorištenja termičkih neutrona (faktor f)

Faktor f, odnosno faktor iskorištenja termičkih neutrona, prema definiciji u poglavlju 7.3., određuje odnos broja termičkih neutrona koji su apsorbirani u nuklearnom gorivu i broja termičkih neutrona koji su apsorbirani u svim materijalima reaktora.

Odnos broja apsorbiranih termičkih neutrona je identičan s odnosom broja nuklearnih reakcija apsorpcije. Apsorpcija neutrona u materijalu s makroskopskim udarnim presjekom za apsorpciju neutrona Σ_a, unutar nekog volumena V u kojemu je neutronski tok ϕ_V izračunava se integralom,

$$\int_V \Sigma_a \phi_V dV .$$

Faktor iskorištenja termičkih neutrona se, na osnovi tako definiranog izraza za apsorpciju neutrona, može prikazati relacijom:

$$f = \frac{\int_{V_g} \Sigma_{ag} \phi_g dV}{\int_{V_g} \Sigma_{ag} \phi_g dV + \int_{V_m} \Sigma_{am} \phi_m dV + ...} . \qquad \textbf{(7.4.1)}$$

Indeks g se odnosi na nuklearno gorivo, a indeks m na moderator. Nazivnik se proteže na sve materijale u reaktoru koji apsorbiraju termičke neutrone (konstrukcijski materijali, regulacijski elementi….).

U homogenoj mješavini očigledno je volumen koji zaprema moderator istovjetan sa volumenom koji zaprema nuklearno gorivo. U takvoj mješavini je također isti tok neutrona u blizini atoma nuklearnog goriva i moderatora.

Budući da se i udarni presjeci za apsorpciju neutrona smatraju neovisnim o prostoru izraz (7.4.1) za homogenu mješavinu nuklearnog goriva i moderatora svodi se na veoma jednostavan oblik:

$$f = \frac{\Sigma_{ag}}{\Sigma_{ag} + \Sigma_{am}} = \frac{\sigma_{ag}}{\sigma_{ag} + \frac{N_m}{N_g} \sigma_{am}} . \qquad \textbf{(7.4.2)}$$

U homogenom je reaktoru faktor iskorištenja termičkih neutrona ovisan jedino o udarnim presjecima za apsorpciju neutrona nuklearnog goriva i moderatora i odnosu broja atoma jednog i drugog materijala u mješavini.

Primjer 7.4.1

Koliki je faktor iskorištenja termičkih neutrona u homogenoj mješavini prirodnog urana i grafita sa odnosom atoma urana i grafita 1:400?

Rješenje

Mikroskopski udarni presjeci za apsorpciju termičkih neutrona su, prema Tablici D.1 (Dodatak 1),

- za prirodni uran, $\sigma_{ag}=7.59*10^{-28}$ m^2

- za grafit, $\sigma_{ag}=0.0034*10^{-28}$ m^2.

Uvrštenjem u jednadžbu (7.4.2), uz $N_m/N_g=400$, se dobiva f=0.848.

Nuklearno gorivo apsorbira 84.8% termičkih neutrona.

Faktor vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije (faktor p)

U okviru analize usporavanja neutrona uz apsorpciju bio je definiran i faktor vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije, označen kao faktor p (jednadžba 5.5.7 u poglavlju 5.5). Izraz kojim je taj faktor definiran ima oblik,

$$p = e^{-\int_E \frac{\Sigma_a}{\xi(\Sigma_a+\Sigma_s)} * \frac{dE}{E}} \qquad \textbf{(7.4.3)}$$

Integracija u eksponentu izraza (7.4.3) se provodi duž cijelog područja rezonantnih energija.

Kod definicije faktora p je navedeno da se za njegovo izračunavanje uzima u obzir samo rezonantna apsorpcija u izotopu ^{238}U, dok se apsorpcija neutrona u fisibilnom izotopu (^{235}U), koja bi morala rezultirati dodatnim fisijama, zanemaruje. Iz tog se razloga makroskopski udarni presjek u izrazu (7.4.3) odnosi samo na izotop ^{238}U.

Važno je napomenuti da je izraz (7.4.3) zapravo izveden za homogenu mješavinu nuklearnog goriva i moderatora (iako to u toku izvođenja nije eksplicitno navedeno). U toku izvođenja naime pretpostavljeno je da neutronski tok ovisi jedino o makroskopskim udarnim presjecima unutar nekog energetskog intervala, bez obzira na prostorni položaj materijala koji apsorbira neutrone i materijala koji ih usporava, te da je tok neutrona unutar jednog energetskog intervala isti u oba materijala. Takve pretpostavke upravo odgovaraju homogenoj mješavini nuklearnog goriva i moderatora.

Kod daljnje razrade izraza (7.4.3) uzeti će se u obzir da je udarni presjek za elastičan sudar Σ_s praktički neovisan o energiji neutrona, pa se proširenjem sa Σ_s taj izraz može pisati kao,

$$p = \exp\left(-\frac{N_g}{\xi\Sigma_s} \int_E \sigma_{au} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{au}+\Sigma_s} \frac{dE}{E} \right) = \exp\left(-\frac{N_g}{\xi\Sigma_s} I_{ef} \right). \qquad \textbf{(7.4.4)}$$

Integral u eksponentu izraza (7.4.4) je takozvani efektivni rezonantni integral I_{ef} ,koji ima dimenziju mikroskopskog udarnog presjeka. Integral ovisi o apsorpcijskom presjeku urana u rezonantnom energetskom području, ali i o makroskopskom udarnom presjeku moderatora za elastičan sudar.

Zbog kompliciranе ovisnosti udarnog presjeka za apsorpciju neutrona rezonantnih energija u uranu o energiji neutrona, efektivni rezonantni integral izračunava se pomoću empiričkih izraza.

Za homogenu mješavinu urana i moderatora efektivni rezonantni integral izražen u 10^{-28} m^2 (odnosno u barnima) dan je formulom,

$$I_{ef} = 3.8\left(\frac{\Sigma_s}{N_u} \right)^{0.42}. \qquad \textbf{(7.4.5)}$$

Uvrštenjem u izraz (7.4.2) dobivano faktor p za homogenu mješavinu.

$$p = \exp\left(-\frac{3.8}{\xi}\left[\frac{N_g}{\Sigma_s} \right]^{0.58} \right). \qquad \textbf{(7.4.6)}$$

Primjer 7.4.2

Koliki je faktor izbjegavanja rezonantne apsorpcije za mješavinu prirodnog urana i grafita iz primjera 7.4.1?

Rješenje:

Podaci za grafit su:

ξ=0.158 σ_s=4.75*10^{-28} m^2 (Tablica D.1, Dodatak 1).

Uvrštenjem u jednadžbu 7.4.6 (sukladno definiciji empiričkog izraza (7.4.5) mikroskoskopski udarni presjek treba uvrstiti u barnima, dakle kao σ_s=4,75) dobiva se, p=0.740.

Iz rezultata proizlazi da kod smjese prirodnog urana i grafita danog sastava, izotop ^{238}U, unutar energetskog području rezonantne apsorpcije, apsorbira 26% neutrona.

Multiplikacijski faktor neograničenog reaktora (faktor k_∞)

Multiplikacijski faktor neograničenog reaktora za homogenu smjesu nuklearnog goriva i moderatora,za koju je faktor ε približno jednak jedinici, određen je relacijom,

$$k_\infty = \eta f p. \qquad \textbf{(7.4.7)}$$

.

Primjer 7.4.3

Potrebno je provjeriti da li se u reaktoru sastavljenog iz homogene smjese prirodnog urana i grafita sa bilo kojim odnosom broja atoma može ostvariti samoodržavajuća lančana reakcija, odnosno da li takav reaktor može biti kritičan.

Rješenje:

Utjecaj odnosa broja atoma moderatora i nuklearnog goriva na k_∞ svodi se na ovisnost produkta pf o tom broju (faktor η je ovisan samo o izotopnom sastavu nuklearnom goriva pa prema tome neovisan i o sastavu smjese, a za prirodni uran iznosi 1.33). Maksimalna će se vrijednost k_∞ postići kod onog sastava smjese kod koje taj produkt dostiže najveću vrijednost. Jednadžbe (7.4.2) i (7.4.6) pokazuju da se kod povećanja odnosa atoma moderatora i goriva N_m/N_g faktor f monotono smanjuje, a faktor p monotono raste.

Ako se ta ovisnost ispita za odnose N_m/N_g 200, 300, 400 i 500 dobivamo na osnovi jednadžbi (7.4.2), (7.4.6) i (7.4.7) slijedeće rezultate:

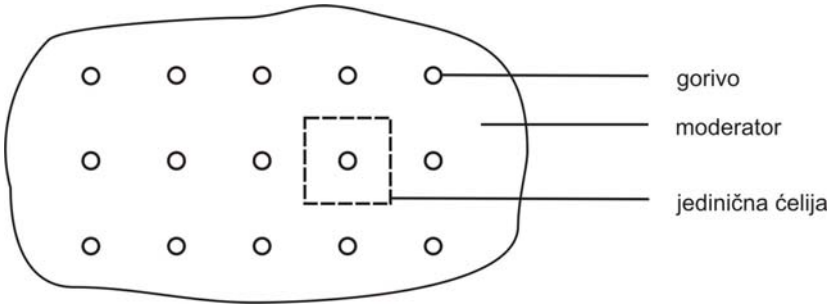
N_m/N_g	200	300	400	500
f	0.918	0.882	0.848	0.817
p	0.637	0.700	0.740	0.767
k_∞	0.778	0.821	0.835	0.833

Račun pokazuje da k_∞ kod odnosa atoma moderatora i urana od oko 400 postiže maksimalnu vrijednost. Ta maksimalna vrijednost međutim osjetljivo je ispod jedinice, što znači da nema nikakvih uvjeta da se u homogenoj mješavini prirodnog urana i grafita postigne kritičnost.

7.5 Uvjeti kritičnosti heterogenih reaktora

Heterogeni reaktori sadrže nuklearno gorivo prostorno odvojeno od moderatora. Najčešće se gorivo sastoji od šipki koje su uronjene u moderator u geometrijski pravilnom rasporedu.

U razmatranju koje slijedi smatrati ćemo da je geometrijski raspored gorivnih šipki nepromjenjiv u prostoru, tako da možemo izdvojiti tzv. jediničnu ćeliju koja se sastoji iz gorivne šipke i pripadajućeg moderatora. Ta je ćelija po svim karakteristikama identična svim ostalim ćelijama u reaktoru (Slika 7.5.1).

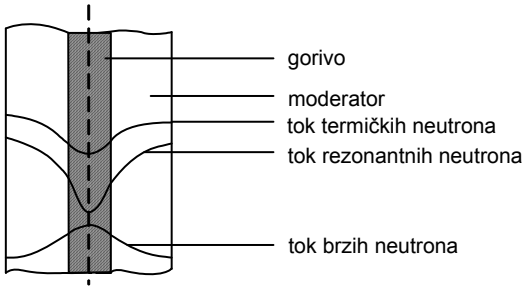


Slika 7.5.1 Jedinična ćelija heterogenog reaktora

Tok neutrona u nuklearnom gorivu i moderatoru.

Nuklearno gorivo i moderator su materijali koji se po nuklearnim reakcijama sa neutronima bitno razlikuju. Moderator je materijal koji učinkovito usporava neutrone (što karakterizira veliki faktor $\xi\Sigma_s$) i koji ima maleni udarni presjek za apsorpciju neutrona. Materijal nuklearnog goriva (najčešće je to prirodni ili malo obogaćeni uran u formi metala ili oksida) ima suprotna svojstva od moderatora. Vrlo je neefikasan za usporavanje neutrona, a ima bitno veće apsorpcijske presjeke za neutrone, posebno za one rezonantnih i termičkih energija.

Iz navedenog se razloga profili neutronskog toka u nuklearnom gorivu i moderatoru u priličnoj mjeri međusobno razlikuju, što je ilustrirano slikom 7.5.2.



Slika 7.5.2 Radijalna raspodjela neutronskog toka u jediničnoj ćeliji

Da bismo razumjeli prostorne raspodjele toka brzih, rezonantnih i termičkih neutrona u nuklearnom gorivu i moderatoru moramo uvažiti slijedeće činjenice:

Nuklearno gorivo je jak apsorber termičkih i rezonantnih neutrona. Zbog toga su gustoća i tok neutrona tih energija u unutrašnjosti gorivne šipke manji nego uz njezinu površinu. Nuklearno je gorivo dakle ponor takvih neutrona. Moderator je, naprotiv, izvor neutrona rezonantne i termičke energije (jer se u moderatoru oni proizvode iz fisijskih neutrona usporavanjem). Iz navedenog nije

teško zaključiti da će tok neutrona termičkih i rezonantnih energija biti najveći u moderatoru, a najmanji unutar gorivne šipke.

Obrnuto vrijedi za brze neutrone. Za takve je neutrone izvor nuklearno gorivo (jer se u gorivu proizvode u fisijama), a ponor moderator koji ih usporava.

Već sama kvalitativna slika raspodjele neutronskog toka unutar gorivne šipke i moderatora daje mogućnost donošenja važnog zaključka, koji u bitnoj mjeri utječe na uvjete kritičnosti heterogenih reaktora. Naime, na temelju poznate činjenice da je broj nuklearnih reakcija proporcionalan s tokom neutrona, možemo zaključiti da će zbog manjeg neutronskog toka unutar gorivne šipke i broj nuklearnih reakcija za apsorpciju termičkih i rezonantnih neutrona u nuklearnom gorivu biti manji nego što bi to bio da je tok neutrona bio isti kao u moderatoru. Opisana je pojava inače poznata kao "efekt zasjenjenja" (vanjski slojevi gorivne šipke zasjenjuju unutarnje slojeve od utjecaja neutronskog toka).

Na osnovi ranijih definicija faktora kritičnosti reaktora lako je zaključiti da efekt zasjenjenja djeluje na povećanje faktora vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije (faktor p), ali i na smanjenje faktora iskorištenja termičkih neutrona (faktor f).

Kvantitativno određivanje uvjeta kritičnosti heterogenih reaktora je uvjetovano poznavanjem ranije definiranog faktora $k_\infty=\varepsilon p f \eta$ kod tih reaktora.

Faktore f i p za heterogeni reaktor ćemo definirati na osnovi ekvivalentnih izraza homogenog reaktora (izrazi 7.4.1 i 7.4.4), a faktor ε na osnovi specifične analize koja je prezentirana u dodatku 4, ili iskustvenih izraza od kojih su neki dani i u ovom poglavlju.

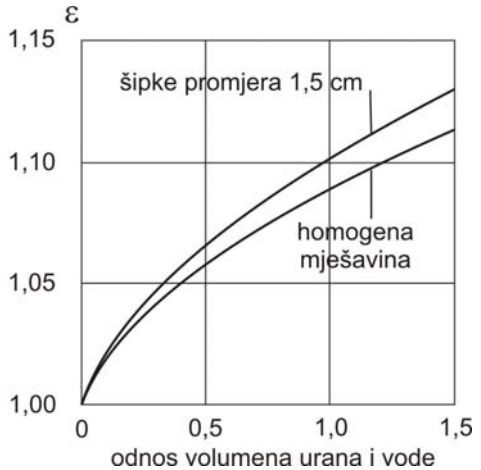
Faktor η se određuje na isti način kao i kod homogenih reaktora. Taj faktor, naime, ovisi samo o vrsti nuklearnog goriva, a ne o vrsti moderatora ili o načinu na koji je gorivo pomiješano sa moderatorom.

Razmotrimo sada metode za kvantificiranje navedenih faktora.

Faktor fisije s brzim neutronima (faktor ε)

Kod heterogenih reaktora nužno je računati s faktorom fisije izazvane brzim neutronima. Naime, kod debljine gorive šipke veće od slobodnog puta brzih neutrona u materijalu goriva, postoji vjerojatnost dodatnih fisija zbog interakcija brzih fisijskih neutrona s atomima nuklearnog goriva prije nego što se oni počnu usporavati u moderatoru. Zbog toga je faktor ε kod heterogenih reaktora, kao i kod koncentriranih homogenih otopina nuklearnog goriva u moderatoru, veći od jedinice.

Kao primjer, na slici 7.5.3 prikazana je ovisnost faktora ε o odnosu volumena lako obogaćenog urana i obične vode. Jedna se krivulja odnosi na heterogeni reaktor sa šipkama urana promjera 1.5cm, a druga na homogenu mješavinu urana i vode.



Slika 7.5.3 Faktor ε u ovisnosti volumena urana i vode

Iz slike se razabire da faktor ε raste s povećanjem odnosa urana i vode, i ne ovisi bitno o debljini šipki (kod gusto pakovanih lakovodnih rešetki, naime, postoji znatan utjecaj fisija od brzih neutrona koji potječu iz jedne šipke na susjedne šipke, tako da očekivani utjecaj debljine pojedine šipke ne dolazi do izražaja).

Manje obogaćenje urana (ispod 5%), koje je uobičajeno kod lakovodnih reaktora, praktički ne utječe na faktor ε.

Kod lakovodnih reaktora posebno je teško analitički proračunati faktor ε. Kod tih reaktora zbog gustog pakovanja goriva dolazi do interakcija brzih neutrona u susjednim gorivim šipkama, pa kod izračunavanja pribjegavamo iskustvenim relacijama. Jednu od takvih relacija prema [5] je:

$$\varepsilon = 1 + \frac{0.156}{1 + 0.62\rho_m\left(V_m / V_g\right) + 0.228\left(V_k / V_g\right)}, \qquad \textbf{(7.5.1)}$$

gdje je,

ρ_m - gustoća moderatora (g/cm)

V_g, V_m, V_k - volumen urana (sveden na volumen metalnog goriva), volumen moderatora i volumen obloge gorivog elementa

Primjer 7.5.1

Jezgra lakovodnog reaktora ima slijedeće karakteristike:

materijal goriva	UO_2
obogaćenje urana	2.7%
promjer tablete UO_2	0.762 cm
gustoća UO_2	10.2 g/cm^3
materijal obloge	Nehrđajući čelik
debljina obloge	0.041 cm
korak kvadratične rešetke	1.194 cm
gustoća moderatora pri radnoj temperaturi	0.7 g/cm^3

Koliki je faktor ε za takvu jezgru?

Rješenje:

Volumen urana po jedinici dužine šipke sveden na metalni uran

$$V_g = V_{UO_2}\frac{\rho_{UO_2}}{\rho_U} = 0.245\ \text{cm}^3/\text{cm}.$$

(Gustoća metalnog urana ρ_u je približno 19000 kg/m^3.)

Odnos volumena moderatora i goriva V_m/V_g=3.75.

Odnos volumena obloge i goriva V_k/V_g=0.4

Nakon uvrštenja dobivenih veličina u relaciju (7.5.1) slijedi,

ε=1.057.

U cilju ilustracije analitičke metode za određivanje faktora ε, u Dodatku 4. je izložen pojednostavljeni način za proračun tog faktora. Iako opisana metoda ne daje rezultate za neposrednu praktičku primjenu (posebno ne kod lakovodnih reaktora), korisna je za upoznavanje analitičkih metoda koje se primjenjuju kod proračuna interakcije fisijskih neutrona sa atomima nuklearnog goriva.

Faktor iskorištenja termičkih neutrona (faktor f)

Prosječna vrijednost neutronskog toka unutar volumena V bilo kojeg materijala je,

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V}\int \phi dV ,$$

Ako pretpostavimo da su udarni presjeci materijala neovisni o položaju u prostoru, možemo izraz (7.4.1) pisati u obliku,

$$f = \frac{\Sigma_{ag}\overline{\phi_g}V_g}{\Sigma_{ag}\overline{\phi_g}V_g + \Sigma_{am}\overline{\phi_m}V_m + \Sigma_{ak}\overline{\phi_k}V_k + \ldots}, \qquad \textbf{(7.5.2)}$$

Indeksi g,m i k se odnose na gorivo,moderator i konstrukcijske materijale u jezgri reaktora (obloge gorivnih elemenata, potpore gorivnih elemenata vodilice kontrolnih šipki i sl.).

U nazivniku bi trebalo još dodati apsorbere termičkih neutrona koji služe za kontrolu lančane reakcije (regulacijske šipke, otopljeni apsorberi, sagorljivi apsorberi), te apsorbere koji nastaju kao posljedica fisija atoma nuklearnog goriva (između kojih su najznačajniji neki izotopi ksenona i samarija).

Ako uzmemo u račun samo apsorpciju neutrona u moderatoru i nuklearnom gorivu, jednadžba (7.5.2) može se napisati u obliku,

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{\Sigma_{am}\overline{\phi_m}V_m}{\Sigma_{ag}\overline{\phi_g}V_g}. \qquad \textbf{(7.5.3)}$$

Izrazi (7.5.2) i (7.5.3) bili bi neposredno upotrebljivi da su poznati odnosi prosječnih tokova termičkih neutrona u materijalima reaktora. Nažalost, ti se odnosi mogu dobiti tek nakon dosta kompliciranog računa, koji je predmet razmatranja u Dodatku 3. Rezultat tog računa pokazuje da se izraz (7.5.3) može za slučaj gorivne šipke polumjera r_g koja se nalazi unutar jedinične ćelije ekvivalentnog polumjera r_m (ekvivalentni polumjer je objašnjen u Dodatku 3.) izračunati iz formule,

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_m\Sigma_{am}}{V_g\Sigma_{ag}}F + (E-1), \qquad \textbf{(7.5.4)}$$

Faktori F i E mogu aproksimirati izrazima:

$$F \approx 1 + \frac{(K_g r_g)^2}{8} - \frac{(K_g r_g)^4}{192}\ldots$$

$$E \approx 1 + \frac{(K_m r_m)^2}{2}\left[\ln\left(\frac{r_m}{r_g}\right) - \frac{3}{4}\right], \qquad \textbf{(7.5.5)}$$

gdje su K_g i K_m su inverzne vrijednosti difuzijskih dužina termičkih neutrona u nuklearnom gorivu i moderatoru.

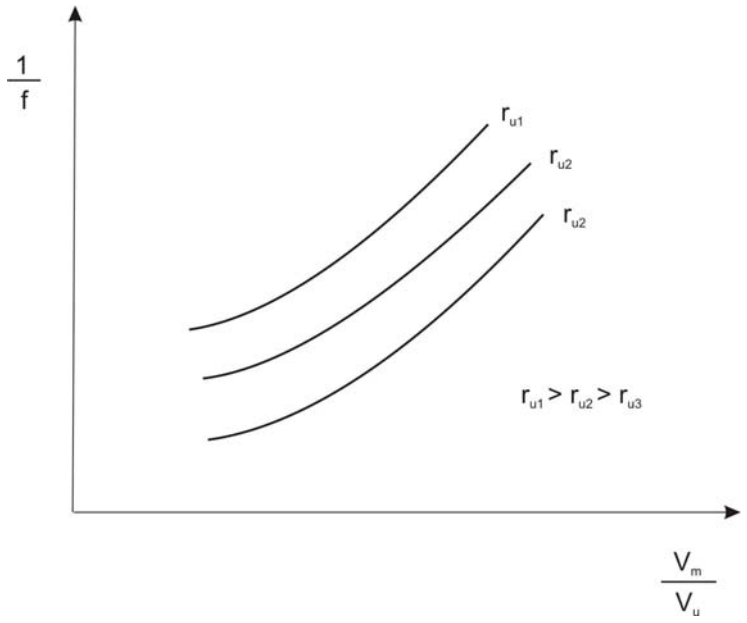
Dani izrazi za računanje faktora f vrijede kada su razmaci gorivih šipki mnogo veći od njihovih polumjera ($r_m >> r_g$). Izrazi se dakle mogu primjenjivati za dobro moderirane jezgre. Manje će se točne rezultate dobiti kada se njima proračunava kritičnost reaktorskih jezgara sa gusto raspoređenim gorivnim šipkama, kakve se nalaze kod lakovodnih reaktora.

U Dodatku 3. su jednadžbe, aproksimirane izrazima (7.5.5), dobivene korištenjem difuzijske teorije neutrona. Difuzijska pak teorija netočno određuje kretanje neutrona u visoko apsorbirajućoj sredini, kao što je nuklearno gorivo. Bolje rezultate možemo dobiti ako K_g računamo izrazom posuđenim iz transportne teorije neutrona:

$$\frac{K_g}{\Sigma_{ag} + \Sigma_{sg}} = \text{th}\left(\frac{K_g}{\Sigma_{sg}}\right). \qquad \textbf{(7.5.6)}$$

Približna vrijednost K_g za metalni uran iznosi $64.5 m^{-1}$. Odgovarajuća vrijednost K_g za oksid urana dobiva se množenjem navedene brojke s odnosom gustoće oksida urana i metalnog urana.

Interesantno je ispitati ovisnost faktora iskorištenja termičkih neutrona heterogenih reaktora o debljini gorivne šipke i odnosa volumena moderatora i urana u jezgri reaktora. Rezultat analize prikazuje slika 7.5.4



Slika 7.5.4 Faktor iskorištenja termičkih neutrona u ovisnosti o odnosu volumena moderatora i urana i polumjera gorivne šipke

Iz slike proizlazi da, zadržavajući isti odnos volumena moderatora i urana u reaktoru, faktor f raste ako polumjer šipke pada. Sa stanovišta povećanja tog faktora je dakle povoljno ako iz iste količine urana napravimo više tanjih gorivih šipki umjesto manje debljih šipki. Faktor f raste što se više približavamo konfiguraciji homogenog reaktora. Zaključak je logičan i slijedi iz činjenice da se veći zahvat termičkih neutrona u gorivu postiže ako je depresija toka tih neutrona unutar gorive šipke manja.

Ako, s druge strane, uz istu debljinu gorive šipke, raste odnos volumena moderatora i urana u jezgri (šipke se razmiču)faktor f opada, jer se povećava zahvat termičkih neutrona u moderatoru.

Primjer 7.5.2

Potrebno je odrediti faktor iskorištenja termičkih neutrona za jezgru reaktora sastavljenu iz šipki promjera 10mm iz 3% obogaćenog UO_2 gustoće 10500kg/m^3, koje su uronjene u običnu vodu. Šipke su raspoređene u kvadratnoj rešetki sa korakom 21mm.

Rješenje:

Udarni presjeci izotopa urana za apsorpciju termičkih neutrona energije 0.025eV:

-za ^{235}U $680*10^{-28}$ m^2

-za ^{238}U $2.71*10^{-28}$ m^2

Iz navedenih se podataka dobiva makroskopski udarni presjek oksida urana navedenog obogaćenja i gustoće, $\Sigma_{ag}=53.9m^{-1}$.

Inverzna vrijednost difuzijske dužine termičkih neutrona u oksidu urana $K_g=64.5(10500/19000)=35.6m^{-1}$ (dobiveno na osnovi vrijednosti $K_g=64.5m^{-1}$ za metalni uran i gustoću tog materijala 19000kg/m^3).

Iz tablice 6.5.1 se može očitati podatak za makroskopski udarni presjek H_20 za apsorpciju termičkih neutrona temperature 293K, $\Sigma_{am}=2.22m^{-1}$.

Difuzijska dužina za H_20 iz iste tablice je 0.0285m. Znači, $K_m=35.1m^{-1}$.

Polumjer moderatora u ekvivalentnoj ćeliji: $r_m = 21/\sqrt{\pi} = 11.85mm$.

Odnos volumena moderatora i goriva $V_m/V_g=4.61$.

Iz relacije (7.5.5) dobiva se, F=1.00395 i E-1=0.01.

Na temelju dobivenih rezultata i primjenom jednadžbe (7.5.4) izlazi,

$$\frac{1}{f} = 1 + 4.61 * \frac{2.22}{53.9} * 1.003\,95 + 0.01 = 1.20,$$

odnosno, f=0.833.

U većine vodom moderiranih reaktora razmaci gorivih šipki manji su nego u razmatranim primjeru. Međutim, kod gusto pakiranih rešetki, kao što je ranije napomenuto, primjena izvedenih izraza za izračunavanje faktora f daje manje pouzdane rezultate.

Faktor izbjegavanja rezonantne apsorpcije u heterogenim reaktorima (faktor p)

Proračun faktora izbjegavanja rezonantne apsorpcije neutrona za heterogene reaktore se razlikuje od onog za homogene reaktore (što je bilo predmet razmatranja u poglavlju 7.4), jer se i kod rezonantnih neutrona treba računati s znatnom depresijom neutronskog toka unutar gorive šipke. Raspodjele neutronskog toka u jediničnoj ćeliji su ilustrirane slikom 7.5.2. Iz tog će razloga broj nuklearnih reakcija apsorpcije rezonantnih neutrona unutar gorive šipke biti manji nego da depresije neutronskog toka nema.

Na uvodu ovog poglavlja opisanu smo pojavu odredili kao "efekt zasjenjenja", uz napomenu da ona povećava faktor p kod heterogenih reaktora u odnosu na homogene reaktore.

U cilju kvantitativne analize faktora p u heterogenim reaktorima poći ćemo od izraza (7.4.4), koji vrijedi za homogene reaktora i u koji ćemo odmah uvesti definirani efektivni rezonantni integral I_{ef}. Izraz time dobiva oblik,

$$p = \exp\left(-\frac{N_g I_{ef}}{\xi \Sigma_s}\right). \qquad \textbf{(7.5.7)}$$

Efektivni rezonantni integral ima značaj mikroskopskog udarnog presjeka za apsorpciju rezonantnih neutrona u nuklearnom gorivu.

Transformaciju izraza (7.5.7) u oblik koji je primjenjiv na heterogene reaktore ćemo izvesti na način sličan kao kod analize faktora f. Jednadžbu (7.5.1) kojom je definiran faktor f u heterogenim reaktorima, možemo riječima opisati kao odnos brojeva nuklearnih reakcija apsorpcije termičkih neutrona u nuklearnom gorivu i u cijelom reaktoru (odnosno u cijeloj jediničnoj ćeliji).

Eksponent izraza (7.5.7) izražava također odnos brojeva nuklearnih reakcija . Ovdje se radi o odnosu broja nuklearnih reakcija apsorpcije neutrona rezonantnih energija u nuklearnom gorivu i broja nuklearnih reakcija raspršenja tih neutrona u moderatoru pomnoženim sa ξ (nazivnik u eksponentu izraza (7.5.7) ustvari je faktor sposobnosti usporavanja neutrona definiran u poglavlju 5.5).

Kod heterogenih reaktora vrijedi u osnovi isti izraz za proračun faktora p kao i kod homogenih reaktora. Međutim, upravo zbog opisane depresije neutronskog toka unutar gorivne šipke, do odnosa broja nuklearnih reakcija u gorivoj šipki i moderatoru možemo doći integracijom funkcije neutronskog toka po volumenu nuklearnog goriva i moderatora.

Ako umjesto toga, suglasno s jednadžbom (7.5.2), računamo s prosječnim vrijednostima neutronskog toka u nuklearnom gorivu i moderatoru, eksponent izraza (7.5.7)postaje:

$$\frac{N_g V_g \overline{\phi_g} I_{ef}}{\xi N_m V_m \overline{\phi_m} \sigma_{sm}}.$$

Kod heterogenih se reaktora efektivni rezonantni integral određuje iz empiričkih izraza koji su po svojem obliku različiti od onih koji vrijede za homogene reaktore. Apsorpcija neutrona rezonantne energije u nuklearnom gorivu, kao i odnos prosječnih neutronskih tokova u gorivoj šipki i moderatoru ovisi o vrsti nuklearnog goriva i odnosu površine i mase gorive šipke.

Jedan od uobičajenih empiričkih izraza za izračunavanje efektivnog rezonantnog integrala kod heterogenih reaktora sa prirodnim ili slabo obogaćenim uranom je,

$$I_{ef} = \left[A + B\left(\frac{S}{M}\right)^{1/2}\right] * 10^{-28}\ m^2, \qquad \textbf{(7.5.8)}$$

gdje su,

- S površina gorive šipke (cm^2)
- M masa gorive šipke (g)
- A i B konstante koje ovise o vrsti nuklearnog goriva, a iznose:
  - za metalni uran A=2.8 B=27.1
  - za oksid urana A=3.0 B=28.0.

Za gorive šipke kružnog presjeka $\frac{S}{M} = \frac{2}{r_g \rho_g}$.

Empiričkim je izrazom (7.5.8) obuhvaćen i odnos tokova neutrona u gorivu i moderatoru, pa se faktor p za heterogene reaktore dobiva iz pojednostavljene formule,

$$p = \exp\left(-\frac{N_g V_g I_{ef}}{\xi N_m V_m \sigma_{sm}} \right). \qquad \textbf{(7.5.9)}$$

Numerički podaci za faktore sposobnosti usporavanja neutrona rezonantnih energija dani su u tablici 7.5.1. Podaci se malo razlikuju od onih u tablici 5.3.1, u kojoj je računato s udarnim presjecima za elastične sudare sa termičkim neutronima.

Tablica 7.5.1 Sposobnost usporavanja neutrona rezonantnih energija

	$\xi\Sigma_s$ (cm^{-1})
obična voda	1.46
teška voda	0.178
grafit	0.0608

Primjer 7.5.3

Koliki je faktor izbjegavanja rezonantne apsorpcije neutrona za jezgru reaktora iz primjera 7.5.1?

Rješenje:

Za šipku promjer 10 mm iz 3% obogaćenog oksida urana gustoće 10500kg/m^3 je efektivni rezonantni integral,

$$I_{ef} = \left[3 + 28 \left(\frac{2}{0.5 * 10.5} \right)^{1/2} \right] * 10^{-28} = 20.28 * 10^{-28}\ m^2 .$$

Broj atoma ^{238}U po jedinici volumena (jednadžba 2.11.1),

$$N = 0.97 \frac{0.6023 * 10^{27}}{270} 10\,500 = 2.27 * 10^{28}\ \text{atoma/m}^3.$$

Iz tablice 7.5.1, za običnu vodu, $\xi\Sigma_s$=1.46cm^{-1}=146 m^{-1}

Odnos volumena goriva i moderatora, prema primjeru 7.5.1, V_g/V_m=0.217.

Uvrštenjem brojčanih vrijednosti u izraz (7.5.9) slijedi,

$$p = e^{-0.0684} = 0.934 .$$

Primjer 7.5.4

Potrebno je odrediti faktor multiplikacije k_∞ heterogenog reaktora koji se sastoji od šipki prirodnog metalnog urana smještenih u grafitne blokove. Jedinične ćelije su kvadratne sa stranicom a. Ispitati utjecaj promjene stranice jedinične ćelije na k_∞ u rasponu od 17 do 30cm. Promjer gorivne šipke je 2.8cm.

Rješenje:

Konstante materijala u proračunu su:

- Za uran A=238 ρ_g=19 000kg/m^3 N=4.8*10^{28} atoma/m^3

σ_{ag}=7.57*10^{-28} m^2 (prosječni udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona po atomu prirodnog urana)

K_g=64.5m^{-1} (inverzna vrijednost difuzijske dužine termičkih neutrona u metalnom prirodnom uranu - relacija (7.5.6))

λ_g=4.86cm (prosječan slobodni put brzih neutrona kroz metalni uran - vidi Dodatak 4.)

η_g=1.33 (Poglavlje 4.5, primjer 4.5.1)

- Za grafit A=12 ρ_g=1 600kg/m^3 N=8.03*10^{28} atoma/m^3

σ_{ag}=0.0045*10^{-28} m^2 (udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona u grafitu)

$\xi\Sigma_{sm}$=6.08m^{-1} (sposobnost usporavanja grafita za neutrone rezonantne energije - Tablica 7.5.1)

K_m=1.786m^{-1} (inverzna vrijednost difuzijske dužine neutrona u grafitu - Tablica 6.5.1)

Na temelju danih veličina slijedi, r_g/λ_g=0.288. Iz tablice D.4.1(Dodatak 4.) interpolacijom se dobiva P=0.276, a iz formule (D.4.3) slijedi ε=1.022.

Efektivni rezonantni integral odrediti ćemo iz jednadžbe (7.5.8). Za metalni uran su konstante A=2.8 i B=27.1. Odnos S/M za gorivnu šipku polumjera 1.4cm iznosi 0.075. Uvrštenjem se dobiva I_{ef}=10.22*10^{-28} m^2.

Produkt $K_g r_g$ potreban za izračunavanje koeficijenta F (jednadžba 7.5.4) iznosi 0.903, pa je odgovarajuća vrijednost F=1.098.

Faktori f i p ovise o koraku rešetke (tj. o stranici kvadrata jedinične ćelije), računati ćemo ih za vrijednosti a=17, 19, 21, 23, 25 i 30cm korištenjem relacija (7.5.3) i (7.5.9).

Račun daje rezultate navedene u tablici:

a	17	19	21	23	25	30
r_m	9.59	10.72	11.85	12.98	14.10	16.93
V_m/V_g	45.92	57.63	70.64	84.96	100.43	145.24
r_m/r_g	6.85	7.65	8.49	9.27	10.07	12.09
$K_m r_m$	0.171	0.191	0.212	0.232	0.252	0.302
E-1	0.017	0.023	0.031	0.040	0.050	0.079
1/f	1.067	1.086	1.108	1.133	0.160	1.238
p	0.839	0.869	0.892	0.909	0.923	0.946
k_∞	1.069	1.088	1.094	1.091	1.082	1.039

Rezultat proračuna pokazuje da se u reaktoru koji se sastoji iz šipki prirodnog urana u grafitnim blokovima može postići kritičnost ($k_\infty>1$), odnosno samoodržavajuća lančana reakcija. Najveća vrijednost k_∞ dobiva se kod jedinične ćelije sa stranicom od oko 21cm (to je ćelija za koju produkt pf postiže maksimalnu vrijednost).

Korisno je rezultate ovog primjera usporediti sa rezultatima iz primjera 7.4.3. U tom je naime primjeru pokazano da se kod homogene mješavine istih materijala (prirodni uran i grafit) ne može dobiti $k_\infty>1$ u bilo kojem odnosu miješanja. Tumačenje ove pojave treba tražiti u već spomenutom efektu zasjenjenja kod heterogenih reaktora, koji je posebno značajan za smanjenje apsorpcije neutrona rezonantne energije unutar gorivne šipke.

7.6 Bilanca neutrona u kritičnom reaktoru

U poglavljima 7.4 i 7.5 bavili smo se uvjetima kritičnosti neograničenog reaktora, zapravo analizom mogućnosti da se u izvjesnom sastavu nuklearnog goriva i moderatora ostvari kritična masa. Vidjeli smo da se analiza svodi na ispitivanje da li je u reaktoru k_∞ jednak ili veći od jedinice. Ako je $k_\infty>1$, ostvaren je nužan uvjet da se iz danog materijala može izgraditi reaktor konačnih dimenzija. U tom slučaju, naime, možemo dozvoliti izvjestan bijeg neutrona iz sustava, a da efektivni faktor multiplikacije k_{ef} ne padne ispod jedinice.

U poglavlju 7.3 je definiran efektivni faktor multiplikacije neutrona k_{ef} relacijom,

$$k_{ef} = k_\infty L_b L_t \qquad \textbf{(7.6.1)}$$

gdje su L_b i L_t faktori bijega brzih i termičkih neutrona.

Jednadžba (7.6.1) se ponekad u literaturi navodi kao formula s 6 faktora, za razliku od k_∞ koji je produkt 4 faktora.

Kritičnost reaktora konačnih dimenzija se iskazuje kroz uvjet da je k_{ef} jednak jedinici (u praksi će se tražiti da i taj faktor bude nešto veći od jedinice radi kompenzacije dodatnih negativnih utjecaja na reaktivnost). Što je pak k_∞ bliži jedinici to, prema jednadžbi (7.6.1), možemo dozvoliti manji bijeg neutrona iz reaktora, tj. moramo izgraditi veći reaktor.

Kvantifikacija odnosa između k_∞, bijega neutrona i dimenzija reaktora je predmet razmatranja u ovom poglavlju. U cilju rješavanja postavljenog problema treba najprije razmotriti raspodjelu neutronskog toka u reaktoru konačnih dimenzija.

Analiza prostorne raspodjele toka neutrona u reaktoru zasniva se na rješavanju jednadžbe bilanca neutrona, opisane u poglavlju 6.3. U tom je poglavlju obrazloženo da se bilanca odnosi na monoenergetske neutrone. Zbog činjenice da su u reaktoru energije neutrona raspodijeljene kontinuirano od energija fisijskih neutrona do energija termičkih neutrona, pokazano je da se bilanca neutrona može postaviti uz uvjet da se spektar energija neutrona u reaktoru podijeli na pojedina energetska područja unutar kojih grupiramo neutrone u energetske grupe, smatrajući pri tome da se unutar svake takve grupe energija neutrona može smatrati konstantnom. Za svaku se energetsku grupu izračunavaju prosječne ponderirane konstante materijala, odnosno tzv. grupne konstante.

Temelj za proračun raspodjele toka neutrona energetske grupe g u reaktoru u stacionarnom stanju daje jednadžba (6.3.3):

$$D_g \nabla^2 \phi_g - \Sigma_{ag}\phi_g - \sum_{h=g+1}^{N} \Sigma_{g\to h}\phi_g + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h\to g}\phi_h = -S_g . \qquad \textbf{(7.6.2)}$$

Značenje pojedinih članova jednadžbe objašnjeno je u poglavlju 6.3.

Logično je da se sa izborom većeg broja energetskih grupa postiže veća točnost proračuna, ali se time i znatno otežava proračun. Uobičajeno je da se kod praktičnih proračuna termičkih reaktora broj energetskih grupa ne uzima iznad 4.

Točnost u proračunu raspodjele neutronskog toka u reaktoru pomoću malog broja energetskih grupa je veća ako je zastupljenost termičkih neutrona u reaktoru veća. Termički se neutroni obično smatraju jednom energetskom grupom, a ostale energetske grupe odnose se na neutrone viših energija. Kod reaktora sa zanemarivim udjelom termičkih neutrona u energetskom spektru (brzi reaktori) treba računati sa znatno većim brojem energetskih grupa (10 i više grupa).

U upotrebi su i kompliciranije metode za rješavanje jednadžbe bilanca neutrona, koje polaze od jednadžbe transporta neutrona. Jedna od je od tih metoda, poznata kao metoda "Monte Carlo", je u priličnoj mjeri proširena radi poboljšanja točnosti difuzijske teorije (homogenizacija parametara materijala, generiranje efektivnih udarnih presjeka energetskih grupa). Transportna se teorija primjenjuje i u slučajevima višedimenzionalnog tretiranja raspodjele neutronskog toka, kao i u slučajevima komplicirane geometrije.

Rješenje bilance neutrona s dvije energetske grupe

Razmotriti ćemo postupak rješavanja bilance neutrona koja sadrži konstante materijala neovisne o položaju u prostoru, a sastoji se iz svega dvije energetske grupe. Prednost postupka je u jednostavnom analitičkom tretiranju, a nedostatak što u primjeni postavlja značajna ograničenja.

U cilju primjene dvogrupnog postupka podijeliti ćemo spektar energija neutrona u svega dvije energetske grupe.

Prvom ćemo grupom obuhvatiti usrednjene parametre svih neutrona čije su energije više od energije termičkih neutrona. Druga grupa se odnosi na termičke neutrone. Nadalje, u skladu sa gore danom napomenom konstante materijala ćemo smatrati neovisnim o prostornim koordinatama.

Slični smo uvjet postavili i za korištenje formule sa 4 faktora.

Reaktor koji bi u potpunosti udovoljio navedenoj pretpostavci je homogeni reaktor. Heterogeni se reaktori također mogu računati tim postupkom, ako imaju jednake jedinične ćelije. Naime, kod takvih se ćelija može, primjenom postupka homogenizacije, raspodjela neutronskog toka računati kao da se radi o homogenom reaktoru. Kod heterogenih su reaktora ipak prisutne lokalne varijacije neutronskog toka unutar svake jedinične ćelije (slika 7.5.2). Međutim, kod razmatranja raspodjele neutronskog toka u cijelom reaktoru te se lokalne varijacije zanemaruju, a globalna se raspodjelu toka neutrona u prvoj i drugoj energetskoj grupi tretira kao da se radi o homogenoj sredini.

Kod pretvorbe jednadžbe (7.6.2) u oblik prikladan za dvogrupnu analizu može se zanemariti apsorpcija brzih neutrona u reaktoru (zbog malenih udarnih presjeka za nuklearne reakcije s tim neutronima). Time drugi član jednadžbe otpada, pa se gubitak neutrona prve energetske grupe svodi samo na bijeg neutrona i na neutrone koji se usporavanjem prebacuju u drugu grupu.

Neutroni se u toku usporavanja gube, naročito zbog rezonantnih apsorpcija, pa će broj neutrona koji dospijevaju u drugu grupu biti manji od onog broja koji bi rezultirao iz elastičnih sudara. Ta se pojava uzima u obzir množenjem broja neutrona s faktorom vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije (faktor p). Bijeg brzih neutrona uzet je u obzir prvim članom njihove bilance.

Uz navedene napomene bilance neutrona za prvu i drugu grupu postaju:

$$D_1\nabla^2\phi_1 - \Sigma_1\phi_1 + S_1 = 0 \qquad \textbf{(7.6.3)}$$

$$D_2\nabla^2\phi_2 - \Sigma_{a2}\phi_2 + p\Sigma_1\phi_1 = 0. \qquad \textbf{(7.6.4)}$$

Indeksi 1 se odnose na prvu, a indeksi 2 na drugu energetsku grupu neutrona.

Makroskopski udarni presjek Σ_1, koji se pojavljuje u bilanci prve grupe neutrona (jednadžba (7.6.3)), je efektivni udarni presjek za prijelaz neutrona iz prve u drugu grupu zbog elastičnih sudara.

U smislu ranijih napomena u jednadžbama (7.6.3) i (7.6.4) samo tokovi neutrona ϕ_1 i ϕ_2 smatraju se ovisnim o prostornim koordinatama, dok se svi ostali parametri tretiraju kao konstante.

Kod rješavanja sustava jednadžbi (7.6.3) i (7.6.4) smatrati ćemo da se na sistem može primijeniti formula sa 6 faktora, tj. da se uvjet kritičnosti reaktora može s dovoljnom točnosti izraziti jednadžbom (7.6.1).

Formula s 6 faktora omogućuje da se treći članovi u jednadžbama (7.6.3)i (7.6.4), dakle članovi koji određuje izvore neutrona u prvoj i drugoj energetskoj grupi, izraze pomoću tokova neutrona u tim energetskim grupama. Do rezultata dolazimo korištenjem postupka opisanog kod razmatranja ciklusa neutrona u reaktoru (slika 7.3.1), iz čega proizlazi:

Izvor termičkih neutrona je $p\Sigma_1\phi_1$. Broj termičkih neutrona apsorbiranih u nuklearnom gorivu je dat sa $pfL_t\Sigma_1\phi_1$, pa će izvor brzih neutrona, odnosno član izvora S_1 u jednadžbi (7.6.3) biti $pf\varepsilon\eta L_t\Sigma_1\phi_1 = k_\infty L_t\Sigma_1\phi_1$

S druge strane, broj apsorbiranih termičkih neutrona $\phi_2\Sigma_{a2}$, pa će nuklearno gorivo apsorbirati $f\phi_2\Sigma_{a2}$ termičkih neutrona. Iz tih će apsorpcija rezultirati $\varepsilon\eta f\phi_2\Sigma_{a2}$ brzih neutrona, koji će nakon usporavanja proizvesti $\varepsilon\eta fpL_b\phi_2\Sigma_{a2} = k_\infty L_b\phi_2\Sigma_{a2}$ termičkih neutrona. Time je određen izvor termičkih neutrona u jednadžbi (7.6.4), koji mora biti ekvivalentan s $p\Sigma_1\phi_1$.

Zamjenom S_1 i $p\Sigma_1\phi_1$ u jednadžbama (7.6.3) i (7.6.4) s dobivenim vrijednostima, one nakon male preraspodjele postaju:

$$\nabla^2\phi_1 - \frac{\Sigma_1(1-k_\infty L_t)}{D_1}\phi_1 = 0 \qquad \textbf{(7.6.5)}$$

$$\nabla^2\phi_2 - \frac{\Sigma_{a2}(1-k_\infty L_b)}{D_2}\phi_2 = 0. \qquad \textbf{(7.6.6)}$$

Relacije (7.6.5) i (7.6.6) određuju prostornu raspodjelu neutronskog toka brzih (ϕ_1) i termičkih (ϕ_2) neutrona unutar nuklearnog reaktora. Jedini fizikalni parametar o kojemu ta raspodjela ovisi je koeficijent uz ϕ_1 odnosno ϕ_2. Taj parametar, koji karakterizira prostornu zakrivljenost neutronskog toka unutar reaktora ima značajnu ulogu u teoriji nuklearnog reaktora. U literaturi se redovito obilježava s B (odnosno B^2), što proizlazi od engleske riječi "buckling" (zakrivljenje).

Rješenje sustava jednadžbi (7.6.5) i (7.6.6) moguće je uz pretpostavku da je u svakoj točki prostora zakrivljenje toka brzih i termičkih neutrona jednako, tj. da su tokovi brzih i termičkih neutrona međusobno proporcionalni.

Uz takvu pretpostavku moguće je pisati:

$$\frac{\nabla^2\phi_1}{\phi_1} = \frac{\nabla^2\phi_2}{\phi_2} = -B^2. \qquad \textbf{(7.6.7)}$$

Iz definicije B^2 proizlazi da je dimenzija tog faktora m^{-2}.

Na temelju jednadžbe (7.6.7) moguće je u jednadžbama (7.6.5) i (7.6.6) izjednačiti koeficijente uz ϕ_1 i ϕ_2. Time dobivamo:

$$\frac{1-k_\infty L_t}{\left(\frac{D_1}{\Sigma_1}\right)} = \frac{1-k_\infty L_b}{\left(\frac{D_2}{\Sigma_{a2}}\right)} = -B^2. \qquad \textbf{(7.6.8)}$$

Odnos D_2/Σ_{a2} uveden je za termičke neutrone u poglavlju 6.5. pod nazivom kvadrat difuzijske dužine termičkih neutrona L^2.

Odnos pak D_1/Σ_1 za brze neutrone još nije definiran. Taj ćemo odnos, koji ima istu dimenziju kao L^2, označiti sa L_s^2. Taj parametar, poznat je kao kvadrat dužine usporavanja neutrona ima fizikalno značenje koje je opisano u poglavlju 7.8, a funkcija je prosječnog puta koji brzi neutron prijeđe prije nego što se uspori.

Na temelju danih napomena relacija (7.6.8) svodi se na sustav jednadžbi,

$$k_\infty L_t = 1 + B^2 L_s^2$$

$$k_\infty L_b = 1 + B^2 L^2 .$$

Ako se dobiveni sustav jednadžbi usporedi sa jednadžbom (7.6.1) možemo odmah napisati izraze koji definiraju faktore bijega brzih i termičkih neutrona za $k_{ef}=1$:

$$L_b = \frac{1}{1+B^2 L_s^2} \qquad \textbf{(7.6.9)}$$

$$L_t = \frac{1}{1+B^2 L^2} \qquad \textbf{(7.6.10)}$$

Uvrštenjem u (7.6.1) dobivamo formulu kojom je izražen uvjet kritičnosti reaktora prema dvogrupnoj metodi (ili, kako se u literaturi češće navodi "dvogrupnoj teoriji"),

$$k_{ef} = \frac{k_\infty}{\left(1+B^2 L^2\right)\left(1+B^2 L_s^2\right)} \geq 1. \qquad \textbf{(7.6.11)}$$

Dobiveni izraz daje vezu između parametara materijala i njihovog rasporeda unutar reaktora (što se odražava u veličini parametara k_∞, L i L_s) i faktora zakrivljenja neutronskog toka u kritičnom reaktoru. Kasnije će se pokazati da faktor zakrivljenja neutronskog toka B^2, uz dane rubne uvjete, jednoznačno određuje profil neutronskog toka u kritičnom reaktoru i njegove dimenzije.

Iz izraza (7.6.9) i (7.6.10) slijedi da faktori bijega neutrona L_b i L_t rastu kada se B^2 smanjuje. Budući da se sa povećanjem dimenzija reaktora faktori bijega neutrona povećavaju, da bi se kod neizmjerno velikog reaktora približili jedinici (vidi poglavlje 7.3), očigledno je da se B^2 mora smanjivati kada dimenzije reaktora rastu.

Ako je B vrlo malen dozvoljeno je u nazivniku jednadžbe (7.6.11) zanemariti B^4, pa se ta jednadžba svodi na,

$$k_{ef} = \frac{k_\infty}{1 + B^2\left(L^2 + L_s^2\right)}. \qquad \textbf{(7.6.12)}$$

Zbroj $L^2+L_s^2$ je u teoriji reaktora poznat kao kvadrat migracijske dužine neutrona sa oznakom M^2. Migracijska dužina neutrona uključuje put usporavanja i put difuzije neutrona.

U posebno pojednostavljenom proračunima primjenjuje se postupak poznat kao jednogrupni postupak (ili jednogrupna metoda). Jednogrupni postupak zanemaruje postojanje brzih neutrona u reaktoru, tj. kritičnost reaktora računa se kao da u fisijama ne nastaju brzi, nego termički neutroni. Bilanca neutrona u tom slučaju svodi se samo na bilancu termičkih neutrona. Uvjet kritičnosti reaktora po jednogrupnom postupku možemo neposredno dobiti iz jednadžbe (7.6.11) ili (7.6.12) postavkom da je faktor bijega brzih neutrona jednak jedinici (pošto se njihovo postojanje zanemaruje). Uvrštenjem u jednu ili drugu jednadžbu $L_s^2=0$ proizlazi,

$$k_{ef} = \frac{k_\infty}{1 + B^2L^2} \geq 1. \qquad \textbf{(7.6.13)}$$

Jednadžba (7.6.13) je po strukturi slična jednadžbi (7.6.12), pa se iz tog razloga jednadžba (7.6.12), naziva i jednadžba modificirane jednogrupne teorije.

Izvor termičkih neutrona prema modelu kontinuiranog usporavanja neutrona

Kod utvrđivanja raspodjele termičkih neutrona u reaktoru alternativno je moguć još jedan prilaz. Taj se prijelaz zasniva na pretpostavci kontinuiranog usporavanja neutrona u reaktoru. Usporavanje neutrona je u stvarnosti diskontinuiran proces. Neutroni gube energiju samo u sudarima s jezgrama moderatora, dok je između sudara njihova energija konstantna. Potreban broj sudara za usporenje neutrona ovisan je o vrsti moderatora (vidi tablicu 5.2.1). Pretpostavka o kontinuiranom gubitku energije neutrona bolje odgovara za moderatore veće atomske težine, jer je kod njih prosječan gubitak energije po sudaru manji. Na osnovi aproksimacije o kontinuiranom usporavanju neutrona razrađena je teorija koja daje odnos prostorne raspodjele neutronskog toka i energije neutrona, poznata kao Fermijeva teorija dobi neutrona. Osnove te teorije prikazani su u Dodatku 5. Teorija dobi neutrona daje podlogu za definiranje člana izvora termičkih neutrona na poseban način.

U Dodatku 5 pokazano je da se izvor neutrona termičke grupe na osnovi teorije dobi neutrona može prikazati izrazom,

$$k_\infty \Sigma_{a2} \phi_2 e^{-B^2\tau_{th}}$$

gdje je τ_{th} tzv. dob termičkih neutrona, s dimenzijom m^2.

Bilanca termičkih neutrona (jednadžba 7.6.4) time postaje,

$$D_2\nabla^2\phi_2 - \Sigma_{a2}\phi_2 + k_\infty\Sigma_{a2}\phi_2 e^{-B^2\tau_{th}} = 0. \qquad \textbf{(7.6.14)}$$

Iz izraza (7.6.14) se nakon malog preuređenja dobiva,

$$\nabla^2\phi_2 + \phi_2 \frac{k_\infty e^{-B^2\tau_{th}} - 1}{\left(\frac{D_2}{\Sigma_{a2}}\right)} = 0.$$

Budući da je odnos D_2/Σ_{a2} jednak L^2, faktor zakrivljenja neutronskog toka postaje,

$$B^2 = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau_{th}} - 1}{L^2}.$$

Na osnovi dobivenog izraza neposredno slijedi da se uvjet kritičnosti reaktora u kojem je udovoljen model kontinuiranog usporavanja neutrona može izraziti formulom,

$$k_{ef} = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau_{th}}}{1 + B^2 L_s^2} \geq 1. \qquad \textbf{(7.6.15)}$$

Usporedbom relacija (7.6.15) i (7.6.11) primjećuje se da se one razlikuju samo u faktoru bijega brzih neutrona. U jednadžbi (7.6.11) taj je faktor jednak

$$\frac{1}{1 + B^2 L_s^2}$$

a u jednadžbi (7.6.15),

$$e^{-B^2\tau_{th}}.$$

Jedan i drugi faktor se za malena zakrivljenja neutronskog toka međusobno približavaju, jer je uz $B^2\tau_{th} << 1$

$$e^{-B^2\tau_{th}} \approx 1 - B^2\tau_{th} \approx \frac{1}{1 + B^2\tau_{th}}.$$

Iz tog izvoda očito je da dužina usporavanja neutrona L_s^2 i dob termičkih neutrona τ_{th} imaju istovjetna značenja, pa se jednadžba (7.6.11) može alternativno pisati kao,

$$k_{ef} = \frac{k_\infty}{\left(1 + B^2 L^2\right)\left(1 + B^2\tau_{th}\right)} \geq 1. \qquad \textbf{(7.6.16)}$$

7.7 Difuzijska dužina termičkih neutrona i dužina usporavanja neutrona u reaktoru

U okviru razmatranja uvjeta kritičnosti reaktora dvogrupnim postupkom, u poglavlju 7.6, definirana je difuzijska dužina termičkih neutrona L i dužina usporavanja neutrona u reaktoru L_s. U ovom će se poglavlju osvijetliti fizikalni značaj i način određivanja tih veličina u reaktorskoj sredini. Treba naime uzeti u obzir da su uvjeti za apsorpciju i termalizaciju neutrona u reaktoru različiti od onih u čistom moderatoru, pa će i parametri L i L_s ovisiti o sastavu i materijalima reaktora. Numeričke su vrijednosti za L i L_s u čistim moderatorima dane u tablici 7.7.1. (vrijednosti za L su već ranije navedene, u tablici 6.5.1).

Tablica 7.7.1 Difuzijska dužina termičkih neutrona i dužina usporavanja fisijskih neutrona u moderatorima

Moderator	L [m]	L_s [m]

H_2O	0.0285	0.052
D_2O	1.410	0.114
Grafit	0.560	0.192

Difuzijska dužina termičkih neutrona u reaktoru

Difuzijska dužina definirana je u poglavlju 6.5. kao drugi korijen odnosa difuzijske konstante i makroskopskog udarnog presjeka za apsorpciju termičkih neutrona, tj., $L = (D/\Sigma_a)^{1/2}$.

Ako je sredina unutar koje se kreću termički neutroni sastavljena iz mješavine atoma moderatora i nuklearnog goriva (za tu analizu nema bitnijeg utjecaja je li mješavina homogena ili heterogena), očigledno je da će difuzijska konstanta i makroskopski apsorpcijski presjek biti različiti u odnosu na odgovarajuće vrijednosti u čistom moderatoru. Uran je mnogo jači apsorber termičkih neutrona od moderatora, pa će sumarni udarni apsorpcijski presjek mješavine urana i moderatora biti veći nego kod čistog moderatora. Zbog toga će difuzijska dužina termičkih neutrona u mješavini moderatora i nuklearnog goriva, odnosno u nuklearnom reaktoru, biti odgovarajuće kraća.

S druge strane, difuzijska konstanta D ovisi o udarnom presjeku za elastični sudar, na koji nuklearno gorivo, zbog malene koncentracije u moderatoru, nema bitnijeg utjecaja. Zbog toga možemo konstantu D smatrati praktički istom u čistom moderatoru kao i u mješavini nuklearnog goriva i moderatora.

Difuzijsku dužinu u reaktoru na osnovi provedene diskusije jednostavno izraziti ćemo pomoću difuzijske dužine termičkih neutrona u čistom moderatoru na slijedeći način:

$$L_r^2 = L_m^2 \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_{am} + \Sigma_{ag}} \frac{V_r}{V_m}, \qquad \textbf{(7.7.1)}$$

gdje je,

L_r^2, L_m^2 kvadrat difuzijske dužine termičkih neutrona u reaktoru i moderatoru

Σ_{ag}, Σ_{am} makroskopski udarni presjeci za apsorpciju termičkih neutrona u nuklearnom gorivu i moderatoru

V_r, V_m volumen reaktora i moderatora

Odnos volumena nuklearnog reaktora i volumena moderatora nije bitno veći od jedinice. Utjecaj tog odnosa svodi se na malu korekciju zbog činjenice što unošenje nuklearnog goriva u moderator dovodi do ekspanzije volumena moderatora. Time je broj atoma moderatora po jedinici volumena smanjen što povećava dužinu difuzije neutrona.

Odnos $\Sigma_{am}/(\Sigma_{am}+\Sigma_{ag})$ je približno jednak 1-f (vidi izraz 7.4.2), pa jednadžba (7.7.1) poprima jednostavan oblik

$$L_r^2 = L_m^2 (1-f) \frac{V_g - V_m}{V_m} \qquad \textbf{(7.7.2)}$$

Primjer 7.7.1

Odrediti difuzijsku dužini termičkih neutrona u vodom moderiranom reaktoru koji je opisan u primjeru 7.5.1.

Rješenje:

Za vodu je prema tablici 7.7.1. difuzijska dužina termičkih neutrona L_m=0.0285m.

Faktor iskorištenja termičkih neutrona f u primjeru 7.5.1 iznosi 0.833, a odnos volumena moderatora i goriva V_m/V_g=4.61.

Primjenom izraza (7.7.1) određuje se,

$$L_r^2 = L_m^2(1-f)\frac{V_g - V_m}{V_m} = 0.000\,165\ m^2 \text{, odnosno,}$$

$$L_r = 0.0128\ m .$$

Značajno je, na osnovi dobivenog rezultata, ukazati da je difuzijska dužina termičkih neutrona u vodom hlađenom reaktoru vrlo malena.

Dužina usporavanja neutrona u reaktoru

Dužina usporavanja neutrona definirana je kao drugi korijen odnosa difuzijske konstante brzih neutrona i efektivnog makroskopskog presjeka za usporavanje tih neutrona u termičku energetsku grupu, dakle, $L_s^2=D_1/\Sigma_1$.

Ako analiziramo dužinu usporavanja neutrona u reaktoru i čistom moderatoru, možemo zaključiti da će razlika tih dužina biti gotovo zanemariva. Zaključak proizlazi iz činjenice da nuklearno gorivo slabo utječe na proces usporavanja neutrona. Jedini utjecaj s kojim treba računati je povećanje volumena moderatora za faktor $(V_m+V_g)/V_m$ zbog postojanja nuklearnog goriva.

Iz navedenog slijedi da se može pisati

$$L_{sr}^2 = L_{sm}^2 \frac{V_m + V_g}{V_m} . \qquad \textbf{(7.7.3)}$$

Primjer 7.7.2

Kolika je dužina usporavanja i migracijska dužina neutrona u reaktoru opisanom u primjeru 7.5.1?

Rješenje:

Dužina usporavanja neutrona u vodi, prema tablici 7.7.1, iznosi 0.052m.

Odnos volumena moderatora i volumena goriva za reaktorsku jezgru opisanu u primjeru 7.5.1 je 4.61.

Dužina usporavanja neutrona u reaktoru bit će dakle,

$$L_{sr} = 0.052(1+1/4.61)^{1/2} = 0.057\ m .$$

Migracijska dužina neutrona u reaktoru na osnovi izračunate difuzijske dužine u primjeru 7.7.1. i netom dobivenog iznosa za L_{sr} iznosi,

$$M_r = \left(0.0128^2 + 0.057^2\right)^{1/2} = 0.0584\ m$$

Značajno je primijetiti da difuzijska dužina termičkih neutrona u vodom moderiranim reaktorima veoma malo utječe na njihovu migracijsku dužinu, tako da nema bitne razlike između migracijske dužine u reaktoru i dužine usporavanja neutrona u čistom moderatoru.

Fizikalno značenje dužine usporavanja neutrona

U poglavlju 6.5. razmotreno je fizikalno značenje difuzijske dužine termičkih neutrona L. Tamo je pokazano da promatranjem difuzije termičkih neutrona u moderatoru oko točkastog izvora, difuzijska dužina može biti izražena kao šestina srednjeg kvadrata udaljenosti od izvora neutrona do mjesta njihove apsorpcije. Takva definicija bila je zasnovana na rješenju bilance termičkih neutrona u sredini bez izvora neutrona (izvor neutrona postoji samo u jednoj točki prostora, ali ne i u sredini kroz koju se neutroni kreću). Jednadžba koja odražava bilancu neutrona bez izvora neutrona (jednadžba 6.5.1) ima oblik

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi = 0 \text{, ili}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{\phi}{L^2} = 0. \qquad \textbf{(7.7.4)}$$

Fizikalna interpretacija difuzijske dužine vezana je uz rješenje jednadžbe (7.7.4) u kuglastoj geometriji.

Ako razmotrimo bilancu brzih neutrona, tj. neutrona prve neutronske grupe u dvogrupnom postupku, bez izvora neutrona, možemo poći od jednadžbe (7.6.3), koja uz $S_1=0$ ima oblik

$$D_1\nabla^2\phi_1 - \Sigma_1\phi_1 = 0 \text{, ili,}$$

$$\nabla^2\phi_1 - \frac{\phi_1}{L_s^2} = 0. \qquad \textbf{(7.7.5)}$$

Usporedbom jednadžbi (7.7.4) i (7.7.5) proizlazi, budući da su one po obliku identične, da će im takva biti i rješenja. Na osnovi navedenog možemo po analogiji odmah napisati fizikalno značenje dužine usporavanja neutrona L_s:

Ako zamislimo u moderatoru točkasti izvor brzih neutrona, L_s^2 je jednak šestini srednjeg kvadrata udaljenosti od izvora brzih neutrona do mjesta gdje oni usporavanjem postaju termički neutroni (usporenjem brzih neutrona na termičku energiju oni postaju izgubljeni za grupu brzih neutrona što je za tu grupu ekvivalentna pojava kao apsorpcija neutrona za grupu termičkih neutrona).

Primjer 7.7.3

Za neki vodom moderirani reaktor poznati su podaci:

f=0.88, p=0.90, ε=1.03, η=1.36, V_m/V_g=3.6.

Koliki je faktor zakrivljenja neutronskog toka u tom reaktoru uz uvjet da je k_{ef}=1 ?

Rješenje:

Iz danih podataka proizlazi, k_∞=1.109, $(V_m+V_g)/V_m$=1.28.

Podaci za difuzijsku dužinu termičkih neutrona u reaktoru i dužinu usporavanja su za vodu dani u tablici 7.7.1.

Difuzijska je dužina termičkih neutrona u reaktoru, L_r=0.0113m.

Dužina usporavanja neutrona u reaktoru L_{sr}=0.0588m.

Iz jednadžbe 7.6.11 proizlazi

$$B^2 = -\frac{L_r^2 + L_{sr}^2}{2L_r^2 L_{sr}^2} + \left[\left(\frac{L_r^2 + L_{sr}^2}{2L_r^2 L_{sr}^2} \right)^2 + \frac{k_\infty - 1}{L_r^2 L_{sr}^2} \right]^{1/2} = 30.29\,m^{-2}.$$

Rješenje možemo potražiti i iz jednadžbe (7.6.15) koja se zasniva na modelu kontinuiranog usporavanja neutrona (treba podsjetiti da je pretpostavka o kontinuiranom usporavanju neutrona bolje održiva za moderatore veće atomske težine).

U tu svrhu treba potražiti rješenje jednadžbe

$k_\infty e^{-B^2\tau_{th}} = 1 + B^2 L_r^2$, u kojoj je $\tau_{th} = L_{sr}^2$.

Jednadžba je zadovoljena za B^2=30.3m^{-2}, dakle za istu vrijednost B^2 kao i u dvogrupnom postupku, što ukazuje da je uvjet kritičnosti reaktora izražen na jedan i drugi način praktički ekvivalentan.

Možemo još ispitati koju bismo vrijednost B^2 dobili na osnovi modificirane jednogrupne teorije (jednadžba 7.6.12). Iz te jednadžbe proizlazi jednostavan izraz

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L_r^2 + L_{sr}^2}.$$

Uvrštenjem numeričkih podataka proizlazi, B^2=30.4m^{-2}. Vidimo da je i ovaj rezultat blizak ranije dobivenim vrijednostima.

7.8 Dimenzije kritičnog reaktora

U poglavlju 7.6,polazeći od bilance neutrona u stacionarnom stanju, analizirali smo raspodjelu neutronskog roka u kritičnom reaktoru. Radilo se o kritičnom reaktoru, jer je u bilanci pretpostavljeno stacionarno stanje u reaktoru kod kojega su proizvodnja i gubici neutrona izjednačeni. U okviru analize dvogrupne teorije došli smo do jednadžbe (7.6.7), u kojoj je raspodjela termičkih i brzih neutrona predstavljena diferencijalnom jednadžbom

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \qquad \textbf{(7.8.1)}$$

Tu ćemo jednadžbu uzeti kao osnovu za daljnje analize.

Budući da je geometrijski oblik velike većine reaktora cilindričan, Laplaceov ćemo operator u jednadžbi (7.8.1) izraziti u cilindričnim koordinatama s osnom simetrijom. U tom slučaju jednadžba poprima oblik (vidi poglavlje 6.1)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + B^2\phi = 0 \qquad \textbf{(7.8.2)}$$

gdje je r polumjer, a z visina cilindra.

Parcijalna se diferencijalna jednadžba (7.8.2) može riješiti separacijom varijabli (promjene neutronskog toka su u smjerovima r i z međusobno neovisne). U tom će se cilju uvesti zamjena

$$\phi(r,z)=\theta Z \qquad \textbf{(7.8.3)}$$

gdje je θ=θ(r) funkcija ovisna samo o polumjeru, a Z=Z(z) funkcija ovisna samo o visini cilindra.

Uvrštenjem u jednadžbu (7.8.2) slijedi,

$$Z\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{Z}{r}\frac{d\theta}{dr}+\theta\frac{d^2Z}{dz^2}+B^2\theta Z=0\text{, ili}$$

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}\right)+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+B^2=0. \qquad \textbf{(7.8.4)}$$

Prvi dio jednadžbe (7.8.4) funkcija je polumjera cilindra, a drugi njegove visine. Zbroj tih funkcija je za sve vrijednosti r i z konstantan, iz čega slijedi da jedna i druga funkcija moraju također biti konstante.

Te ćemo konstante označiti sa $-a^2$ i $-b^2$, čime dobivamo odnos

$$a^2+b^2=B^2. \qquad \textbf{(7.8.5)}$$

Izvedene transformacije dozvoljavaju da se jednadžba (7.8.4) podijeli na dvije diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}\right)=-a^2 \qquad \textbf{(7.8.6)}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-b^2. \qquad \textbf{(7.8.7)}$$

Nakon uvođenja supstitucije u=ar i sređivanja jednadžba (7.8.6) prelazi u,

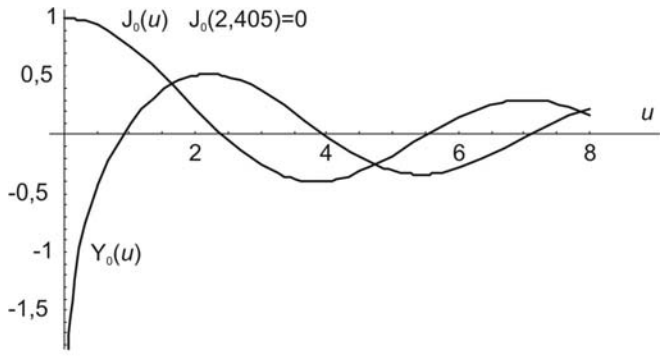
$$u^2\frac{d^2\theta}{du^2}+u\frac{d\theta}{du}+u^2\theta=0. \qquad \textbf{(7.8.8)}$$

Dobivena jednadžba je Besselova diferencijalna jednadžba nultog reda (vidi dodatak 8), čije se rješenje može izraziti pomoću Besselovih $J_0(u)$ i $Y_0(u)$ kao,

$$\theta=AJ_0(u)+CY_0(u). \qquad \textbf{(7.8.9)}$$

A i B su konstante integracije.

Besselove funkcije $J_0(u)$ i $Y_0(u)$ u funkciji varijable u su prikazane slikom 7.8.1.



Slika 7.8.1 Besselove funkcije $J_0(u)$ i $Y_0(u)$

Iz slike 7.8.1. mogu se uočiti neke karakteristike prikazanih Besselovih funkcija, koje su od značaja za rubne uvjete jednadžbe (7.8.9):

-Funkcija $Y_0(u)$ teži u neizmjernost kada varijabla u teži nuli. S obzirom da je u=ar, vrijednosti u=0 odgovara r=0 (os cilindričnog reaktora). Tok neutrona u osi reaktora mora biti konačan i zbog toga rješenje koje sadrži funkciju $Y_0(u)$ mora otpasti (konstanta C mora biti jednaka nuli).

-Funkcija $J_0(u)$ ima niz nul-točaka u_1, u_2,..., od kojih je najniža vrijednost u_1=2.405. Kod tih vrijednosti varijable u nestaje radijalna komponenta neutronskog toka.

Na osnovi gore navedenog proizlazi da će rješenje diferencijalne jednadžbe (7.8.8) imati oblik

$$\theta = AJ_0(u) = AJ_0(ar). \qquad (7.8.10)$$

Ako za vrijednost u=2.405, polumjer cilindra poprima vrijednost R, tada možemo postaviti relaciju

aR=2.405, ili,

$$a = \frac{2.405}{R}. \qquad \textbf{(7.8.10)}$$

Iz čega odmah slijedi da je,

$$\theta = AJ_0\left(\frac{2.405r}{R}\right). \qquad \textbf{(7.8.11)}$$

Primjedba: Treba uočiti da su matematički ekvivalentna sva rješenja jednadžbe (7.8.10) oblika $a_n=u_n/R$, gdje su u_n nul-točke funkcije $J_0(u)$ i a_n vlastite vrijednosti funkcije $J_0(u_n)$. Pobliže analize međutim pokazuju da je za određivanje faktora zakrivljenja neutronskog toka kod kritičnog reaktora mjerodavna samo najniža nul-točka (odnosno najniža vlastita vrijednost), što u danom slučaju iznosi u=2.405.

Polumjer R odgovara dakle onoj udaljenosti od osi cilindra kod koje bi radijalna komponenta neutronskog toka u kritičnom reaktoru pala na nulu.

U poglavlju 6.4. objašnjen je pojam ekstrapolirane dužine neutrona. Navedeno je da je to dužina izvan medija u kojemu se kreću neutroni i kod koje bi neutronski tok pao na nulu kada bi padao s istim gradijentom kao na graničnoj plohi. Iz navedenog proizlazi da je polumjer R u jednadžbi (7.8.11) stvarni polumjer kritičnog reaktora uvećan za ekstrapoliranu dužinu d. Podaci o ekstrapoliranim dužinama za razne moderatore dani su u tablici 6.4.1. Stvarni polumjer kritičnog reaktora R' bit će dakle R-d.

S druge strane, rješenje jednadžbe (7.8.7), koja daje raspodjelu komponente neutronskog toka u aksijalnom smjeru, je

$$Z = A\cos(bz) + C\sin(bz).$$

Ako zamislimo da je centar koordinatnog sustava postavljen na polovini visine cilindra, jasno je da će aksijalna raspodjela toka neutrona biti simetrična u odnosu na plohu z=0. Uvjetu simetrije udovoljava samo kosinusna funkcija. Dio rješenja sa sinusnom funkcijom mora otpasti, što znači da je integracijska konstanta C jednaka nuli. Rješenje jednadžbe (7.8.7) koje udovoljava uvjetu simetrije je dakle

$$Z = A\cos(bz) \qquad \textbf{(7.8.12)}$$

Ako udaljenost z od sredine cilindra kod koje aksijalna komponenta neutronskog toka pada na nulu označimo s H/2, možemo pisati bH/2=π/2, ili,

$$b = \frac{\pi}{H}. \qquad \textbf{(7.8.13)}$$

Jednadžba (7.8.13) time poprima oblik

$$Z = A\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(7.8.14)}$$

Kod proračuna aksijalne komponente neutronskog toka u kritičnom reaktoru također vrijedi primjedba o dozvoljenom računanju samo s najnižom vlastitom vrijednošću funkcije cos(bz).

Stvarna visina kritičnog cilindričnog reaktora biti će

H'=H-2d

Uvrštenjem izraza (7.8.11) i (7.8.14) u jednadžbu (7.8.5) dobiva se ovisnost faktora zakrivljenja neutronskog toka o ekstrapoliranim dimenzijama kritičnog reaktora:

$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2. \qquad \textbf{(7.8.15)}$$

U literaturi se faktor zakrivljenja neutronskog toka u formuli (7.8.16) određuje kao geometrijski faktor zakrivljenja B_g, kako bi se razlikovao od onog koji proizlazi na osnovi bilance neutrona (jednadžba 7.6.8), i koji je poznat kao materijalni faktor zakrivljenja B_m. Reaktor postiže kritičnost kada je $B_g=B_m$.

Analogno kao za cilindričnu geometriju možemo jednadžbu (7.8.1) riješiti u pravokutnoj i kuglastoj geometriji. U tim slučajevima potrebno je u jednadžbu uvrstiti Laplaceov operator u

pravokutnom odnosno kuglastom koordinatnom sustavu, koristeći odgovarajuće izraze iz poglavlja 6.1.

Rezultati proračuna faktora zakrivljenja neutronskog toka u tim geometrijama su:

-za pravokutnu geometriju(reaktor u obliku paralelopipeda)

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2, \qquad \textbf{(7.8.16)}$$

gdje su a, b, i c ekstrapolirane stranice paralelopipeda

-za kuglastu geometriju

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \qquad \textbf{(7.8.17)}$$

gdje je R ekstrapolirani polumjer kuglastog reaktora.

Raspodjela neutronskog toka u reaktoru

Sada smo u mogućnosti napisati i izraze za raspodjelu neutronskog toka unutar reaktora raznih geometrijskih oblika. Kod cilindričnog smo reaktora separacijom varijabli definirali neutronski tok relacijom

$\phi(r,z)=\theta Z$.

Na temelju jednadžbi (7.8.12) i (7.8.13) možemo odmah pisati

$$\phi = AJ_0\left(\frac{2.405r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(7.8.18)}$$

Integracijska konstanta odgovara neutronskom toku u sredini reaktora (tj. za r=0 i z=0).

Za druge geometrijske oblike analognim postupkom dobili bismo:

-paralelopiped:

$$\phi = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right). \qquad \textbf{(7.8.19)}$$

-kugla:

$$\phi = \frac{A}{r}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right). \qquad \textbf{(7.8.20)}$$

Minimalni volumen kritičnog reaktora

Izraz (7.8.16) određuje ovisnost faktora zakrivljenja neutronskog toka o polumjeru i visini cilindričnog reaktora (cilindrična je geometrija od primarne važnosti zbog praktične primjene). Odnos polumjera i visine je proizvoljan.

Od interesa je razmotriti koliki je najmanji volumen cilindričnog reaktora za određenu vrijednost faktora zakrivljenja neutronskog toka B. Time možemo dobiti optimalni odnos između visine i polumjera kritičnog cilindričnog reaktora sa stanovišta najmanjeg utroška materijala.

Iz jednadžbe (7.8.16) slijedi odnos između polumjera i visine cilindričnog reaktora uz danu vrijednost B^2,

$$R^2 = \frac{2.405^2 H^2}{B^2 H^2 - \pi^2}. \qquad \textbf{(7.8.21)}$$

Volumen cilindra $V = \pi R^2 H = \frac{\pi 2.405^2 H^3}{B^2 H^2 - \pi^2}.$ **(7.8.22)**

Minimum funkcije (7.8.23) dobiva se diferenciranjem po H i izjednačenjem rezultata sa nulom. Uvjet minimuma je

$B^2 H^2 = 3\pi^2$.

Iz toga slijedi optimalna visina cilindra $H = \sqrt{3}\frac{\pi}{B} = \frac{5.441}{B}$.

Uvrštenjem u jednadžbu (7.8.22) dobiva se odgovarajući polumjer cilindra R=2.945/B i minimalni volumen reaktora,

$$V_{min} = \frac{148.2}{B^3}. \qquad \textbf{(7.8.23)}$$

Odnos visine i polumjera cilindričnog reaktora koji daje minimalni volumen je 1.85.

Primjer 7.8.1

Potrebno je odrediti optimalne dimenzije kritičnog cilindričnog reaktora sa grafitnim moderatorom i korakom kvadratične rešetke 21cm uz korištenje potrebnih podataka iz primjera 7.5.3.

Rješenje

Za korak rešetke od 21cm je u primjeru 7.5.3 izračunato:

k_∞=1.094, f=0.903, V_m/V_g=70.64. Iz tablice 7.7.1. možemo očitati za grafit, L_m=0.54m, L_{sm}=0.192m.

Kvadrat difuzijske dužine termičkih neutrona i dužine usporavanja neutrona u reaktoru će na osnovi relacija (7.7.1), (7.7.2) i (7.7.3) biti:

$$L_r^2 = L_m^2(1-f)\frac{V_g + V_m}{V_m} = 0.0308\ m^2$$

$$L_{sr}^2 = L_{sm}^2 \frac{V_g + V_m}{V_m} = 0.0374\ m^2.$$

Faktor zakrivljenja neutronskog toka odrediti ćemo na osnovi modificiranog jednogrupnog postupka (jednadžba 7.6.12.). Računom se dobiva B^2=1.422m^{-2}.

Minimalni volumen kritičnog reaktora $V_{min} = \frac{148.2}{B^3} = 91.6\ m^3$

Odgovarajuće vrijednosti za optimalni polumjer i visinu jesu

$$R = \frac{2.945}{B} = 2.51\,m$$

$$H = \frac{5.441}{B} = 4.64\,m$$

Stvarne dimenzije R' i H' su nešto malo manje, a dobivaju se odbijanjem ekstrapolirane dužine:

R'=R-d

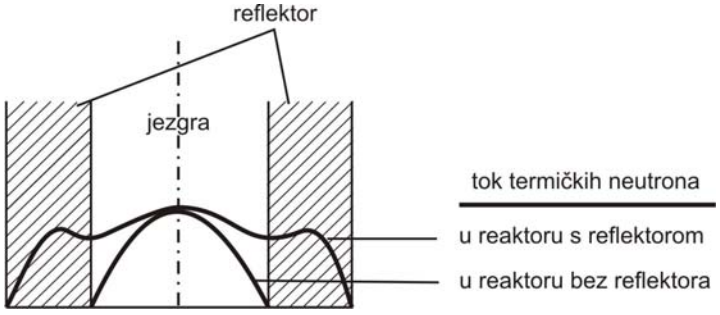
H'=H-2d.

Dužina d je ekstrapolirana dužina neutronskog toka, koja za grafit iznosi 0.0179m (vidi tablicu 6.4.1).

7.9 Reaktor s reflektorom

Faktor zakrivljenja neutronskog toka i dimenzije kritičnog reaktora uz određeni sastav fisijskog materijala i moderatora (dakle uz dati k_∞) ovise o faktoru bijega neutrona.

Dimenzije reaktora, a time i količina fisijskog materijala se mogu smanjiti vraćanjem dijela odbjeglih neutrona u reaktorsku jezgru. To se može postići oblaganjem jezgre reaktora slojem materijala koji, pretežno nuklearnim reakcijama elastičnog sudara, vraća dio neutrona u jezgru. Materijal koji vrši funkciju vraćanja neutrona u jezgru se zove reflektor. Dobar reflektor mora imati svojstvo male apsorpcije i efikasnog usporavanja neutrona (vjerojatnost bijega brzih neutrona je veća). U poglavlju 5.3 naglašeno je da se upravo takva svojstva traže i od dobrog moderatora. Iz navedenog slijedi zaključak da će upravo materijali koji su dobri moderatori biti ujedno i dobri reflektori. Reflektori u znatnoj mjeri utječu na raspodjelu neutronskog toka u jezgri. Slikom 7.9.1. ilustrirana je raspodjela toka termičkih neutrona u jezgri reaktora sa i bez reflektora.

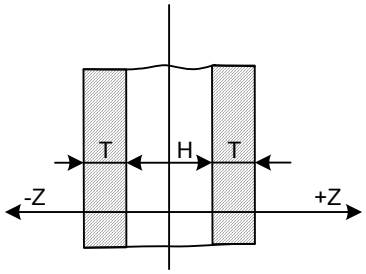


Slika 7.9.1 Raspodjela toka termičkih neutrona u reaktoru s reflektorom i bez njega

Iz slike je vidljivo da reflektor utječe na povišenje neutronskog toka na vanjskoj plohi reaktora, a time i na povišenje prosječnog neutronskog toka u jezgri. Reflektor ne utječe samo na smanjenje volumena kritičnog reaktora nego, zbog ravnomjernije raspodjele neutronskog toka, i na bolje prosječno iskorištenje fisijskog materijala u jezgri.

U ovom će se poglavlju prikazati veoma jednostavna metoda kvantitativne procjene utjecaja reflektora na kritične dimenzije reaktora. Metoda je suviše pojednostavljena za praktičnu primjenu, ali je korisna za fizikalno razumijevanje problema.

Sastoji se u primijeni jednogrupnog postupka za ocjenu utjecaja debljine reflektora na dimenzije jezgre. Analiza će se, radi jednostavnosti, provesti za reaktor u obliku neograničene ploče debljine H koja je sa obje strane obložena sa reflektorom debljine T (Slika 7.9.2.).



Slika 7.9.2 Geometrijski raspored jezgre i reflektora

Postupak se svodi na rješenje jednadžbi bilanca neutrona u reaktoru i reflektoru uz poštivanje odgovarajućih graničnih uvjeta. Pri tome treba uzeti u obzir da u reflektoru nema izvora neutrona. Neutronski tok i parametri materijala u reflektoru će biti označeni sa indeksom "r", a u jezgri indeksom "j". Bilancu neutrona u jezgri ćemo prikazati korištenjem ranije dobivene relacije (7.8.1).

Primjenom jednogrupnog postupka dobivamo bilance neutrona,

-za reflektor

$$D_r \nabla^2 \phi_r - \phi_r \Sigma_{ar} = 0 \qquad \textbf{(7.9.1)}$$

-za jezgru

$$\nabla^2 \phi_j + B^2 \phi_j = 0\,. \qquad \textbf{(7.9.2)}$$

Razmotriti ćemo najprije rješenje jednadžbe reflektora.

S obzirom da se radi o neograničenoj plohi jednadžba (7.9.1) se nakon male transformacije može napisati u obliku

$$\frac{d^2\phi_r}{dz^2} - \frac{\phi_r}{L_r^2} = 0\,. \qquad \textbf{(7.9.3)}$$

Početak koordinatnog sustava postavit ćemo, prema slici 7.9.2, u sredinu pločastog reaktora.

Rješenje jednadžbe (7.9.3) je

$$\phi_r = A_1 ch\left(\frac{z}{L_r}\right) + C_1 sh\left(\frac{z}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.4)}$$

Gdje su A_1 i C_1 konstante integracije, koje će se odrediti iz graničnih uvjeta.

Iz slike 7.9.2 proizlazi da neutronski tok mora kod z=H/2+T (T=T'+d), pasti na nulu. Ovaj rubni uvjet dozvoljava eliminaciju jedne od konstanti u jednadžbi (7.9.4), pa se nakon jednostavnih transformacija konačno dobiva

$$\phi_r = C_2 sh\left(\frac{T + \frac{H}{2} - z}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.5)}$$

gdje je $C_2 = \dfrac{C_1}{ch\left(\dfrac{T+\dfrac{H}{2}}{L_r}\right)}$.

Jednadžbom (7.9.5) je određena raspodjela toka neutrona u reflektoru. Konstanta C_2 ovisi o rubnim uvjetima na granici između jezgre i reflektora.

Sada ćemo razmotriti rješenje jednadžbe (7.9.2) kojom je definirana raspodjela toka neutrona u jezgri.

Pločasta geometrija dozvoljava da se jednadžba napiše u jednodimenzionalnoj formi kao

$$\frac{d^2\phi_j}{dz^2} + B^2\phi_j = 0 \qquad \textbf{(7.9.6)}$$

s rješenjem

$$\phi_j = A\cos(Bz) + C\sin(Bz).$$

Dio rješenja koji sadrži sinusnu funkciju možemo odmah eliminirati zbog simetrije neutronskog toka u odnosu na srednju plohu reaktora (iz istog razloga je to učinjeno i u rješenju jednadžbe 7.8.7).

Time je raspodjela neutronskog toka u jezgri reaktora određena je jednadžbom

$$\phi_j = A\cos(Bz). \qquad \textbf{(7.9.7)}$$

Konstante integracije sadržane u jednadžbama raspodjele neutronskog toka u jezgri i reflektoru (jednadžbe 7.9.7 i 7.9.5) ćemo odrediti korištenjem rubnih uvjeta difuzijske jednadžbe neutrona na granici dvaju medija (vidi poglavlje 6.4):

$$(\phi_j)_{z=H/2} = (\phi_r)_{z=H/2}$$

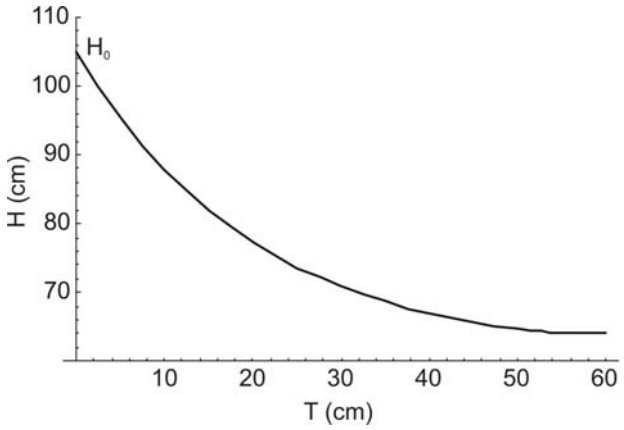
$$\left(D_j \frac{d\phi_j}{dz}\right)_{z=H/2} = \left(D_r \frac{d\phi_r}{dz}\right)_{z=H/2}.$$

Primjenom rubnih uvjeta dobivaju se dvije jednadžbe iz kojih dijeljenjem možemo eliminirati integracijske konstante A i C_2. Rezultat je

$$D_j B\,tg\left(\frac{BH}{2}\right) = \frac{D_r}{L_r}\,cth\left(\frac{T}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.8)}$$

Jednadžba (7.9.8) daje ovisnost između dimenzije jezgre kritičnog reaktora H i debljine reflektora T. Faktor zakrivljenja neutronskog toka kritičnog reaktora B^2 ovisi o materijalima jezgre, a izračunava se iz jednadžbi (7.6.11), (7.6.12) ili (7.6.15). Radi se, dakle o materijalnom faktoru zakrivljenja neutronskog toka, koji u ovom slučaju nije identičan s geometrijskim faktorom zakrivljenja (koji ovisi o dimenziji jezgra H). Samo su kod kritičnog nereflektiranog reaktora materijalni i geometrijski faktori zakrivljenja neutronskog toka identični (vidi poglavlje 7.8).

Kao primjer, ovisnost je dimenzije jezgre H o debljini reflektora T za jedan konkretan primjer pokazana na slici 7.9.3.



Slika 7.9.3 Dimenzije jezgre u ovisnosi o debljini reflektora

Iz slike se može uočiti da reflektor utječe na smanjenje dimenzije jezgre samo do određene debljine. Utjecaj reflektora na dimenzije jezgre pokazuje dakle svojstvo zasićenja.

Radi lakše kvantifikacije utjecaja reflektora na dimenzije jezgre uveden je pojam tzv. reflektorske uštede. U razmatranom je slučaju reflektorska ušteda δ definirana izrazom

$$\delta = \frac{H_0 - H}{2}, \qquad \textbf{(7.9.9)}$$

gdje je H_0 dimenzija jezgre bez reflektora, a H dimenzija jezgre s reflektorom.

Za nereflektiranu kritičnu jezgru B^2 jednak je geometrijskom faktoru zakrivljenja neutronskog toka, koji za neograničenu ploču iznosi,

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2. \qquad \textbf{(7.9.10)}$$

Izraz (7.9.10) neposredno slijedi iz relacije (7.8.16) uz uvjet da polumjer R teži u neizmjernost.

Uvrštenjem u jednadžbu (7.9.9) izlazi

$$\frac{H}{2} = \frac{\pi}{2B} - \delta \qquad \textbf{(7.9.11)}$$

Ako se dobiveni izraz uvrsti u jednadžbu (7.9.8), nakon jednostavnih transformacija dobivamo vezu između reflektorske uštede δ i debljine reflektora T

$$\mathrm{tg}(B\delta) = \frac{D_j B L_r}{D_r}\,\mathrm{th}\left(\frac{T}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.12)}$$

ili eksplicitno

$$\delta = \frac{1}{B}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{D_j B L_r}{D_r}\,\mathrm{th}\left(\frac{T}{L_r}\right)\right]. \qquad \textbf{(7.9.13)}$$

Izraz (7.9.12) ćemo promatrati za nekoliko graničnih vrijednosti parametara sa ciljem bolje ilustracije odnosa debljine reflektora i reflektorske uštede.

Razmatrati ćemo reaktore većih dimenzija, za koje vrijedi Bδ<<1, odnosno tg(Bδ)≈Bδ.

U tom se slučaju jednadžba (7.9.12) svodi na

$$\delta \approx \frac{D_j L_r}{D_r} \mathrm{th}\left(\frac{T}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.14)}$$

Sada ćemo odnose između δ i T u jednadžbi (7.9.14) promatrati za granične slučajeve:

a) Vrlo tanak reflektor $\left(\frac{T}{L_r} << 1\right)$.

U tom je slučaju $\mathrm{th}\left(\frac{T}{L_r}\right) \approx \frac{T}{L_r}$ iz čega proizlazi

$$\delta \approx \frac{D_j}{D_r} T. \qquad \textbf{(7.9.15)}$$

Kod vrlo tankog reflektora je reflektorska ušteda direktno proporcionalna s debljinom reflektora.

b) Vrlo debeli reflektor ($T>>L_r$).

U tom je slučaju $th\left(\frac{T}{L_r}\right) \approx 1$. (Približenje je donekle ispunjeno već za $T=2L_r$, jer je th(2)=0.964.) Time dobivamo

$$\delta_{max} \approx \frac{D_j}{D_r} L_r. \qquad \textbf{(7.9.16)}$$

Kod debelog reflektora reaktorska ušteda postaje konstantna (neovisna o T) i približava se maksimalnoj vrijednosti δ_{max}.

Kao sažetak provedene analize može se navesti da je kod vrlo tankog reflektora reflektorska ušteda direktno proporcionalna s debljinom reflektora te da kod povećanja debljine raste sve sporije. Za debljine reflektora veće od dvostruke difuzijske dužine termičkih neutrona u materijalu reflektora ušteda dosiže svoju maksimalnu vrijednost.

Proračun reflektorske uštede je, zbog jednostavnosti, proveden za neograničeni pločasti reaktor. Međutim, rezultat se može proširiti i na cilindričan reaktor uz uvjet da je debljina reflektora mnogo manja od polumjera cilindra (malo zakrivljenje). U tom slučaju reflektorska ušteda je razlika između polumjera jezgre bez i sa reflektora.

Primjer 7.9.1

Kolika je reflektorska ušteda kod teškovodnog istraživačkog reaktora koji je okružen slojem grafita debljine 1m?

Rješenje:

Iz tablice 6.4.1 možemo očitati:

Difuzijska konstanta:

za tešku vodu - 0.0085m

za grafit - 0.0084m.

Difuzijska dužina grafita je prema tablici 6.5.1, 0.56m.

Reflektorska ušteda izračunata na osnovi izraza (7.9.14) iznosi,

$$\delta = \frac{0.0085}{0.0084} * 0.56 * \mathrm{th}(1.786) = 0.53\ \mathrm{m}$$

Polumjer teškovodnog reaktora trebao bi biti oko 0.53m veći kada bi reaktor bio bez grafitnog reflektora čija je debljina 1m.

Jednadžbe (7.9.1) i (7.9.2) se mogu osim za ravnu ploču riješiti i za druge geometrijske forme. Kao primjer, rješenje za kuglastu geometriju daje vezu između polumjera kritičnog reaktora R i debljine reflektora T slijedećim izrazom

$$\mathrm{ctg}(BR) = \frac{1}{BR}\left(1 - \frac{D_r}{D_j}\right) - \frac{D_r}{D_j B L_r}\,\mathrm{cth}\left(\frac{T}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.9.17)}$$

Analiza utjecaja reflektora na dimenzije reaktora, izvedena u ovom poglavlju se je zasnivala na primjeni jednogrupnog postupka. Ranije (vidi primjere 7.7.1 i 7.7.2) je ukazano na činjenicu da je kod lakovodnog reaktora dužina usporavanja neutrona bitno veća od njihove difuzijske dužine, tako da je migracijska dužina neutrona u lakovodnim reaktorima (koja je mjerodavna za procjenu bijega neutrona iz jezgre) praktički ekvivalentna s njihovom dužinom usporavanja. Iz tog je razloga faktor bijega neutrona iz lakovodnog reaktora, kada se računa sa jednogrupnim postupkom, bitno podcijenjen.

Jednostavan empirički izraz za procjenu reflektorske uštede kod lakovodnih reaktora ima oblik

$$\delta \approx 7.7 + 0.1\left(M_j^2 - 40\right)\mathrm{cm}. \qquad \textbf{(7.9.18)}$$

M_j je migracijska dužina neutrona u jezgri (koja je praktički jednaka dužini usporavanja neutrona L_s)

Primjer 7.9.2

Veliki cilindrični lakovodni reaktor okružen je sa slojem obične vode koja vrši funkciju reflektora. Koliko je smanjenje polumjera reaktora zbog prisustva reflektora?

Rješenje:

Podatak za migracijsku dužinu neutrona u jezgri lakovodnog reaktora preuzeti ćemo iz primjera 7.7.2, gdje je dobiveno, M_j=5.84cm.

Iz izraza (7.9.18) slijedi,

δ=7.7+0.1(34.1-40)=7.1cm.

Difuzijska je konstanta termičkih neutrona u običnoj vodi 2.85cm (tablica 6.5.1). Ako bismo primijenili formulu (7.9.16), uz D_r=D, reflektorska ušteda bi trebala biti jednaka difuzijskoj dužini termičkih neutrona u reflektoru, a to je bitno manje od vrijednosti dobivene primjenom izraza (7.9.18).

7.10 Numeričke metode za rješenje jednadžbe bilance neutrona

U dosadašnjim smo analizama rješenje jednadžbe bilance neutrona tražili za homogene ili homogenizirane sustave. U takvim je slučajevima moguće definirati kritičnost reaktora uz primjenu formule sa 6 faktora (jednadžba 7.3.3), i lako riješiti jednadžbu bilanca neutrona primjenom jednogrupnog ili dvogrupnog postupka. U poglavlju 7.6 pokazano je da upravo formula sa 6 faktora omogućuje definirati izvor brzih i termičkih neutrona potreban za rješavanje jednadžbi bilance neutrona.

Nažalost, mogućnost analitičkog rješenja jednadžbe bilanca neutrona je ograničena na najjednostavnije slučajeve, i to prvenstveno kod reaktora s grafitom kao moderatorom. Iako je elementarna teorija reaktora, zasnovana na analitičkim postupcima od neprocjenjive vrijednosti za razumijevanje suštine fizikalnih procesa u nuklearnom reaktoru, danas se proračuni reaktora vrše numeričkim postupcima. Postupci se zasnivaju na primjeni metode konačnih razlika kod rješavanja diferencijalne jednadžbe bilance neutrona u reaktoru, odnosno na razbijanje te diferencijalne jednadžba na niz algebarskih jednadžbi. Velika je prednost metode što omogućava proračun uz prostorno primjenjive parametre i programiranje proračuna za elektronička računala. U praksi se za tu namjenu koriste standardizirani paketi računarskih programa.

U nastavku će se razmotriti osnove postupka za numeričko rješenje jednadžbe bilanca neutrona.

Radi što jednostavnije ilustracije postupka odabrana je jednogrupna i jednodimenzionalna jednadžba, dakle jednadžba koja se može primijeniti kod proračuna radijalne raspodjele termičkih neutrona u osno simetričnom cilindričnom reaktoru.

Analizu ćemo zasnivati na rješenju jednadžbe (6.3.2), koju ćemo napisati u obliku

$$S(r) - \phi(r)\Sigma_a(r) + \nabla[D(r)\nabla\phi(r)] = 0\,. \qquad \textbf{(7.10.1)}$$

Jednadžba (7.10.1) razlikuje se od jednadžbe (6.3.2), jer parametre smatramo ovisnim o samo o polumjeru cilindra r, pa je izostavljena općenitija oznaka ovisnosti o vektoru položaja r, a i zbog toga što smatramo i difuzijsku konstantu D ovisnom o položaju u reaktoru. Zbog toga, temeljna relacija za određivanje istjecanja neutrona nije izraz (6.1.5) nego izraz (6.1.4).

Član izvora neutrona S(r) napisati ćemo kao $\frac{\nu}{\lambda}\Sigma_a(r)\phi(r)$, tako da jednadžba čije ćemo rješenje u nastavku analizirati postaje:

$$-\nabla[D(r)\nabla\phi(r)] + \Sigma_a(r)\phi(r) = \frac{\nu}{\lambda}\Sigma_f(r)\phi(r)\,. \qquad \textbf{(7.10.2)}$$

Faktor λ u jednadžbi (7.10.2) treba osigurati jednakost njezine lijeve i desna strane, odnosno osigurati da proizvodnja neutrona bude izjednačena s njihovim gubitkom. Taj faktor jednak je odnosu broja proizvedenih i izgubljenih neutrona u reaktoru konačnih dimenzija, iz čega proizlazi da je identičan s efektivnim faktorom multiplikacije k_{ef}.

U cilindričnom koordinatnom sustavu, uz pretpostavku osne simetrije i zanemarenja bijega neutrona u aksijalnom smjeru, prvi član jednadžbe (7.10.2) može se izraziti kao

$$\nabla[D(r)\nabla\phi(r)] = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rD(r)\frac{d\phi(r)}{dr}\right]. \qquad \textbf{(7.10.3)}$$

Lako je provjeriti da uz D=konst. desna strana jednadžbe (7.10.3) postaje

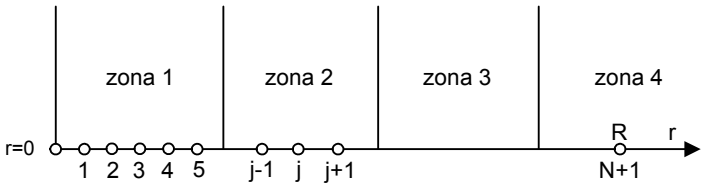
$$D\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) = D\nabla^2\phi,$$

a to je izraz upotrebljavan u poglavlju 7.6 za određivanje istjecanja neutrona u homogenom odnosno homogeniziranom reaktoru.

Priprema jednadžbe (7.10.2) za rješenje upotrebom elektroničkog računala zahtjeva njezinu transformaciju u oblik koji sadrži konačne priraštaje prostorno ovisnih veličina. U tom se cilju reaktor dijeli na konačni broj prostornih elemenata i unutar svakog vrši bilanciranje neutrona. U cilju primjene jednodimenzionalnog proračuna, cilindrični reaktor podijeliti ćemo na N+1 koncentričnih ljuski (odnosno prostornih elemenata), tako da posljednja završava na kraju ekstrapolirane dužine.

Pretpostaviti ćemo, nadalje, unutar reaktora nekoliko koncentričnih zona od kojih svaka sadrži materijale različitih fizikalnih svojstava. Svaka koncentrična zona sadrži više prostornih elemenata.

Raspored koncentričnih zona i prostornih elemenata prikazan je na slici 7.10.1



Slika 7.10.1 Raspored zona i prostornih elemenata

U stacionarnom je stanju kod kritičnog reaktora u svakom elementu volumena izjednačena količina neutrona koji se proizvode i onih koji se gube.

Bilanca neutrona predstavljena jednadžbom (7.10.2) se odnosi na jedinični volumen.

Element volumena, odnosno volumen cilindrične ljuske debljine Δr, iznosi $2r\pi\Delta r$. Raspored elemenata volumena bira tako da je granica svake zone središnji polumjer jednog od elemenata volumena.

Ako uzmemo u obzir da je element volumena oko volumena r_j smješten između polumjera $r_{j+1/2}$ i $r_{j-1/2}$, bilanca neutrona u tom elementu volumenu dobiva se integracijom jednadžbe (7.10.2), u koju je prethodno uvršten izraz (7.10.3), u granicama između navedenih polumjera:

$$-\int_{f_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rD(r)\frac{d\phi(r)}{dr}\right]2r\pi dr+\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\Sigma_a(r)\phi(r)2r\pi dr=\frac{v}{\lambda}\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\Sigma_f(r)\phi(r)2r\pi dr. \qquad \textbf{(7.10.4)}$$

Prvi integral na lijevoj strani gornje jednadžbe je neposredno rješiv. Ostala dva integrala rješavaju se uz pretpostavku da su neutronski tok i udarni presjeci unutar elementa volumena konstantni, tj.

$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r)\phi(r)r\,dr = \Sigma_a(r)\phi(r)\frac{r^2}{2}\Big|_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} = \Sigma_a(r_j)\phi(r_j)r_j\Delta r_j, \qquad \textbf{(7.10.5)}$$

gdje je $r_j = \frac{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}}{2}$, a $\Delta r_j = r_{1+1/2} - r_{1-1/2}$.

Ako je r_j granica dviju zona s različitim fizikalnim svojstvima materijala, dobiveni rezultat se može podijeliti u dva dijela, od kojih svaki vrijedi u jednoj zoni. Time se dobiva

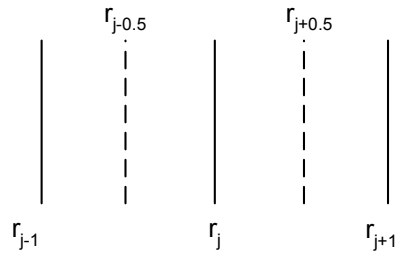
$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r)\phi(r)r\,dr = \Sigma_a(r_{-j})\phi(r_{-j})r_{-j}\frac{r_j - r_{j-1}}{2} + \Sigma_a(r_{+j})\phi(r_{+j})r_{+j}\frac{r_{j+1} - r_j}{2}. \qquad \textbf{(7.10.6)}$$

Polumjeri označeni sa r_{+j} i r_{-j} u stvari su identični sa r_j, jer jedan označuje završetak jedne zone, a drugi početak susjedne zone.

Prvi član jednadžbe (7.10.4) sadrži izvod funkcije neutronskog toka oko polumjera $r_{j-1/2}$ i $r_{j+1/2}$. Njih ćemo definirati na temelju slike 7.10.2:

$$\left[\frac{d\phi(r)}{dr}\right]_{r_{j-1/2}} = \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j-1})}{r_j - r_{j-1}} = \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j-1})}{\Delta r_{j-1}}$$

$$\left[\frac{d\phi(r)}{dr}\right]_{r_{j+1/2}} = \frac{\phi(r_{j+1}) - \phi(r_j)}{r_{j+1} - r_j} = \frac{\phi(r_{j+1}) - \phi(r_j)}{\Delta r_j}. \qquad \textbf{(7.10.7)}$$



Slika 7.10.2 Polumjeri elementarnih volumena

Ako se jednadžba (7.10.4) podijeli sa 2π i u nju uvrste jednadžbe (7.10.5), (7.10.6) i (7.10.7), izlazi nakon sređivanja

$$-a_j\phi_{j+1} + b_j\phi_j - c_j\phi_{j-1} = \frac{F_j}{\lambda}\phi_j \qquad \textbf{(7.10.8)}$$

Koeficijenti uz neutronski tok u jednadžbi (7.10.8) jesu:

$$a_j = \frac{r_{j+1/2}D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j}$$

$$b_j = \frac{r_{j-1/2}D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}} + \frac{r_{j+1/2}D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j} + \frac{1}{2}r_j\left[\Sigma_a(r_{-j})\Delta r_{j-1} + \Sigma_a(r_{+j})\Delta r_j\right]$$

$$c_j = \frac{r_{j-1/2} D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}}$$

$$F_j = v r_j \left[\Sigma_f(r_{+j}) \frac{\Delta r_j}{2} + \Sigma_f(r_{-j}) \frac{\Delta r_{j-1}}{2} \right].$$

Kod izvoda izraza (7.10.8) uzeto je u obzir da su tokovi neutrona na granici dvaju medija identični (vidi jednadžbu 6.4.3), tako da mora vrijediti

$$\phi(r_{-j}) = \phi(r_{+j}) = \phi(r).$$

U nastavku ćemo, radi jednostavnosti, pisati umjesto $\phi(r_j)$ samo ϕ_j. Iz slike 7.10.1. može se razabrati da indeks j varira od 1 u centru cilindra do N+1 na kraju ekstrapolirane dužine.

Jednadžba (7.10.8) je inače poznata kao aproksimacija u tri točke, jer se bilanca neutrona u zoni j određuje pomoću tri vrijednosti neutronskog toka: ϕ_{j-1}, ϕ_j i ϕ_{j+1}. Na osnovi te jednadžbe možemo napisati sustav od N algebarskih jednadžbi iz kojih se može odrediti iznos neutronskog toka u N točaka i parametar λ. Iz definicije ekstrapolirane dužine slijedi $\phi(N+1)=0$.

jednadžbe su redom:

- za j=1 $\qquad -a_1\phi_2 + b_1\phi_1 = \frac{F_1}{\lambda}\phi_1$

- za j=2 $\qquad -a_2\phi_3 + b_2\phi_2 - c_2\phi_1 = \frac{F_2}{\lambda}\phi_2$

.....

- za j=N $\qquad b_N\phi_N - c_N\phi_{N-1} = \frac{F_N}{\lambda}\phi_N.$

Napisani sustav povezanih linearnih jednadžbi može se prikazati pomoću matrica kao,

$$\underline{A}\underline{\phi} = \frac{F}{\lambda}\underline{\phi}, \qquad \textbf{(7.10.9)}$$

gdje je

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & - \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & 0 & 0 & - & - & - & - \\ 0 & -c_3 & b_3 & -a_3 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & -c_4 & b_4 & -a_4 & 0 & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & - & - & c_N & b_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ - \\ - \\ - \\ \phi_N \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & F_3 & 0 & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & F_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & - & - & - & - & F_N \end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ je kvadratna matrica sa N redaka i N stupaca u čijoj su dijagonali parametri $b_1,...,b_N$, dok je $\underline{F}$ kvadratna matrica koja sadrži samo dijagonalne članove $F_1,...,F_N$.

Jednadžba (7.10.9) može se napisati u obliku

$$\underline{A}\underline{\phi} = \frac{1}{\lambda}\underline{S}. \qquad \textbf{(7.10.10)}$$

Matrica $\underline{S} = \underline{F}\underline{\phi}$ je matrica neutronskog izvoda, te ima oblik

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ - \\ S_N \end{bmatrix}$$

Jednadžba (7.10.10) rješava se iterativnim postupkom u toku kojeg se traži najveća vrijednost parametra (odnosno vlastite vrijednosti) λ koja zadovoljava jednadžbu. Može se dokazati da je upravo ta vrijednost λ ekvivalentna efektivnom faktoru multiplikacije k_{ef}. Postupak se zasniva na određivanju neutronskog toka na osnovi izračunate vrijednosti matrice neutronskog izvora u prethodnoj iteraciji.

Ako se definira matricu izvora u obliku, $\underline{\psi} = \frac{1}{\lambda}\underline{S}$, moguće je jednadžbu (7.10.10) pisati kao

$\underline{A}\underline{\phi}^{(P)} = \underline{\psi}^{(P-1)}$, i dalje

$$\underline{A}\underline{\phi}^{(P)} = \frac{1}{\lambda^{(P)}}\underline{S}^{(P-1)},$$

iz čega slijedi

$$\frac{1}{\lambda^{(P)}}\underline{S}^{(P-1)} = \underline{\psi}^{(P-1)}. \qquad \textbf{(7.10.11)}$$

Sa P je označen broj iteracije.

Postupak proračuna se pojednostavljuje množenjem jednadžbe (7.10.11) sa transponiranim matricom matrice $S^{(P)}$, koju ćemo označiti sa $S^{(P)T}$.

$$S^{(P)T} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & - & - & - & S_N \end{bmatrix}.$$

Time se dobiva,

$$\lambda^{(P)} = \frac{\underline{S}^{(P)T}\underline{S}^{(P)}}{\underline{S}^{(P)T}\underline{\psi}^{(P-1)}} = \frac{\underline{S}^{(P)T}\underline{S}^{(P)}}{\underline{S}^{(P)T}\underline{S}^{(P-1)}}\lambda^{(P-1)}. \qquad \textbf{(7.10.12)}$$

Produkti matrica u brojniku i nazivniku jednadžbe se lako određuju, jer se radi o matricama s jednim stupcem, odnosno retkom. Uvođenjem transponirane matrice izbjegnuta je potreba određivanja inverzije matrice $\underline{\psi}^{(P-1)}$.

Izračunavanje $\lambda^{(P)}$ prema jednadžbi (7.10.12) ponavlja se sve dok razlika između vrijednosti λ izračunate u dvije uzastopne iteracije ne postigne neku malenu, unaprijed zadanu, vrijednost, tj. dok ne postane

$$\frac{\lambda^{(P)}-\lambda^{(P-1)}}{\lambda^{(P)}} < \varepsilon, \qquad \textbf{(7.10.13)}$$

gdje je ε neki unaprijed zadani broj.

Redoslijed postupka kojim se izračunava λ (odnosno k_{ef}) i raspodjela toka neutrona u kritičnom reaktoru može se sažeti na slijedeće:

1. Odrediti konstantne matrice $\underline{A}$ i $\underline{F}$
2. Ocijeniti $\underline{\phi}^{(0)}$ i $\underline{\lambda}^{(0)}$
3. Izračunati $\underline{S}^{(0)}=\underline{F}\underline{\phi}^{(0)}$ i $\underline{\psi}^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}}S^{(0)}$
4. Izračunati $\underline{\phi}=\underline{A}^{-1}\underline{\psi}^{(0)}$.

Taj korak traži izračunavanje inverzije matrice $\underline{A}$, što može biti teško ako se radi o velikom broju elementarnih volumena u reaktoru.

5. Izračunati $S^{(1)}=\underline{F}\underline{\phi}^{(1)}$
6. Izračunati $\lambda^{(1)} = \frac{\underline{S}^{(1)T}\underline{S}^{(1)}}{\underline{S}^{(1)T}\underline{\psi}^{(0)}}\lambda^{0}$
7. Izračunati $\underline{\psi}^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\underline{S}^{(1)}$.

Opisani postupak koji služi kao osnova za programiranje elektroničkog računala ponavlja se do zadovoljenja jednadžbe (7.10.13).

Numeričko rješenje višegrupne difuzijske jednadžbe

Numeričko rješenje višegrupne difuzijske jednadžbe zasniva se na primjeni opisanog numeričkog postupka na višegrupnu bilancu neutrona prikazanu jednadžbom (6.3.3). U toku postupka potrebno je riješiti niz povezanih jednadžbi bilance neutrona, čiji je broj jednak odabranom broju energetskih grupa. Za razliku od opisanog jednogrupnog postupka višegrupne bilance sadrže članove koji za svaki volumni element određuju broj izbačenih odnosno pridošlih neutrona iz drugih grupa zbog procesa usporavanja. Numeričko rješenje višegrupne difuzijske

jednadžbe očigledno je neusporedivo teže od rješenja jednogrupne jednadžbe, jer je u svakom elementu volumena potrebno, umjesto jedne, odrediti G vrijednosti neutronskog toka (G je broj energetskih grupa).

U poglavlju 7.6. napomenuto je da se zadovoljavajuća točnost proračuna termičkih (lakovodnih) reaktora postiže sa 4 neutronske grupe (koje su označene kao makrogrupe), kao i da proračun brzih reaktora traži znatno veći broj grupa.

Numeričko rješenje višegrupne difuzijske jednadžbe traži posjedovanje elektroničkog računala većeg kapaciteta i odgovarajućeg paketa računarskih programa.

U praksi se često za manje zahtjevne proračune primjenjuju dvogrupne difuzijske jednadžbe opisane u poglavlju 7.6. (jednadžbe7.6.3). Te se jednadžbe, ako ih primjenimo na jednodimenzionalni proračun radijalne raspodjele neutronskog toka u cilindričnom reaktoru, mogu napisati na slijedeći način:

$$D_1(r)\nabla^2\phi_1(r) - \phi_1(r)\Sigma_1(r) + v\varepsilon\Sigma_f(r)\phi_2(r) = 0 \qquad \textbf{(7.10.14)}$$

$$D_2(r)\nabla^2\phi_2(r) - \phi_2(r)\Sigma_{a2}(r) + p\Sigma_1(r)\phi_1(r) = 0 \qquad \textbf{(7.10.15)}$$

Kod lakovodnih reaktora moguće je bez veće greške zanemariti istjecanje termičkih neutrona iz reaktora. Ovakav zaključak slijedi iz činjenice, istaknute u poglavlju 7.7, da je difuzijska dužina termičkih neutrona kod vodom hlađenih i moderiranih reaktora gotovo zanemariva u odnosu na dužinu njihovog usporavanja (vidi tablicu 7.7.1 i primjere 7.7.1 i 7.7.2).

Zanemarenje istjecanja termičkih neutrona znači da možemo jednadžbu (7.10.15) pisati bez prvog člana. Iz toga proizlazi da su tokovi neutrona $\phi_1(r)$ i $\phi_2(r)$ u svakom elementu volumena međusobno proporcionalni, jer je

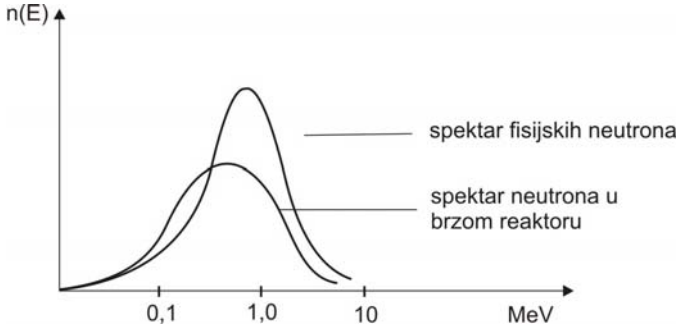
$$\phi_2(r) = \phi_1(r)\frac{r\Sigma_1(r)}{\Sigma_{a2}(r)}. \qquad \textbf{(7.10.16)}$$

Jednadžba (7.10.16) uvrštena u jednadžbu (7.10.14) dozvoljava da se numeričko rješenje svede na jednogrupni proračun raspodjele toka brzih neutrona. Taj se postupak, koji se često navodi kao 1.5 grupni postupak, od praktičkog značaja za pojednostavljene proračune lakovodnih reaktora.

7.11 Brzi reaktori

Osim na termičke reaktore, nuklearna će se energetika u budućnosti vrlo vjerojatno oslanjati na i na brze oplodne reaktore. Ti su reaktori naime od presudnog značaja za racionalno iskorištavanje nuklearnih energetskih sirovina.

Brzi reaktori ne sadrže moderator neutrona, pa kod njih pretežan broj fisija izazivaju neutroni viših energija (iznad 0.1MeV). Spektar neutrona u brzom reaktoru uspoređen je sa spektrom fisijskih neutrona na slici 7.11.1.



Slika 7.11.1 Spektar neutrona u brzom reaktoru

Kod je brzog reaktora, spektar neutrona, u usporedbi s fisijskim spektrom, pomaknut prema nižim energijama neutrona. Taj pomak je rezultat usporavanja neutrona, pretežno neelastičnim sudarima s jezgrama atoma fisijskog i oplodnog materijala, kao i s jezgrama konstrukcijskog materijala i rashladnog sredstva.

Udarni presjeci atoma za nuklearne reakcije s neutronima bitno se razlikuju u području energija termičkih od onih u području energija brzih neutrona. Neki karakteristični podaci za udarne presjeke izotopa urana i plutonija u području energija termičkih i brzih neutrona dati su tablicama 2.13.1 i 2.13.2.

Iz tih se tablica može uočiti da su udarni presjeci za nuklearne reakcije s brzim neutronima mnogo manji od onih koji karakteriziraju nuklearne reakcije s termičkim neutronima.

Nadalje, broj neutrona dobivenih u fisiji (što određuju parametri ν i η, definirani u poglavlju 4.5) je veći ako fisije izazivaju brzi neutroni.

Manji udarni presjeci, odnosno veća "prozračnost" materijala za brze neutrone, omogućava i izvjesna pojednostavljenja kod proračuna kritičnosti brzog reaktora. Heterogeni sistem kod proračuna brzog reaktora naime može se, uz manju grešku nego kod proračuna termičkog reaktora, nadomjestiti homogenim (depresija neutronskog toka unutar gorivnih šipki postaje zanemariva).

Nadalje, kod brzog reaktora otpada potreba za proračunom nuklearnih reakcija u području termičkih, a dobrim dijelom i u području rezonantnih energija neutrona.

S druge strane, proračun brzog reaktora komplicira činjenica da je njegov neutronski spektar u priličnom mjeri vezan uz sastav jezgre, kao i da se zbog znatne promjene energije neutrona unutar spektra proračun mora u većoj mjeri nego kod termičkih reaktora osloniti na višegrupni pristup. Rezultati dobiveni jednogrupnim proračunom brzog reaktora mogu poslužiti samo kao prva aproksimacija.

Veći broj neutrona dobiven u fisiji, posebno kada se radi o fisiji izotopa plutonija ^{239}Pu, daje mogućnost efikasne konverzije ^{238}U u fisibilni materijal. Upravo u tome leži perspektivni značaj brzih reaktora za nuklearnu energetiku. Brzi reaktori mogu osigurati proces poznat pod imenom oplodnja (ti se reaktori zbog toga i zovu oplodni reaktori), kod kojega se u reaktoru generira više fisibilnog materijala (^{239}Pu), nego što se takvog materijala troši (a troši se ^{235}U i ^{239}Pu).

Potrebno je podsjetiti da kretanje neutrona unutar brzog reaktora ne odgovara uvjetima koji su u poglavlju 6.1 specificirani kao nužni za primjenjivost difuzijske teorije (to posebno ne vrijedi za uvjet, $\Sigma_s >> \Sigma_a$). Bez obzira na to, difuzijska jednadžba ipak se često koristi kod proračuna brzih reaktora, pri čemu se neki fizikalni parametri korigiraju na osnovi rezultata transportne teorije neutrona. Samo se kod specijalnih problema (male metalne jezgre kod kojih je slobodni put neutrona veći od dimenzija ili kod proračuna neutronskih štitova) koriste složenije metode proračuna, kao što su integralna transportna jednadžba neutrona ili Monte Carlo metoda.

U praksi proračun brzih reaktora vrši se primjenom višegrupnih numeričkih postupaka, sličnih onima koji su opisani u poglavlju 7.10. za proračun termičkih reaktora.

U ovom poglavlju izložiti će se elementarni principi fizikalne teorije homogenog (ili homogeniziranog) brzog reaktora na osnovi korigirane jednadžbe difuzije neutrona.

Ako se prisjetimo formule s 4 faktora koja određuje k_∞, lako je ustanoviti da kod brzog reaktora, koji sadrži samo nuklearno gorivo (odnosno kod kojega je apsorpcija brzih neutrona u drugim materijalima zanemariva), za multiplikaciju neutrona može biti jedino relevantan faktor η, pa se može pisati $k_\infty=\eta=\nu\sigma_f/\sigma_a$.

Difuzijsku konstantu D kod brzih reaktora treba računati prema izrazima (6.2.2)i (6.2.3) koji uključuju korekciju dobivenu iz teorije transporta neutrona. Budući da je kod težih jezgara $\overline{\cos(\psi)} \approx 0$, dopušteno je difuzijsku konstantu izraziti sa $D=1/3\Sigma_t$.

Difuzijska dužina, primjenjiva na brze reaktore, biti će suglasno izrazu (6.5.2),

$$L^2 = \frac{1}{3\Sigma_a\Sigma_t}. \qquad \textbf{(7.11.1)}$$

Kod brzih reaktora od velikog je značaja uloga reflektora, ne samo za smanjenje kritične mase nego i za povećanje faktora oplodnje. Za materijal reflektora kod brzog reaktora se uzima tzv. oplodni materijal (prirodni uran ili uran sa manjim sadržajem ^{235}U od prirodnog urana, odnosno tzv. osiromašeni uran), što omogućuje da neutroni zahvaćeni u reflektoru budu korisno upotrijebljeni za stvaranje novog fisijskog materijala.

Razmotriti ćemo ranije dati izraz (7.9.17), koji određuje ovisnost polumjera kritičnog kuglastog reaktora R o debljine reflektora T:

$$ctg(BR) = \frac{1}{BR}\left(1-\frac{D_r}{D_j}\right) - \frac{D_r}{BD_jL_r}cth\left(\frac{T}{L_r}\right). \qquad \textbf{(7.11.2)}$$

Kod brzog reaktora okruženog debelim slojem oplodnog materijala vrijedi, $D_r \approx D_j$ (oplodni i fisijski materijal imaju slična svojstva za usporavanje neutrona). Nadalje, uz $T>>L_r$, $cth(T/L_r)$ postaje približno 1. Uz te se uvjete jednadžba (7.11.2) svodi na

$$-BL_r ctg(BR) = 1, \qquad \text{ili}$$

$$BL_r = tg(\pi - BR). \qquad \textbf{(7.11.3)}$$

U poglavlju 7.6. razmatrane su za termičke reaktore veze između faktora zakrivljenja neutronskog toka i fizikalnih parametara reaktora (jednogrupni postupak, dvogrupni postupak, model kontinuiranog usporavanja neutrona). Svi se ti odnosi temelje na rješavanju difuzijske jednadžbe neutrona.

Primjenom jednadžbe transporta neutrona moguće je za brze reaktore postaviti nešto drukčiji odnos između faktora zakrivljenja neutronskog toka i fizikalnih parametara materijala. Taj je odnos dan slijedećim izrazom:

$$B = \beta \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{\Sigma_t}\right), \qquad \textbf{(7.11.4)}$$

gdje je

$\beta = \Sigma_e + \Sigma_{ie} + \nu\Sigma_f$.

Izraz (7.11.4) vrijedi uz uvjet $B \leq \Sigma_t$.

Primjer 7.11.1

Potrebno je usporediti materijalni faktor zakrivljenja neutronskog toka za čisti ^{235}U računat po jednogrupnom postupku (jednadžba 7.6.13) i po izrazu (7.11.4).

Rješenje:

Podaci za ^{235}U i nuklearne reakcije sa brzim neutronima dani su u tablici 2.13.2:

$\sigma_f=1.32*10^{-28}$ m^2, $\sigma_a=1.72*10^{-28}$ m^2, $\sigma_c=0.4*10^{-28}$ m^2.

Dodatni podaci potrebni za proračun jesu: $\sigma_t=5.7*10^{-28}$, $\nu=2.52$.

Gustoća urana je približno 19000kg/m^3, a broj atoma ^{235}U po m^3 materijala, (vidi izraz 2.11.1) $4.87*10^{28}$.

Primjenom navedenih veličina slijedi, $\Sigma_a=8.38 m^{-1}$, $\Sigma_t=27.8$ m^{-1}.

Difuzijska dužina brzih neutrona biti će prema izrazu (7.11.1) $L^2=0.00143 m^2$.

Multiplikacijski faktor $k_{ef}=\nu\sigma_f/\sigma_a=1.93$.

Primjenom jednogrupnog postupka dobiva se

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} = 650.3\ m^{-2} = 0.065\ cm^{-2}$$

ili

$B=25.5 m^{-1}$

S druge strane, faktor β u izrazu (7.11.4) je

$\beta=\Sigma_t+(\nu-1)\Sigma_f-\Sigma_c=35.6 m^{-1}$

Faktor zakrivljenja neutronskog toka je veličina koja mora zadovoljiti jednadžbu

$$B = 35.6 tg^{-1}\left(\frac{B}{27.8}\right).$$

Jednadžba je približno zadovoljena za $B=27.8 m^{-1}$.

Primjer 7.11.2

Kolika je kritična masa kugle od ^{235}U bez reflektora i kolika bi bila da se ona okruži debelim slojem (debljim od dvostruke difuzijske dužine) ^{238}U?

Rješenje:

U primjeru 7.11.1. dobiven je za ^{235}U materijalni faktor zakrivljenja neutronskog toka $B=27.8 m^{-1}=0.278 cm^{-1}$. Za kritični nereflektirani kuglasti reaktor materijalni faktor zakrivljenja neutronskog toka mora biti jednak geometrijskom faktoru zakrivljenja neutronskog toka. Na temelju izraza (7.8.18) polumjer kritične kugle ^{235}U bez reflektora izračunao bi se formulom

$$R = \frac{\pi}{B} = 11.3\ cm.$$

Odgovarajuća masa te kugle bi bila 115kg.

Kad bi kugla ^{235}U bila okružena debelim slojem ^{238}U (ili prirodnog urana) kritični bismo polumjer dobili iz izraza (7.11.3). Korištenje tog izraza traži da se prethodno izračuna difuzijska dužina L_r za ^{238}U.

Podaci za ^{238}U i prosječnu energiju spektra brzih neutrona jesu:

$\sigma_t=5.8*10^{-28}m^2$, $\sigma_a=0.13*10^{-28}m^2$.

Iz tih podataka proizlazi, $\Sigma_t=28.2m^{-1}$, $\Sigma_a=0.63m^{-1}$ i $L_r=0.136m^{-1}$.

Kritični polumjer mora udovoljiti jednadžbi

$$R=\frac{\pi-arctg(BL_r)}{B}.$$

Uvrštenjem numeričkih vrijednosti dobiva se R=0.066m=6.6cm (eksperimentalni podatak je približno 6cm).

Masa kritične kugle ^{235}U koja je obložena sa debelim slojem reflektora iz ^{238}U iznosi oko 23kg.

Nešto točniji, ali još uvijek približni, podaci o kritičnim dimenzijama i kritičnim masama kuglastih reaktora sastavljenih samo iz fisijskog materijala i reflektora dani su u tablici 7.11.1.

Tablica 7.11.1 Kritične mase i dimenzije kuglastih brzih reaktora

	93.9% ^{235}U $\rho=18.9g/cm^3$		^{239}Pu $\rho=15.7g/cm^3$	
Reflektor	Kritična masa (kg)	Promjer (cm)	Kritična masa (kg)	Promjer (cm)
goli reflektor	48	17.3	16.8	12.7
10cm čelik	25.3	14.0	8.9	10.2
10cm uran	18.4	12.6	6.4	9.2
uran beskonačne debljine	16.0	11.7	5.7	8.9

Brzi reaktori ne sadrže samo fisijske i oplodne materijale nego i materijale rashladnog kruga i konstrukcijske materijale. Procjena kritičnih dimenzija tako sastavljenog reaktora u prvoj se aproksimaciji može izvesti pretpostavljajući homogeni sustav u kojemu svaki od navedenih materijala sadrži određeni broj atoma po jedinici volumena. Makroskopski udarni presjeci, potrebni kod proračuna, tada se dobivaju kao zbroj doprinosa svakog nuklida tj. $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$....

Nakon što se tako utvrde prosječne vrijednosti udarnih presjeka proračun se vrši na isti način kao da reaktor sadrži čiste fisijske materijale.

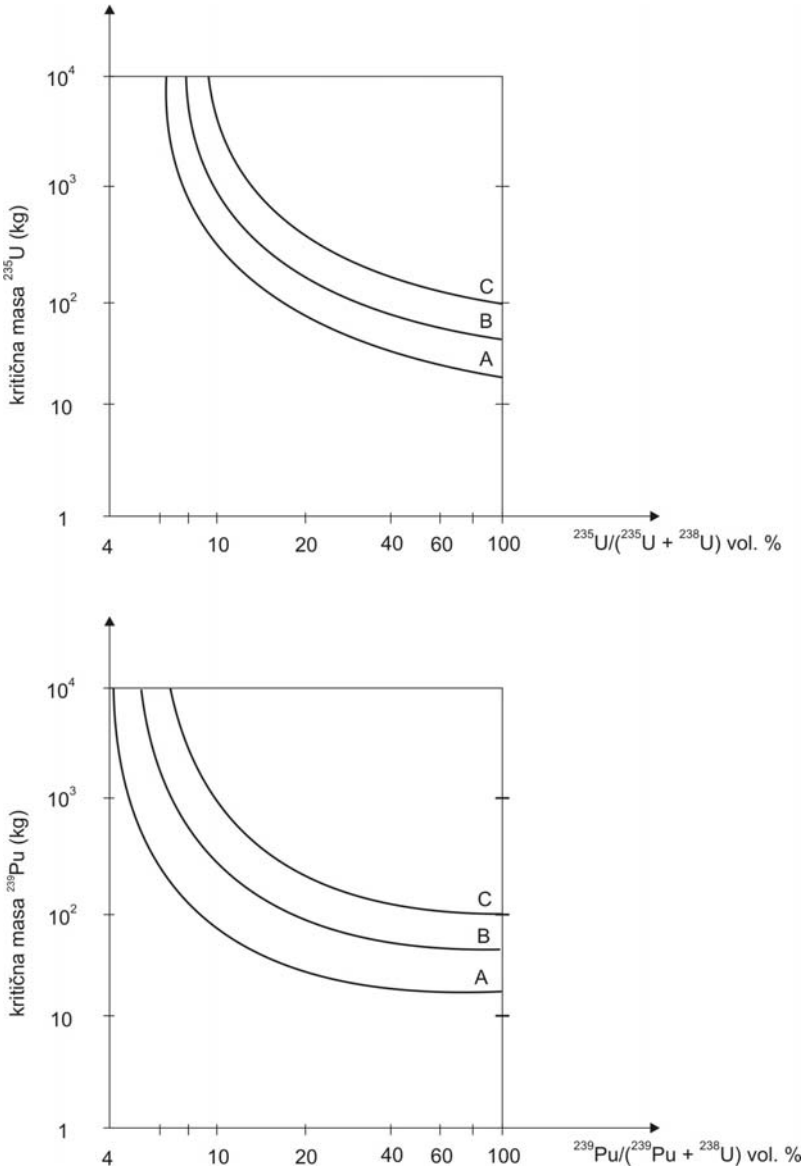
U praksi jezgra brzog reaktora sadrži ^{235}U i/ili ^{239}Pu kao fisijski materijal, ^{238}U odnosno osiromašeni uran kao oplodni materijal, natrij kao rashladno sredstvo i nehrđajući čelik kao konstrukcijski materijal.

Rezultati proračuna kritičnih masa brzih reaktora sa ^{235}U i ^{239}Pu kao fisijskim materijalom, u ovisnosti o obogaćenju nuklearnog goriva, prikazani su na slici 7.11.2. Krivulje na slici označene sa A, B i C odnose se na razne volumne udjele materijala u sastavu jezgre:

A-100% nuklearno gorivo

B- 50% nuklearno gorivo, 33.3% natrij, 16.6% nehrđajući čelik

C- 25% nuklearno gorivo, 50% natrij, 25% nehrđajući čelik.



Slika 7.11.2 Kritična masa ^{235}U i ^{239}Pu u brzom reaktoru

Slika pokazuje da kod obogaćenja goriva nižim od 10% kritična masa naglo raste, posebno kod ^{235}U.

U uvodu ovog poglavlja napomenuto je da praktičan proračun kritičnosti brzog reaktora zahtjeva primjenu višegrupnih metoda proračuna. Veliki se raspon energija neutrona u spektru brzog reaktora naime teško može aproksimirati neutronima iste energije.

Višegrupni proračun bitno se pojednostavljuje ako se pretpostavi homogena sredina i isti prostorni raspored tokova neutrona u svim energetskim grupama. Analiza metoda višegrupnog proračuna brzih reaktora prelazi svrhu ove knjige.

Zadaci uz poglavlje 7.

1. Homogeni nuklearni reaktor gubi u epitermičkom području energija 9% neutrona zbog rezonantnih apsorpcija i 8% neutrona zbog istjecanja, a u području termičke energije 15% neutrona zbog parazitnih apsorpcija i 6% zbog istjecanja. Koliko mora biti obogaćenje urana da bi taj reaktor bio kritičan?

2. Koliki je multiplikacijski faktor neograničenog reaktora k_∞ za homogenu mješavinu 3% obogaćenog urana i grafita sa odnosom atoma urana i grafita 1:300?

3. Izračunati koliki je potreban težinski udio 1.5% obogaćenog urana u homogenoj mješavini sa teškom vodom da bi dobili $k_\infty=1.03$.

4. Ocijeniti kolika bi trebala biti koncentracija ^{239}Pu u običnoj vodi da bi homogena mješavina imala $k_\infty=1.03$.

Primjedba: Kod homogene mješavine čistog fisijskog materijala i moderatora $k_\infty=f\eta$.

5. Usporediti faktor brze fisije gorive šipke promjera 1cm iz oksida urana gustoće $\rho=10.2 g/cm^3$, izračunat na osnovi rezultata analize u Dodatku 4 (izraz D.4.3 i tablica D.4.1) i empiričkog izraza (7.5.1), uz $V_m/V_g=3.5$ i zanemarivi volumen konstrukcijskog materijala.

6. Za koliko bi se postotaka promijenila vrijednost faktora termičkog iskorištenja neutrona u gorivoj ćeliji koja sadrži gorive šipke promjera 12mm izrađene iz oksida prirodnog urana ($\rho=10.5 g/cm^3$) i tešku vodu kao moderator s korakom rešetke 100mm, ako bi se zanemarila razlika prosječnog neutronskog toka u moderatoru i nuklearnom gorivu.

7. Koliko je obogaćenje urana potrebno da bi heterogeni reaktor koji sadrži gorive elemente promjera 9.5mm iz oksida urana ($\rho=10.5 g/cm^3$) u običnoj vodi sa korakom rešetke 13mm imao $k_\infty=1$?

8. Odrediti difuzijsku dužinu termičkih neutrona L i dužinu usporavanja neutrona L_s za reaktor iz primjera 7. Koliko je postotaka smanjena difuzijska dužina u toj sredini u odnosu na čisti moderator?

9. Koliko se može postotno uštedjeti na volumenu ako se kritični reaktor iz istog materijala (isti B^2) izvede u obliku kugle umjesto u obliku cilindra čiji je odnos promjera i visine optimalan?

10. Treba odrediti dvogrupnim postupkom kritične dimenzije teškovodnog reaktora sa jezgrom čije karakteristike odgovaraju primjeru 6. Oblik reaktora je cilindričan sa odnosom dimenzija koje daju minimalan volumen. Usporediti rezultat sa onim koji bi slijedio iz primjene teorije dobi neutrona.

11. Potrebno je odrediti odnos prosječnog neutronskog toka, a time i generirane snage, gorivog štapa koji se nalazi u osi cilindričnog heterogenog reaktora bez reflektora i onog koji se nalazi trećinu polumjera udaljen od periferije reaktora.

12. U nekom je ne reflektiranom cilindričnom grafitnom reaktoru izmjeren maksimalni tok neutrona od 5*1017 neutrona/m2s. Koliki je tok neutrona na površini cilindričnog plašta na polovici visine cilindra (z=0)?

13. Koliki je odnos maksimalnog i prosječnog volumnog toka neutrona u cilindričnom reaktoru bez reflektora?

Primjedba: Kod integracije izraza (7.8.19) odabrati element volumena $dV=2r\pi drdz$ i uzeti u obzir da je $\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$.

14. Cilindričan lakovodni reaktor promjera 3m obložen je sa 20cm debelim slojem obične vode. Ocijeniti smanjenje polumjera kritičnog reaktora zbog djelovanja tog reflektora. Kakva bi bila reflektorska ušteda kada bi se voda zamijenila sa slojem grafita iste debljine?

15. Potrebno je korištenjem jednogrupnog postupka ocijeniti kritičnu masu kugle ^{239}Pu, kada nema reflektor i kada je okružena sa slojem ^{238}U debljine 10cm.

Reference uz poglavlje 7.

[1] D.Feretić, Osnove teorije nuklearnog reaktora, pogl.2, Zagreb,Liber 1987.

[2] D.Popović, Osnovi nuklearne tehnike, pogl 5, Naučna knjiga, Beograd 1970.

[3] J.R.Lamarsh, Introduction to nuclear reactor theory, Chap 9, 10 and 11, Addison-Wesley Publ.Co, Reading Pa, 1972.

[4] J.R.Lamarsh, Introduction to nuclear engineering, Chapt.6, Addison Wensley Publ.Co., Reading Mass, 1975.

[5] S.Glasstone, A.Sesonke, Nuclear Reactor Engineering, Chapt.4, Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1967.

[6] S.Glasstone, M.Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, Chapt.7, 8 and 9, Van Nostrand Co, New York, 1952.

[7] A.M.Weinberg, E.P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, Chapt. 3 and 4, The Univ.Chicago Press, 1959.

[8] J.Weisman, Elements of Nuclear Reactor Design, Chapt.4, Elsevier Sci.Publ.Co.Amsterdam, 1977.

[9] A.Henry, Nuclear Reactor Analysis, Chapt. 3, 4 and 5, MIT, 1975.

[10] R.Meghreblian, D.K.Holmes, Reactor Analysis, Chapt. 5 and 6, Mc Graw Hill Co. New York, 1960.

[11] G.A.Batja, Osnovi teorii i metodi rasčeta jadernih energetičeskih reaktorov, glava 7., Energoizdat, Moskva, 1982.

[12] R.L.Murray, Nuclear Reactor Physics, Chapt. 3, 4 and 5, MacMillan Co.London, 1959.

[13] P.F.Zweifel, Reactor Physics, Chapt. 3, International Student Edition, Mc Graw Hill, 1973.

[14] M.C.Edlund, Reactor Static Modules RS.3-RS.8, Course on Operational Physics of Power Reactors, International Centre for Theoretical Physics

8 KINETIKA NUKLEARNOG REAKTORA

Uvod

U poglavlju 7. analizirali smo uvjete pod kojima se može postići kritičnost, odnosno samoodržavajuća lančana reakcija u nuklearnom reaktoru. Analiza se zasnivala na bilanci neutrona, prema kojoj se kritičnost ostvaruje kada je generacija neutrona izjednačena s njihovim gubitkom. Sva su se razmatranja u poglavlju 7 odnosila na stacionarno stanje reaktora, jer su se temeljila na bilanci neutrona u stacionarnom stanju (jednadžba 6.3.2). Ustanovljeno je da se uvjet kritičnosti reaktora u stacionarnom stanju može izraziti i postavkom da je efektivni multiplikacijski faktor reaktora k_{ef} jednak jedinici. Iz tog se razloga analize izvršene u tom poglavlju ponekad označuju kao statika reaktora.

Predmet razmatranja ovog poglavlju su pojave u nuklearnom reaktoru kod kojega je k_{ef} različit od jedinice. Ako je $k_{ef}<1$ kažemo da je reaktora podkritičan, i obrnuto, kada je $k_{ef}>1$ govorimo o nadkritičnom reaktoru. U oba slučaja tok neutrona u reaktoru nije vremenski konstantan. Brzina promjene neutronskog toka je funkcija veličine odstupanja k_{ef} od jedinice. Mjera za to odstupanje je veličina zvana reaktivnost. Na reaktivnost reaktora utječu razni faktori (temperatura, zatrovanje fisijskim produktima, izgaranje nuklearnog goriva, regulacijske šipke, otopljeni apsorberi).

Analize pojava u reaktoru koje nastaju kao posljedica promjene reaktivnosti kao i analize uzroka tih promjena zovemo zajedničkim imenom kinetika reaktora.

8.1 Trajanje usporavanja i difuzije neutrona u reaktoru

Odziv neutronskog toka i generirane snage u reaktoru na promjene reaktivnosti ovisi o vremenu trajanja jednog neutronskog ciklusa (neutronski ciklus ilustriran je slikom 7.3.1). Što je vrijeme trajanja ciklusa kraće to je kraće i vrijeme reprodukcije neutrona u reaktoru, pa reaktor naglije reagira na unesene poremećaje.

Vremensko trajanje ciklusa ovisi o zbroju vremena usporavanja neutrona do njihove termalizacije i vremena difuzije termičkih neutrona. Vrijeme fisije atoma iznosi svega oko 10^{-14}s i može se zanemariti.

Vrijeme usporavanja neutrona.

Usporavanje neutrona pretežno se odvija putem elastičnih sudara sa jezgrama atoma moderatora. Ako je makroskopski presjek materijala moderatora za elastični sudar Σ_s, tada je prosječni slobodni put neutrona između dva sudara $\lambda_s=1/\Sigma_s$.

Označimo li sa v brzinu neutrona, put neutrona u vremenu dt bit će vdt, a prosječan broj sudara u vremenu dt je vdt/λ_s. Promjena logaritma energije neutrona po sudaru jednaka je ξ (vidi poglavlje 5.2). Suglasno tome, promjena logaritma energije neutrona u vremenu bit će

$$-d\ln(E)=-\frac{dE}{E}=\xi\frac{vdt}{\lambda_s}$$

Iz toga proizlazi

$$dt=-\frac{1}{v\xi\Sigma_s}\frac{dE}{E}. \qquad \textbf{(8.1.1)}$$

Ako uzmemo u obzir da je brzina neutrona v funkcija njegove kinetičke energije E ($v=(2E/m)^{1/2}$), možemo pomoću relacije (8.1.1.) odrediti vrijeme koje je potrebno da bi se neutron usporio od fisijske energije E_0 do termičke energije E_{th}:

$$\int_{t=0}^{t} dt = -\frac{(m/2)^{1/2}}{\xi\Sigma_s}\int_{E_0}^{E_{th}} \frac{dE}{E_0^{3/2}} = \frac{1}{\xi\Sigma_s}\left[\left(\frac{2m}{E_{th}}\right)^{1/2} - \left(\frac{2m}{E_0}\right)^{1/2}\right]. \qquad \textbf{(8.1.2)}$$

Budući da je $E_0 >> E_{th}$, drugi član u zagradi dopušteno je zanemariti u odnosu na prvi član. Masa neutrona iznosi $1.67*10^{-24}$g. Uvrstimo li taj iznos u gornju jednadžbu, izrazimo energiju neutrona u eV, a $\xi\Sigma_s$ u cm^{-1}, možemo nakon sređivanja pisati

$$t_u = \frac{1.445*10^{-6}}{\xi\Sigma_s}\frac{1}{(E_{th})^{1/2}}. \qquad \textbf{(8.1.3)}$$

Vrijeme usporavanja neutrona t_u do određene energije E_{th} je funkcija samo faktora sposobnosti usporavanja neutrona u reaktora $\xi\Sigma_s$ (taj je faktor razmatran u poglavlju 5.3).

Primjer 8.1.1

Koliko je vrijeme usporavanja neutrona u teškoj vodi, običnoj vodi i grafitu sa energije fisijskih neutrona do energije termičkih neutrona od 1eV?

Rješenje

Iz tablice 5.3.1. mogu se očitati faktori sposobnosti usporavanja neutrona $\xi\Sigma_s$

- za tešku vodu $0.179cm^{-1}$
- za običnu vodu $1.35cm^{-1}$
- za grafit $0.064cm^{-1}$

Iz izraza (8.1.3) dobivaju se tražena vremena usporavanja neutrona do energije 1eV:

- za tešku vodu $t=8.07*10^{-6}s$
- za običnu vodu $t=1.07*10^{-6}s$
- za grafit $t=2.26*10^{-6}s$

Vrijeme difuzije termičkih neutrona

Vrijeme difuzije termičkih neutrona t_d ćemo veoma jednostavno odrediti kao odnos prosječnog puta termičkih neutrona λ_a ($\lambda_a=1/\Sigma_a$) i prosječne brzine tih neutrona v_{th}, dakle

$$t_d = \frac{\lambda_a}{v_{th}} = \frac{1}{v_{th}\Sigma_a}. \qquad \textbf{(8.1.4)}$$

Ako se sredina u kojoj neutroni difundiraju sastoji od nuklearnog goriva i moderatora izraz (8.1.4) postaje

$$t_d = \frac{1}{v_{th}(\Sigma_{am}+\Sigma_{ag})} = \frac{1}{v_{th}\Sigma_{sm}}\frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_{am}+\Sigma_{ag}}, \qquad \textbf{(8.1.5)}$$

što se očigledno može pisati kao

$$t_d = \frac{1}{v_{th}\Sigma_{am}}(1-f). \qquad \textbf{(8.1.6)}$$

Vrijeme difuzije termičkih neutrona u reaktoru jednako je vremenu difuzije u čistom moderatoru pomnoženim sa 1-f. Sličan rezultat dobili smo kod analize odnosa difuzijske dužine neutrona u reaktoru i čistom moderatoru (vidi poglavlje 7.7).

Interesantno je razmotriti odnos vremena difuzije i vremena usporavanja neutrona. Ako u izrazu (8.1.4) zamijenimo v_{th} sa $(2E/m)^{1/2}$ i podijelimo taj izraz sa izrazom (8.1.2), u kojemu smo zanemarili drugi član, dobivamo jednostavnu formulu

$$\frac{t_d}{t_u} = \frac{1}{2}\frac{\xi\Sigma_s}{\Sigma_a}(1-f). \qquad \textbf{(8.1.7)}$$

Odnos vremena difuzije i vremena usporavanja neutrona u moderatoru (dakle uz f=0) jednak je polovici odnosa moderacije tog moderatora. Značenje odnosa moderacije razmatrano je u poglavlju 5.3.

Primjer 8.1.2

Koliki je odnos vremena difuzije i vremena usporavanja neutrona u teškoj vodi, običnoj vodi i grafitu? Kako se taj odnos mijenja ako se neutroni kreću u neograničenom reaktoru kod kojeg nuklearno gorivo apsorbira 85% neutrona?

Rješenje

Prema tablici 5.3.1. odnos moderacije za tešku i obično vodu iznosi 1900 odnosno 61. Vrijeme difuzije termičkih neutrona, na osnovi izraza 8.1.7, u teškoj vodi biti će 950 puta duže, u običnoj vodi oko 30 puta duže, a u grafitu 85 puta duže od vremena njihovog usporavanja do energije termičkih neutrona (tj. energije kod koje proces usporavanja neutrona prelazi u proces difuzije neutrona). Ako se neutroni kreću u reaktoru kod kojega je f=0.85 navedeni odnosi vremena difuzije i usporavanja neutrona biti će, 1/(1-f)=6.67 puta manji.

Odnos vremena difuzije neutrona i vremena trajanja cijelog neutronskog ciklusa iznosi:

$$\frac{t_d}{t_d + t_u} = \frac{1}{1 + \frac{2\Sigma_a}{\xi\Sigma_s}\frac{1}{1-f}}. \qquad \textbf{(8.1.8)}$$

Na osnovi rezultata primjera 8.1.1. i 8.1.2. može se ocijeniti da će drugi član u nazivniku izraza (8.1.8) biti praktički zanemariv u odnosu na jedinicu, ako je moderator grafit i teška voda. Kod tih je moderatora naime vrijeme difuzije neutrona gotovo istovjetno s vremenom trajanja cijelog neutronskog ciklusa.

Međutim, kada se radi o reaktoru s lakovodnim moderatorom, kod kojega je f=0.85, drugi član u nazivniku izraza (8.1.8) raste na približno 0.2, što znači da je u tom reaktoru vrijeme difuzije neutrona svega oko 80% vremena neutronskog ciklusa.

Prosječno trajanje neutronskog ciklusa u reaktoru konačnih dimenzija.

U dosadašnjim analizama trajanja neutronskog ciklusa pretpostavljali smo neograničen reaktor (tj. reaktor kod kojega nema bijega neutrona u okolinu). Ako je reaktor prostorno ograničen dio se neutrona gubi u okolini prije završetka ciklusa. Za te je neutrone dakle vrijeme trajanja ciklusa u reaktoru kraće. Dio neutrona koji se gubi u okolinu je određen faktorima njihovog bijega L_t i L_b.

U kinetici reaktora će nas prvenstveno interesirati vrijeme difuzije termičkih neutrona (koje je na osnovi gore danih analiza približno jednaku trajanju cijelog neutronskog ciklusa). To vrijeme ovisno je o faktoru bijega termičkih neutrona L_t.

Ako sa l_∞ označimo prosječno vrijeme trajanja neutrona u neograničenom, a sa l_p prosječno vrijeme trajanja neutrona u ograničenom reaktoru, možemo postaviti relaciju

$$l_p = \frac{n l_\infty L_t + n l' (1 - L_t)}{n}, \qquad \textbf{(8.1.9)}$$

gdje je

n-ukupni broj termičkih neutrona po jedinici volumena

l' - prosječno vrijeme difuzije termičkih neutrona prije bijega

Opravdano je pretpostaviti da odbjegli neutroni ne sudjeluju u nuklearnim reakcijama u reaktoru, i zbog toga zanemariti njihovo postojanje, tj. postaviti $l'=0$.

Na temelju navedene pretpostavke izlazi,

$$l_p = l_\infty L_t = \frac{l_\infty}{1 + B^2 L^2}. \qquad \textbf{(8.1.10)}$$

U slijedećem ćemo poglavlju pokazati da u reaktoru postoji dio neutrona kojima je vrijeme postojanja nakon fisije znatno duže od onog koje određuju izrazi (8.1.3), (8.1.7) i (8.1.10). To su tzv. zakašnjeli neutroni, čije su značajke objašnjene u poglavlju 4.5. Iako je broj zakašnjelih neutrona veoma malen u odnosu na broj promptnih neutrona, njihov je utjecaj na kinetiku reaktora od presudne važnosti. Ne treba zaboraviti da se vrijeme trajanja ciklusa neutrona u konačnom reaktoru l_p u izrazu (8.1.10) odnosi na promptne neutrone.

8.2 Brzina promjene neutronskog toka u ovisnosti o reaktivnosti reaktora

Temeljna zadaća kinetike reaktora je odrediti ovisnost promjene neutronskog toka u reaktoru (a time i generirane snage) o reaktivnosti. U uvodnom razmatranju osnovnih pojmova iz kinetike reaktora naglašeno je da je reaktivnost mjera za odstupanje efektivnog multiplikacijskog faktora k_{ef} od jedinice. Definicija reaktivnosti, čija je oznaka ρ, je

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}. \qquad \textbf{(8.2.1)}$$

Buduće da je odstupanje k_{ef} od jedinice redovito veoma maleno (reda desetinke postotka ili manje), to je reaktivnost približno jednaka k_{ef}-1.

U ovom će se poglavlju ovisnost promjene neutronskog toka o reaktivnosti analizirati na pojednostavljen način (nešto kompleksnija analiza istog problema je izložena u Dodatku 6.). Pojednostavljenje se prvenstveno ogleda u slijedećem:

- Analiza će se ograničiti samo na promatranje kinetike termičkih reaktora, tj. na primjenu jednogrupne metode (ovu aproksimaciju opravdava ranije ukazana činjenica da je vrijeme postojanja termičkih neutrona približno jednaku trajanju cijelog neutronskog ciklusa).

- Promatrati će se reaktori s prostorno neovisnim konstantama materijala (homogeni ili homogenizirani reaktori bez reflektora).

- Računati će s malenim odstupanjima od kritičnosti, tj. s malenim vrijednostima ρ.

Iako neke od opisanih aproksimacija ne izgledaju sasvim prihvatljive, rezultati analize dovode od rezultata koji su od značaja i za praktičnu primjenu.

Bilanca termičkih neutrona

Kod analize ćemo poći od bilance termičkih neutrona u nestacionarnom stanju, koja je dana jednadžbom (6.3.1):

$$\frac{\partial n\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} = S\left(\vec{r},t\right) - \phi\left(\vec{r},t\right)\Sigma_a\left(r\right) + D\nabla^2\phi\left(\vec{r},t\right). \qquad \textbf{(8.2.2)}$$

Radi jednostavnosti, u nastavku nećemo pisati oznaku prostorne i vremenske ovisnosti uz svaku varijablu. U skladu s navedenim pretpostavkama smatrati ćemo da je makroskopski udarni presjek Σ_a neovisan o prostornim koordinatama. Nadalje, budući da je jednadžba (8.2.2) bilanca termičkih neutrona, dozvoljeno je pisati ϕ=nv, gdje je v prosječna brzina tih neutrona.

U daljoj ćemo se analizi dakle koristiti izrazom,

$$\frac{dn}{dt} = Dv\nabla^2 n - nv\Sigma_a + S. \qquad \textbf{(8.2.3)}$$

Izvor neutrona S u jednadžbi (8.2.3) sastoji se iz dva dijela, koji se po vremenskim karakteristikama bitno razlikuju. To su izvor promptnih neutrona S_p i izvor zakašnjelih neutrona S_z.

Izvor promptnih neutrona

Izvor promptnih neutrona možemo odrediti postupkom koji je korišten u poglavlju 7.6, za izračunavanje izvora neutrona u jednadžbi (7.6.4). Treba, međutim, uzeti u obzir da je ovdje L_b=1, jer se ovdje primjenjuje jednogrupna metoda. Budući da po fisiji imamo β zakašnjelih i 1-β promptnih neutrona, možemo pisati

$$S_p = k_\infty\Sigma_a\phi\left(1-\beta\right). \qquad \textbf{(8.2.4)}$$

Izvor zakašnjelih neutrona

Karakteristike zakašnjelih neutrona opisane su u poglavlju 4.5, a njihovi osnovni podaci dati u tablici 4.5.1. Tamo je pokazano da se po fisiji dobiva β zakašnjelih neutrona, koji se prema karakteristikama kašnjenja dijele na 6 grupa. Svaku grupu karakterizira udio neutrona u grupi β_i i konstanta radioaktivnog raspada fisijskih produkata iz kojih ti neutroni nastaju λ_i.

Ako sa C_i označimo koncentraciju (broj atoma po jedinici volumena) fisijskih produkata čijim radioaktivnim raspadom nastaju zakašnjeli neutroni grupe i, možemo izvor zakašnjelih neutrona S_z izraziti kao

$$S_z = \sum_1^6 \lambda_i C_i \,. \qquad \textbf{(8.2.5)}$$

Uvrštenjem dobivenih izraza u jednadžbu (8.2.3), te uzevši u obzir da je $D/\Sigma_a=L^2$, kao i da prostorna raspodjela neutrona kod reaktora koji je blizu kritičnosti (malena reaktivnost ρ) slijedi zakon $\nabla^2\phi=-B^2\phi$ (vidi poglavlja 7.6. i 7.8.), dobivamo nakon jednostavnih transformacija

$$\frac{dn}{dt} = n\Sigma_a v\left(1+B^2L^2\right)\left[(1-\beta)\frac{k_\infty}{1+B^2L^2}-1\right]+\sum_1^6 \lambda_i C_i \,. \qquad \textbf{(8.2.6)}$$

Ako se prisjetimo da je kod jednogrupne metode $k_{ef}=\frac{k_\infty}{1+B^2L^2}=\frac{1}{1-\rho}$ (vidi jednadžbe 7.6.13 i 8.2.1), te da, prema jednadžbama (8.1.4) i (8.1.10), trajanje difuzije termičkih neutrona u reaktoru konačnih dimenzija iznosi

$$l_p = l_\infty L_t = \frac{1}{v\Sigma_a\left(1+B^2L^2\right)},$$

možemo jednadžbu (8.2.6) transformirati u kompaktniji izraz:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n}{l_p}k_{ef}(\rho-\beta)+\sum_1^6 \lambda_i C_i \,. \qquad \textbf{(8.2.7)}$$

Značajno je primijetiti da je jednadžba (8.2.7) izvedena uz pretpostavku vremenski konstantnog faktora zakrivljenost neutronskog toka ($\nabla^2\phi/\phi=-B^2=$const.), odnosno uz pretpostavku da je vremenska promjena neutronskog toka u svim točkama prostora ista. Ova pretpostavka, uvjetovana malim promjenama reaktivnosti, dozvoljava da se vremenske promjene neutronskog toka promatraju samo u jednoj točki prostora. Iz tog je razloga vremensko ponašanje reaktora izvedeno iz te pretpostavke poznato kao točkasta kinetika reaktora.

Varijable n i C_i u relaciji (8.2.7) međusobno su i vremenski ovisne.

Vremensku ovisnost koncentracije fisijskih produkata C_i možemo odrediti iz jednadžbe kojom je definirana bilanca tih produkata po jedinici volumena:

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i k_\infty \Sigma_a \phi - \lambda_i C_i \,. \qquad \textbf{(8.2.8)}$$

Prvi član na desnoj strani jednadžbe (8.2.8) daje broj atoma fisijskih produkata grupe i koji nastaju u jedinici volumena i jedinici vremena. Naime, broj nastalih termičkih neutrona je $k_\infty\Sigma_a\phi$, a broj zakašnjelih neutrona grupe i, $\beta_i k_\infty\Sigma_a\phi$, identičan je nastalom broju jezgara fisijskih produkata koje te neutrone generiraju.

Drugi član određuje broj atoma fisijskih produkata grupe i koji nestaju uslijed radioaktivnog raspada.

U stacionarnom stanju mora desna strana jednadžbe (8.2.8) biti jednaka nuli, jer je tada broj nastalih i raspadnutih jezgara svakog fisijskog produkta identičan.

Ako, nadalje, uzmemo u obzir da je

$$k_\infty\Sigma_a\phi = k_{ef}\left(1+B^2L^2\right)v\Sigma_a n = k_{ef}\frac{n}{l_p},$$

možemo jednadžbu (8.2.8) pisati u obliku

$$\frac{dC_i}{dt} = k_{ef}\frac{n}{l_p}\beta_i - \lambda_i C_i . \qquad \textbf{(8.2.9)}$$

Jednadžbe (8.2.7) i (8.2.9) osnovne su jednadžbe reaktorske kinetike. U rješenju tih jednadžbi tražiti ćemo odgovor na pitanje ovisnosti promjene neutronskog toka o reaktivnosti reaktora.

Pretpostavka o neovisnosti prostorne raspodjele neutronskog toka o vremenu (tj. primjena točkaste kinetike reaktora) bitno doprinosi pojednostavljenu rješenja jednadžbi reaktorske kinetike. Ova pretpostavka dozvoljava da se tok neutrona, koji je funkcija prostornih koordinata i vremena, separacijom varijabli prikaže kao produkt prostorne i vremenske funkcije:

$$\phi(r,t) = \phi(r)T(t). \qquad \textbf{(8.2.10)}$$

Budući da se prostorna raspodjela neutronskog toka, (a time i prostorna raspodjela gustoće neutrona) smatra neovisnom o vremenu, možemo, na osnovi jednadžbe (8.2.10), vremenski ovisnu funkciju gustoće termičkih neutrona u svakoj točki reaktora opisati jednostavnim izrazom:

$$n(t) = AT(t). \qquad \textbf{(8.2.11)}$$

gdje je A konstanta ovisna o početnim uvjetima.

Karakteristike vremenski ovisne funkcije T(t)

Vremenski ovisna funkcija T(t) ovisi o vremenskoj karakteristici promjene reaktivnosti. Najjednostavniji je slučaj kada reaktivnost nakon skokovite promjene ostane konstantna.

Posljedica skokovite promjene reaktivnosti je eksponencijalan rast neutronskog toka i gustoće neutrona, što ćemo potvrditi jednostavnom analizom.

Ako je $\bar{l}$ neko prosječno ponderirano vrijeme trajanja neutronskog ciklusa, (koje uključuje utjecaj promptnih i zakašnjelih neutrona), gustoća neutrona u vremenu $t + \bar{l}$ biti k_{ef} puta veća od gustoće neutrona u vremenu t (što slijedi neposredno iz definicije neutronskog ciklusa prikazanog slikom 7.3.1.).

Možemo dakle pisati,

$$n(t + \bar{l}) = n(t) + \bar{l}\frac{dn(t)}{dt} = k_{ef}n(t).$$

Pri razvoju funkcije $n(t + \bar{l})$ u red uzeto je u obzir vrlo kratko vrijeme $\bar{l}$, što opravdava zanemarenje viših članova reda.

Ako se dobivena jednadžba podijeli s n(t) i integrira u granicama od 0 do t, dobivamo,

$$n(t) = n(0)e^{(k_{ef}-1)t/T} \approx n(0)e^{\rho\, t/T}. \qquad \textbf{(8.2.12)}$$

Izvedeni izraz pokazuje da je ovisnost gustoće neutrona o vremenu eksponencijalna. Eksponent je upravo proporcionalan sa reaktivnošću, a obrnuto proporcionalan trajanju neutronskog ciklusa.

Primjer 8.2.1

U grafitnom reaktoru reaktivnost je skokovito porasla za 0.1%. Koliko će porasti snaga reaktora 1s nakon poremećaja, ako se zanemari utjecaj zakašnjelih neutrona i pretpostavi faktor iskorištenja termičkih neutrona f=0.85?

Rješenje:

Ako se zanemari utjecaj zakašnjelih neutrona, $\bar{l} \approx l_p$.

Na osnovi rezultata primjera 8.1.1. i primjene jednadžbe 8.1.7. izlazi da je za grafitni reaktor sa f=0.85 vrijeme difuzije termičkih neutrona $2.88*10^{-4}$s. To je vrijeme približno jednako vremenu trajanja neutronskog ciklusa l_p.

Jednadžba (8.2.12) daje gustoću neutrona (a time i generiranu snagu) nakon 1s:

$$n(1) = n(0)e^{\frac{0.001}{0.000\,288}} = 32.2n(0).$$

Snaga reaktora uz dane podatke bi za 1 sekundu narasla preko 32 puta!. Takav bi reaktor bilo vrlo teško regulirati. Kasnije će se pokazati da je uloga zakašnjelih neutrona presudna za stabilno ponašanje reaktora kod prijelaznih pojava.

Ako se uzme u račun utjecaj zakašnjelih neutrona funkcija T(t) nakon skokovite promjene reaktivnosti ostaje eksponencijalna, ali eksponent ne možemo tako jednostavno odrediti kao kada svi neutroni imaju istu vremensku karakteristiku kašnjenja. Zbog toga ćemo tu funkciju pisati u obliku

$$T(t) = e^{\omega t},$$

gdje je ω za sada nepoznati parametar.

Vremenska karakteristika gustoće neutrona u jednadžbama (8.2.7) i (8.2.9) imat će oblik

$$n(t) = Ae^{\omega t}. \qquad \textbf{(8.2.13)}$$

Koncentracija fisijskih produkata C_i je direktno proporcionalna s brojem fisija u jedinici volumena i time i s tokom odnosno gustoćom neutrona.

Iz navedenog proizlazi da promjenu koncentracije fisijskih produkata karakterizira ista vremenska funkcija kao i promjenu gustoće neutrona, tj. da je dopušteno pisati

$$C_i(t) = B_i e^{\omega t}. \qquad \textbf{(8.2.14)}$$

Uvrštenjem izraza (8.2.13) i (8.2.14) u jednadžbu (8.2.9) dobivamo odnos između konstanti A i B_i:

$$B_i = A\frac{k_{ef}\beta_i}{l_p(\omega + \lambda_i)}. \qquad \textbf{(8.2.15)}$$

Sada možemo izraze (8.2.13), (8.2.14) i (8.2.15) uvrstiti u jednadžbu (8.2.7), pri čemu nakon jednostavnih transformacija i eliminacije konstante A preostaje

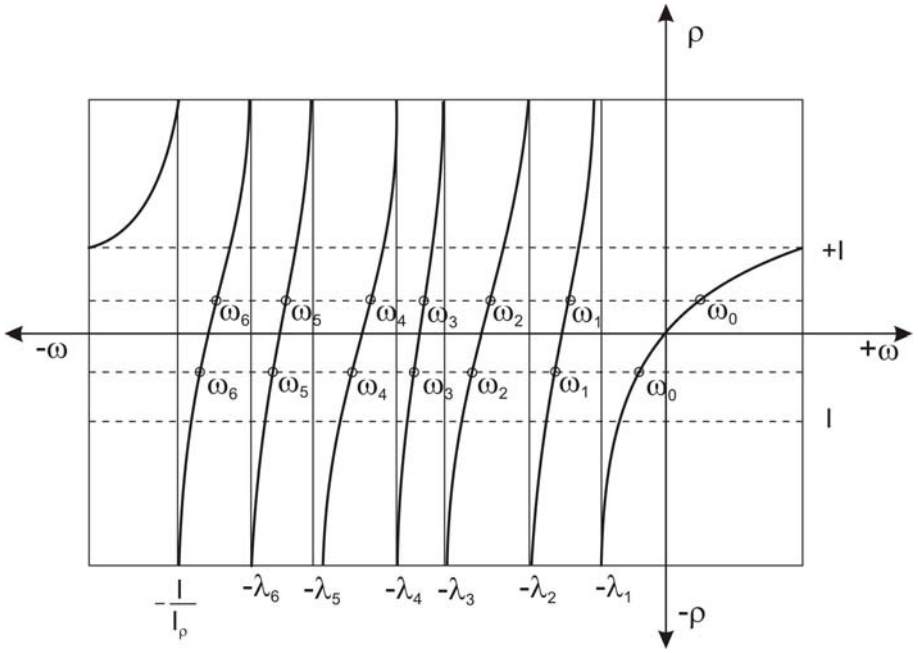
$$\rho = \beta - \sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i\lambda_1}{\omega + \lambda_i} + \frac{\omega l_p}{k_{ef}}.$$

Ako se prisjetimo da je $\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i$, možemo dobiveni izraz transformirati u oblik

$$\rho = \frac{\omega l_p}{k_{ef}} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \qquad \textbf{(8.2.16)}$$

Jednadžba (8.2.16) daje rješenje postavljenog problema u kojemu smo tražili ovisnost promjene gustoće neutrona n(t) (i neutronskog toka ϕ(t)) o reaktivnosti reaktora ρ. Ta jednadžba ustvari određuje eksponent vremenskog porasta gustoće neutrona ω uz određenu reaktivnost i fizikalne karakteristike reaktora. Budući da se radi o algebarskoj jednadžbi 7-og reda, ona će za svaku zadanu vrijednost ρ biti zadovoljena za 7 vrijednosti ω.

Grafički prikaz funkcionalne veze ρ i ω dan slikom 8.2.1.



Slika 8.2.1 Ovisnost parametra ω o reaktivnosti ρ

Iz slike možemo razabrati da svaka vrijednost ρ određuje jednu vrijednost ω, koju ćemo označiti sa ω_0 i zvati osnovnom vrijednošću ω, koja ima isti predznak kao i ρ, i 6 vrijednosti ω (ω_1,..., ω_6), s negativnim predznacima. Apsolutne vrijednosti ω_1,..., ω_6 veće su od ω_0, s tim što se vrijednost svakog parametra ω_i nalazi između λ_i i λ_{i+1}.

Na osnovi poznatih vrijednosti ω_i možemo, uvrštenjem u jednadžbu (8.2.13), promjenu gustoće neutrona n(t) u funkciji reaktivnosti izraziti jednadžbom

$$n(t) = \sum_{i=0}^{6} A_i e^{\omega_i t} \ . \qquad \textbf{(8.2.17)}$$

Vrijednosti koeficijenata i eksponenata u jednadžbi (8.2.17) se mogu odrediti metodom koja je opisana u Dodatku 6.

Potrebno je podsjetiti se da su eksponenti $\omega_1,..., \omega_6$ negativni i po apsolutnim vrijednostima veći od ω_0. Utjecaj članova s i>0 s vremenom postaje sve manji, da bi nakon kratkog početnog perioda (manjeg od $1/\lambda_1$) postao zanemariv. Izraz(8.2.17) svodi se na

$$n(t) = Ae^{\omega_0 t} \qquad \textbf{(8.2.18)}$$

U kinetici reaktora se prvi period (tj. onaj u kojem je utjecaj članova sa i>0 u jednadžbi (8.2.17) nije zanemariv) naziva tranzijentni period. Iza toga slijedi stabilni period, u toku kojeg je primjenjiva jednadžba (8.2.18).

Period reaktora

Period reaktora je pokazatelj brzine promjene neutronskog toka u reaktoru, definiran kao vrijeme u kojem neutronski tok, odnosno snaga reaktora, naraste e puta. Suglasno toj definiciji jednadžba (8.2.18) može se napisati u obliku

$$n(t) = Ae^{t/T}, \qquad \textbf{(8.2.19)}$$

gdje je T period reaktora.

Iz relacija (8.2.18) i (8.2.19) proizlazi da je period reaktora obrnuto razmjeran s ω, tj.

$$T = 1/\omega \qquad \textbf{(8.2.20)}$$

Izraz (8.2.17) pokazuje da nakon promjene reaktivnosti treba računati s periodom reaktora u vremenskom intervalu kada članovi koji sadrže $\omega_1,..., \omega_6$ nisu zanemarivi i sa periodom reaktora kod kojeg promjenu snage određuje samo ω_0 (vidi izraz 8.2.18). Prvi se period naziva tranzijentni period reaktora, a drugi stabilni period reaktora.

Tranzijentni period je određen parametrima $1/\omega_1$, $1/\omega_2$, $1/\omega_3$,..., stabilni period s $1/\omega_0$.

Stabilni period reaktora (koji ćemo označiti sa T_s) od bitnog je značaja za analize u reaktorskoj kinetici.

Svaku promjenu reaktivnosti reaktora karakterizira određena vrijednost stabilnog perioda. Kvantitativan odnos između stabilnog perioda reaktora i reaktivnosti možemo odrediti na osnovi jednadžbe (8.2.16). Ta jednadžba je zadovoljena za sve vrijednosti ω_i, dakle i za ω_0, pa je dopušteno pisati

$$\rho = \frac{\omega_0 l_p}{k_{ef}} + \sum_{i=0}^{6} \frac{\omega_0 \beta_i}{\omega_0 + \lambda_i}. \qquad \textbf{(8.2.21)}$$

Malene i velike promjene reaktivnosti

Ako je reaktivnost ρ veoma malena i ω_0 će biti veoma malena vrijednost, te se može zanemariti u odnosu na sve vrijednosti λ_i (vidi sliku 8.2.1). Time preostaje

$$\rho \approx \omega_0 \left(\frac{l_p}{k_{ef}} + \sum_{i=0}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)$$

Iz tablice 4.5.1. proizlazi da za 235U faktor $\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}$ iznosi $8.46*10^{-2}$s. Trajanje neutronskog ciklusa l_p u svim moderatorima je dva ili više redova veličine kraće (vidi primjere 8.1.1. i 8.1.2.). Stoga je u izrazu (8.2.21) dozvoljeno zanemariti prvi član u zagradi u odnosu na drugi, pa preostaje

$$\frac{1}{\omega_0} = T_s \approx \frac{\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}}{\rho} \approx \frac{\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}}{\Delta k}, \qquad \textbf{(8.2.22)}$$

gdje je $\Delta k=k_{ef}-1\approx\rho$, poznat kao višak reaktivnosti

Izraz (8.2.22) pokazuje da u slučaju malenih promjena reaktivnosti stabilni period ovisi o karakteristikama zakašnjelih neutrona, a ne o vremenu trajanja ciklusa neutrona l_p. Ovaj zaključak je od temeljnog značaja za regulaciju pogona nuklearnog reaktora.

Primjer 8.2.2

U neki kritičan reaktor, s uranom kao nuklearnim gorivom, unešena je reaktivnost od 0.018%. Koliko će porasti snaga reaktora 2 minute nakon unošenja reaktivnosti?

Rješenje

Na osnovi podataka iz tablice 4.5.1. i izraza (8.2.22) stabilni period reaktora biti će

$$T_s \approx \frac{0.0846}{\rho} = \frac{0.0846}{0.00018} = 470\ s\ .$$

Porast snage reaktora biti će određen faktorom

$$\frac{P(t)}{P_0} = e^{t/T_s} = e^{\frac{120}{470}} = 1.29\ .$$

Snaga reaktora će nakon dvije minute biti 29% veća od one koju je reaktor imao prije unošenja reaktivnosti.

Razmotrimo sada obrnuti slučaj vrlo velike promjene reaktivnosti.

U tom slučaju treba računati sa velikim vrijednostima ω_0, tako da je $\omega_0+\lambda_i\approx\omega_0$, pa se izraz (8.2.21) svodi na

$$\rho \approx \frac{\omega_0 l_p}{k_{ef}} + \sum_{i=1}^{6}\beta_i \approx \frac{\omega_0 l_p}{k_{ef}} + \beta\ ,$$

odnosno

$$\frac{1}{\omega_0} = T_s \approx \frac{l_p}{k_{ef}}\frac{1}{\rho-\beta}\ .$$

Budući da se razmatra slučaj velikih vrijednosti ρ, možemo uzeti da je $\rho>>\beta$ i zanemariti β, pa konačno dobivamo

$$T_s \approx \frac{l_p}{\Delta k}. \qquad \textbf{(8.2.23)}$$

Period reaktora određen izrazom (8.2.23) je veoma malen (reaktor bi kod promjena reaktivnosti veoma brzo mijenjao snagu), a ovisi samo o vremenu trajanja neutronskog ciklusa l_p. Primjer 8.2.1. ilustrira tu činjenicu. Iz komentara uz izvod izraza (8.2.23) slijedi da je period reaktora ovisan samo o trajanju ciklusa promptnih neutrona l_p, ako je reaktivnost koju unosimo u reaktor toliko velika da su ispunjeni uvjeti za zanemarenje utjecaja zakašnjelih neutrona.

Primjer 8.2.3

Koliki bismo period reaktora i porast snage 1 sekundu nakon unošenja reaktivnosti dobili ako u reaktor unesemo reaktivnost od 0.1%, i pretpostavimo da je utjecaj zakašnjelih neutrona zanemariv. Vrijeme trajanja ciklusa promptnih neutrona

$l_p=10^{-4}$s.

Rješenje:

Stabilni period reaktora u ovom slučaju bio bi određen izrazom (8.2.23):

$$T_s = \frac{l_p}{\rho} = \frac{0.0001}{0.001} = 0.1\,s .$$

Snaga bi reaktora nakon jedne sekunde narasla za faktor

$e^{10}\approx 22000$!

Rezultat ukazuje na izuzetno veliki porast snage reaktora već kod relativno malih promjena reaktivnosti. Reaktor s ovakvim ponašanjem bilo bi vrlo teško držati pod kontrolom.

Srećom, zakašnjeli neutroni u velikoj mjeri smanjuju osjetljivost reaktora na promjene reaktivnosti, u koliko te promjene ne prelaze određeni iznos (vidi primjer 8.2.2). Zbog toga je rezultat dobiven u ovom primjeru nerealan, i treba ga shvatiti samo kao ilustraciju značaja zakašnjelih neutrona u kinetici reaktora.

Reaktor kod kojega period ovisi samo o vremenu trajanja promptnih neutrona l_p zove se promptno kritičan reaktor. Takav reaktor, kao što to pokazuje primjer 8.2.3, veoma je nestabilan i lako može izbjeći kontroli. Zbog toga treba odgovarajućim projektnim rješenjima obavezno spriječiti mogućnost nastanka promptno kritičnog reaktora.

Reaktor postaje promptno kritičan kada može održavati kritičnost bez zakašnjelih neutrona. Kod unošenja malenih reaktivnosti reaktor "mora čekati" pojavu zakašnjelih neutrona da bi u neutronskom ciklusu mogao ostvariti višak neutrona potrebnih za podizanje gustoće neutrona, a time i porast snage. Kod velikih reaktivnosti već su promptni neutroni dovoljni za stvaranje takvog viška, pa reaktor može povećavati snagu ne čekajući na pojavu zakašnjelih neutrona.

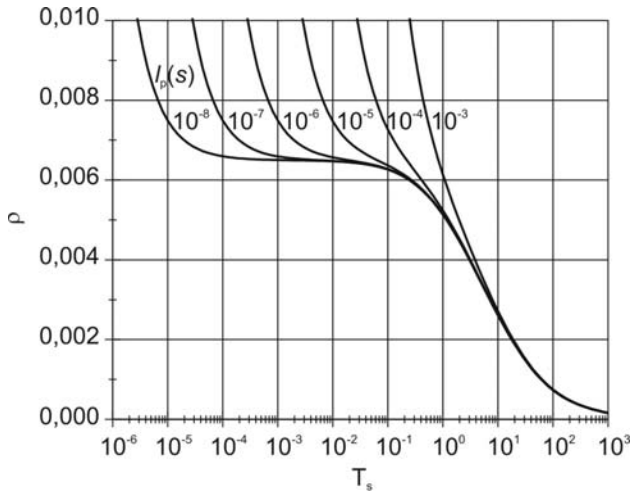
Graničnu reaktivnost iznad koje reaktor postaje promptno kritičan možemo odrediti koristeći jednadžbu (8.2.7), u kojoj ćemo postaviti $C_i=0$ (nema zakašnjelih neutrona) i $\frac{dn}{dt}=0$ (reaktor je kritičan). Uz dane je uvjete jednadžba zadovoljena za $\rho=\beta$.

Znači, dodamo li reaktoru reaktivnost $\rho>\beta$ reaktor može biti kritičan bez zakašnjelih neutrona, odnosno postati promptno kritičan.

Kod projektiranja regulacijskog sustava reaktora treba o ovoj činjenici strogo voditi računa!

Udio zakašnjelih neutrona β ovisi o tipu nuklearnog goriva. U tablici 4.5.1. specificirano je da taj udio kod ^{235}U iznosi 0.65%, a kod ^{239}Pu 0.2% (reaktoru sa plutonijskim gorivom treba oko 3 puta manja reaktivnost da bi postao promptno kritičan nego reaktoru sa uranskim gorivom).

Jednadžba (8.2.21) daje vezu između stabilnog perioda $T_s=1/\omega_0$ i vremena trajanja ciklusa promptnih neutrona l_p. Slikom 8.2.2 je, za slučaj ^{235}U kao nuklearnog goriva, ta veza ilustrirana.



Slika 8.2.2 Ovisnost stabilnog perioda T_s o reaktivnosti ρ i vremena trajanja ciklusa promptnih neutrona l_p.

Iz slike je jasno vidljiva činjenica, već ukazana kod izvoda jednadžbe (8.2.22), da ovisnost stabilnog perioda o vremenu trajanja ciklusa promptnih neutrona nestaje kada je reaktivnost mala (znatno manja od β).

Jedinice za reaktivnost

Reaktivnost je bezdimenzionalna veličina, mnogo manja od jedinice, definirana izrazom (8.2.1). U mnogim se slučajeva reaktivnost mjeri u postocima. Postotak je međutim prevelika jedinica za reaktivnost (čije promjene iz sigurnosnih razloga moraju biti nekoliko redova veličine manje od β). U priručnicima za operatere reaktora se kao jedinica za reaktivnost upotrebljava tisućinka postotka, odnosno

10^{-5}, koja se u američkoj literaturi označava sa pcm (per-cent-mille).

U starijoj američkoj literaturi se susreće i jedinica reaktivnosti od jednog dolara. Reaktivnost jednog dolara jednaka je β (dakle granična reaktivnost promptno kritičnog reaktora), s tim da je manja jedinica jedan cent (stotinka dolara).

Nadalje, reaktivnost je moguće mjeriti i stabilnim periodom reaktora. Veza između perioda i reaktivnosti je definirana jednadžbom (8.2.21), a za malene reaktivnosti jednadžbom (8.2.22). Ta jedinica reaktivnosti, koja se ponekad spominje u literaturi, ima engleski naziv Inhour (inverzni sat). Definirana je kao reaktivnost koja dovodi do stabilnog perioda koji traje 1 sat (T_s=3600s). Ako se radi o malenim reaktivnostima, što je redovito slučaj, možemo vezu između reaktivnosti mjerenu u postocima (ili PCM) povezati sa reaktivnošću mjerenom u Inhour jedinicama, veoma jednostavno pomoću jednadžbe (8.2.22).

Primjer 8.2.4

U neki je reaktor sa uranom kao nuklearnim gorivom unešena reaktivnost od 0.01%. Kolika je odgovarajuća reaktivnost u dolarima i Inhour jedinicama?

Rješenje:

Za reaktor sa uranom kao nuklearnim gorivom β=0.65%.

Unešena reaktivnost je 0.01/0.65=0.015 dolara=1.5 centi.

Budući da je ρ>>β, vezu između reaktivnosti i stabilnog perioda daje relacija (8.2.22), koja za reaktor sa uranom postaje (vidi primjer 8.2.2)

$$T_s = \frac{0.0846}{\rho} = \frac{0.0846}{0.0001} = 846\ s\ .$$

Reaktivnost ρ postaje 1Ih kada je T_s=3600s. Unešena reaktivnost iznosi dakle 3600/846=4.25 Ih. Reaktivnost od 1Ih je dakle ekvivalentna s reaktivnošću od 0.00235%, ili 2.35 pcm.

8.3 Aproksimacija s jednom grupom zakašnjelih neutrona

U poglavlju 8.2. analiziran je odziv gustoće neutrona na skokovitu promjenu reaktivnosti uzevši u obzir postojanje šest grupa zakašnjelih neutrona. Kao rezultat dobiven je izraz (8.2.17), čiji se koeficijenti i eksponenti određuju metodom koja je razmatrana u Dodatku 6. Iako je numerička analiza tog izraza lako izvediva upotrebom elektroničkog računala, ipak on je suviše kompleksan za analitičku procjenu međusobnog utjecaja parametara od kojih ovisi promjena gustoće neutrona. Upravo u cilju pojednostavljenja fizikalne interpretaciju ove pojave korisna je aproksimacija kinetike reaktora s jednom grupom zakašnjelih neutrona.

Kriterij za definiciju jedinstvene grupe zakašnjelih neutrona zasniva se na postavci da po svom djelovanju na kinetiku reaktora neutroni te grupe trebaju biti približno ekvivalentni djelovanju stvarnih 6 grupa zakašnjelih neutrona.

U tom su cilju vrijednosti β i λ te grupe definirane kao:

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \qquad \textbf{i} \qquad \frac{\beta}{\lambda} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i}\ . \qquad \textbf{(8.3.1)}$$

Korištenjem podataka za ^{235}U iz tablice 4.5.1. izlazi:

β=0.0065, λ=0.077s^{-1}.

Iz definicije β i λ proizlazi da je udio zakašnjelih neutrona u jedinstvenoj grupi zakašnjelih neutrona jednak zbroju udjela 6 grupa zakašnjelih neutrona, a odnos između prosječne konstante kašnjenja λ i udjela neutrona β te grupe jednak zbroju odnosa β_i/λ_i za svih šest grupa zakašnjelih neutrona.

Jednadžba (8.2.16), ukoliko umjesto šest imamo samo jednu grupu zakašnjelih neutrona postaje

$$\rho = \frac{\omega l_p}{k_{ef}} + \frac{\omega\beta}{\omega + \lambda}\ . \qquad \textbf{(8.3.2)}$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po ω, koja daje dvije vrijednosti(ω_0 i ω_1). Nakon sređivanja i zanemarivanja malenih pribrojnika dobivamo

$$\omega_0 = \frac{\lambda\rho}{\beta-\rho} \qquad \omega_1 = -\frac{\beta-\rho}{l_p}. \tag{8.3.3}$$

Izraz (8.2.17) primijenjen na jednu grupu zakašnjelih neutrona poprima oblik

$$n(t) = A_0 e^{\omega_0 t} + A_1 e^{\omega_1 t}. \tag{8.3.4}$$

Koncentracija fisijskih produkata, čijim se raspadom generiraju zakašnjeli neutroni, moći će biti, suglasno jednadžbi (8.2.14), predočena s istom vremenskom funkcijom kao,

$$C(t) = B_0 e^{\omega_0 t} + B_1 e^{\omega_1 t}. \tag{8.3.5}$$

Nadalje, bilanca fisijskih produkata, definirana jednadžbom (8.2.9) i primijenjena na jednu grupu zakašnjelih neutrona uz $k_{ef}\approx 1$, postaje

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta n(t)}{l_p} - \lambda C. \tag{8.3.6}$$

Jednadžbe (8.3.4), (8.3.5) i (8.3.6) mogu se upotrijebiti za određivanje konstanti A_0 i A_1. Rezultat je, nakon zanemarivanja malenih pribrojnika i sređivanja

$$A_0 = n_0 \frac{\beta}{\beta-\rho} \quad A_1 = -n_0 \frac{\rho}{\beta-\rho}, \tag{8.3.7}$$

gdje je $n_0=n(t)_{t=0}$.

Promjena koncentracije termičkih neutrona nakon skokovitog unošenja reaktivnosti ρ biti će, suglasno jednadžbama (8.3.3) i (8.3.7), određena relacijom

$$\frac{n(t)}{n_0} = \left(\frac{\beta}{\beta-\rho} e^{\frac{\lambda\rho t}{\beta-\rho}} - \frac{\rho}{\beta-\rho} e^{-\frac{\beta-\rho}{l_p}t} \right) \tag{8.3.8}$$

Identična jednadžba vrijedi, dakako, i za odnos tokova termičkih neutrona.

Treba se prisjetiti da aproksimacije primijenjene kod izvoda jednadžbe (8.3.8) ograničavaju njezinu promjenu na male reaktivnosti (ρ<0.25%).

Primjer 8.3.1

U nekom reaktoru s ^{235}U kao nuklearnim gorivom dolazi do promjene reaktivnosti +0.1% odnosno -0.1%. Treba definirati funkcije koje određuju vremensku promjenu toka termičkih neutrona i stabilni period reaktora, uz pretpostavku da je $l_p=10^{-4}$ s.

Rješenje

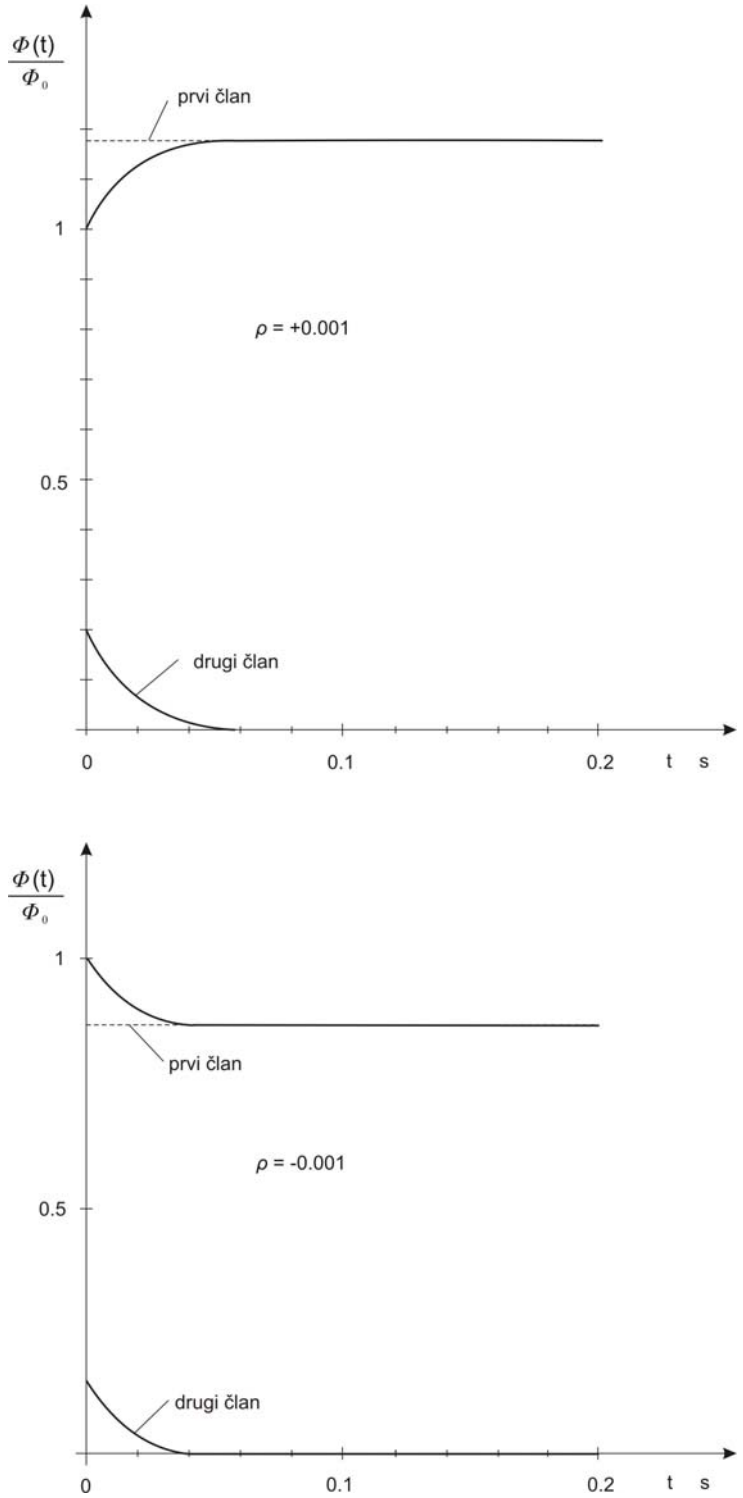
Ako u jednadžbu (8.3.8) uvrstimo zadane vrijednosti ρ i l_p, te uzmemo u obzir ranije navedene podatke za ^{235}U (β=0.0065 i $\lambda=0.077s^{-1}$) dobivamo izraze:

-za ρ=+0.001 $\quad \phi(t)/\phi_0 = 1.182e^{0.014t} - 0.182e^{-55t}$

-za ρ=-0.001 $\quad \phi(t)/\phi_0 = 0.867e^{-0.0103t} + 0.133e^{-75t}$

Stabilni period za pozitivnu promjenu reaktivnosti iznosi 71.4s, a za negativnu promjenu reaktivnosti 97s. Potrebno je ponovno ukazati na prije spomenutu činjenicu da tranzijentni period, određen sa drugim članom jednadžbi, traje veoma kratko. U danom slučaju već nakon približno 0.05 sekundi drugi član u jednoj i drugoj jednadžbi pada ispod 1% iznosa prvog člana, te dalja vremenska promjena neutronskog toka ovisi samo o prvom članu jednadžbe.

Tok funkcije $\phi(t)/\phi_0$ u slučaju pozitivne i negativne reaktivnosti prikazan je slikom 8.3.1.



Slika 8.3.1 Promjena toka termičkih neutrona nakon skokovite promjene reaktivnosti $\rho=\pm 0.001$

Neke karakteristike vremenske promjene neutronskog toka

Jednadžba (8.3.8), koja rezultira iz aproksimacije s jednom grupom zakašnjelih neutrona može poslužiti kao osnova za spoznaju nekih važnijih osobitosti vremenske promjene neutronskog toka nakon promjene reaktivnosti. Te su karakteristike slijedeće:

Promptni skok

Vrlo kratko vrijeme nakon promjene reaktivnosti neutronski tok se naglo mijenja sa ϕ_0 na $\phi_0\beta/(\beta-\rho)$ (vidi sliku 8.3.1). Ta je pojava poznata kao promptni skok. U tom periodu eksponencijalni dio prvog člana jednadžbe (8.3.8) ostaje praktički jednak jedinici, dok drugi član jednadžbe isčezava.

Pozitivne i negativne promjene reaktivnosti

Stabilni period različit je u slučaju kada je promjena reaktivnosti pozitivna ili negativna. Iz jednadžbe (8.3.8) proizlazi da je odnos stabilnih perioda u slučaju negativne i pozitivne reaktivnosti dan relacijom

$$\frac{T_{s-}}{T_{s+}} = \frac{\beta+\rho}{\beta-\rho}.$$

Ista promjena reaktivnosti, ako je pozitivna, brže mijenja neutronski tok nego ako je negativna (vidi primjer 8.3.1).

Početna promjena neutronskog toka

Neutronski tok najbrže se mijenja u trenutku promjene reaktivnosti.

U cilju kvantificiranja te promjene, poslužiti ćemo se ponovo jednadžbom (8.3.8). Početnu promjenu reaktivnosti možemo odrediti iz izvoda vremenske funkcije neutronskog toka u vremenu t=0. Rezultat je

$$\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right]_{t=0} = \phi_0\rho\left[\frac{\beta\lambda}{(\beta-\rho)^2} + \frac{1}{l_p}\right]. \qquad \textbf{(8.3.9)}$$

Za male promjene reaktivnosti (uz taj uvjet vrijedi jednadžba 8.3.8) drugi je član u jednadžbi (8.3.9) dva ili više redova veličine veći od prvog člana, pa se prvi član može zanemariti.

Dakle, $\frac{1}{\phi_0}\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right]_{t=0} \approx \frac{\rho}{l_p}$.

Iz dobivene relacije slijedi zaključak da je početni period promjene neutronskog toka jednak $l_p/\rho \approx l_p/\Delta k_{ef}$. Usporedbom s izrazom (8.2.23) zaključujemo da je početni period porasta neutronskog toka identičan s periodom promptno kritičnog reaktora. Promjena neutronskog toka u prvom trenutku reagira na promjene reaktivnosti (neovisno o iznosu te promjene) s brzinom koja odgovara periodu promptnog reaktora za danu reaktivnost. Međutim, karakteristika vremenske promjene neutronskog toka je nakon toga ovisna o promjeni reaktivnosti. Ako je ta promjena malena, neutronski tok naglo usporava svoj porast i prilagođava se karakteristici koju određuju grupe zakašnjelih neutrona (jednadžba 8.2.22). Obrnuto, ako je promjena reaktivnosti velika ($\rho>\beta$), porast se nastavlja u skladu sa periodom promptnog reaktora.

Obustava reaktora

Kod obustave u reaktor unosi se znatan iznos negativne reaktivnosti (kod velikih reaktora i do -10%). Unošenjem tolike količine reaktivnosti reaktor promptnim skokom mijenja neutronski tok s ϕ_0 na $\phi_0\beta/(\beta-\rho)$ (ako je ρ=-0.1, $\beta/(\beta-\rho$ je za ^{235}U približno 0.06). Jednadžba (8.3.8), koja se zasniva na aproksimaciji s jednom grupom zakašnjelih neutrona, nije primjenjiva za velike promjene reaktivnosti, i zato se period reaktora u ovom slučaju mora procijeniti polazeći od razmatranja utjecaja svih grupa zakašnjelih neutrona. Zakašnjeli neutroni imaju vremena kašnjenja naznačena u tablici 4.5.1. Nakon kraćeg vremena samo grupa zakašnjelih neutrona koje generiraju fisijski produkti sa najdužim vremenom poluraspada (grupa 1) ograničava brzinu smanjivanja neutronskog toka. Time se vremenska funkcija svodi na $e^{-\lambda t}=e^{-0.00124t}=e^{-t/80}$, ako je nuklearno gorivo ^{235}U.

Kod konzervativnih procjena brzine gašenja reaktora možemo dakle uzeti da se nakon početnog promptnog smanjenja neutronskog toka, daljnje smanjenje neutronskog toka i snage odvija sa stabilnim periodom od 80s. Konzervativnost procjene ogleda se u činjenici da će tako izračunata snaga biti nešto viša od stvarne.

Primjer 8.3.2

Nuklearni reaktor snage 2000MW sa ^{235}U kao nuklearnim gorivom gasi se sa kontrolnim šipkama. Pretpostavit ćemo da kontrolne šipke trenutno unose u reaktor 12% negativne reaktivnosti. Ocijeniti nakon koliko vremena generirana snaga u reaktoru zbog fisija pada na 50MW.

Rješenje:

Snaga reaktora nakon promptnog skoka je

$$P \approx P_0 \frac{\beta}{\beta - \rho} = 2000 \frac{0.0065}{0.1265} = 103\ \text{MW}\ .$$

Vrijeme t potrebno da snaga reaktora padne na 50MW dobiti će se iz relacije,

$103e^{-t/80}=50$, što daje t=57.8s.

Važno se prisjetiti da će stvarno generirana snaga u reaktoru koji se gasi biti zbroj snage koja nastaje zbog fisija i snage koja se u reaktoru proizvodi zbog raspada fisijskih produkata (poglavlje 4.4).

8.4 Prostorna raspodjela neutronskog toka u potkritičnom reaktoru

Prostorna raspodjela neutronskog toka u potkritičnom reaktoru razlikuje se od one u kritičnom reaktoru. Razlike se mogu utvrditi korištenjem već navedenih pojmova iz reaktorske kinetike.

Zamislimo da smo u jednom trenutku potkritičnom reaktoru iz vanjskog izvora dodali izvjestan broj termičkih neutrona (impuls neutrona), pa pokušajmo izračunati njihovu prostornu raspodjelu unutar reaktora

Bilanca monoenergetskih neutrona (računat ćemo s bilancom termičkih neutrona) izražena jednadžbom (6.3.1) može se na pojednostavljeni način napisati u obliku

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\Delta^2\phi - \Sigma_a\phi + S\,. \qquad \textbf{(8.4.1)}$$

Tok neutrona ϕ je funkcija vremena i prostornih koordinata.

Analogno razmatranju u poglavlju 8.2. (jednadžba 8.2.10), pretpostaviti ćemo da se vremenska i prostorna funkcija neutronskog toka mogu separirati, tj. da se može pisati

$$\phi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})T(t). \qquad \textbf{(8.4.2)}$$

Izvor neutrona S je funkcija neutronskog toka. Za termičke neutrone izvor neutrona po jedinici volumena i vremena bit će $S=\phi\nu\Sigma_f L_b p$.

Vremenska funkcija promjene neutronskog toka T(t) može se izraziti pomoću stabilnog perioda T_s:

$$T(t) = e^{-t/T_s}. \qquad \textbf{(8.4.3)}$$

Prostorna funkcija neutronskog toka ovisi o geometriji jezgre. Ako se radi jednostavnosti odabere za razmatranje neograničeni pločasti reaktor ekstrapolirane debljine H, prostorna funkcija neutronskog toka dana je izrazom (vidi jednadžbu 7.9.7)

$$\phi(z) = A\cos(bz). \qquad \textbf{(8.4.4)}$$

Faktor b kod neograničenu ploču je identičan sa faktorom zakrivljenja neutronskog toka B^2. Ova postavka lako se provjerava izrazom za B^2 kod cilindričnog reaktora (izraz 7.8.16), ako se uzme da je polumjer cilindra neizmjerno velik.

Jednadžba (8.4.3) je zadovoljena za sve vrijednosti b_n koje udovoljavaju izrazu

$$b_n \frac{H}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

dakle za vrijednosti $b_n=(2n+1)\pi/H$ n=0, 1, 2, 3, ...

Prostorna raspodjela neutronskog toka n-tog harmonika (vlastite vrijednosti funkcije) dana je izrazom

$$\phi(z)_n = A_n \cos\left(\frac{2n+1}{H}\pi z\right) = A_n \cos(B_n z).$$

Neutronski tok, definiran jednadžbom (8.4.2), može se prikazati relacijom

$$\phi(n,z) = \sum_{i=0}^{n} A_n \cos\left(\frac{2n+1}{H}\pi z\right) e^{-t/T_{sn}}. \qquad \textbf{(8.4.5)}$$

S druge strane, zakrivljenje neutronskog toka svakog harmonika dano je sa

$$\nabla^2\phi + B_n^2\phi = 0. \qquad \textbf{(8.4.6)}$$

Stabilni period vremenske promjene neutronskog toka n-tog harmonika T_{sn} ovisi o veličini B_n. Ta se tvrdnja može provjeriti postavljanjem bilance neutrona za n-ti harmonik. Kombiniranjem jednadžbi (8.4.1), (8.4.2), (8.4.3), (8.4.5) i (8.4.6) proizlazi, naime,

$$\left(-DB_n^2 - \Sigma_a + \nu\Sigma_f L_b p\right)\phi(z)_n T(t)_n = -\frac{1}{T_{sn}\nu}\phi(z)_n T(t)_n, \qquad \textbf{(8.4.7)}$$

ili

$$-\frac{1}{T_{sn}} = \nu\left(-DB_n^2 - \Sigma_a + \nu\Sigma_f L_b p\right). \text{ za n=0, 1, 2, 3,} \qquad \textbf{(8.4.8)}$$

U potkritičnom reaktoru gubici neutrona su veći od njihove proizvodnje, pa su prva dva člana u zagradi jednadžbe (8.4.8) po apsolutnom iznosu veći od trećeg. Sa porastom n raste B_n, a T_{sn} se smanjuje.

Iz ove postavke slijedi da će nakon bilo kojeg poremećaja koji se unosi u potkritični reaktor viši harmonici to brže nestajati što im je veći n (prostorna raspodjela neutronskog toka sa porastom vremena sve se više "pegla").

Drugim riječima, jednadžba (8.4.5) kojom je određena prostorna raspodjela neutronskog toka u potkritičnom reaktoru se u kratkom vremenu nakon promjene reaktivnosti svodi samo na osnovni član (tj. član sa n=0), pa postaje

$$\phi_0(z,t) = A_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) e^{-t/T_{s0}}. \qquad \textbf{(8.4.9)}$$

Ako se kao granični slučaj zamisli da je reaktor kritičan, stabilni period teži u neizmjernost, eksponencijalni član u jednadžbi (8.4.9) postaje jednak jedinici, a ona se svodi na,

$$\phi_0(z) = A_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

dakle na jednadžbu raspodjele neutronskog toka u kritičnom pločastom reaktoru.

Na ovaj je način dokazana tvrdnja iz poglavlja 7.8. da je prostorna raspodjela neutrona u kritičnom reaktoru određena najnižom vlastitom vrijednošću funkcije raspodjele.

8.5 Približavanje kritičnosti

U potkritičnom reaktoru moguće je održavati neutronski tok samo uz pomoć zasebnog neutronskog izvora. Ako takav izvor daje Q neutrona u sekundi, broj neutrona koji nastaju nakon prve reprodukcije u neutronskom ciklusu (vidi sliku 7.3.1) iznosi $k_{ef}Q$, nakon druge $k^2_{ef}Q$, nakon treće $k^3_{ef}Q$, itd. U potkritičnom reaktoru je $k_{ef}<1$.

Ukupan broj neutrona N koji se u potkritičnom reaktoru generiraju u svakoj sekundi biti će

$$N = Q\left(1 + k_{ef} + k_{ef}^2 + k_{ef}^3 + \ldots\right). \qquad \textbf{(8.5.1)}$$

S obzirom da je k_{ef} manji od jedinice i da je broj članova u jednadžbi (8.5.1) neograničeno velik, zbroj geometrijskog reda određen je izrazom:

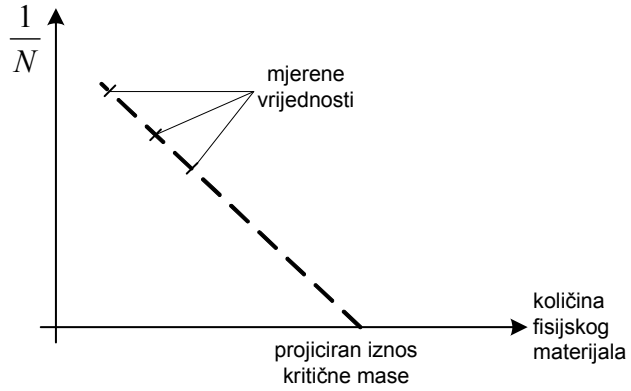
$$N = \frac{Q}{1 - k_{ef}}. \qquad \textbf{(8.5.2)}$$

Jednadžba (8.5.2) pokazuje da se broj neutrona Q koji daje izvor multiplicirao u potkritičnoj sredini za faktor $1/(1-k_{ef})$.

Izraz (8.5.2) je od velikog značenja za sigurno približavanje reaktora kritičnosti. Naime, kada se k_{ef} približava jedinici faktor multiplikacije teži u neizmjernost. Ta činjenica omogućuje da se mjerenjem neutronske multiplikacije unaprijed predvidi kritična masa reaktora (odnosno broj gorivnih elemenata potreban za kritičnu jezgru ili minimalna količina apsorbera u jezgri koja osigurava potkritičnost).

U tu se svrhu primjenjuje postupak kojim se određuje ovisnost inverznog broja detektiranih neutrona 1/N o količini fisijskog materijala. Nanošenjem vrijednosti 1/N u funkciji količine fisijskog materijala u jezgri za dva ili više uzastopnih mjerenja (slika 8.5.1) moguće je projiciranjem na apscisu (1/N=0 odgovara kritičnom reaktoru) predvidjeti količinu fisijskog materijala potrebnog da bi reaktor bio kritičan.

Tim je postupkom osigurano bezopasno približavanje kritičnosti reaktora.



Slika 8.5.1 Inverzni broj detektiranih neutrona u ovisnosti o količini fisijskih materijala

8.6 Utjecaj temperature na reaktivnost reaktora

Promjenom temperature u jezgri reaktora mijenja se i reaktivnost. Najbitniji razlozi za utjecaj temperature na reaktivnost su:

-broj atoma materijala moderatora po jedinici volumena se mijenja zbog termičke ekspanzije

-mikroskopski udarni presjeci ovisni su o prosječnoj energiji termičkih neutrona u reaktoru

-rezonantni zahvat neutrona u uranu mijenja se s intenzitetom oscilatornog gibanja atoma urana pod djelovanjem temperature.

Kvantitativan utjecaj temperature na reaktivnost reaktora određuje se temperaturnim koeficijentom reaktivnosti, čija je definicija

$$\alpha_T = \frac{d\rho}{dT},$$

ili slijedom definicije reaktivnosti ρ prema jednadžbi (8.2.1)

$$\alpha_T = \frac{1}{k_{ef}^2}\frac{dk_{ef}}{dT} \approx \frac{1}{k_{ef}}\frac{dk_{ef}}{dT}.$$

Posljednji izraz posljedica je činjenice da je $k_{ef} \approx 1$.

Odziv snage reaktora na promjene temperature ovisi o predznaku temperaturnog koeficijenta reaktivnosti α_T. S obzirom da je k_{ef} uvijek pozitivan, predznak dk_{ef}/dT je istovjetan sa predznakom α_T.

U slučaju da je α_T pozitivan, reaktor na povišenje reaktivnosti reagira povišenjem reaktivnosti, a time i povišenjem neutronskog toka i generirane snage. Povećanje snage dovodi do daljnjeg povećanja temperature i proces se nastavlja do obustave reaktora djelovanjem zaštitnog sustava, odnosno do razaranja reaktora ako taj sustav otkaže.

S druge strane, ako je α_T negativan svako unošenje pozitivne reaktivnosti u reaktor dovodi do povišenja temperature koje generira negativnu reaktivnost i smanjuje snagu i temperaturu reaktora. Reaktor dakle djeluje stabilno. Promjenom temperature generira se reaktivnost suprotnog predznaka od one koja je nametnuta vanjskim utjecajem.

Budući da je negativni temperaturni koeficijent reaktivnosti od bitnog značaja za sigurnost pogona reaktora u propisima za pogon nuklearnih energetskih postrojenja, dozvoljen je pogon reaktora samo u takvom slučaju.

Osim sigurnosti pogona, nuklearna elektrana čiji reaktor ima negativni temperaturni koeficijent reaktivnosti posjeduje svojstvo samoregulacije. To se svojstvo ogleda u reakciji postrojenja na zahtjev za promjenom generirane snage (npr. kod rada elektrane u elektroenergetskom sustavu). Kada se reaktoru poveća odvođenje snage dolazi do smanjenja temperature rashladnog sredstva. Reaktor koji ima negativni temperaturni koeficijent reaktivnosti na to reagira povećanjem reaktivnosti i generirane snage, čime svoju snagu prilagođava zahtijevanoj snazi. Takvo svojstvo reaktora znatno smanjuje zahtjeve na rad regulacijskog sustava nuklearne elektrane.

Potrebno je podsjetiti da se najveći broj nuklearnih reakcija u jezgri reaktora odvija u nuklearnom gorivu i moderatoru. Iz tog se razloga razmatranje utjecaja temperature jezgre na reaktivnost dijeli na analizu utjecaja temperatura goriva i temperature moderatora na reaktivnost. Razlikovat ćemo stoga temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva i temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora.

Temperaturne prilike u nuklearnom gorivu i moderatoru razlikuju se sa dva aspekta:

1. Razina temperature i brzina temperaturnih promjena su mnogo veće u nuklearnom gorivu nego u moderatoru.

2. Odziv temperature goriva na promjenu snage je znatno brži nego odziv temperature moderatora.

Zbog brzog reagiranja temperature goriva na promjene snage reaktora temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva poznat je kao i promptni temperaturni koeficijent reaktivnosti.

Temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora

Suglasno uvodnim napomenama uzrok promjeni reaktivnosti kod promjene temperature moderatora treba tražiti u dvije pojave:

-Ovisnosti gustoće moderatora o temperaturi (ta je ovisnost mnogo više izražena kod obične i teške vode nego kod grafita).

-Ovisnosti mikroskopskih udarnih presjeka materijala moderatora o prosječnoj energiji termičkih neutrona, odnosno o temperaturi.

Promjena gustoće

Ovisnost gustoće materijala moderatora o temperaturi karakterizira koeficijent volumnog istezanja materijala $\varphi = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$.

S druge strane, broj atoma po jedinici volumena materijala N obrnuto je srazmjeran volumenu, pa se može pisati N=K/V, gdje je K konstanta. Broj atoma N je proporcionalan s makroskopskim udarnim presjeku Σ za bilo koju nuklearnu reakciju neutrona sa materijalom moderatora.

Sada možemo odrediti ovisnost broja atoma po jedinici volumena o temperaturi:

$$\frac{dN}{dT} = -\frac{K}{V^2}\frac{dV}{dT} = -\frac{N}{V}\frac{dV}{dT},$$

iz čega proizlazi

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dT} = -\varphi. \qquad \textbf{(8.6.1)}$$

Rezultat pokazuje da će se, kod promjena temperature, broj atoma po jedinici volumena, odnosno makroskopski udarni presjek, mijenjati s gradijentom koji je obrnuto proporcionalan koeficijentu volumne termičke ekspanzije materijala moderatora.

Promjena mikroskopskog udarnog presjeka.

Kod "1/v" apsorbera mikroskopski udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona je obrnuto proporcionalan sa drugim korijenom apsolutne temperature (vidi jednadžbu 2.13.6), tj.

$$\sigma_a = \frac{K}{\sqrt{T}}.$$

Diferenciranjem po temperaturi slijedi

$$\frac{1}{\sigma_a}\frac{d\sigma_a}{dT} = -\frac{1}{2T}. \qquad \textbf{(8.6.2)}$$

Mikroskopski udarni presjek za elastični sudar također je ovisan o temperaturi. Za običnu i tešku vodu se ta ovisnost može prikazati relacijom,

$$\sigma_s = \frac{K}{T^n}, \qquad \textbf{(8.6.3)}$$

gdje je eksponent n:

- za H_20 0.225

- za D_20 0.112

Logaritmiranjem i diferenciranjem izraza (8.6.3) slijedi

$$\frac{1}{\sigma_s}\frac{d\sigma_s}{dT} = -\frac{n}{T}. \qquad \textbf{(8.6.4)}$$

Promjena makroskopskih udarnih presjeka.

Slijedom dobivenih rezultata možemo neposredno napisati izraze koji određuju utjecaj temperature na makroskopske udarne presjeke uzevši u obzir kako promjene gustoće moderatora tako i promjene mikroskopskih udarnih presjeka:

$$\frac{1}{\Sigma_a}\frac{d\Sigma_a}{dT} = -\left(\varphi + \frac{1}{2T}\right) \qquad \textbf{(8.6.5)}$$

$$\frac{1}{\Sigma_s}\frac{d\Sigma_s}{dT} = -\left(\varphi + \frac{n}{T}\right). \qquad \textbf{(8.6.6)}$$

Primjer 8.6.1

Makroskopski udarni presjeci za apsorpciju i elastični sudar za vodu na temperaturi 293K iznose 0.022cm^{-1} i 1.46cm^{-1}.

Kolike su vrijednosti tih udarnih presjeka na temperaturi 373K, ako koeficijent termičke ekspanzije vode iznosi $2*10^{-4}$/K?

Rješenje:

Integracijom izraza (8.6.5) i (8.6.6) između temperatura T i T_0 i odgovarajućih vrijednosti makroskopskih presjeka Σ_a, Σ_s i Σ_{a0}, Σ_{s0} slijedi

$$\ln\left[\frac{\Sigma_a}{\Sigma_{a0}}\right] = -\left[\varphi(T - T_0) + 0.5\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right]$$

$$\ln\left[\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{s0}}\right] = -\left[\varphi(T - T_0) + n\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right].$$

Uvrštenjem numeričkih veličina, dobiva se

$\Sigma_a/\Sigma_{a0}=0.872$ i $\Sigma_a=0.0192\text{cm}^{-1}$

$\Sigma_s/\Sigma_{s0}=0.932$ i $\Sigma_s=1.36\text{cm}^{-1}$.

Temperaturni koeficijent reaktivnosti može se izraziti i kroz utjecaj temperature na efektivni faktor multiplikacije reaktora.

Radi ilustracije, izraziti ćemo k_{ef} pomoću izraza dobivenog dvogrupnim postupkom (jednadžba 7.6.11):

$$k_{ef} = \eta\varepsilon p f L_b L_t = \frac{\eta\varepsilon p f}{\left(1 + B^2L^2\right)\left(1 + B^2L_s^2\right)}.$$

Nakon logaritmiranja i diferenciranja po apsolutnoj temperaturi dobivamo izraz za reaktivnost,

$$\alpha_T \approx \frac{1}{k_{ef}}\frac{dk_{ef}}{dT} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dT} + \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} + \frac{1}{f}\frac{df}{dT} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dT} - \frac{B^2}{1 + B^2L^2}\frac{dL^2}{dT} - \frac{B^2}{1 + B^2L_s^2}\frac{dL_s^2}{dT}. \qquad \textbf{(8.6.7)}$$

Pri diferenciranju je zanemarena ovisnost faktora zakrivljenja neutronskog toka o temperaturi. Zanemarenje se može opravdati činjenicom da je reaktor neprekidno blizu kritičnosti, pa je materijalni faktor zakrivljenja neutronskog toka približno jednak geometrijskom (a taj je približno konstantan).

Faktori η i ε praktički nisu ovisni o temperaturi moderatora, pa se prva dva člana na desnoj strani jednadžbe (8.6.8) mogu zanemariti. Ovisnost ostalih članova o temperaturi moderatora odrediti ćemo razmatranjem koje slijedi.

Ako u izrazu koji definira faktor f (izraz 7.5.1) uzmemo u obzir da jedino makroskopski udarni presjek Σ_{am} ovisi o temperaturi moderatora, možemo taj izraz napisati kao

$$f = \frac{K_1}{K_1 + K_2 \Sigma_{am}}, \qquad \textbf{(8.6.8)}$$

gdje su K_1 i K_2 parametri neovisni o temperaturi moderatora.

Izraz (8.6.8) diferencirati ćemo po temperaturi i uzeti u obzir relacije (8.6.5) i (8.6.6). Time se dobiva

$$\frac{df}{dT} = -\frac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2 \Sigma_{am})^2} \frac{d\Sigma_{am}}{dT} = \frac{K_1 K_2 \Sigma_{am}}{(K_1 + K_2 \Sigma_{am})^2} \left(\varphi + \frac{1}{2T} \right),$$

što se može pisati kao

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dT} = (1 - f) \left(\varphi + \frac{1}{2T} \right). \qquad \textbf{(8.6.9)}$$

Ako pak razmotrimo ovisnost faktora p temperaturi moderatora, možemo na temelju izraza (7.5.9) ustanoviti da se ta ovisnost svodi samo na temperaturnu ovisnost makroskopskog udarnog presjeka materijala moderatora za elastični sudar Σ_{sm}. Ostale parametre možemo smatrati neovisnim o temperaturi moderatora. U skladu sa navedenim možemo izraz (7.5.9) napisati u obliku

$$p = e^{-(K_3 / K_4 \Sigma_{sm})}.$$

K_3 i K_4 su veličine neovisne o temperaturi moderatora.

Logaritmiranjem i diferenciranjem gornjeg izraza po temperaturi moderatora dobiva se

$$\frac{d(\ln p)}{dT} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{K_3}{K_4 \Sigma_{sm}^2} \frac{d\Sigma_{sm}}{dT} = -\frac{K_3}{K_4 \Sigma_{sm}} \left(\varphi + \frac{n}{T} \right) = \ln p \left(\varphi + \frac{n}{T} \right). \qquad \textbf{(8.6.10)}$$

Difuzijska dužina termičkih neutrona L i dužina usporavanja neutrona L_s izrazito ovise o temperaturi moderatora. Difuzijska dužina (definirana u poglavlju 6.5) može se napisati u obliku

$$L^2 = \frac{K}{\Sigma_a \Sigma_s}.$$

Ako ponovo primijenimo logaritmiranje i diferenciranje po temperaturi, slijedi

$$\frac{1}{L^2} \frac{dL^2}{dT} = -\frac{1}{\Sigma_{am}} \frac{d\Sigma_{am}}{dT} - \frac{1}{\Sigma_{sm}} \frac{d\Sigma_{sm}}{dT}, \text{ ili,}$$

$$\frac{1}{L^2} \frac{dL^2}{dT} = 2\varphi + \frac{1}{2T} + \frac{n}{T}. \qquad \textbf{(8.6.11)}$$

Dužina usporavanja neutrona ovisna je o makroskopskom presjeku za raspršenje neutrona u moderatoru. Na osnovi definicije te veličine iz poglavlja 7.6 možemo zaključiti da je L_s^2 srazmjeran sa $1/\Sigma_{sm}^2$, pa se, primjeni li se isti postupak kao kod difuzijske dužine, dobiva

$$\frac{1}{L_s^2} \frac{dL_s^2}{dT} = 2\varphi + \frac{2n}{T}. \qquad \textbf{(8.6.12)}$$

Uvrštenjem izraza (8.6.8) do (8.6.12) u jednadžbu (8.6.7) može se dobiti izraz koji određuje ovisnost temperaturnog koeficijenta reaktivnosti moderatora o parametrima reaktora, koeficijentu volumnog istezanja i temperaturi:

$$\alpha_T = (1-f)\left(\varphi+\frac{1}{2T}\right)+\ln p\left(\varphi+\frac{n}{T}\right)-\frac{B^2}{1+B^2L^2}\left(2\varphi+\frac{1}{2T}+\frac{n}{T}\right)-\frac{B^2}{1+B^2L_s^2}\left(2\varphi+\frac{2n}{T}\right) \qquad \textbf{(8.6.13)}$$

Dobiveni izraz može poslužiti kao podloga za diskusiju o okolnostima koje dovode do pozitivnog ili negativnog temperaturnog koeficijenta reaktivnosti moderatora.

Članovi na desnoj strani jednadžbe su negativni i apsolutno manji što je temperatura viša. Jedino je prvi član pozitivan. Taj se član povećava kada se faktor f smanjuje. Drugi je član negativan i po apsolutnoj vrijednosti to veći što je faktor p manji. Treći i četvrti član su uvijek negativni. Apsolutna im je vrijednosti veća kod većih faktora zakrivljenja neutronskog toka (male dimenzije reaktora), te kod manjih dužina difuzije i usporavanja neutrona.

Navedene činjenice upućuju na strategiju projektiranja reaktora kojom se postiže negativni temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora. Reaktor koji ima negativni temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora mora imati što veći faktor f, a što manji faktor p. To su reaktori sa manje moderatora nego što odgovara maksimalnoj vrijednosti k_∞ (vidi poglavlje 7.5 i primjer 7.5.3) i zbog toga poznati kao podmoderirani reaktori. Nadalje, u tom će pogledu biti povoljniji reaktori s malom jezgrom i malom dužinom migracije neutrona. Te karakteristike najviše odgovaraju reaktorima hlađenim i moderiranima običnom vodom.

U praksi se zbog mogućnosti ugradnje što veće reaktivnosti, vodom moderiranim reaktorima dodaje otopina borne kiseline. Bor u jezgri djeluje nepovoljno na temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora jer smanjuje faktor f i time pomiče α_T prema pozitivnim vrijednostima.

Primjer 8.6.2

Treba odrediti temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora u vodom moderiranom reaktoru slijedećih karakteristika:

f=0.92, p=0.81, L^2=2.37cm^2, L_s^2=36cm^2, B^2=0.00633cm^{-2}.

Temperatura moderatora je 573K, a koeficijent volumne ekspanzije vode $2*10^{-4}$/K.

Rješenje:

Uvrštenjem danih veličina u jednadžbu (8.6.13) dobiva se

α_T=$8.58*10^{-5}$-$1.2488*10^{-4}$-$1.038*10^{-5}$-$6.11*10^{-6}$=-$5.55*10^{-5}$/K.

Temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora za dane uvjete je negativan.

Temperaturni koeficijent reaktivnosti nuklearnog goriva

Utjecaj temperature nuklearnog goriva na reaktivnost reaktora je najviše vezan uz temperaturnu ovisnost udarnog presjeka izotopa ^{238}U za apsorpciju neutrona u području rezonantnih energija.

Jezgre atoma ^{238}U veoma intenzivno apsorbiraju neutrone čije energije odgovaraju nizu diskretnih vrijednosti (slika 2.12.1). To su energije od 6.7eV, 22eV, 38eV.... U neposrednoj blizini tih energija udarni presjek naglo se mijenja.

Funkcionalna veza udarnog presjeka i energije u okolišu rezonantnih energija dana je Breit-Wigner-ovom formulom:

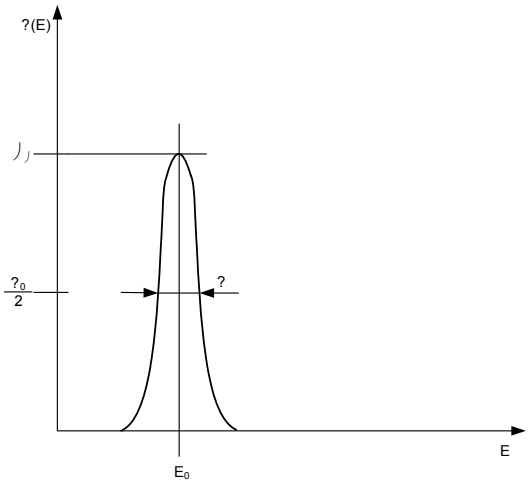
$$\sigma(E) = \frac{\sigma_0}{1 + \left[\frac{E - E_0}{\Gamma / 2}\right]^2}, \qquad \textbf{(8.6.14)}$$

gdje je, prema slici 8.6.1:

$\sigma(E)$ mikroskopski udarni presjek za apsorpciju neutrona kod energije E

σ_0 maksimalna vrijednost udarnog presjeka kod energije E_0

Γ energetski interval rezonantne apsorpcije kod $\sigma_0/2$.



Slika 8.6.1 Udarni presjek za rezonantnu apsorpciju neutrona

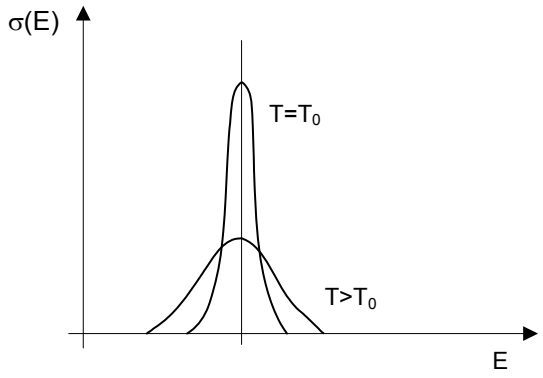
Utjecaj temperature na mikroskopski udarni presjek kod rezonantne energije E_0 možemo objasniti slijedećim razmatranjem:

Atomi urana pod utjecajem temperature osciliraju. Ako se snop neutrona uputi prema meti koja sadrži jezgre u oscilatornom gibanju, rezonantna apsopcija nastaje kad relativna brzina neutrona i jezgre odgovara kinetičkoj energiji neutrona E_0.

To znači da će za rezonantnu apsorpciju biti djelotvorni svi neutroni čija je energija u rasponu $E_0+\Delta$ i $E_0-\Delta$, gdje je s Δ označen raspon energije neutrona unutar kojeg, zbog oscilatornog gibanja jezgara urana, relativna kinetička energija neutrona u odnosu na jezgru ostaje E_0.

Vjerojatnost zahvata neutrona energije E_0 kod jezgre koja oscilira manja je nego kod nepomične jezgre (jer zahvat ovisi o vjerojatnosti da relativna energija bude E_0). Međutim, vjerojatnost zahvata neutrona izvan energije E_0 (tj. u rasponu energija 2Δ oko E_0) je povećana. Opisana pojava ekvivalentna je kao da je došlo do sniženja i proširenja krivulje $\sigma(E)$ prikazane slikom 8.6.1, s tim da je površina ispod krivulje ostala praktički neizmijenjena.

Kvalitativan prikaz funkcije $\sigma(E)$ za neku osnovnu temperaturu T_0 i za neku povišenu temperaturu $T>T_0$ dan slikom 8.6.2.



Slika 8.6.2 Udarni presjek za rezonantnu apsorpciju neutrona pri promjeni temperature

Opisana pojava interakcije neutrona sa jezgrama koje osciliraju ima sličnosti sa Dopplerovim efektom u akustici. Zbog toga se proširenje rezonantnog energetskog područja zahvata neutrona često naziva Dopplerovo proširenje. Iz istog je razloga za temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva uvriježen pojam "Dopplerov koeficijent".

Provedena analiza još ne daje indikaciju je li zbog nastanka Dopplerovog proširenja došlo do promjene u apsorpciji neutrona, tj. dali povišenje temperature dovodi do promjene u zahvatu rezonantnih neutrona u izotopu ^{238}U.

Kvalitativan odgovor na postavljeno pitanje potražiti ćemo u slijedećem pojednostavljenom razmatranju:

Broj neutrona rezonantne energije koji su apsorbirani u jedinici volumena i jedinici vremena iznosi

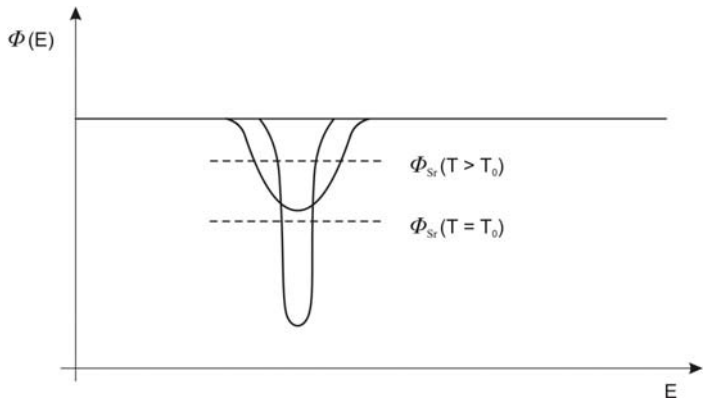
$$\int_E \phi(E)\Sigma_a(E)dE \,.$$

Integracija se proteže duž cijelog raspona energije unutar kojeg se odvija rezonantni zahvat neutrona. Ako definiramo prosječnu vrijednost toka neutrona u području rezonantnih energija s ϕ_{sr}, možemo integral napisati u obliku

$$\phi_{sr}\int_E \Sigma_a(E)dE \,. \qquad \textbf{(8.6.15)}$$

Sada se možemo pozvati na raniju postavku da površina ispod krivulje $\sigma_a(E)$ ostaje nakon promjene temperature gotovo konstantna. Integral u izrazu (8.6.15) će, na temelju takve postavke, za sve vrijednosti temperature ostati približno nepromijenjen. Iz toga proizlazi da je broj apsorbiranih neutrona u području rezonantnih energija proporcionalan sa prosječnom vrijednošću neutronskog toka u tom energetskom području.

Neutronski tok u nekom energetskom području to je manji što je apsorpcija neutrona u tom energetskom području veća. Ako sada razmotrimo sliku 8.6.2 očigledno je da će depresija neutronskog toka u rezonantnom području energija biti jače izražena kod temperature T_0 nego kod temperature $T>T_0$ (pri tome širina rezonantnog područja neutronskih energija ne igra nikakvu ulogu). Ti su odnosi prikazani kvalitativno na slici 8.6.3.



Slika 8.6.3 Neutronski tok u energetskom području rezonantne apsorpcije

Prosječni neutronski tok u rezonantnom području energija najmanji je kod najniže temperature, jer je u tom slučaju prosječni udarni presjek za apsorpciju neutrona u rasponu energija rezonantnog zahvata neutrona najveći. Svakim se povećanjem temperature povećava prosječni tok neutrona, a time i količina apsorbiranih neutrona u području rezonantnih energija. Povećana pak apsorpcija neutrona smanjuje reaktivnost reaktora.

Provedeno razmatranje pokazalo je da temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva (odnosno Dopplerov koeficijent), temeljen na apsorpciji neutrona u izotopu ^{238}U, mora uvijek biti negativan.

Budući da se utjecaj temperature goriva na reaktivnost pretežno vezuje uz apsorpciju neutrona u području rezonantnih energija, utjecaj će se najvećim dijelom manifestirati u promjenama faktora izbjegavanja rezonantne apsorpcije (faktor p).

Drugi faktori kojima je određen k_{ef}, a koji isto tako ovise o udarnim presjecima nuklearnog goriva (faktori η i f), nisu u značajnijoj mjeri osjetljivi na temperaturu nuklearnog goriva. Ovi faktori naime ovise o odnosima udarnih presjeka, pa se utjecaji promjenama energije neutrona kod 1/v apsorbera dobrim dijelom kompenziraju.

Ako sada iskoristimo izraz (8.6.7) i uzmemo u obzir da su svi članovi, osim faktora p, neovisni o temperaturi goriva, možemo odmah napisati

$$\alpha_{TG} = \frac{1}{k_{ef}}\frac{dk_{ef}}{dT} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dT},$$

gdje je α_{TG} temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva.

Faktor vjerojatnosti izbjegavanja rezonantne apsorpcije p je definiran sa jednadžbom (7.5.9):

$$p = \exp\left(-\frac{N_g V_g I}{\xi N_m V_m \sigma_{sm}}\right). \qquad \textbf{(8.6.16)}$$

Svi su parametri, osim efektivnog rezonantnog integrala I, malo ovisni o temperaturi goriva, pa je, za potrebe ove analize, dozvoljeno pisati

$$p = e^{-CI} \qquad \textbf{(8.6.17)}$$

C je faktor neovisan o temperaturi goriva.

Mjerenjem je ustvrđeno da u području radnih temperatura nuklearnog goriva ovisnost efektivnog rezonantnog integrala o temperaturi može biti izražena relacijom

$$I(T) = I(300K)\left[1 + \beta_1\left(\sqrt{T} - \sqrt{300}\right)\right], \qquad \textbf{(8.6.18)}$$

gdje je

I(T) efektivni rezonantni integral kod temperature T,

I(300K) efektivni rezonantni integral kod 300K i

β_1=A+B/(rρ), sa značenjem:

-r polumjer gorivne šipke (cm)

-ρ gustoća materijala goriva (g/cm^3)

-A i B konstante ovisne o materijalu goriva:

-za ^{238}U(metal) A=48*10^{-4} B=0.0128

-za ^{238}U(oksid) A=61*10^{-4} B=0.0094

Diferenciranjem izraza (8.6.18) dobiva se

$$\frac{dI}{dT} = I(300K)\frac{\beta_1}{2\sqrt{T}}. \qquad \textbf{(8.6.19)}$$

Izraz (8.6.19) daje osnovu za kvantificiranje temperaturnog koeficijenta goriva, jer je njime određena promjena faktora izbjegavanja rezonantne apsorpcije s temperaturom:

$$\alpha_{TG} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dT} = \frac{d}{dT}(\ln p) = -C\frac{dI}{dT} = -CI(300K)\frac{\beta_1}{2\sqrt{T}},$$

odnosno

$$\alpha_{TG} = \ln p(300K)\frac{\beta_1}{2\sqrt{T}}. \qquad \textbf{(8.6.20)}$$

Sa p(300K) označen je faktor izbjegavanja rezonantne apsorpcije kod temperature 300K (tj. za hladan reaktor).

Faktor p je uvijek manji od jedinice, pa će α_{TG} za sve vrijednosti temperature biti negativan.

Često je pri analizama pogona reaktora potrebno poznavati integralnu promjenu reaktivnosti reaktora, kada se temperatura goriva ili moderatora mijenja od temperature T_1 do temperature T_2. Ako nas npr. zanima takav podatak kod promjene temperature goriva treba izraz (8.6.20) integrirati između temperatura T_1 i T_2. Rezultat je

$$\int_{T_1}^{T_2} \alpha_{TG}\,dT = \ln p(300K)\beta_1\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right). \qquad \textbf{(8.6.21)}$$

Primjer 8.6.3

Za neki vodom hlađeni reaktor poznati su slijedeći podaci:

p(300K)=0.85, polumjer gorivne šipke r=0.4cm.

Gorivo reaktora je oksid urana gustoće 10.5g/cm^3.

Koliki je temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva (odnosno Dopplerov koeficijent) pri prosječnoj temperaturi goriva od 1000K i koliko se kumulativno mijenja reaktivnost reaktora uslijed zagrijavanja goriva od 300K na 1000K?

Rješenje

Za oksid urana i zadane podatke parametar β_1 iz izraza (8.6.18) bit će,

$$\beta_1 = 61*10^{-4} + \frac{0.0094}{0.4*10.5} = 8.34*10^{-3}.$$

Uvrštenje u izraz (8.6.20) daje

$$\alpha_{TG} = -2.14*10^{-5}/K.$$

Kumulativna promjena reaktivnosti reaktora zbog zagrijavanja goriva sa 300K na 1000K bit će na osnovi relacije (8.6.21)

$$\int_{300}^{1000} \alpha_{TM} dT = -1.94*10^{-2} = -1.94\% = -1.940 \text{ pcm}.$$

Ranije je spomenuto da temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva, odnosno Dopplerov koeficijent, vezan uz pojavu povećane apsorpcije rezonantnih neutrona u izotopu ^{238}U pri porastu temperature mora uvijek biti negativan. Treba naglasiti da ovaj zaključak vrijedi za reaktore sa prirodnim ili slabo obogaćenim uranom kod kojih je dio rezonantnih neutrona zahvaćen od lakšeg izotopa urana (^{235}U) relativno malen.

Moguće je, međutim, da pod izvjesnim okolnostima temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva bude i pozitivan. To se događa u slučajevima kada povećani broj zahvata neutrona u rezonantnom području dovodi po povećanog broja fisija u reaktoru. Takav slučaj može, na primjer, nastati kod brzih reaktora zbog visokog sadržaja izotopa ^{235}U u jezgri. (Udarni presjek za fisiju ^{235}U u području rezonantnih energija neutrona pokazuje također pojavu rezonancije (slika 2.12.2). Naime, pri povišenoj temperaturi goriva, povećanje apsorpcije rezonantnih neutrona u izotopu ^{235}U (iz tih apsorpcija nastaju novi fisijski neutroni) može rezultirati s generiranjem većeg broja neutrona od onih koji su dodatno apsorbirani u izotopu ^{238}U, a to znači da imamo pozitivni temperaturni koeficijent goriva.

Pozitivni temperaturni koeficijent goriva nepovoljan je za sigurnost pogona reaktora, te se zbog toga odnos broja atoma ^{235}U i ^{238}U u jezgri reaktora ograničava na oko 0.35.

8.7 Zatrovanje reaktora s fisijskim proizvodima

Utjecaj zatrovanja na reaktivnost

U toku rada reaktora u nuklearnom gorivu dolazi do nakupljanja proizvoda fisije. Proizvodi fisije su dodatni apsorberi neutrona i zbog toga utječu na smanjenje reaktivnosti reaktora, odnosno dovode do pojave zvane zatrovanje reaktora. U poglavlju 4.4. istaknuto je da se među fisijskim proizvodima koji potječu iz fisija ^{235}U može naći oko 200 raznih nuklida. Ako se uzme u obzir zastupljenost pojedinih nuklida u fisijskim provodima, njihovo poluvrijeme raspada kao i udarni presjek za apsorpciju neutrona, može se doći do zaključka da značajan dio tih nuklida ima zanemariv utjecaj na zatrovanje reaktora. Naime, pri ocjeni značaja pojedinih nuklida za reaktivnost treba uzeti u obzir da je u reaktoru svaki nuklid istovremeno podvrgnut slijedećim procesima: stvaranje nuklida u fisijama ili u radioaktivnim raspadima drugih fisijskih produkata, te dezintegracija nuklida zbog vlastitog radioaktivnog raspada ili zbog apsorpcije neutrona. Utjecaj nekog nuklida na reaktivnost reaktora ovisi o njegovoj koncentraciji i udarnom presjeku za apsorpciju neutrona.

Koncentracija svakog nuklida u stacionarnom radu reaktora mijenja se prema nekoj ravnotežnoj koncentraciji odnosno prema tzv. zasićenju. Vrijeme dostizanja ravnotežne

koncentracije i njezina veličina su funkcije intenziteta procesa nastajanja i nestajanja dotičnog nuklida.

Konkretne analize pokazuju da približno polovica nuklida u fisijskim proizvodima ima zanemariv značaj za reaktivnost reaktora.

Drugu polovicu možemo podijeliti na dva dijela.

U prvi dio spadaju nuklidi koji u toku rada reaktora relativno brzo postižu maksimalnu koncentraciju. tj. koji brzo dolaze do zasićenja. Među ovima su sa aspekta utjecaja na reaktivnost posebno značajni neki izotopi ksenona i samarija (^{135}Xe i ^{149}Sm), koje ćemo posebno analizirati.

U drugi dio možemo grupirati nuklide koji zasićenje postižu u dugom vremenu rada reaktora, ili ga uopće u tom vremenu ne postižu.

Utjecaj fisijskih proizvoda na rad reaktora, osim za dva imenovana izotopa ksenona i samarija, promatra se sumarno.

Promjenu reaktivnosti zbog zatrovanja reaktora sa fisijskim proizvodima možemo izraziti kao

$$\Delta\rho = \rho' - \rho .$$

gdje su ρ' i ρ reaktivnosti zatrovanog i nezatrovanog reaktora.

Reaktivnosti ρ'i ρ, slijedom njihove definicije, određuju efektivne multiplikacijske faktore k_{ef}' i k_{ef}, te se može pisati

$$\Delta\rho = \frac{k_{ef}' - 1}{k_{ef}'} - \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_{ef}}\left(1 - \frac{k_{ef}}{k_{ef}'}\right). \qquad \textbf{(8.7.1)}$$

Zatrovanje reaktora uglavnom se manifestira kao povećanje parazitne apsorpcije termičkih neutrona, iz čega slijedi da će se utjecaj zatrovanja prvenstveno reflektirati na smanjenje faktora iskorištenja termičkih neutrona. Odnos efektivnih faktora multiplikacije k_{ef}/k_{ef}' je zbog toga približno ekvivalentan odnosu faktora iskorištenja termičkih neutrona f/f'.

Odnos f/f', napisan za homogeni reaktor je

$$\frac{\Sigma_{aT} + \Sigma_{ap}}{\Sigma_{aT}} = 1 + \frac{\Sigma_{ap}}{\Sigma_{aT}},$$

gdje je

Σ_{ap} makroskopski udarni presjek fisijskih proizvoda zatrovanja reaktora

Σ_{aT} makroskopski udarni presjek svih apsorbera u reaktoru prije zatrovanja

Ako se prisjetimo da je $k_{ef} \approx 1$, možemo na temelju relacije (8.7.1) pisati

$$\Delta\rho = 1 - \frac{f}{f'} = -\frac{\Sigma_{ap}}{\Sigma_{aT}}. \qquad \textbf{(8.7.2)}$$

Promjena reaktivnosti zbog zatrovanja fisijskim proizvodima je određena odnosom broja termičkih neutrona koji su zarobljeni u nuklidima tih fisijskih produkata i broja termičkih neutrona zarobljenih u nezatrovanom reaktoru. Ako je riječ o homogenom reaktoru to se svodi, kao što pokazuje relacija (8.7.2), na odgovarajući odnos makroskopskih udarnih presjeka.

Zatrovanje reaktora ksenonom

Među fisijskim proizvodima najizrazitiji utjecaj na reaktivnost ima izotop ksenona ^{135}Xe. Uzrok takvom utjecaju leži s jedne strane u veoma velikom presjeku za apsorpciju termičkih neutrona tog izotopa($\Sigma_a=3*10^{-18}$ cm^2), a s druge u njegovom relativno visokom sadržaju u produktima fisije.

Količina izotopa ^{135}Xe u fisijskim proizvodima ^{235}U potječe manjim dijelom direktno iz fisija (svega oko 0.3% fisija neposredno generira ^{135}Xe), a znatno većim dijelom iz radioaktivnog raspada izotopa telura ^{135}Te, koji nastaje u 6.1% fisija.

Izotop ^{135}Te je radioaktivan s poluvremenom raspada od svega 2 minute, a raspada se uz β i γ emisije prema shemi

$$^{135}Te \xrightarrow{2\ min} {}^{135}I \xrightarrow{6.7\ h} {}^{135}Xe \xrightarrow{9.2\ h} {}^{135}Cs \xrightarrow{2*10^4\ god} {}^{135}Ba$$

Izotop ^{135}Ba na kraju radioaktivnog lanca je stabilan.

Poluvrijeme radioaktivnog raspada ^{135}Te je vrlo kratko u odnosu na poluvrijeme raspada izotopa joda (^{135}I), pa ga možemo zanemariti (tj. izjednačiti sa nulom), smatrajući da ^{135}I nastaje direktno u fisijama.

Ova aproksimacija dozvoljava formuliranje bitno jednostavnije jednadžbe bilance izotopa ^{135}I u reaktoru:

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_I I - \sigma_I \phi I + 0.061\Sigma_f \phi . \qquad \textbf{(8.7.3)}$$

Sa I je označena koncentracija (broj atoma po jedinici volumena) izotopa ^{135}I, a sa λ_I i σ_I konstanta radioaktivnog raspada i mikroskopski udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona u tom izotopu.

Prvi član i drugi na desnoj strani jednadžbe (8.7.3) određuju gubitak joda zbog radioaktivnog raspada i apsorpcije neutrona, a treći stvaranje joda u procesu fisije urana. Naime, broj fisija uranovih atoma po jedinici volumena iznosi $\Sigma_f\phi$, a iz 6.1% fisija se stvara jod.

Mikroskopski udarni presjek joda za apsorpciju neutrona σ_f je vrlo malen, pa će se zbog toga u idućim analizama drugi član relacije (8.7.3) zanemarivati.

U stacionarnom stanju koncentracija joda mora biti konstantna (dI/dt=0), a može se izračunati iz relacije

$$I_0 = 0.061\frac{\Sigma_f \phi_0}{\lambda_1}, \qquad \textbf{(8.7.4)}$$

gdje je ϕ_0 tok neutrona u stacionaranom stanju.

Na sličan način postavlja se i bilanca koncentracije izotopa ^{135}Xe

$$\frac{dXe}{dt} = -\lambda_{Xe} Xe - \sigma_{Xe}\phi Xe + \lambda_I I + 0.003\Sigma_f \phi . \qquad \textbf{(8.7.5)}$$

Analogno kao u bilanci joda prva dva člana određuju gubitak ksenona zbog radioaktivnog raspada i apsorpcije neutrona (međutim, za razliku od joda mikroskopski udarni presjek ksenona za apsorpciju termičkih neutrona je ekstremno velik, pa se drugi član jednadžbe nipošto ne smije zanemariti). Treći i četvrti član se odnose na stvaranje ^{135}Xe pretvorbom joda u ksenon i direktno u fisijama.

Koncentracija ksenona u stacionarnom stanju (koja se često naziva i ravnotežna koncentracija) Xe_0 iz relacija (8.7.5) i (8.7.4) dobiva se kao

$$Xe_0 = \frac{\lambda_I I_0 + 0.003\Sigma_f\phi_0}{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0} = \frac{0.064\Sigma_f\phi_0}{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0} \qquad \textbf{(8.7.6)}$$

Iz relacija (8.7.2) i (8.7.6) možemo odrediti promjenu reaktivnosti reaktora zbog nakupljanja ksenona u stacionarnom stanju:

$$\Delta\rho = -\frac{Xe_0\sigma_{Xe}}{\Sigma_{eT}} = -\frac{0.0064\Sigma_f\phi_0\sigma_{Xe}}{\Sigma_{aT}\left(\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0\right)}.$$

Dozvoljeno je, nadalje, pisati, $\frac{\Sigma_f}{\Sigma_{aT}} = \left(\frac{\Sigma_f}{\Sigma_{aT}}\right)\left(\frac{\Sigma_{ag}}{\Sigma_{ag}}\right) = f\frac{\eta}{\nu}$,

pa se uvrštenjem konačno dobiva

$$\Delta\rho = -0.064\frac{\eta}{\nu}\frac{f\phi_0\sigma_{Xe}}{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0} \qquad \textbf{(8.7.7)}$$

Primjer 8.7.1

Za neki vodom hlađeni reaktor s slabo obogaćenim uranom, koji radi u stacionarnom stanju, potrebno je odrediti ovisnost smanjenja reaktivnosti zbog zatrovanja s ksenonom o toku termičkih neutrona te prodiskutirati karakteristične granične vrijednosti zatrovanja.

Za reaktor su poznati slijedeći podaci:

η=1.8, ν=2.4, f=0.8, $\sigma_{Xe}=3*10^{-18}cm^2$,

$\lambda_{Xe}=\ln(2)/(9.2*3600)=2.1*10^{-5}s^{-1}$.

Rješenje:

Uvrštenjem zadanih vrijednosti u relaciju (8.7.7), dobiva se

$$\Delta\rho = -\frac{1.15*10^{-19}\phi_0}{2.1*10^{-5} + 3*10^{-18}\phi_0}.$$

Granične vrijednosti zatrovanja analizirati ćemo na osnovi gornje relacije za slijedeće uvjete:

1. Mali tok termičkih neutrona ($\phi_0<10^{11}$neutrona/cm^2s)

Ako je tok neutrona manji od 10^{11}neutrona/cm^2s, drugi član u nazivniku postaje zanemariv u odnosu na prvi član, pa promjena reaktivnosti postaje direktno razmjerna s tokom termičkih neutrona:

$$\Delta\rho = -5.5*10^{-15}\phi_0.$$

2. Veliki tok termičkih neutrona ($\phi_0>10^{11}$neutrona/cm^2s)

Ako je tok termičkih neutrona veoma velik prvi član u nazivniku postaje zanemariv u odnosu na drugi član. To znači da promjena reaktivnosti zbog zatrovanja ksenonom postaje neovisna o neutronskom toku i postiže maksimalnu negativnu vrijednost, koja za dani primjer iznosi

$$\Delta\rho_{max} = -0.038.$$

Reaktivnost zbog zatrovanja ksenonom nakon promjene neutronskog toka

Promjena reaktivnosti reaktora zbog zatrovanja ksenonom dolazi naročito do izražaja kod većih promjena neutronskog toka, odnosno većih promjena generirane snage reaktora. Veoma je karakterističan i za praksu značajan slučaj, promjena reaktivnosti nakon naglog smanjenja neutronskog toka na nulu, tj. ako se reaktor naglo obustavi, pa ćemo taj slučaj i razmotriti.

Ako u jednadžbu bilance ksenona (jednadžba 8.7.5) uvrstimo $\phi=0$, ona se svodi na relaciju

$$\frac{dXe}{dt} = \lambda_I I - \lambda_{Xe} Xe . \qquad \textbf{(8.7.8)}$$

Iz bilance joda (jednadžba 8.7.3) za $\phi=0$ proizlazi

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_I I .$$

Integracijom od 0 do t izlazi

$$I = I_0 e^{-\lambda_I t} .$$

Uvrštenjem u relaciju (8.7.8) i množenjem izraza s $e^{\lambda_{Xe} t}$, dolazimo do jednadžbe

$$\left(\frac{dXe}{dt} + \lambda_{Xe} Xe \right) e^{\lambda_{Xe} t} = \frac{d}{dt}\left(Xe\, e^{\lambda_{Xe} t} \right) = \lambda_I I_0 e^{(\lambda_{Xe} - \lambda_I) t} .$$

Ponovnom integracijom po vremenom izlazi

$$Xe(t) = \frac{\lambda_I}{\lambda_{Xe} - \lambda_I} I_0 \left(e^{-\lambda_i t} - e^{-\lambda_{Xe} t} \right) + Xe_0\, e^{-\lambda_{Xe} t} . \qquad \textbf{(8.7.9)}$$

Vrijeme t=0 odgovara trenutku obustave reaktora u kojem su prije obustave koncentracije ksenona i joda bile Xe_0 i I_0. Veličine Xe_0 i I_0 (koncentracije ksenona i joda u stacionarnom stanju) funkcije su neutronskog toka u stacionarnom stanju (vidi relacije 8.7.4 i 8.7.6).

Zbog kraćeg poluvremena raspada izotopa ^{135}I od poluvremena raspada izotopa ^{135}Xe (6.7h u odnosu na 9.2h) dolazi nakon obustave reaktora do povećanje koncentracije ksenona u jezgri, a time i do povećanog zatrovanja i smanjenja reaktivnosti. Kod obustavljenog reaktora naime otpada "izgaranje" ksenona zbog apsorpcije neutrona (drugi član u relaciji 8.7.5), pa je promjena koncentracije ksenona uvjetovana jedino radioaktivnim raspadom.

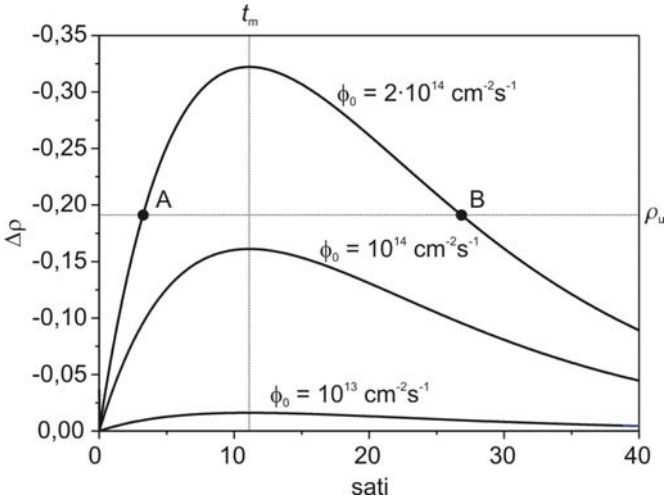
Proporcionalno s promjenom koncentracije ksenona mijenja se i zatrovanje, odnosno unešena negativna reaktivnost u reaktor. Naime, suglasno relaciji (8.7.2) možemo pisati

$$\Delta\rho(t) = -\frac{\sigma_{Xe} Xe(t)}{\Sigma_{aT}} . \qquad \textbf{(8.7.10)}$$

Ako sada u relaciju (8.7.10) uvrstimo izraz (8.7.9) u kojemu smo I_0 i Xe_0 izrazili iz jednadžbi (8.7.4) i (8.7.6), te uzeli u obzir da je $\Sigma_f/\Sigma_{aT}=f\eta/\nu$, nakon sređivanja dobivamo

$$\Delta\rho(t) = -\frac{\sigma_{Xe}\phi_0 f\eta}{\nu}\left[\frac{0.061}{\lambda_{Xe} - \lambda i}\left(e^{-\lambda_I t} - e^{-\lambda_{Xe} t} \right) + \frac{0.064}{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0} e^{-\lambda_{Xe} t} \right] . \quad (8.7.11)$$

Funkcija $\rho(t)$ za razne vrijednosti ϕ_0 te uz primjenu podataka iz primjera 8.7.1. prikazana je na slici 8.7.1. Valja obratiti pažnju da je u navedenom primjeru vrijeme mjereno u sekundama..



Slika 8.7.1 Promjena reaktivnosti nakon obustave reaktora zbog zatrovanja ksenonom

Iz slike se razabire da negativne reaktivnosti nakon obustave pogona reaktora, ako je prije obustave tok neutrona u reaktoru bio visok, mogu višestruko premašiti iznose iz stacionarnog stanja (tj. iznose za t=0).

Ako je reaktor prije obustave radio s velikim neutronskim tokom (preko 10^{14}neutrona/cm^{2}s), a ima manju ograničenu rezervu reaktivnosti (na slici 8.7.1 označena sa ρ_u), ne može nakon obustave ponovo krenuti u pogon u periodu u kojem je reaktivnost zbog zatrovanja veća od ρ_u. Taj je fenomen poznat kao "ksenonska jama". Iz slike također vidimo da se maksimalna reaktivnost postiže u vremenu nešto dužem od 10 sati nakon obustave, te da se reaktivnost vraća na razinu koja odgovara stacionarnom stanju tek nakon približno 40 sati poslije obustave reaktora.

Od interesa je razmotriti analitičke izraze za jednostavnu procjenu vremena nastanka maksimalne negativne reaktivnosti zbog nakupljanja ksenona nakon obustave reaktora.

Vrijeme nastanka maksimalne reaktivnosti dobiva se određivanjem ekstrema funkcije (8.7.9). Rezultat je

$$t_m = \frac{1}{\lambda_{Xe} - \lambda_I} \ln\left[\frac{\lambda_{Xe}}{\lambda_I}\left(1 + \frac{\lambda_I - \lambda_{Xe}}{\lambda_i}\frac{Xe_0}{I_0}\right)\right]. \qquad \textbf{(8.7.12)}$$

Iskoristimo li izraze (8.7.4) i (8.7.6) možemo relaciju (8.7.12) napisati u obliku

$$t_m = \frac{1}{\lambda_{Xe} - \lambda_I} \ln\left[\frac{\lambda_{Xe}}{\lambda_I}\left(1 + 1.05\frac{\lambda i - \lambda_{Xe}}{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0}\right)\right] \qquad \textbf{(8.7.13)}$$

Primjer 8.7.2

Neki termički reaktor radi sa slabo obogaćenim uranom kao nuklearnim gorivom, radi u stacionarnom stanju s tokom neutrona od $5*10^{13}$neutrona/cm^{2}s. Kolika je maksimalna reaktivnost zbog nakupljanja ksenona nakon obustave tog reaktora i koliki je odnos te reaktivnosti prema onoj koja potječe od ksenona u stacionarnom stanju?

Pri proračunu koristiti slijedeće podatke:

$\lambda_I=2.87*10^{-5}$s, $\lambda_{Xe}=2.1*10^{-5}$s, $\sigma_{Xe}=3*10^{-18}$cm^2, $f\eta/\nu=0.6$.

Rješenje

Period t_m, od obustave reaktora do pojave maksimalne negativne reaktivnosti reaktora, dobiva se uvrštenjem zadanih veličina u relaciju (8.7.13). Rezultat je, t_m=46568s=12.9h.

Ako sada tako dobivenu vrijednost t_m uvrstimo u jednadžbu (8.7.11), dobivamo maksimalnu negativnu reaktivnost koju u reaktor unosi nakupljanje ksenona nakon obustave reaktora, $\Delta\rho_{max}$=-0.093.

Negativna reaktivnost reaktora zbog ravnotežne koncentracije ksenona u reaktoru prije obustave pogona određena je relacijom (8.7.7). Iz te se relacije nakon uvrštenja zadanih veličina dobiva $\Delta\rho_0$=-0.0337.

Traženi odnos maksimalne i ravnotežne reaktivnosti je 2.76.

Primjenom osnovnih jednadžbi bilance joda i ksenona (jednadžbe 8.7.3 i 8.7.5), možemo uz druge rubne uvjete riješiti i niz drugih slučajeva od interesa za praktičnu primjenu.

Jedno od pitanja, značajno za pogon reaktora, je procjena vremena potrebnog da se koncentracija ksenona u reaktoru približi ravnotežnoj koncentraciji.

Problem se može riješiti uz rubne uvjete da su u početnom vremenu (tj. za t=0) koncentracije joda i ksenona jednake nuli i da neutronski tok konstantan i jednak ϕ_0 (odnosno da je vrijeme porasta neutronskog toka znatno kraće od vremena potrebnog za nakupljanje ksenona).

Rezultat proračuna pokazuje da je kod puštanja termičkog reaktora sa uranom kao nuklearnim gorivom u pogon, odnos koncentracije ksenona Xe(t) i ravnotežne koncentracije Xe_0 (koja je definirana izrazom 8.7.6) dan jednadžbom

$$\frac{Xe(t)}{Xe_0} = 1 + 0.953\left[\left(\frac{\lambda_I}{\lambda_{Xe} - \lambda_I + \sigma_{Xe}\phi_0} - 0.0049\right)e^{-(\lambda_{Xe}+\sigma_{Xe}\phi_0)t} - \left(\frac{\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe}\phi_0}{\lambda_{Xe} - \lambda_I + \sigma_{Xe}\phi_0}e^{-\lambda_I t}\right)\right]. \quad \textbf{(8.7.14)}$$

Primjer 8.7.3

Koliki se postotak ravnotežne koncentracije ksenona postiže deset sati nakon puštanja u pogon reaktora koji kao gorivo koristi slabo obogaćeni uran i kod kojega je tok neutrona ϕ_0=5*10^{13}neutrona/cm^{2}s? Pri proračunu koristiti potrebne brojčane podatke iz primjera 8.7.2.

Rješenje

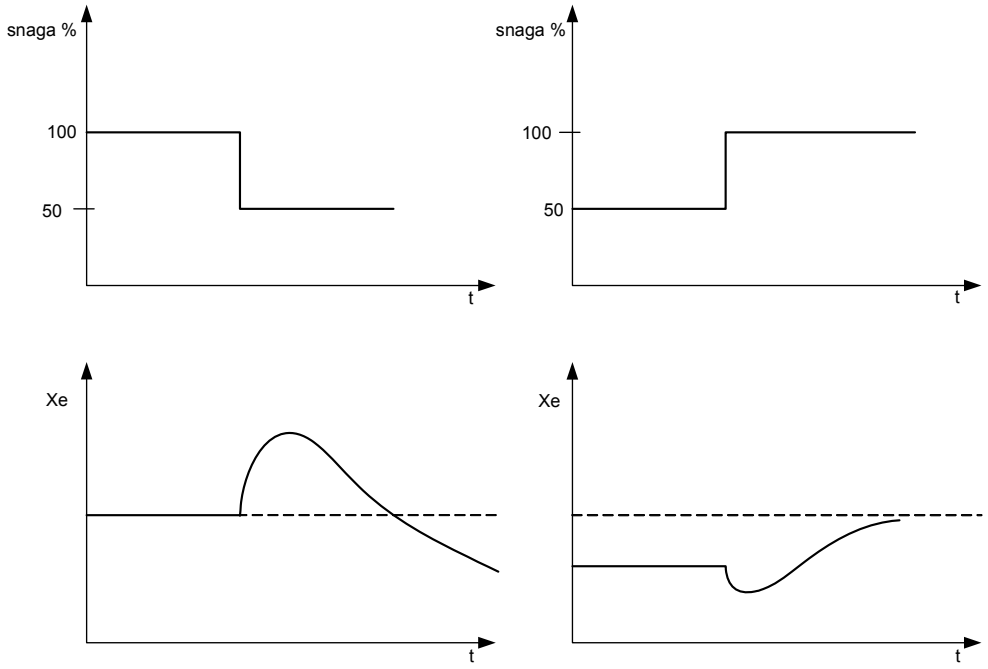
Uvrštenjem zadanih veličina u relaciju (8.7.14) kao rezultat se dobiva

$$\frac{Xe(t)}{Xe_0} = 0.593.$$

Deset sati nakon puštanja reaktora u pogon koncentracija ksenona u jezgri dosiže oko 59% ravnotežne koncentracije.

Utjecaj promjene koncentracije ksenona na reaktivnost reaktora dolazi do izražaja svaki put kada se mijenja snaga reaktora. Taj je utjecaj intenzivniji kada su promjene snage veće i kada se odvijaju brže. Kvantitativnu analizu promjena reaktivnosti za te slučajeve možemo dobiti iz jednadžbi bilance joda i ksenona uz odgovarajuće rubne uvjete kojima se određuje početni i konačni iznos neutronskog toka. Kao primjer, promjene koncentracije ksenona kod skokovitog smanjenja i

skokovitog povećanja snage reaktora (odnosno neutronskog toka) sa 100% na 50% i obratno, prikazane su na slici 8.7.2.



Slika 8.7.2 Promjena koncentracije ksenona nakon promjene snage reaktora između 100% i 50%

Utjecaj ksenona na reaktivnost reaktora dolazi naročito do izražaja kod cikličkih promjena snage nuklearne elektrane radi prilagođavanja dnevnim i noćnim potrebama elektroenergetskog konzuma.

Nadalje, kod velikih reaktora (s dimenzijama znatno većim od slobodnog puta neutrona) i s velikim tokom neutrona, može doći do prostornog kolebanja raspodjele proizvedene snage pod utjecajem zatrovanja ksenonom. Svaku promjenu aksijalne raspodjele snage u takvim reaktorima (npr. zbog dubljeg uranjanja regulacijskih šipki) prati s odgovarajućim vremenskim korakom i promjena aksijalne raspodjele koncentracije ksenona u jezgri. Promjena pak aksijalne raspodjele ksenona djeluje na raspodjelu reaktivnosti, a preko nje povratno i na aksijalnu raspodjelu neutronskog toka i generirane snage. Ta pojava rezultira periodičkim premještanja maksimuma generirane snage sa donjeg u gornji dio jezgre i obratno. Moguće je i radijalno kolebanje proizvedene snage reaktora zbog zatrovanja ksenonom. Takva pojava može biti uzrokovana radijalnim nesimetrijama u razmještaju fisijskog materijala ili apsorbera u jezgri reaktora.

Zatrovanje reaktora samarijem

Osim ksenona (izotop ^{135}Xe), na zatrovanje reaktora ima priličan utjecaj i samarij (izotop ^{149}Sm). Izotop ^{149}Sm ima veliki udarni presjek za apsorpciju termičkih neutrona (oko $5*10^{-20}$cm^2). Iako je utjecaj samarija na reaktivnost reaktora bitno manji nego ksenona (ali zato mnogo veći od svakog od ostalih fisijskih produkata) uobičajeno je da se da zatrovanje samarijem analizira odvojeno od zatrovanja koje uzrokuju ostali fisijski produkti.

Izotop ^{149}Sm, slično kao i izotop ^{135}Xe, nastaje kao rezultat radioaktivnog β raspada po shemi:

$$^{149}Nd \xrightarrow{1.7\,h} {}^{149}Pm \xrightarrow{53\,h} {}^{149}Sm$$

Osnovni nuklid u nizu je izotop neodima ^{149}Nd koji nastaje direktno u fisiji sa vjerojatnošću 1% (tj. 0.01 atom ^{149}Nd po fisiji). Izotop ^{149}Sm, koji je stabilan (λ_{sm}=0), nastaje iz radioaktivnog raspada izotopa prometija ^{149}Pm. Budući da je poluvrijeme raspada ^{149}Nd znatno kraće od poluvremena raspada ^{149}Pm, ono će se u analizi zanemariti, i računati kao da u fisiji direktno nastaje

^{149}Pm. Apsorpcija termičkih neutrona u izotopu ^{149}Pm će se zbog malenog udarnog apsorpcijskog presjeka također zanemariti.

Za temelju danih postavki mogu se odrediti bilance ^{149}Pm i ^{149}Sm kako slijedi

$$\frac{dPm}{dt} = 0.01\Sigma_f\phi - \lambda_{Pm}Pm \qquad \textbf{(8.7.11)}$$

$$\frac{dSm}{dt} = \lambda_{Pm}Pm - Sm\sigma_{Sm}\phi\,. \qquad \textbf{(8.7.12)}$$

Iz gornjih se jednadžbi može odmah izvesti izraz za koncentraciju ^{149}Sm u stacionarnom stanju:

$$Sm_0 = \frac{0.01\Sigma_f}{\sigma_{Sm}}\,. \qquad \textbf{(8.7.13)}$$

Smanjenje reaktivnosti zbog ravnotežnog zatrovanja samarijem biti će

$$\Delta\rho = -\frac{Sm_0\sigma_{Sm}}{\Sigma_{aT}} = -\frac{0.01\Sigma_f}{\Sigma_{aT}} = -0.01f\frac{\eta}{\nu}\,. \qquad \textbf{(8.7.14)}$$

Dobiveni rezultat ukazuje da je negativna reaktivnost zbog zatrovanja reaktora sa samarijem neovisna o toku neutrona u reaktoru. Faktor $f\eta/\nu$ je kod vodom hlađenih reaktora oko 0.6, pa će $\Delta\rho$ biti približno jednak -0.006=-0.6%. Usporedimo li ovaj iznos s ranije dobivenim kod razmatranja zatrovanja reaktora ksenonom u stacionarnom stanju (primjeri 8.7.1 i 8.7.2), možemo ustanoviti da je u stacionarnom stanju utjecaj samarija na reaktivnost bitno manji (više od 5 puta manji kod razmatrane razine neutronskog toka) od utjecaja ksenona.

Na temelju bilance prometija i samarija (izrazi 8.7.15 i 8.7.16), možemo odrediti promjenu koncentracije samarija u reaktoru nakon obustave. Umjesto direktnog izvoda može se (s obzirom da je shema nastajanja samarija iz prometija slična shemi nastajanja ksenona iz joda) koristiti izvedeni izraz za promjenu reaktivnosti reaktora zbog promjene koncentracije ksenona (izraz 8.7.11). Ako u tom izrazu koncentracije 0.061 i 0.064 zamijenimo s 0.01, λ_I sa λ_{Pm}, σ_{Xe} sa σ_{Sm} i λ_{Xe} sa λ_{Sm}=0, dobivamo relaciju kojom je određena promjena reaktivnosti reaktora zbog nakupljanja samarija:

$$\Delta\rho(t) = -0.01\frac{f\eta}{\nu}\left[\frac{\phi_0\sigma_{Sm}}{\lambda_{Pm}}\left(1-e^{-\lambda_{Pm}t}\right)+1\right]. \qquad \textbf{(8.7.15)}$$

Zanimljivo je primijetiti da koncentracija samarija u reaktoru nakon obustave reaktora teži nekoj maksimalnoj vrijednosti (koja je ovisna o neutronskom toku prije obustave pogona) i nakon toga se ne smanjuje, kao što je to bio slučaj kod ksenona, jer je ^{149}Sm stabilan izotop. Tek poslije ponovnog puštanju reaktora u pogon samarij "izgara" u neutronskom polju do iznosa koji odgovara njegovoj koncentraciji u stacionarnom pogonu reaktora.

Primjer 8.7.4

Reaktor je obustavljen nakon što je radio s neutronskim tokom $5*10^{13}$neutrona/cm^{2}s. Kolika je maksimalna negativna reaktivnost zbog povećanja koncentracija ^{149}Sm nakon obustave reaktora i koliko je veća od one u stacionarnom stanju?

U proračunu uzeti fη/ν=0.6.

Rješenje

Potrebne konstante za proračun jesu:

$\sigma_{Sm}=5*10^{-20}cm^2$

$\lambda_{Pm}=3.63*10^{-6}s$

Maksimalna negativna reaktivnost zbog nakupljanja samarija dobiva se iz relacije (8.7.19), ako pustimo da t teži u neizmjernost. Rezultat je

$$\Delta\rho = -0.01\frac{f\eta}{\nu}\left(\frac{\phi_0\sigma_{Sm}}{\lambda_{Pm}}+1\right) = -0.006\left(0.689+1\right) = -0.01$$

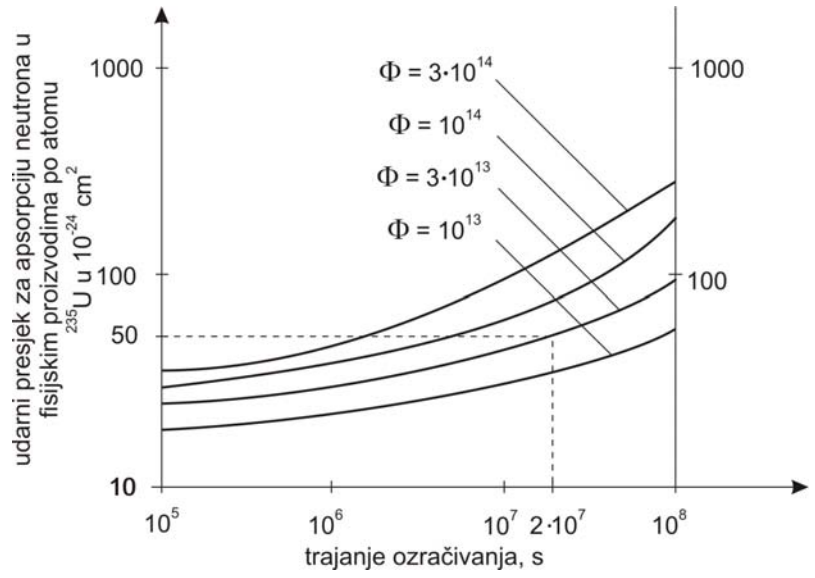
Maksimalna negativna reaktivnost zbog povećanja koncentracije samarija nakon obustave reaktora je dakle -1%. U stacionarnom stanju je prema izrazu (8.7.18) negativna reaktivnost približno -0.6%.

Iz dobivenih podataka slijedi da je povećanje negativne reaktivnosti nakon obustave reaktora u odnosu na stacionarno stanje oko 67%.

Zatrovanje reaktora drugim fisijskim proizvodima

Osim ksenona i samarija, čiji je utjecaj na reaktivnost od posebnog značaja, i drugi fisijski proizvodi imaju većeg ili manjeg udjela u zatrovanju reaktora. Intenzitet zatrovanja je funkcija koncentracije i udarnog presjeka za apsorpciju neutrona svakog nuklida. Ranije je napomenuto da se broj fisijskih proizvoda koji nastaju direktno u fisijama, ili u radioaktivnim raspadima fisijskih fragmenata, kreće oko 200. Pojedinačni nuklidi koji imaju primjetljiv upliv na zatrovanje reaktora su npr. ^{113}Cd, ^{151}Sm, ^{155}Eu, ^{157}Gd. Računanje zatrovanja od svakog pojedinačnog nuklida na rad reaktora je kompleksno i može se izvesti samo pomoću računala. Za približne procjene dozvoljeno je da se ta pojava promatra sumarno.

Sumarna ocjena zasniva se na određivanju prosječnog apsorpcijskog presjeka svih fisijskih proizvoda po atomu ^{235}U u ovisnosti o vremenu rada reaktora s nekom konstantnom razinom neutronskog toka. Rezultati proračuna sumarnog utjecaja fisijskih produkata na reaktivnost (uključivši utjecaj ksenona i samarija) na reaktivnost u stacionarnom stanju su ilustrirani slikom 8.7.3.



Slika 8.7.3 Prosječni udarni presjek svih fisijskih proizvoda za apsorpciju termičkih neutrona u ^{235}U u ovisnosti o neutronskom toku i trajanju ozračivanja

Promjenu reaktivnosti reaktora možemo na temelju relacije (8.7.2) i slike 8.7.3 odrediti kao

$$\Delta\rho = -\frac{\sigma_p\,{}^{235}N}{\Sigma_{aT}} = -\frac{\sigma_p\,{}^{235}N\sigma_f}{\Sigma_{aT}\sigma_f} = -\frac{\sigma_p\Sigma_f}{\Sigma_{aT}\sigma_f} = -f\frac{\eta}{\nu}\frac{\sigma_p}{\sigma_f}. \qquad \textbf{(8.7.16)}$$

Primjer 8.7.5

Neki reaktor radi $2*10^7$sekundi (oko 230 dana) s konstantnim tokom neutrona od $3*10^{13}$neutrona/cm^{2}s. Koliko je ukupno smanjenje reaktivnosti u tom reaktoru zbog nakupljanja fisijskih produkata? Koliki udio u tom smanjenju reaktivnosti daju izotopi ksenona i samarija ^{135}Xe i ^{149}Sm?

Pretpostaviti da je za taj reaktor $f\eta/\nu\approx 0.6$.

Rješenje:

Iz slike 8.7.3 možemo za zadane parametre otčitati $\sigma_p=50*10^{-24}$cm^2, a iz tablice 2.13.1 za ^{235}U otčitati $\sigma_f=588.8*10^{-24}$cm^2.

Uvrštenjem brojčanih veličina u relaciju (8.7.20) izlazi,

$\Delta\rho = -0.051$.

Zatrovanje ksenonom odredit ćemo na temelju izraza navedenog u primjeru 8.7.1. za tok neutrona $\phi_0=3*10^{13}$neutrona/cm^{2}s. Rezultat je $\Delta\rho_{Xe}=-0.031$. Ako tom iznosu dodamo utjecaj zatrovanja samarijem u stacionarnom stanju $\Delta\rho_{Sm}=-0.006$, dobivamo $\Delta\rho_{Xe+Sm}=-0.037$.

Dakle, udio ksenona i samarija u zatrovanju reaktora u danom primjeru iznosi 72.5%.

8.8 Promjene u nuklearnom gorivu tijekom pogona reaktora

U tijeku pogona reaktora dolazi, zbog fisija i apsorpcija neutrona, do promjena u sastavu nuklearnog goriva. Najbitnije nuklearne reakcije izotopa urana s neutronima shematski se mogu prikazati na slijedeći način

$$\begin{array}{l} {}^{235}U + n \longrightarrow \textit{fisijski proizvodi} \\ \qquad\quad \downarrow \\ \qquad\quad {}^{236}U \end{array}$$

$$^{238}U + n \longrightarrow {}^{239}U \xrightarrow[\beta]{23\,min} {}^{239}Np \xrightarrow[\beta]{2.3\,d} {}^{239}Pu .$$

Plutonij je element kojega nema u prirodi, već nastaje iz ^{238}U, ako se uran podvrgava nuklearnim reakcija s neutronima. Najizdašniji je proizvođač plutonija nuklearni reaktor jer se u njemu može ostvariti i održavati visoka gustoća neutrona. Izotop ^{239}Pu je relativno stabilan (poluživot mu je 24000godina). U pogledu uvjeta za izazivanje fisije ima slična svojstva kao i lakši izotop urana (^{235}U). Radi se dakle o fisibilnom izotopu, u kojem fisiju mogu izazvati neutroni svih energija (vidi poglavlje 4.3). Udarni mu je presjek za apsorpciju termičkih neutrona veći nego kod izotopa ^{235}U (vidi tablicu 2.13.1).

Slično kao kod ^{235}U, apsorpcija neutrona u ^{239}Pu ne dovodi u svim slučajevima do fisije, nego djelomično i do zarobljavanja neutrona, kod čega nastaje izotop ^{240}Pu. Taj pak izotop plutonija nije

fisibilan (inertan je za fisije sa termičkim neutronima, slično kao ^{238}U). Apsorpcijom neutrona prelazi u izotop ^{241}Pu, koji je opet fisibilan (u poglavlju je 4.3. pokazano je da su fisibilni samo neparni izotopi urana i plutonija). Nefisijskim zahvatom neutrona u izotopu ^{241}Pu nastaje teži izotop plutonija, ^{242}Pu.

Faktor konverzije

U tijeku pogona reaktora dolazi do gubitka fisibilnih nuklida (prvenstveno ^{235}U) zbog odgora, ali i do stvaranja novih fisibilnih nuklida (^{239}Pu, ^{241}Pu) na račun apsorpcije neutrona od ^{238}U i ^{240}Pu. Odnos nastalih i izgubljenih fisibilnih nuklida zovemo faktor konverzije. Reaktori kod kojih je faktor konverzije veći od jedinice su poznati kao oplodni reaktori.

Osim ^{238}U i izotop torija ^{232}Th može poslužiti za oplodnju. Navedeni izotop torija nije fisibilan, međutim kada se on podvrgne djelovanju neutronskog toka dolazi do nuklearnih reakcija, prema slijedećoj shemi:

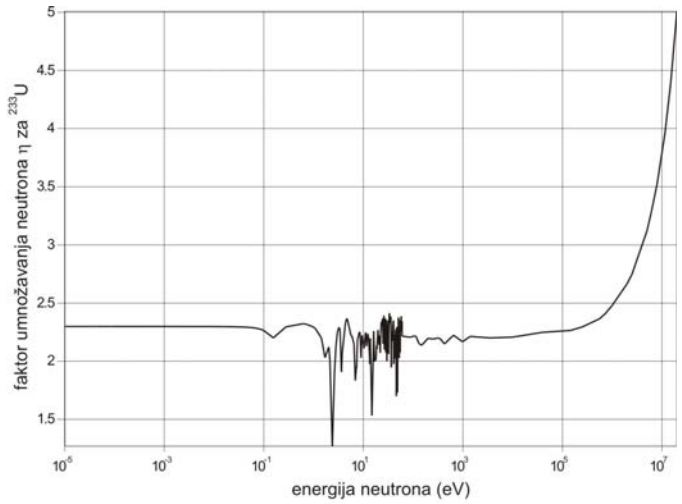
$$^{232}Th + n \longrightarrow {}^{233}Th \xrightarrow[\beta]{22.2\ min} {}^{233}Pa \xrightarrow[\beta]{27\ d} {}^{233}U .$$

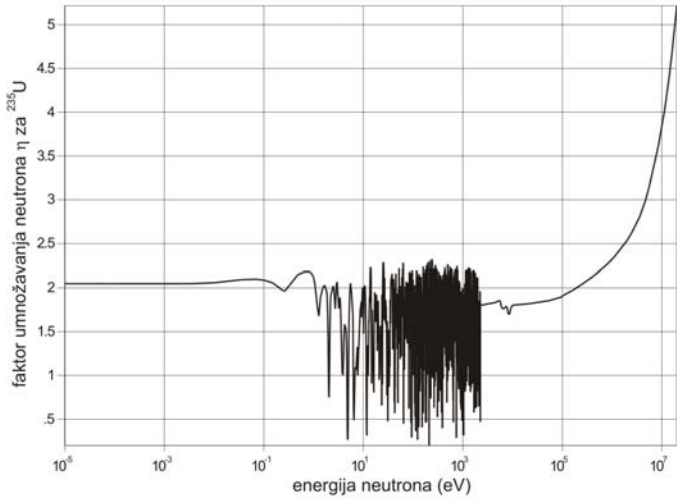
Izotop urana ^{233}U dobiven u reaktoru iz ^{232}Th je fisibilan izotop, i u pogledu uvjeta za fisiju komparabilan s ^{235}U i ^{239}Pu. Poluživot mu je vrlo dug (oko 160000godina).

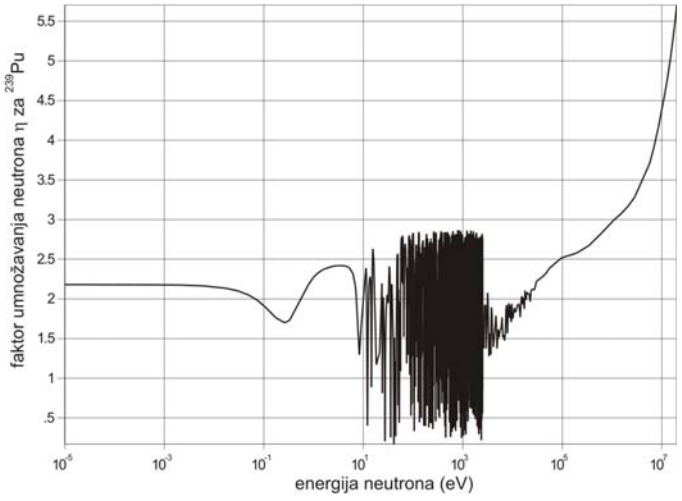
Faktor konverzije ćemo razmotriti najprije kvalitativno, radi izvlačenja nekih općih zaključaka o očekivanoj visini tog faktora i o uvjetima za ostvarenje oplodnih reaktora. Kod tih reaktora je faktor konverzije veći od jedinice, što znači da u njima nastaje više fisibilnih nuklida nego što ih se gubi.

Kvalitativna analiza konverzije vezuje se uz faktor umnožavanja neutrona η.

Taj faktor je definiran (vidi poglavlje 4.5) kao broj fisijskih neutrona dobiven po zarobljenom neutronu u nuklearnom gorivu. Faktor η je ovisan o energiji neutrona koji je izazvao fisiju, pa razlikujemo η_{term} ako je fisiju izazvao termički neutron i η_{brzi}, ako je ona izazvana brzim neutronom. Ovisnost faktora η o energiji neutrona za ^{233}U, ^{235}U i ^{239}Pu prikazana je slikom 8.8.1.







Slika 8.8.1 Faktor η za ^{233}U, ^{235}U i ^{239}Pu

Prosječne su vrijednosti faktora η_{term} i η_{brzi} za ^{233}U, ^{235}U i ^{239}Pu dane u tablici 8.8.1.

Tablica 8.8.1 Faktor umnožavanja neutrona za ^{233}U, ^{235}U i ^{239}Pu

	η_{term}	η_{brzi}
^{233}U	2.31	-

^{235}U	2.08	2.33
^{239}Pu	2.03	2.70

Za konverziju odnosno oplodnju u idealnom slučaju raspoloživo je η-1 neutrona, jer se jedan neutron troši za podržavanje fisije. U svakom reaktoru imamo i neki neizbježni gubitak neutrona, zbog bijega i parazitnih apsorpcija. Taj ćemo broj neutrona označiti s δ.

Prema tome, po fisiji, u kojoj gubimo jedan atom fisibilnog nuklida možemo dobiti C novih fisibilnih nuklida, pri čemu vrijedi

$C=\eta-1-\delta$.

Parametar C ima značenje faktora konverzije.

Gubitak neutrona po fisiji δ je reda 0.3. Iz navedenog proizlazi zaključak da je oplodni reaktor, a to je onaj s faktorom C većim od jedinice, moguće realizirati uz uvjet da je $\eta>2.3$.

Iz tablice 8.8.1 razabire se da su uvjeti za oplodnju najbolji ako izgradimo brzi reaktor s gorivom iz ^{239}Pu. Ako bismo pokušali ostvariti oplodnju u termičkom reaktoru (tzv. termički konverter) morali bi kao gorivo uzeti ^{233}U, tj. ostvariti oplodnju izotopa torija ^{232}Th. Zbog manje vrijednosti η ne bismo u takvom slučaju mogli postići faktor konverzije komparabilan onom kod brzog plutonijskog reaktora. Brzi plutonijski oplodni energetski reaktor je tehnički potpuno razvijen i do danas izgrađen u nekoliko zemalja.

Osnovna karakteristika oplodnog reaktora je proizvodnja veće količine fisibilnog materijala od utroška tog istog materijala. Utrošeni fisibilni materijal kod reaktora s uransko-plutonijskim ciklusom može biti ^{235}U, ^{239}Pu ili ^{241}Pu, a novoproizvedeni fisibilni materijal ^{239}Pu i ^{241}Pu.

Kod oplodnih reaktora važan pokazatelj je vrijeme udvostručenja fisibilnog materijala, definirano kao vrijeme u kojemu se početna količina fisibilnog materijala sadržana u brzom reaktoru udvostručuje.

Kod termičkih reaktora s prirodnim ili slabo obogaćenim uranom, a takva je većina danas izgrađenih nuklearnih energetskih postrojenja, faktor konverzije manji je od jedinice (obično je 0.5-0.7). U takvim slučajevima ne govorimo o faktoru oplodnje nego o faktoru konverzije, iako im je definicija ista.

Radi kvantifikacije faktora konverzije kod termičkih reaktora izvršiti će se pojednostavljena analiza fizikalnih procesa u reaktoru koji doprinose konverziji. U analizi ćemo poći od pretpostavke da je samo izotop ^{235}U podložan fisijama, tj. zanemariti ćemo doprinos fisija plutonijskih izotopa. Tako određeni faktor poznat je kao početni faktor konverzije.

U termičkom reaktoru promatramo konverziju u području energija termičkih i rezonantnih neutrona, jer se u tim energetskim područjima događa pretežan broj apsorpcija neutrona u izotopu ^{238}U.

Postavljeni zadatak riješiti ćemo izračunavanjem odnosa proizvedenih i utrošenih fisibilnih nuklida po jednoj fisiji, što je, po definiciji, ekvivalentno faktoru konverzije.

U području termičkih energija je odnos broja neutrona koji su zahvaćeni izotopom ^{238}U (od kojih svaka dovodi do formiranja jednog atoma ^{239}Pu) i broja fisija dan izrazom

$$\frac{\Sigma_{a238}}{\Sigma_{f235}}=\frac{\sigma_{a238}}{r\sigma_{f235}}, \qquad \textbf{(8.8.1)}$$

gdje je r odnos broja atoma ^{235}U i ^{238}U u nuklearnom gorivu.

U narednim ćemo analizama koristiti oznake koje odgovaraju onima u izrazu (8.8.1), gdje uz fizikalnu veličinu (u ovom slučaju makroskopski udarni presjek za apsorpciju neutrona) stoji atomski broj izotopa na koji se ta veličina odnosi.

Faktor konverzije u području rezonantnih energija razmotriti ćemo korištenjem pojmova obrađenih u okviru analize ciklusa neutrona u reaktoru (slika 7.3.1):

Broj neutrona dobiven po fisiji je ν, a broj brzih neutrona koji su raspoloživi za usporavanje $\nu\varepsilon$. U područje rezonantnih energija dospijeva $\nu\varepsilon L_b$ neutrona, a to područje napušta $\nu\varepsilon L_b p$ neutrona. Iz navedenog slijedi da broj neutrona po fisiji, koji su zahvaćeni od izotopa ^{238}U (a svaki takav zahvat, analogno kao u području termičkih energija, dovodi do stvaranja jednog atoma ^{239}Pu) iznosi

$$\nu\varepsilon L_b(1-p). \qquad \textbf{(8.8.2)}$$

Broj utrošenih atoma fisibilnog ^{235}U po fisiji je

$$\frac{\sigma_{a235}}{\sigma_{f235}}. \qquad \textbf{(8.8.3)}$$

Faktor konverzije C, definiran kao odnos broja novostvorenih i utrošenih fisibilnih nuklida, moći će na temelju relacija (8.8.1), (8.8.2) i (8.8.3) biti prikazan kao

$$C = \frac{\frac{\sigma_{a235}}{r\sigma_{f235}} + \nu\varepsilon L_b(1-p)}{\frac{\sigma_{a235}}{\sigma_{f235}}} = \frac{\sigma_{a238}}{r\sigma_{a235}} + \nu\varepsilon L_b(1-p)\frac{\sigma_{f235}}{\sigma_{a235}}. \qquad \textbf{(8.8.4)}$$

Faktor konverzije se, naravno, mijenja tokom pogona reaktora, jer se mijenja izotopni sastav nuklearnog goriva.

Primjer 8.8.1

Za neki su vodom hlađeni i vodom moderirani reaktor poznati su slijedeći podaci: L_b=0.814, p=0.8176, ε=1.044, r=0.027. Koliki je faktor konverzije u tom reaktoru ako zanemarimo fisije plutonijskih izotopa?

Rješenje:

Podaci o udarnim presjecima potrebnim za izračunavanje faktora C u izrazu (8.8.4) dani su u tablici 2.13.1:

σ_{a235}=680.8*10^{-24}cm^2, σ_{f235}=582.2*10^{-24}cm^2, σ_{a238}=2.71*10^{-24}cm^2.

Broj neutrona dobiven po fisiji ^{235}U, ν=2.42.

Uvrštenjem brojčanih veličina u relaciju (8.8.4) proizlazi

C=0.147+0.321=0.468.

Na svakih 1000 utrošenih atoma ^{235}U u reaktoru dobivamo 468 atoma ^{239}Pu.

Rezultat pokazuje da je u danom primjeru faktor konverzije u području rezonantnih energija preko dva puta veći od onoga u području termičkih energija.

Ako bismo u račun faktora konverzije uključili doprinos fisija plutonijskih nuklida (^{239}Pu, ^{241}Pu), trebali bismo računati s tim nuklidima po istom principu kao za ^{235}U.

Promjena koncentracije atoma nuklearnog goriva u toku pogona reaktora

U toku pogona nuklearnog reaktora dolazi uslijed nuklearnih reakcija atoma nuklearnog goriva sa neutronima do razaranja atoma urana i plutonija, ali i do nastanka novih atoma plutonija na račun smanjenja količine težeg uranovog izotopa. Sve te promjene ovisne su o ukupnom ozračenju nuklearnog goriva u reaktoru, odnosno o odgoru.

U nastavku ćemo razmotriti vremenske promjene koncentracije osnovnih nuklida urana i plutonija tokom pogona reaktora.

Izotop ^{235}U

Promjena koncentracije nuklida ^{235}U (koja će se označiti kao N_{235}) u nuklearnom gorivu, u ovisnosti o neutronskom toku i vremenu ozračenja, udovoljava jednostavnoj relaciji

$$\frac{dN_{235}}{dt} = -\phi\sigma_{a235}N_{235}. \qquad \textbf{(8.8.5)}$$

Relacija (8.8.5) ukazuje na činjenicu da se koncentracija atoma ^{235}U u reaktoru smanjuje jedino zbog apsorpcije neutrona (i to pretežno apsorpcije termičkih neutrona).

Integracijom u periodu od t=0 do t, pri čemu smatramo da je tok termičkih neutrona ϕ konstantan, izlazi

$$N_{235} = N_{0235}e^{-\phi\sigma_{a235}t}, \qquad \textbf{(8.8.6)}$$

gdje je N_{0235} koncentracija atoma ^{235}U u vremenu t=0, tj. prije ozračenja.

Izotop ^{238}U

Koncentracija atoma ^{238}U u nuklearnom gorivu smanjuje se također samo zbog apsorpcije neutrona. Očigledno je dakle da se i vremenska promjena koncentracije tog nuklida može prikazati izrazom analognim izrazu (8.8.6):

$$N_{238} = N_{0238}e^{-\phi\sigma_{a238}t}. \qquad \textbf{(8.8.7)}$$

Bitno je podsjetiti se da je $\sigma_{a238} << \sigma_{a235}$, iz čega proizlazi da će kod istog neutronskog toka promjena koncentracije ^{235}U biti mnogo brža od promjene koncentracije ^{238}U.

Primjer 8.8.2

Koliko se smanji koncentracija izotopa ^{238}U u periodu u kojem, uz isti neutronski tok, koncentracija ^{235}U padne na polovinu?

Rješenje:

Udarni presjeci za apsorpciju termičkih neutrona jesu:

$\sigma_{a235}=680.8*10^{-24}cm^2$ $\sigma_{a238}=2.71*10^{-24}cm^{2.}$

Vrijeme potrebno da koncentracija ^{235}U padne na polovinu dobiva se iz izraza (8.8.6)

$$t_{1/2} = \frac{ln\,2}{\phi\sigma_{a235}}.$$

Uvrštenjem tog vremena u izraz (8.8.7) slijedi

$$\frac{N_{238}}{N_{0238}} = e^{-\frac{\ln 2\sigma_{a238}}{\sigma_{a235}}} = 0.9972 .$$

U periodu u kojem koncentracija izotopa ^{235}U pada na polovicu, koncentracija izotopa ^{238}U smanjuje se za svega 0.28%!

To je razlog da se kod približnih proračuna promjene koncentracije fisibilnih nuklida u reaktoru, koncentracija ^{238}U može smatrati konstantnom.

Izotop ^{239}Pu

Izotop plutonija ^{239}Pu nastaje nakon apsorpcije neutrona u izotopu ^{238}U, a nestaje putem vlastite apsorpcije neutrona. Apsorpcija neutrona pak dovodi do fisije ili do stvaranja izotopa ^{240}Pu.

Bilanca koncentracije izotopa ^{239}Pu može se dakle opisati relacijom:

$$\frac{dN_{239}}{dt} = N_{238}\sigma_{a238}\phi + (1-p)\varepsilon L_b\left(\nu_{235}\sigma_{f235}N_{235}\phi + \nu_{239}\sigma_{f239}N_{239}\phi\right) - N_{239}\sigma_{a239}\phi .$$

(8.8.8)

Prvi član na desnoj strani jednadžbe (8.8.8) određuje apsorpciju termičkih neutrona u izotopu ^{238}U, a drugi apsorpciju epitermičkih (odnosno rezonantnih) neutrona u istom izotopu. Epitermički neutroni potječu iz fisija ^{235}U i ^{239}Pu (parametri koji se odnose na plutonij imaju indeks 239). Posljednji član uzima u račun smanjenje koncentracije ^{239}Pu zbog odgora tog izotopa.

Koncentraciju ^{238}U smatrat ćemo, iz razloga pokazanih u primjeru 8.8.2, konstantnom, a isto tako i tok termičkih neutrona ϕ.

Koncentracija ^{235}U, koju određuje parametar N^{235},uvrstit će se iz relacije (8.8.6).

U izrazu (8.8.8) mogu se skupiti koeficijenti uz varijable N_{239} i t, za koje ćemo uvesti oznake:

$$a = \sigma_{a239}\phi - (1-p)\varepsilon L_b\nu_{239}\sigma_{f239}\phi$$

$$b = \sigma_{a235}\phi$$

$$c = (1-p)L_b\nu_{235}\sigma_{f235}N_{0235}\phi\varepsilon$$

$$d = N_{238}\sigma_{a238}\phi . \qquad \textbf{(8.8.9)}$$

Uz tako definirane koeficijente jednadžba (8.8.8) pretvara se u

$$\frac{dN_{239}}{dt} + aN_{239} = ce^{-bt} + d .$$

Integracijom u granicama t=0 do t i uz početni uvjet $(N_{239})_{t=0}$=0 izlazi

$$N_{239} = \frac{d}{a} - \left(\frac{c}{a-b} + \frac{d}{a}\right)e^{-at} + \frac{c}{a-b}e^{-bt} . \qquad \textbf{(8.8.10)}$$

Relacija (8.8.10) daje promjenu koncentracije ^{239}Pu u reaktoru koji je radio u vremenu t s konstantnom veličinom toka termičkih neutrona ϕ. Koncentracija izotopa ^{239}Pu teži konačnoj vrijednosti d/a.

Obično nas interesira masa ^{239}Pu dobivena po jedinici mase ^{238}U. Odnos masa je jednak odnosu broja atoma N_{239}/N_{238} pomnoženim s odnosom njihovih atomskih težina, tj. s 239/238.

Odnos masa dobit ćemo dakle ako jednadžbu (8.8.10) podijelimo sa $N_{238}238/239$, ili ako mjesto konstanti c i d uvedemo nove konstante:

$$c_1 = \frac{c}{N_{238}}\frac{239}{238} \qquad d_1 = \frac{d}{N_{238}}\frac{239}{238}, \text{ odnosno}$$

$$c_1 = \frac{239}{238}\frac{N_{0235}}{N_{238}}(1-p)\varepsilon L_b \nu_{235}\phi \qquad \textbf{(8.8.11)}$$

$$d_1 = \frac{239}{238}\sigma_{a238}\phi. \qquad \textbf{(8.8.12)}$$

U nuklearnoj energetici je obogaćenje urana e definirano kao težinski udio izotopa ^{235}U u uranu:

$$e = \frac{235N_{235}}{235N_{235} + 238N_{238}} \text{ ili } \frac{N_{235}}{N_{238}} = \frac{238}{235}\frac{e}{1-e}.$$

Na temelju navedenog, konstantu c_1 možemo definirati i pomoću obogaćenja e:

$$c_1 = \frac{239}{235}\frac{e}{1-e}(1-p)\varepsilon L_b \nu_{235}\sigma_{f235}\phi. \qquad \textbf{(8.8.13)}$$

Ponekad je zanimljivo poznavati vrijeme u kojem koncentracija plutonija uz dani neutronski tok postiže maksimalnu vrijednost. Rezultat, koji se dobiva određivanjem ekstrema funkcije (8.8.10), ima oblik

$$t_m = \frac{1}{a-b} ln\left[\frac{ac + d(a-b)}{bc}\right]. \qquad \textbf{(8.8.14)}$$

Primjer 8.8.3

Neki lakovodni reaktor koji ima 3% obogaćeni uran i karakteristike: p=0.9, ε=1.03, L_b=0.8, radi s konstantnim tokom termičkih neutrona $\phi=5*10^{13}$neutrona/cm^{2}s.

Potrebno je odrediti količinu plutonija po kilogramu ^{238}U u funkciji vremena, te njezinu maksimalnu i ravnotežnu vrijednost.

Rješenje

Konstante potrebne za proračun (tablica 2.13.1) jesu:

$\sigma_{a235}=680.8*10^{-24}$cm^2 $\sigma_{a239}=1011.3*10^{-24}$cm^2 $\sigma_{a238}=2.71*10^{-24}$cm^2

$\sigma_{f235}=582.2*10^{-24}$cm^2 $\sigma_{f239}=742*10^{-24}$cm^2.

Broj neutrona po fisiji iznosi: $\nu_{235}=2.42$, $\nu_{239}=2.96$.

Rezultat proračuna konstanti iz relacija (8.8.9), (8.8.12) i (8.8.13) je:

$a=4.15*10^{-8}$ $c_1=1.82*10^{-10}$

$b=3.4*10^{-8}$ $d_1=1.36*10^{-10}$.

Maseni odnos izotopa ^{239}Pu i ^{238}U, koji ćemo označiti sa ω, mijenja se s vremenom prema relaciji (8.8.10), u kojoj su konstante c i d zamijenjene sa c_1 i d_1. Uvrštenjem brojčanih veličina dobiva se:

$$\omega = 0.00328 - 0.0276e^{-4.15*10^{-8}t} + 0.0243e^{-3.4*10^{-8}t}.$$

Ovisnost masenog odnosa ω o vremenu t je:

t	10^5 s	10^6 s	10^7 s	10^8 s	10^9 s
ω	$1.18*10^{-5}$	$2.89*10^{-4}$	$2.35*10^{-3}$	$3.65*10^{-3}$	$3.28*10^{-3}$

Rezultat pokazuje da se ozračenjem goriva u trajanju od 10^8s (3.17god.) dobiva oko 3.65 grama fisibilnog plutonija po kilogramu urana (doprinos ^{241}Pu je zanemaren). Taj period odgovara vremenu ozračenja nuklearnog goriva u lakovodnim reaktorima.

Primjenom relacije (8.8.14) dobiva se vrijeme kod kojega težinski odnos dosiže svoj maksimum. Uvrštenjem brojčanih veličina izlazi $t_m = 4.35*10^7$s, i odgovarajuća vrijednost $\omega_{max} = 4.28*10^{-3}$.

Ravnotežni težinski odnos (tj. za $t\to\infty$), iznosi $3.28*10^{-3}$.

8.9 Reaktivnost po unošenju apsorbera u jezgru

Obustavljamo reaktor, stavljamo reaktora u pogon kao i regulaciju snage reaktora u toku pogona vršimo unošenjem ili vađenjem apsorbera iz reaktorske jezgre. Kao apsorberi javljaju se regulacijske odnosno zaustavne šipke i tekući apsorberi koji se, kod vodom moderiranih reaktora, miješaju s moderatorom.

Ako u kritičan reaktor unesemo neki apsorber neutrona dolazi do promjene reaktivnosti, koja izaziva odgovarajuću promjenu toka neutrona u jezgri. Pokazati će se da utjecaj apsorbera na reaktivnost ovisi ne samo o njegovom ukupnom udarnom presjeku za apsorpciju neutrona, nego i o njegovom položaju unutar jezgre.

Utjecaj unešenog apsorbera na reaktivnost može se kvantificirati pomoću tzv. teorije perturbacije. U ovom će se poglavlju ta teorija izložiti na veoma pojednostavljeni način primjenom jednogrupne aproksimacije.

Teorija perturbacije

Jednadžba bilanca neutrona u stacionarnom stanju se, u jednogrupnoj aproksimaciji, može prikazati relacijom

$$D\nabla^2\phi + (k_\infty - 1)\Sigma_a\phi = 0. \qquad \textbf{(8.9.1)}$$

Jednadžba (8.9.1) slijedi neposredno iz jednadžbe (7.6.6), koja se odnosi na bilancu termičkih neutrona u reaktora, ako u nju uvrstimo L_b=1 (postojanje brzih neutrona se zanemaruje).

Zamislimo sada da je u reaktor unešen mali poremećaj koji se sastoji u promjeni apsopcijskog udarnog presjeka sa Σ_a na $\Sigma_a' = \Sigma_a + \delta\Sigma_a$.

Unošenjem poremećaja u kritični reaktor remeti se stacionarno stanje, neutronski tok se mijenja na ϕ', a bilanca neutrona prestaje biti bilanca stacionarnog stanja. Ta se bilanca tada može prikazati relacijom

$$D\nabla^2\phi' + (k_\infty - 1)\Sigma_a'\phi' = \frac{1}{v}\frac{\partial\phi'}{\partial t}. \qquad \textbf{(8.9.2)}$$

U poglavlju 8.2. pokazano je da se neutronski tok nakon promjene reaktivnosti mijenja eksponencijalno. Suglasno tome, može se pisati

$$\phi' = \phi_0 e^{t/T},$$

gdje je T konstantan period promjene neutronskog toka.

Prema tome,

$$\frac{d\phi'}{dt} = \frac{1}{T}\phi_0 e^{t/T} = \frac{\phi'}{T}. \qquad \textbf{(8.9.3)}$$

Zbog pretpostavljenog malenog poremećaja reaktor će ostati blizu kritičnosti, te približno vrijedi: $\nabla^2\phi' \approx -B^2\phi'$.

Moguće je, nadalje, pisati, $D/\Sigma_a' \approx L^2$ (zanemarujemo promjenu difuzijske dužine neutrona zbog unešenog malog poremećaja).

Uz navedene pretpostavke kombinacijom jednadžbi (8.9.2) i (8.9.3) dobiva se

$$-DB^2\phi' + (k_\infty - 1)\Sigma_a'\phi' = \frac{\phi'}{vT}, \qquad \textbf{(8.9.4)}$$

odnosno

$$-\Sigma_a'\phi'\left(B^2L^2 + 1\right) + k_\infty\Sigma_a'\phi' = \frac{\phi'}{vT}. \qquad \textbf{(8.9.5)}$$

Kod jednogrupne aproksimacije vrijedi, $B^2L^2+1=k_\infty/k_{ef}$, što uvršteno u jednadžbu (8.9.5) daje

$$\Sigma_a'\phi' k_\infty\left(1 - \frac{1}{k_{ef}}\right) = \Sigma_a'\phi' k_\infty\rho = \frac{\phi'}{vT}. \qquad \textbf{(8.9.6)}$$

Gdje je ρ višak reaktivnosti definiran kao,

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}$$

Ako lijevu i desni stranu jednadžbe (8.9.6) pomnožimo s neutronskim tokom prije poremećaja ϕ i integriramo po volumenu reaktora dobivamo izraz

$$\int_V k_\infty\Sigma_a' v\rho\phi\phi' dV = \frac{1}{T}\int_V \phi\phi' dV. \qquad \textbf{(8.9.7)}$$

S druge strane, i jednadžbu (8.9.1) možemo modificirati uvođenjem zamjene $\nabla^2\phi=-B^2\phi$ i množiti s ϕ', iz čega rezultira

$$-DB^2\phi\phi' + (k_\infty - 1)\Sigma_a\phi\phi' = 0 . \qquad \textbf{(8.9.8)}$$

Množenjem jednadžbe (8.9.4) s tokom neutrona prije poremećaja ϕ proizlazi

$$-DB^2\phi\phi' + (k_\infty - 1)\Sigma_a'\phi\phi' = \frac{\phi\phi'}{vT} . \qquad \textbf{(8.9.9)}$$

Ako jednadžbu (8.9.8) oduzmemo od jednadžbe (8.9.9) i integriramo po volumenu dobivamo relaciju

$$\int_V v(k_\infty - 1)\delta\Sigma_a\phi\phi' dV = \frac{1}{T}\int_V \phi\phi' dV . \qquad \textbf{(8.9.10)}$$

Usporedbom relacija (8.9.7) i (8.9.10), te uvođenjem približenja $\phi\phi'\approx\phi^2$, proizlazi

$$\rho = \frac{\delta k_{ef}}{k_{ef}} = \frac{\int_V (k_\infty - 1)\delta\Sigma_a\phi^2 dV}{\int_V k_\infty\Sigma_a\phi^2 dV} . \qquad \textbf{(8.9.11)}$$

Relacija (8.9.11) pokazuje da je unošenjem apsorbera iznosa $\delta\Sigma_a$ u reaktor, s prostorno ovisnim tokom neutrona ϕ, došlo do promjene reaktivnosti $\Delta\rho$, koja je proporcionalna s integralom u brojniku izraza (8.9.11). Budući da multiplikacijski faktor k_∞ smatramo konstantnim (nismo mijenjali sastav materijala originalnog reaktora u koga smo uveli dodatni apsorber) možemo rezultat formulirati u obliku

$$\Delta\rho = c\int_V \delta\Sigma_a\phi^2 dV , \qquad \textbf{(8.9.12)}$$

gdje je c konstanta.

Predznak promjene reaktivnosti je suprotan od predznaka $\delta\Sigma_a$.

Utjecaj apsorbera na reaktivnost je dakle proporcionalan s njegovim udarnim apsorpcijskim presjekom i kvadratom intenziteta neutronskog toka!

Dobiveni rezultat je značajan za praktičnu primjenu, jer ukazuje da se reaktivnost može efikasno kontrolirati samo unošenjem apsorbera u zonu reaktora u kojoj je veliki neutronski tok.

Primjer 8.9.1

Potrebno je odrediti odnos utjecaja određene količine apsorbera na reaktivnost kuglastog reaktora, kada se cijela količina postavi u sredinu reaktora i kada se on jednoliko rasporedi po volumenu.

Rješenje

Ako se apsorber volumena V_a i udarnog presjeka za apsorpciju neutrona Σ_a postavi u sredinu reaktora gdje je tok neutrona ϕ_0, integral (8.9.12) je proporcionalan s $\Sigma_a V_a\phi_0^2$.

Kod ravnomjerne raspodjele iste količine apsorbera unutar reaktora volumena V_r, koncentracija apsorbera po jedinici volumena reaktora biti će $V_a\Sigma_a/V_r$.

Funkcija raspodjele neutronskog toka u kuglastom reaktoru je

$$\phi(r) = \phi_0 \frac{\sin\frac{\pi r}{R}}{\frac{\pi r}{R}}.$$

Element volumena dV definirati ćemo kao kuglastu ljusku debljine dr i polumjera r, tj. $dV=4r^2\pi dr$. Integral u izrazu (8.9.12) postaje

$$\int_{r=0}^{R} \frac{V_a \Sigma_a}{V_r} \left[\phi_0 \frac{\sin\frac{\pi r}{R}}{\frac{\pi r}{R}} \right]^2 4r^2 \pi dr .$$

S obzirom na to da je, $V_r=4R^3\pi/3$, rješenje integrala je

$$\frac{3}{2\pi^2}\phi_0^2 V_a \Sigma_a .$$

Ako sada usporedimo taj rezultat s rezultatom koji se dobiva uz pretpostavku da je ista količina apsorbera smještena u sredinu reaktora, dobivamo traženi odnos reaktivnosti. Taj odnos pokazuje da neka količina apsorbera smještena u sredinu kuglastog reaktora mijenja reaktivnost $2\pi^2/3=6.58$ puta više nego kada je jednoliko raspodijeljena po volumenu reaktora.

Utjecaj položaja regulacijskih šipki na njihovu efikasnost

Regulacijske šipke su apsorberi koji se namjerno unose u reaktor radi regulacije reaktivnosti. Uvlačenjem i izvlačenjem regulacijskih šipki iz jezgre moguće je smanjivati i povećavati reaktivnost, a time i tok neutrona i snagu reaktora. Regulacija snage nuklearnog reaktora se vrši upotrebom većeg broja regulacijskih šipki (kod većih reaktora najmanje nekoliko desetaka šipki). Efikasnost svake regulacijske šipke (koja se mjeri utjecajem te šipke na reaktivnost) ovisi o neutronskom toku u zoni pomaka šipke. Teorija perturbacije može se primijeniti na određivanje utjecaja položaja regulacijskih šipki na njihovu efikasnost.

Ako pretpostavimo regulacijsku šipku dužine H, presjeka F i makroskopskog udarnog presjeka Σ_a koja je u cijelosti uronjena u jezgru, njezina će efikasnost biti proporcionalna s integralom u izrazu (8.9.12). Presjek regulacijske šipke smatramo konstantnim, a njezin elementarni volumen definiran kao dV=Fdz. Koordinata z (koja se poklapa sa smjerom kretanja šipke, kod cilindričnog reaktora on je paralelan sa osi reaktora) se mijenja od 0 do H. Maksimalnu promjenu reaktivnosti zbog potpunog uranjanja regulacijske šipke možemo odrediti integralom

$$\rho_{\max} = c\int_0^H \Sigma_a \phi^2 dz . \qquad \textbf{(8.9.13)}$$

gdje je c neka konstanta.

Ako je šipka uronjena samo do dubine z, očigledno vrijedi

$$\rho = c\int_0^z \Sigma_a \phi^2 dz . \qquad \textbf{(8.9.14)}$$

Aksijalna raspodjela neutronskog toka u cilindričnom nereflektiranom reaktoru, ako početak koordinatnog sustava smjestimo na dno reaktora, određena je relacijom

$$\phi = \phi_0 \sin\frac{\pi z}{H} \qquad \textbf{(8.9.15)}$$

Uvrštenjem izraza (8.9.15) u relacije (8.9.13) i (8.9.14) i integriranjem, proizlazi

$$\rho_{\max} = c\frac{\Sigma_a \phi_0^2 H}{2} \text{ i}$$

$$\rho = c\phi_0^2\Sigma_a\left(\frac{z}{2} - \frac{H}{4\pi}\sin\frac{2\pi z}{H}\right).$$

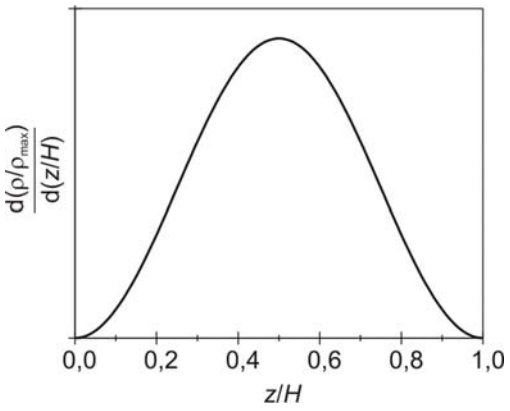
Dijeljenjem dobivenih izraza slijedi,

$$\frac{\rho}{\rho_{\max}} = \frac{z}{H} - \frac{\sin\frac{2\pi z}{H}}{2\pi}. \qquad \textbf{(8.9.16)}$$

Veoma se upotrebljiv izraz dobiva diferenciranjem jednadžbe (8.9.16) po frakcijskom pomaku šipke

$$\frac{d\left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)}{d\left(\frac{z}{H}\right)} = 1 - cos\frac{2\pi z}{H}. \qquad \textbf{(8.9.17)}$$

Jednadžba (8.9.17), koja daje promjenu reaktivnosti reaktora pri diferencijalnom pomaku regulacijske šipke određuje funkciju ilustriranu slikom 8.9.1.



Slika 8.9.1 Efikasnost regulacijske šipke

Efikasnost šipke za regulaciji reaktivnosti je najveća kada se vrh šipke nalazi u sredini jezgre, a najmanja kada se on nalazi na gornjem ili donjem kraju jezgre reaktora.

Primjer 8.9.2

Potrebno je odrediti odnos promjena reaktivnosti koju uzrokuje jedinični pomak regulacijske šipke čiji se vrh jednom nalazi na 20% visine jezgre, a drugi put u centru jezgre.

Rješenje

Uvrštenjem u jednadžbu (8.9.17) z/H=0.2 i z/H=0.5, izlazi

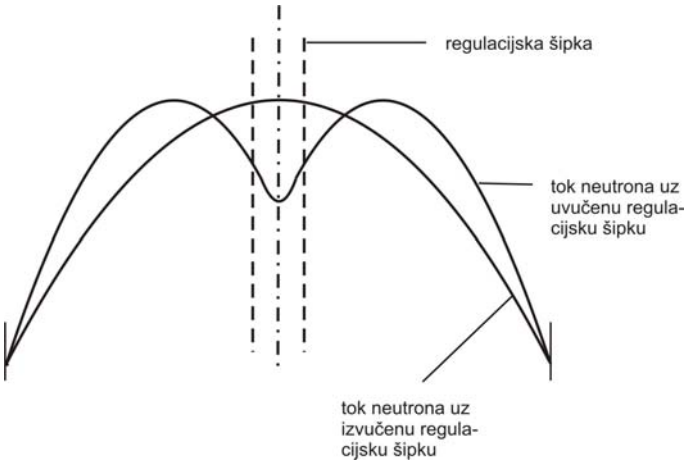
$$\frac{\Delta\rho_{0.2}}{\Delta\rho_{0.5}} = 0.345 .$$

Pomak regulacijske šipke čiji se vrh nalazi na 20% visine jezgre izaziva promjenu reaktivnosti 34.5% u odnosu na onu koju bi isti takav pomak izazvao da se vrh šipke nalazi u sredini jezgre.

Promjena reaktivnosti nakon uranjanja regulacijske šipke u reaktor

U dosadašnjim razmatranjima analizirali smo samo utjecaj položaja regulacijske šipke na reaktivnost, bez pokušaja da se ta reaktivnost kvantificira. Proračuni ove vrste su kompliciranji, jer je promjena reaktivnosti izazvana regulacijskom šipkom ovisna ne samo o dimenzijama i materijalu regulacijske šipke nego i od veličine neutronskog toka u jezgri kroz koji prolazi šipka. S druge strane, neutronski tok nije ovisan samo položaju dotične regulacijske šipke, nego i o položaju ostalih šipki koje je "zaklanjaju" (odnosno smanjuju tok neutrona u njezinoj blizini). Upotrebljiv proračun utjecaja regulacijskih šipki na reaktivnost reaktora može se, iz navedenih razloga izvesti jedino numeričkim metodama pomoću elektroničkih računala.

Ovdje će se, radi ilustracije analitičkog pristupa, izložiti jednostavan jednogrupni proračun efikasnosti jedne regulacijske šipke smještene u osi cilindričnog reaktora. Takav smještaj regulacijske šipke, zbog osne simetrije, dozvoljava da se analiza izvede jednodimenzionalno. Tok neutrona u reaktoru prije i nakon uranjanja regulacijske šipke prikazan je na slici 8.9.2.



Slika 8.9.2 Tok neutrona u reaktoru s centralno smještenom regulacijskom šipkom

Jednogrupni postupak podrazumijeva se da se promatranje utjecaja regulacijske šipke ograničava samo termičke neutrone.

Smatrati ćemo, nadalje, da je regulacijska šipka potpuno uronjena u reaktor, čime se njezin utjecaj svodi samo na radijalnu komponentu neutronskog toka.

Radijalna pak raspodjela neutronskog toka u cilindričnom reaktoru određena je rješenjem Besselove diferencijalne jednadžbe (vidi poglavlje 7.8):

$$\theta(r) = AJ_0(ar) + CY_0(ar) . \qquad \textbf{(8.9.18)}$$

Zbog centralno smještene regulacijske šipke maksimum radijalne komponente neutronskog toka nije u osi jezgre kao što je to slučaj kod raspodjele neutronskog toka u cilindričnom reaktoru koja je razmatrana u poglavlju 7.8. To je razlog što se ovdje dio rješenja, koji sadrži Besselovu funkciju Y_0, ne smije izostaviti.

Rubni uvjet koji možemo primijeniti na jednadžbu (8.9.18) odnosi se na isčezavanje neutronskog toka na ekstrapoliranom polumjeru jezgre R, dakle

$\theta(R) = AJ_0(aR) + CY_0(aR) = 0$, ili

$$C = -A\frac{J_0(aR)}{Y_0(aR)}.$$

Dobiveni odnos integracijskih konstanti dozvoljava da se jednadžba (8.9.18) napiše u obliku

$$\theta(r) = A\left[J_0(ar) - \frac{J_0(aR)}{Y_0(aR)}Y_0(ar)\right]. \qquad \textbf{(8.9.19)}$$

Izraz u zagradi možemo pojednostaviti slijedećim razmatranjem.

Ako u veliki reaktor uronimo regulacijsku šipku malog polumjera R_0, neće doći do znatne promjene faktora zakrivljenja u raspodjeli radijalne komponente neutronskog toka. Dozvoljeno je stoga pretpostaviti da će se nakon ulaska šipke u reaktor faktor zakrivljenja mijenja s neke vrijednosti a_0 na malo različitu vrijednost $a=a_0+\Delta a$. Uz taj uvjet možemo pisati

$$J_0(aR) = J_0[(a_0 + \Delta a)R] \approx J_0(a_0R) + \frac{dJ_0(a_0R)}{d(a_0R)}\Delta(aR). \qquad \textbf{(8.9.20)}$$

Pri daljoj analizi dobivenog izraza treba uzeti u obzir da je

$$\frac{dJ_0(a_0R)}{d(a_0R)} = -J_1(a_0R).$$

Budući da je R ekstrapolirani polumjer jezgre reaktora, mora biti $J_0(a_0R)=0$, odnosno $a_0R=2.405$. Besselova funkcija $J_1(2.405)=0.519$.

Funkcija $Y_0(aR)$ se u okolišu nul-točke funkcije $J_0(a_0R)$, odnosno u okolišu $a_0R=2.405$, sporo mijenja (vidi sliku 7.8.1). Znači da se za malene promjene Δa ona može smatrati konstantnom. Dakle,

$Y_0(aR) \approx Y_0(a_0R) = Y_0(2.405) = 0.510$.

U uvodu smo napomenuli da razmatramo slučaj potpuno uvučene regulacijske šipku malene debljine u osi reaktora. U blizini regulacijske šipke je, zbog njezina malog polumjera, produkt ar malen, pa se mogu primijeniti aproksimacije Besselovih funkcija za malene vrijednosti argumenta:

$$J_0(ar) \approx 1$$

$$Y_0(ar) \approx -\frac{2}{\pi}\left(0.116 + \ln\frac{1}{ar}\right).$$

Budući da nas zanima utjecaj regulacijske šipke na reaktivnost ($\rho \approx \Delta k_{ef}$), u račun moramo unijeti i taj faktor.

Faktor multiplikacije k_∞ definirati ćemo, radi jednostavnosti, prema modificiranoj jednogrupnoj teoriji (vidi jednadžbu 7.6.12):

$$k_\infty = 1 + B^2M^2 = 1 + (a^2 + b^2)M^2. \qquad \textbf{(8.9.21)}$$

Faktor zakrivljenja neutronskog toka $B^2 = a^2 + b^2$ (jednadžba 7.8.5)

U skladu s prije navedenim, potpunim se uranjanjem regulacijske šipke ne mijenja aksijalni faktor zakrivljenja neutronskog toka b^2. Promjena k_∞, a time i k_{ef} zbog uranjanja šipke biti će dakle vezana jedino uz promjenu radijalnog faktora zakrivljenja, a za mali prirast Δa.

$$\Delta k_\infty \approx \Delta k_{ef} \approx \rho = \left(a^2 - a_0^2\right)M^2 = \left[\left(a_0 + \Delta a\right)^2 - a_0^2\right]M^2 \approx 2M^2 a_0 \Delta a \text{ i dalje}$$

$$\frac{\rho}{M^2 a_0^2} = \frac{R^2 \rho}{2.405^2 M^2} = \frac{2\Delta a}{a_0}.$$

Uvrštenjem dobivenih izraza u relaciju (8.9.19) slijedi,

$$\theta(r) = A\left[1 - \frac{2{,}45\rho}{\pi M^2 a_0^2}\left(0{,}116 + ln\frac{1}{(a_0 + \Delta a)r}\right)\right] \qquad \textbf{(8.9.22)}$$

U nazivniku posljednjeg člana može se bez veće greške Δa zanemariti u odnosu na a_0.

Jednadžbom (8.9.22) je određena radijalna komponenta toka termičkih neutrona u okolini regulacijske šipke malenog promjera u funkciji udaljenosti od osi r. Tok neutrona smanjuje se što se više približavamo površini regulacijske šipke. Suglasno tome, možemo, slično kao kod određivanja kritičnih dimenzija reaktora (poglavlje 7.8) definirati neki ekstrapolirani polumjer r' u unutrašnjosti regulacijske šipke, kod kojega bi neutronski tok, kada bi se smanjivao sa istim gradijentom kao na površini šipke, pao na nulu. Kod ove analize smatramo da je regulacijske šipka "crna" za termičke neutrone, tj., da se neutroni koji uđu u šipku više ne vraćaju u moderator. Teorija difuzije neutrona primijenjena u zoni djelovanja regulacijske šipke daje veoma nepouzdane rezultate i zbog toga dobivene rezultate treba uzeti sa rezervom.

Na temelju provedene diskusije možemo pisati

$$\theta(r)_{r=r'} = 0. \qquad \textbf{(8.9.23)}$$

Budući da je integracijska konstanta A (koja ovisi o razini snage reaktora) kod reaktora u pogonu veća od nule, jednadžba (8.9.23) može biti zadovoljena jedino uz uvjet da je izraz u zagradi relacije (8.9.22) za r=r' jednak nuli. Na osnovi takvog zaključka i uz postavku a=2.405/R, nakon sređivanja dobivamo

$$\rho = \frac{7.4M^2}{R^2}\left[0.116 + ln\left(\frac{R}{2.405r'}\right)\right]^{-1}. \qquad \textbf{(8.9.24))}$$

Razlika između polumjera regulacijske šipke r_0 i ekstrapoliranog polumjera r' je ekstrapolirana dužina d.

Ekstrapolirana dužina ovisna je o polumjeru regulacijske šipke i o slobodnom putu transporta termičkih neutrona u jezgri λ_t.

Transportna dužina definirana je jednadžbama (6.2.3) i (6.2.4) kao

$$\lambda_t = \frac{1}{\Sigma_s\left(1 - \frac{2}{3A}\right)}.$$

Ovisnost ekstrapolirane dužine d o dužini transporta neutrona λ_t i o polumjeru regulacijske šipke r_0 prikazana je u tablici 8.9.1.

Tablica 8.9.1 Ekstrapolirana dužina u regulacijske šipke

r_0/λ_t	0	1	2	3	4	5	∞
d/λ_t	1.34	0.925	0.839	0.792	0.772	0.760	0.710

Primjer 8.9.3

Za neki heterogeni vodom hlađeni reaktor poznati su slijedeći podaci:

$R=150cm$, $M^2=31cm^2$, $\lambda_t=1.8cm$.

Kolika se promjena reaktivnosti može izazvati uranjanjem "crne" regulacijske šipke polumjera $r_0=5cm$ u os tog reaktora?

Rješenje:

$r_0/\lambda_t=2.78$. Odgovarajuća vrijednost d/λ_t dobiva se interpolacijom iz tablice 8.9.1. i iznosi 0.802. Ekstrapolirana dužina $d=1.44cm$, a ekstrapolirani polumjer $r'=r_0-d=3.56cm$.

Uvrštenjem numeričkih vrijednosti u relaciju (8.9.24) dobiva se

$\rho=3.42*10^{-3}=0.342\%=342pcm$.

8.10 Stabilnost reaktora i njegove prijenosne funkcije

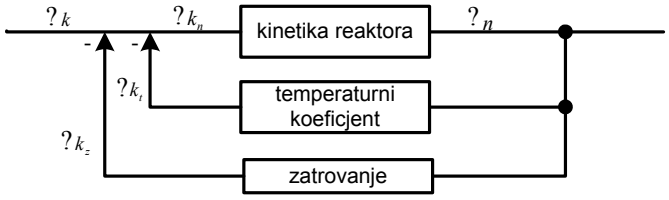
Stabilnost reaktora karakterizira odziv generirane snage na poremećaje koje dovode do promjene reaktivnosti (promjene temperature, pomak regulacijskih šipki, zatrovanje...). Reaktor je nedvosmisleno nestabilan ako neki vanjski poremećaj može dovesti do nekontroliranog porasta neutronskog toka, a time i generirane snage. S druge strane reaktor možemo u principu smatrati stabilnim ako na poremećaj reaktivnosti reagira prijelazom iz jednog stacionarnog stanja u drugo. Međutim, za ocjenu stabilnosti reaktora sam prijelaz iz jednog u drugo stacionarno stanje nakon poremećaja nužan je ali ne i dovoljan uvjet. Od bitne važnosti za takvu ocjenu je i način prijelaza između dva stacionarna stanja. Ako je taj prijelaz popraćen s velikim oscilacijama generirane snage može, bez obzira što prijelazna pojava rezultira prihvatljivim stacionarnim stanjem, doći prije dosizanja tog stanja do oštećenja jezgre reaktora. Zbog toga se i takav reaktor smatra nestabilnim.

Nuklearni reaktori u većini slučajeva, zahvaljujući negativnom temperaturnom koeficijentu reaktivnosti, posjeduju svojstvo samoregulacije. To se svojstvo ogleda u pojavi da narinuti poremećaj reaktivnosti generira unutrašnju negativnu povratnu vezu (tj. reaktivnost suprotnog predznaka od narinutog poremećaja) koja kompenzira unesenu reaktivnost i dovodi reaktor u novo stacionarno stanje. Ovdje ne uzimamo u obzir rad regulacijskog sustava.

Samo postojanje negativne povratne veze nije još i dovoljna garancija za efikasno djelovanje samoregulacije reaktora. Veoma je važna i vremenska konstanta njezinog djelovanja. Ako je, primjerice, vrijeme aktiviranja negativne povratne veze suviše dugo (to može primjerice biti slučaj kada ona nastaje zbog zatrovanja reaktora s ksenonom) reaktor i pored postojanja negativne povratne veze može reagirati nestabilno.

Očigledno je da postojanje pozitivne povratne veze dovodi u svim slučajevima do nestabilnosti. U poglavlju 8.6 pokazano je da se kod reaktora može pojaviti pozitivni temperaturni koeficijent moderatora (a time i pozitivna unutarnja povratna veza). S druge strane, povratna veza koju u reaktor unosi temperatura nuklearnog goriva, je u većinom negativna.

Analiza uvjeta stabilnosti i dinamičkih karakteristika nuklearnog reaktora kao objekta reguliranja, najčešće se svodi na proučavanje odziva neutronskog toka (odnosno generirane snage) na narinutu promjenu reaktivnosti, uzimajući u obzir djelovanje svih unutarnjih povratnih veza. Slika 8.10.1. shematski pokazuje unutarnje povratne veze reaktora.



Slika 8.10.1 Unutrašnje povratne veze reaktivnosti zbog temperature i zatrovanja

Vezu rezultantne reaktivnosti δk_n možemo povezati sa narinutom reaktivnošću δk relacijom

$$\delta k_n = \delta k - \delta k_t - \delta k_z, \qquad \textbf{(8.10.1)}$$

gdje su δk_t i δk_z negativne povratne veze zbog temperature i zatrovanja.

Prijelazne funkcije neutronske kinetike

Prijelazne funkcije daju mogućnost kvantitativne analize dinamičkog ponašanja reaktora. Te se funkcije redovito primjenjuju u teoriji automatske regulacije reaktora i nuklearnih elektrana. Po definiciji, prijelazne funkcije određuju odnos Laplaceove transformacije vremenskih funkcija odziva i poremećaja (u razmatranom slučaju to će biti vremenske funkcije neutronskog toka i unesene reaktivnosti).

Radi jednostavnosti napisati ćemo jednadžbe neutronske kinetike (relacije 8.2.7. i 8.2.9.) za jednu grupu zakašnjelih neutrona i pri tome uzeti u obzir da je $k_{ef} \approx 1$:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{l_p} n + \lambda C \qquad \textbf{(8.10.2)}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{l_p} n - \lambda C. \qquad \textbf{(8.10.3)}$$

Zbrajanjem jednadžbi (8.10.2) i (8.10.3), te zamjenom $\rho \approx k_{ef}-1=\delta k$ proizlazi

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\delta k}{l_p} n - \frac{dC}{dt}. \qquad \textbf{(8.10.4)}$$

Pretpostaviti ćemo da je reaktor prije unošenja poremećaja radio u stacionarnom stanju, s gustoćom neutrona n_0 i koncentracijom fisijskih proizvoda C_0. U taj reaktor unešena je malena promjena reaktivnosti, uslijed čega se vrijednostima u stacionarnom stanju superponiraju male promjene δn i δC.

Može se dakle pisati $n=n_0+\delta n$ i $C=C_0+\delta C$.

Uvrštavanjem u relaciju (8.10.4), izlazi

$$\frac{d(\delta n)}{dt} = \frac{\delta k n_0}{l_p} + \frac{\delta k}{l_p} \delta n - \frac{d(\delta C)}{dt}. \qquad \textbf{(8.10.5)}$$

Pretpostavka o malenom poremećaju dozvoljava da se (nelinearni) član na desnoj strani jednadžbe (8.10.5), koji sadrži produkt δkδn, može zanemariti.

Isti postupak primijenjen na relaciju (8.10.3), dovodi do jednadžbe

$$\frac{d(\delta C)}{dt} = \frac{\beta}{l_p}(n_0 + \delta n) - \lambda(C_0 + \delta C). \qquad \textbf{(8.10.6)}$$

Članovi gornje relacije koji sadrže parametre stacionarnog stanja n_0 i C_0 otpadaju jer iz relacije (8.10.3) proizlazi da u stacionarnom stanju mora biti

$$\frac{\beta n_0}{l_p} = \lambda C_0 .$$

Uz navedene primjedbe iz relacija (8.10.5) i (8.10.6) dobiva se

$$\frac{d(\delta n)}{dt} = \frac{\delta k}{l_p} n_0 - \frac{d(\delta C)}{dt} \qquad \textbf{(8.10.7)}$$

$$\frac{d(\delta C)}{dt} = \frac{\beta}{l_p}\delta n - \lambda \delta C . \qquad \textbf{(8.10.8)}$$

Primjena Laplaceove transformacije na sve članove jednadžbi (8.10.7) i (8.10.8), uz nulte početne uvjete (promjene δn i δC po definiciji su jednake nuli u vremenu t=0), daje:

$$s\delta n(s) = \frac{n_0}{l_p}\delta k(s) - s\delta C(s) \qquad \textbf{(8.10.9)}$$

$$s\delta C(s) = \frac{\beta}{l_p}\delta n(s) - \lambda \delta C(s) \qquad \textbf{(8.10.10)}$$

Eliminacijom C(s) iz jednadžbi (8.10.9) i (8.9.10) dobivamo prijelaznu funkciju reaktorske kinetike, kojom je određen odziv gustoće termičkih neutrona na narinute promjene reaktivnosti:

$$\frac{\delta n(s)}{\delta k(s)} = \frac{n_0}{s l_p + \dfrac{s\beta}{s+\lambda}} . \qquad \textbf{(8.10.11)}$$

Ako se računa sa šest grupa zakašnjelih neutrona, prijenosna funkcija (8.10.11) poprima oblik

$$\frac{\delta n(s)}{\delta k(s)} = \frac{n_0}{s l_p + \sum_{i=1}^{6} \dfrac{s\beta_i}{s+\lambda_i}} . \qquad \textbf{(8.10.12)}$$

Prijenosnom funkcijom određena je ovisnost neutronskog toka (odnosno generirane snage) o promjeni reaktivnosti u Laplaceovom području. Ovisnost tih parametara u vremenskoj domeni mogla bi se odrediti inverznom Laplaceovom transformacijom. Međutim, inverzna Laplaceova transformacija kompliciranijih funkcija teško se provodi i zbog toga izbjegava.

S druge strane, prijelazne funkcije mogu se jednostavnije analizirati korištenjem njihove frekventne karakteristike. Frekventna karakteristika određuje odziv nekog sustava na sinusoidalnu pobudu, unutar određenog spektra frekvencija. Odziv ima istu frekvenciju kao i pobuda, ali amplituda odziva i fazni pomak ovise o fizikalnim karakteristikama analiziranog sustava.

Poznato je da se frekventna karakteristika dobiva iz prijelazne funkcije postavkom $s = j\omega \left(j = \sqrt{-1}\right)$, gdje je ω kružna frekvencija pobude i odziva. Time relacija (8.10.12) prelazi u

$$\frac{\delta n(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{n_0}{j\omega l_p + \sum_{i=1}^{6} \frac{j\omega\beta_i}{j\omega + \lambda_i}}. \qquad \textbf{(8.10.13)}$$

Frekventna karakteristika je kompleksna funkcija frekvencije ω, te se može definirati amplitudom A(ω) i faznim pomakom φ(ω) kao

$$A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}. \qquad \textbf{(8.10.14)}$$

Funkciju (8.10.13) analizirati ćemo za dva asimptotska slučaja:

1. Vrlo malene vrijednosti ω.

Ako je ω mnogo manji od bilo koje vrijednosti λ_i, te ako uzmemo u obzir da će kod malenih vrijednosti ω faktor ωl_p biti zanemariv, frekventna se karakteristika svodi na izraz

$$\frac{\delta n(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{n_0}{j\omega \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i}}. \qquad \textbf{(8.10.15)}$$

Amplituda frekventne karakteristike, za vrlo malene vrijednosti ω, postaje obrnuto proporcionalna s ω, neovisna o l_p. Fazni kut pomaka odziva i pobudnog signala približava se -90^0. Kod smanjivanja frekvencije odziv neograničeno raste. To je razumljivo jer se u tom slučaju radi o porastu gustoće, odnosno toka neutrona, kod dodavanja reaktoru konstantne pozitivne reaktivnosti.

2. Za vrlo velike vrijednosti frekvencije ω

U slučaju vrlo velikih vrijednosti ω, λ_i postaje zanemariv u odnosu na ω, pa se relacija (8.10.13) svodi na izraz:

$$\frac{\delta n(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{n_0}{\beta\left[\frac{j\omega l_p}{\beta} + 1\right]}, \text{ jer je } \sum_{i=1}^{6} \beta_i = \beta. \qquad \textbf{(8.10.16)}$$

Relacija ukazuje da kod velikih ω amplituda frekventne karakteristike teži nuli, a fazni kut prema -90^0. Produkt ωl_p indicira da će u tom slučaju i amplituda i fazni kut biti izrazito ovisni o vremenu promptnih neutrona l_p.

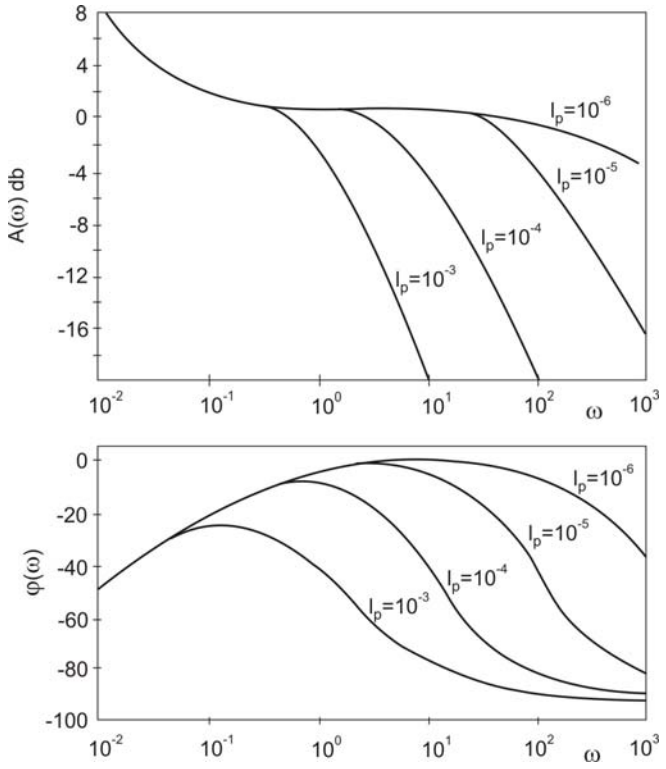
Kod lakovodnih reaktora sa gorivom iz ^{235}U, faktor l_p/β iznosi oko $1.4*10^{-3}$s. Iz te vrijednosti proizlazi da je kod tih reaktora amplituda frekventne karakteristike u intervalu $10<\omega<100$ približno konstantna, tj. ne ovisi o ω. Naime, u tom području frekvencija ω je mnogo veća od λ_i, a faktor

$\omega l_p/\beta$ mnogo manji od 1, pa na temelju relacija (8.10.13) i (8.10.16) slijedi da će amplituda frekventne karakteristike biti približno n_0/β, a fazni kut blizu nule.

Uobičajeno je tok frekventne karakteristike prikazati Bodeovim dijagramom, pri čemu se amplituda frekventne karakteristike mjeri u decibelima (što je preuzeto iz automatske regulacije, gdje se ta jedinica koristi kao mjera za pojačanje) s definicijom

$$A(\omega)\,[db] = 20\log|A(\omega)|.$$

Amplituda i fazni kut frekventne karakteristike neutronske kinetike, definirane jednadžbom (8.10.13), za četiri vrijednosti l_p su prikazani na slici 8.10.2. Vrijednosti amplituda prikazane na slici su normalizirane na $A(\omega)=0$ db kod $\omega=1$.



Slika 8.10.2 Amplituda i fazni pomak frekventne karakteristike neutronske kinetike za razne dobi promtnih neutrona

Na slici se mogu uočiti činjenice koje su bile predmet gore danih komentara.

Reaktor sa frekventnom karakteristikom prema slici 8.10.2. ne bi posjedovao stabilnost, jer bi mu odziv na poremećaje kod malenih frekvencija neograničeno rastao. Razlog leži u pomanjkanju unutrašnje negativne temperaturne povratne veze, koja karakterizira dinamičko ponašanje najvećeg broja energetskih reaktora.

Unutrašnje povratne veze zbog djelovanja temperaturnih koeficijenata reaktivnosti

Dinamičke karakteristike temperaturnih povratnih veza su, naravno, vezane uz promjene temperatura u toku prijelaznih pojava.

Da bismo uočili utjecaj temperaturnih promjena na prelazne funkcije reaktora razmotriti ćemo najjednostavniji oblik jednadžbi nestacionarnog prijelaza topline u reaktoru. Te jednadžbe, koje su u osnovi toplinske bilance nuklearnog goriva i rashladnog fluida, možemo prikazati na slijedeći način:

$$V_g C_g \rho_g \frac{dT_g}{dt} = qV_g - F_g \alpha (T_g - T_m) \qquad \textbf{(8.10.17)}$$

$$V_m C_m \rho_m \frac{dT_m}{dt} = F_g \alpha (T_g - T_m) - V_m q_{odv} . \qquad \textbf{(8.10.18)}$$

U jednadžbama (8.10.17) i (8.10.18) upotrijebljene su oznake:

T -temperatura

c -specifična toplina

ρ -gustoća

V -volumen

t -vrijeme

F -površina

α -koeficijent prijelaza topline s goriva na moderator

q -generirana toplina po jedinici volumena goriva

q_{odv} -odvedena toplina po jedinici volumena moderatora

Indeks "g" označuje nuklearno gorivo, a indeks "m" moderator odnosno rashladno sredstvo.

Razmatrane jednadžbe ne opisuju prostornu ovisnost temperatura goriva i moderatora (odnose se dakle na "točkasti model"), pa mogu služiti samo za prvu aproksimaciju temperaturnih odnosa u reaktoru. Temperature iskazane u tim jednadžbama treba smatrati srednjim vrijednostima temperatura u materijalima.

Posebno jednostavan slučaj za analizu je onaj kod kojega se temperatura moderatora (odnosno rashladnog sredstva) može pretpostaviti konstantnom. Pretpostavka se može usvojiti kod brzih prijelaznih pojava jer su, općenito, temperaturne promjene u moderatoru mnogo sporije nego u nuklearnom gorivu. Ako se, nadalje, razmatraju malena odstupanja temperatura goriva od onih u stacionarnom stanju (definirano sa stanjem u vremenu t=0), možemo pisati, $T_g=T_{g0}+\theta_0$ i $q=q_0+\delta q$, gdje se T_{g0} i q_0 odnose na vrijednosti u stacionarnom stanju. Uvrštenjem u relaciju (8.10.17) izlazi

$$V_g c_g \rho_g \frac{d\theta_g}{dt} = (q_0 + \delta q)V_g - F_g \alpha (T_{g0} + \theta_g - T_{m0}).$$

Članovi jednadžbe koji se odnose na stacionarno stanje otpadaju, jer mora biti ispunjeno

$$q_0 V_g = F_g \alpha (T_{g0} - T_{m0}).$$

Preostaje dakle relacija,

$$V_g c_g \rho_g \frac{d\theta_g}{dt} = \delta q V_g - F_g \alpha \theta_g . \qquad \textbf{(8.10.19)}$$

Primijenimo li na dobivenu relaciju Laplaceovu transformaciju uz nulte početne uvjete (iz ranijeg, naime, razmatranja proizlazi da su u nultom vremenu varijable θ_g i δq jednake nuli), izlazi

$$s \frac{V_g c_g \rho_g}{\alpha F_g} \theta_g(s) + \theta_g(s) = \delta q(s) \frac{V_g}{\alpha F_g} . \qquad \textbf{(8.10.20)}$$

Za grupe parametara koji se pojavljuju u gornjoj jednadžbi uvesti ćemo slijedeće zamjene:

$$\tau_g = \frac{V_g c_g \rho_g}{\alpha F_g}, \qquad K_1 = \frac{V_g}{\alpha F_g}.$$

Konstanta τ_g je vremenska konstanta nuklearnog goriva. Ta je konstanta ovisna o odnosu toplinskog kapaciteta i intenziteta odvoda topline iz gorive šipke. Kod lakovodnih reaktora vrijednost te konstante obično je 0.15÷0.2s.

Uz tako definirane konstante dobivamo prijelaznu funkciju, koja određuje odziv temperature goriva na promjenu generirane snage, u obliku

$$\frac{\theta_g(s)}{\delta q(s)} = \frac{K_1}{s\tau_g + 1}.$$

Odgovarajuća će frekventna karakteristika biti

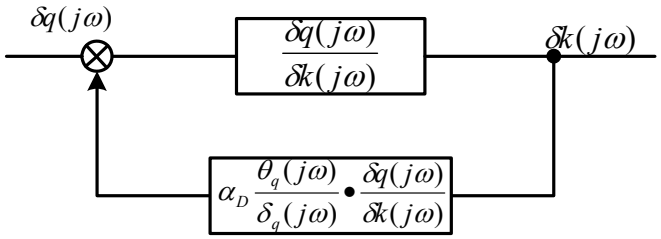
$$\frac{\theta_g(j\omega)}{\delta q(j\omega)} = \frac{K_1}{j\omega\tau_g + 1}. \qquad \textbf{(8.10.21)}$$

Umnožak temperaturnog koeficijenta reaktivnosti goriva (Dopplerov koeficijent) sa frekventnim karakteristikama (8.10.13) i (8.10.21) određuje temperaturnu povratnu vezu nuklearnog goriva u frekventnoj domeni.

Na osnovi navedenog možemo napisati rezultantnu frekventnu karakteristiku kao

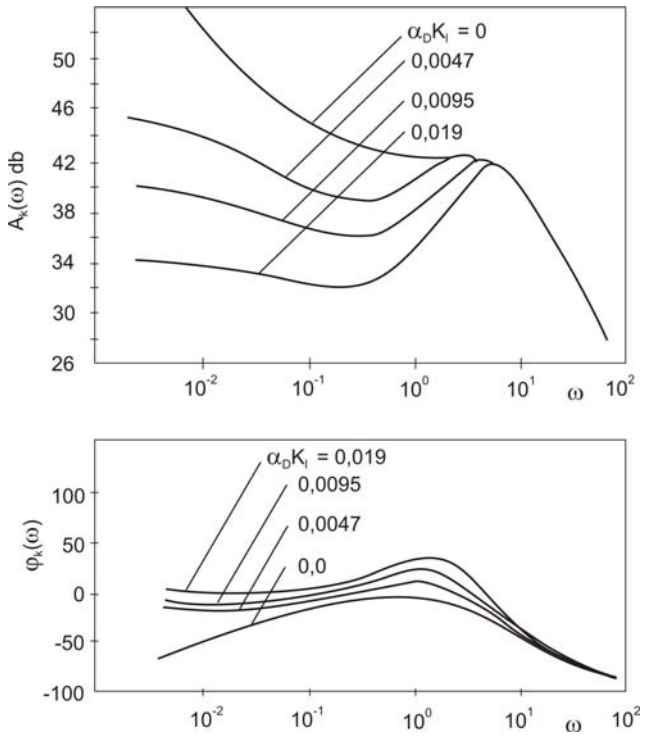
$$\left[\frac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}\right] = \frac{\dfrac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}}{1 + \alpha_D \dfrac{\theta_g(j\omega)}{\delta q(j\omega)} \dfrac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}} = \frac{\dfrac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}}{1 + \dfrac{\alpha_D K_1}{1 + j\omega\tau_g} \dfrac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}}. \qquad \textbf{(8.10.22)}$$

Blok shema frekventne karakteristike reaktora sa temperaturnom povratnom vezom prikazana je slikom 8.10.3.



Slika 8.10.3 Frekventna karakteristika s temperaturnom povratnom vezom

Ovisnost amplitude i faznog kuta frekventne karakteristike definirane relacijom (8.10.22), za τ_g=0.159s, l_p=10^{-4}s i nekoliko vrijednosti $\alpha_D K_1$ ilustrirana je slikom 8.10.4. Jedna od krivulja na slici odnosi se na frekventnu karakteristiku bez temperaturne povratne veze ($\alpha_D K_1$=0), a tri ostale krivulje na temperaturnu povratnu vezu raznih intenziteta. Veličine prikazane krivuljama imaju samo relativni značaj, a ilustriraju posljedice na postepenog povećanja intenziteta temperaturne povratne veze, koju karakteriziraju vrijednosti: $\alpha_D K_1$=0.0047, 0.0095 i 0.019.



Slika 8.10.4 Amplituda i fazni kut frekventne karakteristike s temperaturnom povratnom vezom

Slika 8.10.4. može poslužiti kao osnova za diskusiju o utjecaju temperaturne povratne veze na frekventnu karakteristiku. Neki od bitnijih zaključaka te diskusije su:

1. Amplituda frekventne karakteristike kod većih vrijednosti ω (u danom slučaju za ω>10) ne ovisi o temperaturnoj povratnoj vezi, ali je kod niskih frekvencija taj utjecaj veoma bitan.

2. Amplituda kod nižih frekvencija ne raste neograničeno, već se, kada ω teži nuli, približava graničnom iznosu $1/(\alpha_D K_1)$. (Naime, kada ω teži k nuli, drugi član u nazivniku relacije (8.10.22) postaje mnogo veći od jedinice, pa kraćenjem s brojnikom neposredno slijedi dani rezultat.)

3. Fazni kut kod malenih frekvencija teži nuli (jer prevladava realna komponenta frekventne karakteristike), a kod većih je isti kao da nema temperaturne povratne veze (slika 8.10.2).

Bitno je uočiti stabilizirajuće djelovanje temperaturne povratne veze koja ograničava odziv neutronske snage kod nižih frekvencija.

Primjer 8.10.1

U nekom vodom hlađenom reaktoru s uranom kao nuklearnim gorivom došlo je do kolebanja reaktivnosti s frekvencijom ω≈1. Potrebno je ocijeniti koliko temperaturna povratna veza, zbog promjene temperature nuklearnog goriva, utječe na odziv neutronskog toka na taj poremećaj.

Za reaktor su poznati slijedeći podaci:

Vrijeme trajanja kružnog procesa promptnih neutrona $l_p=10^{-4}$s.

Polumjer gorivne šipke r_g=5mm.

Koeficijent prijelaza topline sa nuklearnog goriva na rashladni fluid $\alpha=10^4$ W/m^{2}K.

Vremenska konstanta goriva τ_g=0.145s.

Temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva (Dopplerov koeficijent)

$\alpha_D=-2*10^{-4}$/K.

Prosječni tok termičkih neutrona čija je srednja brzina v=2500m/s, iznosi 10^{17}neutrona/m^2s.

Rješenje:

Radi jednostavnosti, ocjenu ćemo temeljiti na frekventnoj karakteristici neutronske kinetike s jednom grupom zakašnjelih neutrona (jednadžba 8.10.11), koja ima oblik:

$$\frac{\delta n(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{n_0}{j\omega l_p + \frac{j\omega\beta}{j\omega+\lambda}}.$$

Podaci za jednu grupu zakašnjelih neutrona za ^{235}U, prema tablici 4.5.1. i razmatranju u poglavlju 8.3, jesu: $\lambda=0.077s^{-1}$, $\beta=0.065$.

Iz navedenih podataka slijedi da je $\omega>>\lambda$ i da je $\omega\lambda_p/\beta<<1$, pa se, nakon zanemarivanja malenih veličina frekventna karakteristika neutronske kinetike svodi na jednostavan oblik:

$$\frac{\delta n(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{n_0}{\beta}.$$

Gustoća termičkih neutrona u reaktoru $n_0=\phi/v=10^{17}/2500=4*10^{13}$neutrona/$m^3$. Amplituda odziva bez temperaturne povratne veze iznosi dakle, $4*10^{13}/0.065=6.15*10^{14}$neutrona/$m^3$.

Iz zadanih vrijednosti izlazi nadalje

$$K_1 = \frac{V_g}{F_g\alpha} = \frac{r_g^2\pi}{2r_g\pi a} = 4.5*10^{-7}\ m^3K/W.$$

Frekventna karakteristika temperaturne povratne veze biti će

$$\frac{\alpha_D K_1}{j\omega\tau_g+1} = \frac{4.5*10^{-11}}{0.145j+1}.$$

Uvrštenjem dobivenih funkcija neutronske kinetike i temperaturne povratne veze za $\omega=1$, relacija (8.10.22) postaje

$$\frac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)} = \frac{6.15*10^{14}}{1+\frac{2.77*10^4}{0.145j+1}} = (2.26+0.33j)*10^{10} = 2.28*10^{10}e^{0.145j}$$

Iz dobivenog rezultata neposredno proizlazi da djelovanjem temperaturne povratne veze nuklearnog goriva, na zadanoj frekvenciji poremećaja, dolazi do smanjenja amplitude odziva neutronskog toka za 88db i povećanja faznog kuta između odziva i poremećaja za 8.3^0.

Utjecaj temperature moderatora na stabilnost reaktora

Iz diferencijalnih jednadžbi (8.10.17) i (8.10.18) moguće je sličnim načinom, kao za temperaturu goriva, odrediti i djelovanje temperature moderatora na povratnu vezu reaktivnosti, te formirati funkciju koja tu vezu određuje. Funkcija ima oblik

$$\alpha_m \frac{\theta_m(j\omega)}{\delta q(j\omega)} \frac{\delta q(j\omega)}{\delta k(j\omega)}, \qquad \textbf{(8.10.23)}$$

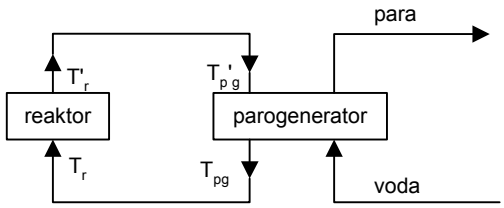
gdje je α_m temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora.

Zbog znatno veće vremenske konstante moderatora od vremenske konstante nuklearnog goriva, temperatura moderatora može utjecati na tok frekventne karakteristike samo kod najnižih frekvencija.

Transport rashladnog fluida

Rashladni fluid cirkulira u primarnom krugu nuklearne elektrane prenoseći toplinsku energiju reaktora u parogenerator.

Principijelna shema cirkulacije rashladnog fluida prikazana je na slici 8.10.5.



Slika 8.10.5 Shema transporta primarnog fluida

Temperatura na izlazu iz parogeneratora T_{pg} i temperatura na ulazu u reaktor T_r imaju vremenski pomak τ (koji odgovara vremenu protoka rashladnog fluida), tako da se može pisati $T_r = T_{pg}(t-\tau)$.

Primjenom Laplaceove transformacije dobivamo prijenosnu funkciju zbog transportnog kašnjenja fluida u obliku

$$\frac{T_r(s)}{T_{pg}(s)} = e^{-s\tau}. \qquad \textbf{(8.10.24)}$$

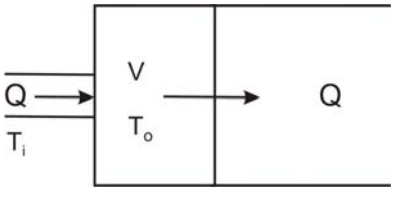
Analogno se može definirati i prijenosna funkcija između ulazne temperature u parogenerator T'_{pg} i izlazne temperature iz reaktora T'_r:

$$\frac{T'_{pg}(s)}{T'_r(s)} = e^{-s\tau'},$$

gdje je τ' vrijeme protoka rashladnog fluida reaktora kroz toplu granu primarnog kruga (između reaktora i parogeneratora).

Transportno kašnjenje zbog miješanja fluida

Presjek struje fluida u primarnom rashladnom krugu kod ulaska fluida u parogenerator i reaktorsku posudu naglo se povećava. U tim ulaznim komorama dolazi do miješanja fluida i zbog toga do kašnjenja u prijenosu neke prijelazne pojave s jednog dijela primarnog kruga u drugi.



Slika 8.10.6 Miješanje rashladnog fluida

Ako, prema slici 8.10.6, zamislimo da rashladni fluid temperature T_i i s volumnim protokom Q ulazi u širi prostor volumena V u kojemu vlada temperatura T_0, možemo utjecaj miješanja na transportno kašnjenje obraditi slijedećim razmatranjem:

Količina fluida koja u vremenskom intervalu dt ulazi u volumen V iznosi Qdt. Temperatura fluida unutar volumena V se zbog toga promjeni za dT_0. Uz pretpostavku potpunog miješanja, može se postaviti bilanca topline:

$VdT_0=Q(T_i-T_0)dt$

ili, proširenjem izraza,

$V(T_0+dT_0)=QT_idt+(V-Qdt)T_0$.

Nakon sređivanja i dijeljenja sa Vdt izlazi

$$\frac{dT_0}{dt}+\frac{Q}{V}T_0=\frac{Q}{V}T_i.$$

Primjenom Laplaceove transformacije dobiva se iz gornje relacije prijelazna funkcija kašnjenja u prijenosu poremećaja uslijed miješanja fluida

$$\frac{T_0(s)}{T_i(s)}=\frac{1}{\left(\frac{V}{Q}\right)s+1}=\frac{1}{s\tau+1}. \qquad \textbf{(8.10.25)}$$

Izraz (8.10.25) pokazuje da je vremenska konstanta uslijed miješanja fluida određena sa odnosom volumena u koji fluid utječe i volumnog protoka fluida.

Povratna veza reaktivnosti zbog zatrovanja reaktora ksenonom

U poglavlju 8.7. analizirano je zatrovanje reaktora s fisijskim proizvodima i pri tome istaknuto da najveći udio u zatrovanju reaktora ima izotop ksenona ^{135}Xe. Primjenom postupka, sličnog onom kod razmatranja povratne veze reaktivnosti zbog promjene temperature, moguće je odrediti prijelaznu funkciju koja povezuje promjenu reaktivnosti δk s promjenom koncentracije ksenona $\delta Xe(s)$. Prijelazna funkcija sadrži dvije vremenske konstante:

1. $$\tau_1=\frac{1}{\lambda_J} \qquad \textbf{(8.10.26)}$$

(određuje brzinu stvaranja ksenona zbog radioaktivnog raspada izotopa joda ^{135}J).

2. $$\tau_2=\frac{1}{\lambda_{Xe}+\phi_0\sigma_{Xe}} \qquad \textbf{(8.10.27)}$$

(određuje brzinu smanjivanja koncentracije ksenona zbog izgaranja u reaktoru i zbog radioaktivnog raspada).

Primjer 8.10.2

Potrebno je odrediti vremenske konstante τ_1 i τ_2 kojima je određen dinamički utjecaj ksenona na reaktivnost u reaktoru s tokom termičkih neutrona $\phi_0=2*10^{13}$neutrona/cm^{2}s.

Rješenje

Na osnovi podataka za ksenon i jod: $\lambda_{Xe}=2.1*10^{-5}s^{-1}$, $\sigma_{Xe}=3.5*10^{-18}cm^2$,

$\lambda_I=2.9*10^{-5}s^{-1}$ i zadanu visinu neutronskog toka iz jednadžbi (8.10.26) i (88.10.27) dobivamo

$\tau_1=9.58h$ $\tau_2=3.05h$.

Rezultat primjera 8.10.2. pokazuje da su vremenske konstante povratne veze zbog zatrovanja ksenonom mnogo duže od onih koje su posljedica temperaturne povratne veze (a koje su reda jedne sekunde ili manje), pa je utjecaj ksenona na brze prijelazne pojave zanemariv.

8.11 Naglo unošenje reaktivnosti u potkritični reaktor

U okviru analiza sigurnosti pogona nuklearnog reaktora, od interesa je, kao specijalan slučaj, razmotriti posljedice unošenja velike reaktivnosti u potkritičan reaktor. Ovaj slučaj bi mogao nastupiti npr. kod brzog nekontroliranog izvlačenja regulacijskih šipki prilikom puštanja reaktora u pogon, a interesantan je za demonstraciju presudnog utjecaja temperaturne povratne veze na tok prijelazne pojave. Za analizu ove pojave razrađeno je nekoliko jednostavnih analitičkih modela (npr. model Nordheim-Fucks, model Bethe-Tait), čije ćemo osnovne ideje dati u narednom razmatranju.

U poglavlju 8.3. (jednadžba 8.3.5) pokazano je da se kod unošenja velike reaktivnosti u reaktor (tj. za $\rho>>\beta$), utjecaj zakašnjelih neutrona može zanemariti. Reaktor tada postaje promptno kritičan. Ako za tu analizu usvojimo aproksimaciju s jednom grupom zakašnjelih neutrona, u relaciji (8.3.7) možemo zanemariti A_0 u odnosu na A_1, čime se jednadžba (8.3.8) svodi na

$$n(t) = A_1 e^{\left(\frac{\rho-\beta}{l_p}\right)t}.$$

ili u diferencijalnom obliku

$$\frac{dn(t)}{dt} = n(t)\frac{\rho-\beta}{l_p}.$$

Gustoća neutrona n(t) proporcionalna je s generiranom snagom P(t), pa mora također vrijediti

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho-\beta}{l_p}P(t). \qquad \textbf{(8.11.1)}$$

Ako je u reaktor unesena reaktivnost ρ_0, ukupna se reaktivnost zbog djelovanja temperaturne povratne veze kod porasta temperature smanjuje. Pri tome, budući da se radi o brzom tranzijentu, presudan utjecaj na reaktivnost ima temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva (Dopplerov koeficijent).

Bilancu reaktivnosti možemo, dakle, prikazati izrazom

$\rho=\rho_0-\alpha_D\Delta T$.

Povećanje temperature dovodi do porasta termičke energije u materijalu ΔE jer je

$\Delta E=mc\Delta T$,

gdje je m masa materijala, a c specifična toplina (produkt mc određuje toplinski kapacitet materijala).

Promjena reaktivnosti može se izraziti pomoću apsorbirane energije kao

$$\rho = \rho_0 - \Delta E \frac{\alpha_D}{mc} = \rho_0 - K\Delta E \,. \qquad \textbf{(8.11.2)}$$

Umjesto energije u relaciju (8.11.2) možemo uvesti snagu, uzevši u obzir da je

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{K}\frac{d\rho}{dt} \text{ ili}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -KP(t) \,.$$

Dijeljenjem relacije (8.11.1) s gornjim izrazom dobiva se

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho - \beta}{Kl_p},$$

Nakon integracije slijedi

$$P(t) = A - \frac{(\rho - \beta)^2}{2Kl_p},$$

gdje je A konstanta integracije.

Ako je reaktor u trenutku unošenja reaktivnosti bio potkritičan, može se postaviti granični uvjet da je za $\rho=\rho_0$, snaga P=0. Uz taj granični uvjet konstanta A određena je izrazom

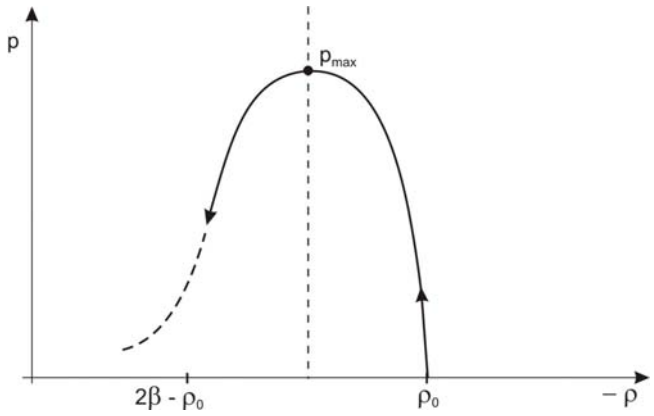
$$A = -\frac{(\rho_0 - \beta)^2}{2Kl_p} \,.$$

Izraz koji određuje ovisnost generirane snage reaktora o reaktivnosti time postaje

$$P(t) = \frac{1}{2Kl_p}\left[(\rho_0 - \beta)^2 - (\rho - \beta)^2\right]. \qquad \textbf{(8.11.3)}$$

Dobivena relacija pokazuje da snaga reaktora nakon unošenja reaktivnosti raste dok se ρ ne izjednači s β (tada je drugi član u zagradi jednak nuli), a nakon toga ponovo pada na nulu, pri čemu reaktivnost pada na iznos $\rho=2\beta-\rho_0$.

Tok promjene snage u vrijeme prijelazne pojave prikazan je slikom 8.11.1.



Slika 8.11.1 Promjena generirane snage i reaktivnosti u toku prijelazne pojave

Račun promjene snage vrijedi uz pretpostavku da je $2\beta-\rho<0$, odnosno da reaktor na kraju prijelazne pojave ostane potkritičan. Pretpostavka može biti ispunjena ukoliko je unesena reaktivnost ρ veća od 2β.

Na slici je crtkano označen pad snage zbog utjecaja zakašnjelih neutrona, koji je u analizi zanemaren.

Maksimalna snaga koja se postiže u toku prijelazne pojave je ona kod koje reaktivnost ρ postane jednaka β, a iznosi

$$P_{max} = \frac{(\rho_0 - \beta)^2}{2Kl_p}. \qquad \textbf{(8.11.4)}$$

Maksimalna snaga proporcionalna je s kvadratom unesene reaktivnosti, a obrnuto proporcionalna s faktorom $l_pK=\alpha_D l_p/(mc)$. Što je veći Dopplerov koeficijent i dob promptnih neutrona, a manji termički kapacitet nuklearnog goriva (kod manjeg se termičkog kapaciteta porast temperature goriva postiže brže), maksimalna snaga je manja.

Dob promptnih neutrona l_p ovisi o tipu reaktora. Kod vodom hlađenih reaktora taj faktor je reda 10^{-5} do 10^{-4}s, kod brzih reaktora je l_p za 3 do 4 reda veličine manji (10^{-8} do 10^{-7}s). Kod brzih ćemo reaktora, dakle (ukoliko ostale parametre smatramo približno istim), s istom količinom reaktivnosti izazvati znatno veću maksimalnu snagu, ali će vrijeme trajanja prijelazne pojave biti odgovarajuće kraće. Zbog toga, kod brzih reaktora postoji veća mogućnost oštećenja jezgre u takvoj prijelaznoj pojavi (udarni val tlaka i akceleracija zbog nagle ekspanzije goriva). Osim toga, kod brzih reaktora gorivo je u većini slučajeva plutonij (^{239}Pu), kod kojega je β manji nego kod urana (vidi tablicu 4.5.1), pa je uz istu vrijednost ρ_0, reaktivnost $\rho_0-\beta$ veća.

Ukupna energija koja se akumulira u gorivu u toku prijelazne pojave može se odrediti iz izraza (8.11.2) kada se u njega uvrsti reaktivnost na kraju prijelazne pojave $\rho=2\beta-\rho_0$, tj.

$$\Delta E = \frac{2(\rho_0 - \beta)}{K}. \qquad \textbf{(8.11.5)}$$

Interesantno je primijetiti da energija generirana u toku prijelazne pojave ne ovisi o vremenu trajanja promptnih neutrona l_p.

Dobivene nam relacije dozvoljavaju i procjenu vremena trajanja prijelazne pojave. To se trajanje, naime, može približno odrediti iz odnosa akumulirane energije u toku prijelazne pojave i maksimalne snage. Dakle

$$\tau = \frac{\Delta E}{P_{max}} = \frac{4l_p}{\rho_0 - \beta}. \qquad \textbf{(8.11.6)}$$

Primjer 8.11.1

U lakovodni reaktor u potkritičnom stanju s promjerom gorivne šipke 9.5mm, gustoćom UO_2 10700kg/m^3, specifičnom toplinom goriva 340J/kgK, dobi promptnih neutrona 10^{-4}s te s Dopplerovim koeficijentom reaktivnosti 10^{-4}/K naglo je unesena reaktivnost od 2%. Potrebno je analizirati tok prijelazne pojave.

Rješenje:

Konstanta $K = \frac{\alpha_D}{mc} = \frac{10^{-4}}{\left(4.75*10^{-3}\right)^2 \pi * 10700 * 340} = 3.88*10^{-7}\ m/J.$

Maksimalna snaga

$$P_{\max} = \frac{(\rho - \beta)^2}{2Kl_p} = \frac{(0.02 - 0.0075)^2}{2 * 3.88 * 10^{-7} * 10^{-4}} = 2 * 10^6 \; W/m = 2000 \; kW/m \, !$$

Potrebno je podsjetiti da kod lakovodnih reaktora maksimalna snaga gorivne šipke u toku pogona ne prelazi 40kW/m.

Trajanje prijelazne pojave $\tau = \frac{4l_p}{\rho_0 - \beta} = \frac{4 * 10^{-4}}{0.02 - 0.0075} = 0.032 \; s$.

Akumulirana energija u toku prijelazne pojave

$\Delta E = P_{max}\tau = 2*10^6*0.032 = 64000 J/m$.

Porast temperature u nuklearnom gorivu

$$\Delta T = \frac{\Delta E}{mc} = \frac{64000}{(4.75 * 10^{-3})^2 \pi * 10700 * 340} = 248 \; K \, .$$

Zadaci uz poglavlje 8.

1. Koliko je vrijeme trajanja ciklusa promptnih neutrona u lakovodnom reaktoru, u kojemu se neutroni usporavaju do energije 1.1eV? Faktor iskorištenja termičkih neutrona u reaktoru je 0.88, a faktor bijega termičkih neutrona 0.91.

2. Vrijeme trajanja ciklusa promptnih neutrona u nekom lakovodnom reaktoru iznosi $5*10^{-5}$s. Koliko bi se povećala gustoća neutrona u tom reaktoru za 0.1s ako se, uz zanemarenje utjecaja zakašnjelih neutrona, k_{ef} naglo poveća za 1%?

3. U reaktoru je skokovito povećana reaktivnost za 0.1β. Koliki je stabilni period porasta snage reaktora ako je nuklearno gorivo slabo obogaćeni uran, a koliko bi iznosio, uz isto povećanje reaktivnosti, da je gorivo plutonij?

4. Reaktor sa ^{235}U kao fisibilnim materijalom radi u jednom trenutku na snazi od 1mW. Izmjereno je da se snaga reaktora povećava sa stabilnim periodom od

10 min. Za koje će vrijeme snaga reaktora narasti na 1MW?

5. U neki je reaktor sa uranom kao nuklearnim gorivom naglo unesena pozitivna reaktivnost od 200pcm. Primjenom aproksimacije s jednom grupom zakašnjelih neutrona, vrijeme u kojem udio člana sa tranzijentnim periodom u neutronskom toku pada ispod 1%. Koliko bi to vrijeme bilo da je unesena reaktivnost od 200pcm bila negativna?

6. U nekom zrakom hlađenom i grafitom moderiranom reaktoru, koji radi u stacionarnom stanju, vrijeme trajanja ciklusa promptnih neutrona iznosi 10^{-3}s. U taj je reaktor naglo unesena jedna gorivna šipka od slabo obogaćenog urana i nakon toga izmjeren stabilan period porasta neutronskog toka od 8.33min. Kolika je reaktivnost unešena u taj reaktor?

7. Pogon reaktora s uranom kao nuklearnim gorivom, koji radi na snazi od 100MW, je naglo obustavljen unošenjem veće količine apsorbera u jezgru. Ocijeniti snagu koja se generira u reaktoru 1 minutu nakon obustave kao i udio fisijskih neutrona u proizvodnji te snage.

8. Za vrijeme ispitivanja reaktor sa ^{239}Pu kao fisibilnim materijalom je radio duže vremena na konstantnoj snazi od 1MW. Snaga reaktora je nakon toga u roku od 8 sati povećana na 100MW. Koliki je bio stabilni period porasta snage i kolika je unešena reaktivnost u reaktor?

9. U nekom istraživačkom reaktoru se prije ulaganja prvog gorivnog elementa nalazi neutronski izvor i detektor neutrona koji mjeri 10^3neutrona/s. Nakon ulaganja 10-tog gorivnog elementa broj registriranih neutrona detektora povećan je 7 puta, a nakon ulaganja 11-tog gorivnog elementa 7.5 puta. Procijeniti broj gorivnih elemenata kritičnog reaktora, kao i k_{ef} jezgre s 10 gorivnih elemenata.

10. Neki vodom hlađeni reaktor visine 3m i promjera 2m radi s temperaturom moderatora od 570K. Faktori f i p u reaktoru iznose 0.85 i 0.92, a faktor bijega termičkih neutrona 0.88. Koliki je temperaturni koeficijent reaktivnosti moderatora u tom reaktoru, ako je koeficijent volumnog istezanja vode $2*10^{-4}$/K?

11. Nuklearni reaktor sa gorivnim elementima iz $U0_2$ gustoće 10500kg/m^3 i promjera 9.5mm te faktorom p=0.87, radi s prosječnom temperaturom nuklearnog goriva od 1200K. Koliki je temperaturni koeficijent reaktivnosti goriva (Dopplerov koeficijent) u reaktoru kod te temperature? Koliki bi taj koeficijent bio da se temperatura goriva smanji na 1000K?

12. Reaktor koristi slabo obogaćeni uran kao gorivo i radi sa prosječnim tokom termičkih neutrona $2*10^{13}$neutrona/cm^{2}s. Koliko je ravnotežno zatrovanje reaktora ksenonom?

13. U reaktoru s prosječnim tokom termičkih neutrona od 10^{14}neutrona/cm^{2}s zatrovanje ksenonom doseglo je ravnotežnu razinu. Reaktor ima 6% ugrađenog viška reaktivnosti. Ako takav reaktor naglo ispadne iz pogona koliko vremena zbog "ksenonske jame" ne može ponovo postići kritičnost ?

14. Koliko se sati nakon puštanja u pogon, u reaktoru, u kojemu je konstantan tok termičkih neutrona 10^{13}neutrona/cm^{2}s, postiže 80% ravnotežne koncentracije ksenona?

15. Neki reaktor sa prirodnim uranom i grafitom kao moderatorom ima sljedeće podatke: L_b=0.89, ν=2.42, p=0.85. Koliki je faktor konverzije u tom reaktoru?

16. Lakovodni reaktor sadrži u jezgri 60t 3% obogaćenog urana. Reaktor radi sa konstantnim prosječnim tokom neutrona od $2*10^{13}$ neutrona/cm^{2}s, a ima sljedeće karakteristike: p=0.89, ε=1.04, L_b=0.9. Koliko kilograma ^{239}Pu proizvede takav reaktor u tri mjeseca rada? Koliko se za to vrijeme smanji početno obogaćenje urana?

17. U nekom je cilindričnom reaktoru pomakom regulacijske šipke smještene u osi reaktora, a uronjene do polovice jezgre izazvana promjena reaktivnosti od 50pcm. Koliku bi promjenu reaktivnosti izazvao isti pomak te regulacijske šipke kada bi se ona nalazila na polovici polumjera udaljena od osi reaktora, a uronjena do jedne četvrtine dubine jezgre?

Reference uz poglavlje 8.

[1] S.Glasstone, A.Sesonke, Nuclear Reactor Engineering.chapter 5, Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1967.

[2] M.Ash, Nuclear Reactor Kinetics, Second edition, chapters 1,2 and 3, Mc Graw Hill Co International, 1979.

[3] D.Feretić, Osnove teorije nuklearnog reaktora, poglavlje 3, Liber,Zagreb, 1987.

[4] E.Lewis, Nuclear Reactor Safety, chapters 3 and 4, John Willey Co, New York, 1977.

[5] J.Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapter 7, Addison Wensley Publ. Co, Reading Pa, 1975.

[6] S.Glasstone, M.Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, chapters 10 and 11, D.Van Nostrand Co, New York 1952.

[7] J.Weisman, Elements of Nuclear Reactor Design, Section B, chapter 4, Elsevier Scientific Publ.Co, Amsterdam, 1977.

[8] D.Popović, Nuklearna energetika, poglavlje 10, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

[9] R.Murray, Nuclear Reactor Physics, chapters 6,7 and 8, Macmillan and Co, London, 1959.

[10] P.Zweifel, Reactor Physics, chapter 4, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, Tokio, 1973.

[11] R.Knief, Nuclear Energy Technology, chapters 5 and 6, Hemisfere Publ Co, Washington, 1981.

[12] I.Kameron, Jadernie reaktori (prevod sa engleskog), poglavlje 3. i 4, Moskva, Atomizdat, 1987.

9 UČINCI I DOZE ZRAČENJA

Uvod

U poglavlju 3. analizirana je interakcija zračenja i materijala. Razmatran je prolaz najbitnijih vrsti zračenja (α-čestice, β-čestice, neutroni, γ-zrake) kroz materijale, prvenstveno s ciljem da se utvrde metode za procjenu prodornosti, odnosno dometa, zračenja u tim materijalima. Domet zračenja je jedan od osnovnih faktora kod procjene utjecaja zračenja na materijale, uključivši i tkiva živih organizama.

U ovom će se poglavlju dati najbitnije spoznaje o učincima zračenja na čovjeka. Takve spoznaje su od neospornog značaja za nuklearnog energetičara. Detaljnije analize utjecaja zračenja na čovjeka su predmet izučavanja nuklearne medicine i van dometa ove knjige.

9.1 Biološko djelovanje zračenja

Potkraj prošlog stoljeća, odmah nakon otkrića x-zraka i radioaktivnosti, uočeno je štetno djelovanje radioaktivnog zračenja po zdravlje ljudi.

Djelovanje zračenja može biti djelovanje unutrašnjeg zračenja (inhalacijom, ingestijom ili prodiranjem radioaktivnih tvari kroz kožu ili rane) i djelovanje vanjskog zračenja (izlaganjem dijelova tijela utjecaju zračenja iz radioaktivnog izvora).

Djelovanje vanjskog zračenja lakše je uočiti i zbog toga je ono ranije i otkriveno. Već 1886. godine zabilježeni su slučajevi oštećenja kože (crvenilo slično opeklini, zatim gubitak dlakavosti) izložene intenzivnom x-zračenju.

Dugoročni utjecaji zračenja otkriveni su mnogo kasnije. Jedan od takvih utjecaja je kancerogeno djelovanje zračenja. Do 1911. godine otkriveno je 94 slučajeva tumora zbog izlaganja x-zrakama (najviše među liječnicima rendgenolozima), a do 1922. godine zabilježeno je među njima oko 100 smrtnih slučajeva zbog tog uzroka.

Naknadno su utvrđene i posljedice unutarnjeg zračenja, među kojima je najizrazitija povećana pojava svih vrsta raka, a posebno leukemije.

Odavno je bilo poznato da među rudarima u rudnicima urana (najduža su zapažanja vršena u jednom od najstarijih rudnika Pehblende u Čehoslovačkoj) postoji znatno više (oko 30 puta više) slučajeva raka pluća od prosjeka među stanovništvom. Danas se zna da to treba pripisati visokoj koncentraciji radona. Dobrom ventilacijom rudnika znatno se može smanjiti primljena doza unutarnjeg zračenja od radona.

Veoma je poznat, opsežno opisan i analiziran slučaj visoke smrtnosti od raka zbog unutarnjeg zračenja radijem među radnicama u tvornici satova sa fluorescentnim kazaljkama 1920-tih godina u SAD. Tamo se, naime, flurescencija materijala za bojenje kazaljki i brojeve postizavala miješanjem boje s radijem. Radnice su običavale usnama šiljiti kistove za bojenje i tako unosile radij u organizam.

Na osnovi tako stečenih iskustava s djelovanjem radioaktivnosti pokrenuta su, naročito nakon II svjetskog rata, opsežna istraživanja o utjecaju zračenja na žive organizme. Zahvaljujući tome došlo se do spoznaja i normi potrebnih za sigurno rukovanje sa radioaktivnim materijalima i bezopasno upravljanje s nuklearnim postrojenjima.

Način djelovanja zračenja na organizme može se ukratko opisati na slijedeći način:

Prolazom zračenja kroz tvari dolazi do ionizacije i pobuđenih stanja atoma. Ovaj proces opisan je u poglavlju 3. Primljene doze radioaktivnog zračenja rezultiraju energijom oslobođenom u tkivu, uslijed interakcije nuklearnih čestica s materijalom tkiva. Oslobođena energija dovodi do

ionizacije i stvaranje pozitivnih i negativnih radikala unutar tkiva. Radikali pak dovode do redukcija i oksidacija biomolekula.

Kada govorimo o posljedicama zračenja na stanice u ljudskom organizmu, treba kao opće pravilo uzeti da su na zračenje osjetljivija ona tkiva čije se stanice brzo dijele (spolne stanice, stanice krvotvornih organa, crijevnog epitela, dječjih kostiju).

Posljedice zračenja mogu biti somatske i genetske. Somatski su efekti vezani uz posljedice zračenja ozračene jedinke, a genetski na utjecaj na potomstvo.

Somatski efekti ovisni su o oštećenju stanica o kojima ovisi funkcioniranje organizma. To su prvenstveno krvne stanice, stanice koštane srži i stanice probavnog trakta. Neke od značajnijih posljedica zračenja su povraćanje sa trovanjem organizma, leukemija, anemije kao i opće smanjenje imunološke sposobnosti. Na veće doze zračenja vrlo su osjetljive i očne leće u kojima dolazi do zamućenja (katarakt).

Zračenje utječe na reproduktivnu funkciju stanica te dovodi do nekontroliranog umnažanja (tumori) ili degeneracije odnosno smanjene sposobnosti stanice za diobu i rast. Zbog toga je fetus posebno osjetljiv na zračenje, jer je u toj fazi umnažanje stanica naročito intenzivno.

Detaljni opisi posljedica zračenja mogu se naći u priručnicima iz medicine.

Najbitnije kategorije zračenja organizma, o kojima ovisi i dozvoljena doza zračenja su:

- lokalna ozračenja pojedinih dijelova tijela

- ozračenje cijelog tijela.

Razni dijelovi tijela različito su osjetljivi na zračenje pa je i propisana doza različita.

U pogledu vremena ozračenja razlikujemo:

- akutna jednokratna ozračenja

- dugotrajna izlaganja radioaktivnom zračenju.

Nadalje, biološko djelovanje zračenja ovisi i o vrsti zračenja (γ-zrake, β-čestice, α-zrake, neutroni).

Učinci zračenja na žive stanice promatraju se statistički. Ako primjerice, određena količina zračenja dovodi do uništenja 50% ozračenih stanica govorimo o 50-postotnoj letalnoj dozi (LD 50). Nadalje, bitno je i vrijeme unutar kojega dolazi do efekta primljenog zračenja. Ako, na primjer, 50% stanica odnosno ozračenih organizama ugiba unutar 30 dana nakon primljene doze zračenja govorimo o dozi LD 50/30.

Kod analize učinaka zračenja na žive stanice postavlja se pitanje postojanja praga biološkog djelovanja primljene doze zračenja. Kod tog pitanja dolazi među stručnjacima do neslaganja, jer organizmi posjeduju izvjesnu sposobnost regeneracije oštećenih ćelija, pa je logično pretpostaviti da će biti u mogućnosti kompenzirati efekte primljenih malih doza zračenja. To su doze istog reda veličine, ili manje od prirodnih doza koje se primaju iz okoline. Danas se konzervativno pretpostavlja da prag za djelovanje zračenja na organizme ne postoji.

9.2 Doze zračenja

Mjere za zaštitu od zračenja usklađuju se u okvirima međunarodnih institucija, od kojih je najznačajnija ICRP (International Commission on Radiological Protection), osnovana 1928. godine. Međunarodne institucije daju preporuke za izradu nacionalnih propisa.

Osnovni pojmovi sa kojima se susrećemo u analizi količina i učinaka zračenja jesu:

Apsorbirana doza zračenja

Zračenje prolazeći kroz tkivo oslobađa energiju zbog generacije ionskih parova. Stvaranje svakog ionskog para troši određenu energiju (u zraku je ta energija 34eV po ionskom paru), pa se na osnovi poznate apsorpcije energije može izračunati broj stvorenih ionskih parova. Jedinice za apsorbiranu dozu bile su najprije definirane za ionizaciju zraka. Takva jedinica, koja se još uvijek mnogo susreće je rendgen (R), definirana kao doza elektromagnetnog zračenja (x ili γ zrake) koja u $1cm^3$ suhog zraka proizvede ionske parove čija količina naboja jednog i drugog predznaka odgovara jednoj elektrostatskoj jedinici elektriciteta (stara jedinica za količinu elektriciteta, jednaka $3.33*10^{-10}$ C).

Ekspozicija

Ekspozicija (za koju ćemo koristiti oznaku X) je definirana kao količina γ ili x zračenja koja u jednom kilogramu zraka proizvede jedan kulon naboja oba predznaka. Jedinica za ekspoziciju je dakle C/kg (pri čemu se ne uzimaju u obzir samo ionski parovi proizvedeni u masi promatranog materijala nego i oni koje u okolnom materijalu stvaraju elektroni generirani u interakcijama x ili γ zraka unutar promatranog materijala). S druge strane, budući da je broj ionskih parova proporcionalan apsorbiranoj energiji x ili γ zračenja, možemo i ekspoziciju neposredno dovesti u vezu s apsorbiranom dozom zračenja. Potrebno je prisjetiti se da je ekspozicija definirana za djelovanje x ili γ zračenja u zraku. Pojam ekspozicije se mnogo koristi u praksi jer je to veličina koju možemo neposredno mjeriti plinskim brojačima. Oni naime mjere broj iona stvorenih zračenjem u poznatoj masi zraka. Kada mjerimo γ-aktivnost u nekoj prostoriji, možemo mjeriti samo ekspoziciju. Uz poznatu vrijednost ekspozicije jednostavno je odrediti dozu pojedinca koji je izložen γ-zračenju. Način izračunavanja apsorbirane doze zračenja je diskutiran u poglavlju 9.7.

Osim apsorbirane doze (za koju ćemo upotrebljavati oznaku D) i ekspozicije, često se upotrebljava pojam brzina doze i brzina ekspozicije, koji određuju dozu, odnosno ekspoziciju, u jedinici vremena. Oznake za te veličine su D i X.

Primjer 9.2.1

Koliko se ionskih parova proizvodi i koliko se energije oslobodi apsorpcijom zračenja od 1R po kilogramu suhog zraka na atmosferskom tlaku?

Kolika je brzina ekspozicije, izražena u C/kg,h, ako se energija zračenja oslobodi u materijalu u vremenu od 20 minuta?

Rješenje

Naboj elektrona iznosi $1.6*10^{-19}$C (poglavlje 2.1).

Specifični volumen zraka pri temperaturi 273K i atmosferskom tlaku je $0.7838 m^3/kg$.

Broj ionskih parova koji se apsorpcijom zračenja 1R proizvodi u kilogramu zraka (što odgovara volumenu od $783800 cm^3$ zraka kod navedenih parametara) biti će:

$$\frac{3.33*10^{-10}}{1.6*10^{-19}} * 783800 = 1.63*10^{15}.$$

Za generiranje svakog ionskog para približno se troši energija od 34eV, pa je energija potrebna za generiranje navedenog broja ionskih parova:

$5.54*10^{16}$eV$=0.888*10^{-2}$J

Brzina ekspozicije u slučaju da se energija zračenja oslobodi u zraku u vremenu od 20 minuta će biti:

$$\dot{X} = \frac{60}{20} * 3.33*10^{-10} * 783800 = 7.83*10^{-4}\ \frac{C}{kg\,h}.$$

Količina zračenja od 1R oslobodi u tkivu nešto više energije nego u zraku (oslobođena energija u zraku, izračunata u primjeru 9.2.1, je oko 0.0088J/kg), pa je svojedobno bila usvojena jedinica za apsorbiranu dozu u 1rad=0.01J/kg (što približno odgovara energiji koju doza zračenja od 1R oslobodi po kilogramu mekog tkiva).

Općim prihvaćanje SI sustava međunarodnih mjernih jedinica rad je isključen iz upotrebe kao mjerna jedinica za apsorbiranu dozu zračenja i usvojena (po engleskom fizičaru Luois Harold Grayu) nova jedinica:

1grej(Gy)=1J/kg

Vrijedi dakle veza: 1Gy=100rad. Ista se jedinica može upotrebljavati i za mjerenje ekspozicije.

Primjer 9.2.2

Koliki se naboj ionskih parova jednog i drugog predznaka generira u kilogramu zraka u kojemu apsorbirana doza γ-zraka iznosi 1Gy? Kolika je odgovarajuća ekspozicija izražena u C/kg?

Rješenje:

Energija potrebna za generiranje jednog ionskog para iznosi $34eV=5.45*10^{-18}J$.

Broj generiranih ionskih parova zbog apsorbirane doze 1Gy u zraku iznosi $1.84*10^{17}$, a ukupni naboj tih ionskih parova jednog i drugog predznaka, 0.0294C (naboj elektrona je $1.6*10^{-19}C$).

Apsorpcija doze od 1Gy u kilogramu zraka odgovara dakle ekspoziciji od 0.0294C/kg.

Relativna biološka efikasnost zračenja (RBE)

Osnovni učinak zračenja na tkivo manifestira se u izazvanoj ionizaciji. Učinak zračenja na živo tkivo ne ovisi samo o oslobođenoj energiji u tkivu (odnosno o ukupnom broju proizvedenih ionskih parova) nego i načinu na koji je raspoređena ionizacija unutar tkiva. Općenito vrijedi pravilo da će velika lokalna koncentracija ionskih parova proizvesti više štete nego kada su oni ravnomjernije raspoređeni unutar tkiva. Nepovoljnije je dakle zračenje koje u tkivu proizvodi visoku gustoću ionizacije. Sa toga će se aspekta, uz istu oslobođenu energiju razlikovati efekti koji proizvodi u tkivu elektromagnetno zračenje i elektroni (kod kojih je zbog veće prodornosti gustoća ionizacije niža), od onih koje proizvode teške nabijene čestice ili brzi neutroni (neutroni izbacivanjem jezgara iz njihovih položaja izazivaju sekundarnu ionizaciju). Da bi se navedeni efekti mogli kvantificirati uveden je tzv. faktor kvalitete zračenja Q, koji je to veći što je veća specifična ionizacija (odnosno ionizacija po jedinici puta), kao što pokazuje tablica 9.2.1.

Tablica 9.2.1 Ovisnost faktora Q o iznosu energije oslobođene po jedinici dužine

Linearno oslobođena energija [MeV/mm]	Faktor Q
3.5 ili manje	1
7	2
23	5
53	10
175 i više	20

Faktor Q može se jednostavnije definirati u ovisnosti o vrsti i energiji čestica koje izazivaju ionizaciju. Ta ovisnost dana je u tablici 9.2.2.

Tablica 9.2.2 Ovisnost faktora Q o vrsti zračenja

Vrsta zračenja	Q
zrake x i y	1
β-čestice	1
termički neutroni	2.5
α-čestice	20
brzi neutroni i protoni do energije 10MeV	10
teški nuklidi	20

Ako apsorbirano zračenje izraženo u Gy pomnožimo sa faktorom kvalitete Q dobivamo, ovisno o faktoru Q, jednaku ili uvećanu dozu zračenja. Ta doza zračenja, poznata je kao efektivna doza zračenja (oznaka H), daje mjeru za učinak apsorbirane doze zračenja na žive organizme. Mjeri se posebnom jedinicom, za koju je (po švedskom fizičaru Rolfu Sievertu), u SI sustavu jedinica usvojen naziv sivert (Sv). Dakle,

1Sv=1Gy*Q (J/kg)

Sivert je najvažnija jedinica za promatranje i kvantifikaciju učinaka apsorbiranih doza zračenja na žive organizme, pa se propisi o dozvoljenim dozama zračenja vezuju isključivo za tu jedinicu.

Stara (ali još uvijek dosta upotrebljavana) jedinica za efektivnu dozu u organizmu je rem (Roentgen Equivalent Man), definirana kao: 1rem=1rad*Q.

Veza sa SI jedinicama je: 100rem=1Sv.

Učinak doze zračenja ovisan je o vremenu u kojem je doza primljena.

Zato se, ekvivalentna doza zračenja H(t) u ovisnosti o vremenu ozračivanja t određuje kao;

a) integralna doza izražena sa ∫H(t)dt

b) brzina doze definirana kao $\dot{H} = dH(t)/dt$, (tj. kao doza primljena u jedinici vremena)

Primjer 9.2.3

Tkivo je ozračeno snopom γ-zraka energije 1Mev i intenziteta 10^5 γ-zraka/cm^{2}s. Izračunato je da snop γ-zraka naznačenog intenziteta oslobađa po gramu tkiva energiju od $5*10^{-10}$J/s. Kolika je brzina doze u tkivu zbog tog zračenja?

Rješenje

Brzina doze iznosi $5*10^{-7}$J/kg, s=$5*10^{-7}$Sv/s=1.8mSv/h.

9.3 Posljedice akutnih doza zračenja

Nakon definiranih jedinica zračenja moguće je kvantificirati posljedice primljenih doza zračenja na čovjeka. Najbolje su poznate rane posljedice akutnih ozračenja koje se u funkciji apsorbirane doze mogu sažeti na način prikazan u tablici 9.3.1. Pod ranim posljedicama smatramo one koje je moguće detektirati do 60 dana nakon ozračenja.

Tablica 9.3.1 Rane posljedice ekvivalnetnih akutnih doza zračenja.

0 do 0.5Sv	Nisu primijećene posljedice.
0.5 do 1Sv	Osim lagane promjene krvne slike nisu primijećene druge posljedice.
1 do 2Sv	Mučnina i povraćanje u 5 do 50% slučajeva nakon 3 sata. Zamor i gubitak apetita Umjerena promjena krvne slike. Oporavak u svim slučajevima nakon nekoliko tjedana.
2 do 6Sv	Kod primljenih doza većih od 3Sv povraćanje nastaje nakon 2 sata ili prije. Ozbiljna promjena krvne slike. Krvarenje i infekcije. Gubitak kose kod doze iznad 3Sv. Oporavak u 20 do 100% slučajeva nakon 1 do 12 mjeseci.
6 do 10Sv	Povraćanje nakon 1 sata. Značajna promjena krvne slike. Gubitak kose, krvarenje, infekcije. U roku od 2 mjeseca 80 do 100% umire. Za preživjele oporavak traje dugo.

Doze zračenja i posljedice navedene u tablici 9.3.1. odnose se na ozračenje cijelog tijela. Ako je samo dio tijela ozračen posljedice su ovisne o dijelu koji je ozračen ali su općenito manje nego kada je u pitanju ozračenje cijelog tijela.

Propisima o zaštiti od ionizirajućeg zračenja se propisuju utežni faktori, koji izražavaju relativnu štetu za pojedine dijelove tijela kada se cijelo tijelo ravnomjerno ozračuje. Često korišteni utežni faktori su navedeni u tablici 9.3.2.

Tablica 9.3.2 Utežni faktori pri ozračivanju pojedinih dijelova tijela

Tkivo	Uteženi faktor W_i
gonade	0.25
dojke	0.15
koštana srž	0.12
pluća	0.12
štitna žlijezda	0.03
kosti	0.03
ostatak tijela	0.30
Ukupno	1.00

Na osnovi tako izraženih utežnih faktora dobiva se efektivna ekvivalentna doza H_e, kao:

$$H_e = \sum_i W_i H_i \ ,$$

gdje je H_i prosječna efektivna doza u i-tom tkivu a W_i utežni faktor za to tkivo.

Kada govorimo o efektivnim dozama zračenja razlikujemo nadalje pojam pojedinačne doze kao doze koju je primio određeni pojedinac i kolektivne doze koja predstavlja integral svih pojedinačnih doza skupine ljudi. Jedinica za kolektivnu dozu je čovjek-sivert. S kolektivnom se dozom uvijek računa kada se radi o procjeni istovremeno primljene doze veće grupe ljudi (npr.

radnika koji su učestvovali u remontu nuklearnog postrojenja, ili stanovništva u okolini takvog postrojenja).

Naknadne posljedice od primljenih velikih doza zračenja

U tablici 9.3.1. navedene su najbitnije kratkoročne posljedice (unutar 2 mjeseca nakon ozračenja) od primljenih velikih doza zračenja. Međutim, primljene velike doze zračenja mogu uzrokovati i neke dugoročne posljedice od kojih su najvažnije:

Povećana vjerojatnost pojave raka

Ozračivanje tijela povećava predispoziciju za razvoj svih vrsta raka, od kojih je najčešća leukemija. Promatranjem 82000 ljudi koji su preživjeli nuklearno bombardiranje Hirošime i Nagasakija došlo se je do zaključka da kod onih čija je primljena doza procijenjena na manje od 1Sv nije bilo moguće jednoznačno utvrditi povećanje pojava raka u odnosu na populaciju koja nije ozračivana. Kod onih s primljenim dozama većim od 1Sv dugoročan rizik smrti od raka raste linearno, i to tako da svaka dodatna doza od 1Sv povećava taj rizik za približno 1 posto.

Budući da je prosječan rizik pojedinca koji nije bio ozračen od smrti zbog raka oko 20%, dugoročno povećanje rizika od raka zbog zračenja, čak i kod relativno visokih primljenih doza, nije veliko.

Danas je poznato oko 1500 uzročnika raka (najviše među kemikalijama).

Pojava dodatnih slučajeva raka zbog zračenja je dakle dosta rijetka čak i među populacijom koja je primila velike pojedinačne doze, pa dolaženje do točnijih podataka zahtjeva veliki statistički uzorak.

Očna oboljenja

Jedna od dugoročnih posljedica primljene velike doze zračenja je i zamućenje očne leće (radijacijska katarakta). Prag za pojavu ove posljedice zračenja su primljene doze iznad 2Sv.

Sterilnost

Veće doze zračenja na gonade izazivaju privremenu ili trajnu sterilnost. Posljedice ozračivanja velikim dozama γ-zraka navedene su u tablici 9.3.3.

Tablica 9.3.3 Pojava sterilnosti zbog ozračivanja gonada γ-zrakama

Doza Sv	
1.5	kratkotrajna sterilnost
2.5	sterilnost u trajanju od jedne do dvije godine
5 do 6	trajna sterilnost za većinu ozračenih
8	trajna sterilnost za sve

Genetske posljedice

Zračenje izaziva dodatne mutacije genetskih stanica (izazivanjem prekida kemijskih veza u DNA molekulama u kromosomima) i zbog toga povećava dugoročan rizik od genetskih anomalija. Prema današnjim procjenama broj dodatnih genetskih anomalija zbog zračenja ne prelazi 20 do 40% dodatnih slučajeva raka.

9.4 Posljedice malenih kroničnih doza zračenja

Posljedice velikih akutnih doza zračenja, reda jednog siverta ili više, mogu se s izvjesnom su sigurnošću utvrditi. Nasuprot tome, posljedice malih apsorbiranih doza su daleko neizvjesnije.

Kada govorimo u utjecaju zračenja na ljude razlikujemo stohastičke i nestohastičke efekte.

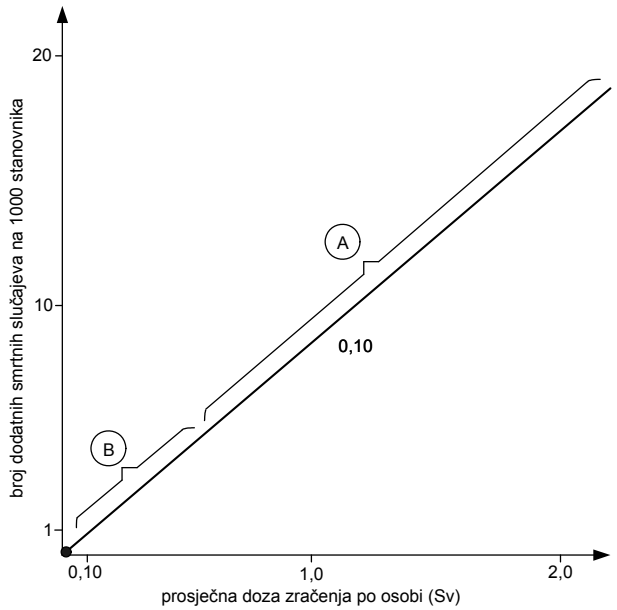
Stohastički efekti su oni kod kojih su posljedice proporcionalne primljenoj dozi, a ne postoji donji prag djelovanja doze. Kod nestohastičkih efekata posljedice su također proporcionalne primljenoj dozi ali postoji donji prag ispod koje se posljedice ne primjećuju.

Tipičan primjer za stohastički efekte su genetske posljedice zračenja i pojava raznih vrsti raka, a za nestohastičke akutna lokalna ozračenja (npr. ozračenje ruke) kod kojih se ispod određene doze posljedice ne mogu ustanoviti.

Sva se ograničenja doza zračenja koje ćemo u narednom tekstu navoditi odnose na stohastičke efekte.

Danas je prihvaćena veoma konzervativna pretpostavka da su dugoročne posljedice primljenih malih doza zračenja na živa bića proporcionalne samo primljenoj integralnoj dozi. Prema toj pretpostavci, posljedice primljene doze imaju isključivo stohastički karakter, što znači da ne postoji prag doze ispod kojeg se posljedice primljene doze mogu zanemariti. Iz takve pretpostavke proizlazi da su posljedice iste kada npr. integralnu dozu od jednog siverta raspodijelimo jednoliko na 100 ili 10000 ljudi. U oba slučaja bi naime trebalo računati sa jednim dodatnim slučajem smrti od raka. Takva hipoteza, inače poznata kao linearna hipoteza, pretpostavlja da nema bezopasne radijacije, bez obzira na njezin intenzitet.

Linearnu hipotezu usvojila je BEIR (Biological Effects of Ionizing Radiation) komisija iz SAD, bez čvrstih dokaza za njezinu objektivnost, ali s uvjerenjem da posljedice zračenja time nisu podcijenjene. Princip na kojemu se ta hipoteza zasniva je prikazan slikom 9.4.1



Slika 9.4.1 Rizik od malih doza zračenja prema linearnoj hipotezi

Na slici je područje doza za koje su posljedice poznate označeno s A (pretežno na temelju promatranja preživjelih nakon atomskih eksplozija u Japanu). Područje B je ekstrapolirano, s tim da je malim kružićem u ishodištu koordinatnog sustava označen opseg doza zračenja profesionalnog osoblja koje radi u nuklearnim postrojenjima. Doze stanovništva su još mnogo niže.

Primjer 9.4.1

Nakon havarije na nekom nuklearnom energetskom postrojenju procijenjeno je da je okolno stanovništvo koje broji 130000 ljudi primilo integralnu dozu zračenja od 15000 čovjek-siverta. Koliki broj dodatnih slučajeva smrti od raka treba očekivati u toku prosječne životne dobi tih ljudi (oko 70 godina)?

Usporediti postotno povećanje smrtnosti od raka ozračene grupe ljudi u odnosu na rizik smrtnosti od istog uzorka neozračenog stanovništva, koji iznosi oko 20%?

Rješenje:

Na temelju linearne hipoteze o utjecaju zračenja na broj dodatnih smrtnih slučajeva od raka, integralna doza od 100 čovjek-siverta dovodi do jednog dodatnog smrtnog slučaja. Integralna doza od 15000 čovjek-siverta bi prema toj hipotezi uzrokovala 150 dodatnih smrtnih slučajeva.

Ako uzmemo da je "prirodan" broj smrtnih slučajeva smrti od raka za grupu od 130000 ljudi reda 26000 (20% u toku životne dobi), pretpostavljeno bi povećanje broja smrtnih slučajeva zbog primljene kolektivne doze zračenja iznosilo oko 0.58%.

9.5 Izvori radioaktivnog zračenja u okolini

Čovjek je od svog postanka podvrgnut radioaktivnom zračenju iz okoline. To zračenje, koje se može tretirati kao pozadinsko zračenje jer je neovisno od ljudskih aktivnosti, je u dalekoj prošlosti bilo intenzivnije nego danas. Ovisno o lokaciji iznosi 1 do 2mSv/god. Osim zračenja iz prirodnih izvora (koje potječe iz svemira i radioaktivnih tvari u zemljinoj kori) stanovništvo je podvrgnuto i umjetnom zračenju, koje je uzrokovano ljudskim aktivnostima (najveći doprinos umjetnom zračenju daje medicinska dijagnostika i terapija).

I prirodno i umjetno zračenje varira u dosta širokim granicama. Primjer raspodjele prosječne efektivne doze zračenja stanovništva iz svih uzroka je, prema podacima Međunarodne agencije za atomsku energiju, naveden u tablici 9.5.1.

Tablica 9.5.1 Prosječne doze zračenja stanovništva

Prirodni izvori zračenja	mSv/god.
radon (^{222}Rn i ^{220}Rn)	1.37
kalij (^{40}K)	0.30
kozmičke zrake	0.30
ostali prirodni izvori	0.02
Umjetni izvori zračenja	
medicinske pretrage	0.40
stanovanje u okolini nuklearne elektrane	0.002
Ukupno	2.392

Iz tablice je vidljivo da najveći doprinos ekvivalentnoj dozi stanovništva daje plin radon. Taj plin je α-emiter, a potječe iz uranovih ruda u zemljištu i materijalima zgrada.

Potrebno je naglasiti da prirodna doza zračenja varira u znatnom opsegu. Razlike u prirodnoj dozi između pojedinih lokaliteta unutar naše zemlje su veće od 1mSv/god. U svijetu su poznata

neka područja s izrazito visokom prirodnom dozom zračenja. Tako se primjerice u nekim lokacijama u Indiji i Brazilu, gdje je tlo bogato monazitnim pijeskom koji sadrži torij, prosječne prirodne doze od γ-zračenja penju do 20mSv/god, što je 10 do 20 puta više nego na većini drugih područja u svijetu.

Prirodna doza zračenja veoma je ovisna o sastavu tla i nadmorskoj visini, a umjetna doza zračenja o nizu okolnosti i životnih navika,kao što su, sastav materijala zgrada za stanovanje , intenzitet ventilacije stanova (o čemu ovisi koncentracija radona), medicinske pretrage i liječenje uz upotrebu x zračenja ili radioaktivnih izotopa, broj dužih putovanja avionom, pa čak i broj sati gledanja TV programa.

Unatoč znatnim varijacijama prirodnih doza između pojedinih lokaliteta (razlike su reda 1mSv/god pa i više), nisu primijećene nikakve posljedice koje bi se manifestirale u razlici zdravstvenog stanja stanovništva koje je podvrgnuto tim dozama.

9.6 Granične doze zračenja

Granične doze zračenja regulirane su propisima. Normalno razlikujemo dozvoljenu dozu za osoblje koje profesionalno dolazi u kontakt sa izvorima zračenja (osoblje u nuklearnim postrojenjima, liječnici rendgenolozi, rukovaoci s radioaktivnim izotopima u industriji i sl.) i dozvoljenu dozu za širu populaciju (dakle za neprofesionalno osoblje).

Dozvoljene doze za profesionalno osoblje su u pravilu 10 ili više puta veće nego za širu populaciju, s tim što je profesionalan rad s izvorima zračenja obično zabranjen za neke kategorije ljudi (mlađi od 18 godina, trudnice ili dojilje). Ograničenje doze se u pravilu definira dozom za cijelo tijelo. Ta se doza dobije iz efektivne doze pojedinih organa preko utežnih faktora (tablica 9.3.2).

Doze zračenja za profesionalno osoblje u slučaju ravnomjernog ozračivanja cijelog tijela (uključivši vanjsko i unutarnje zračenje), su na osnovi preporuka ICRP danas ograničene na 50mSv/god. S obzirom da se posljedice primljene doze lakše podnose ako se ista doza prima u dužem vremenskom razdoblju ponekad se godišnje doza ograničava i maksimalnom kvartalnom dozom. Za radnike NE Krško kvartalna doza ograničena je na 25mSv.

Zakonski se dozvoljava da profesionalno osoblje u izvanrednim okolnostima (sprečavanje havarije, spašavanje života) može primiti i veće doze. U SAD se u posebno kritičnim okolnostima dozvoljava doza pojedinca do 1Sv (pri čemu treba nastojati da on bude stariji od 45 godina). Naš propis ne postavlja uvjet dobne granice, ali ne dopušta da se po jednom poslu primi više od dvostruke godišnje doze, odnosno 0.1Sv, s tim što radnik u cijelom radnom vijeku može samo jednom primiti dozu do 0.5Sv.

Doza od 50mSv/god rezultira u toku radnog vijeka (30 godina) ukupnom dozom od 1.5Sv. Na osnovi saznanja o kumulativnim posljedicama zračenja, u SAD se je prakticiralo ograničavati godišnju dozvoljenu dozu zračenja na osnovi primljene kumulativne doze zračenja u prošlosti. Slijedom te prakse dozvoljavalo se je da radnici starije dobi, koji ranije nisu bili ozračeni mogu primiti i veće godišnje doze, ali ne preko 150mSv/god, s tim da do kraja radnog vijeka dobiju istu kumulativnu dozu kao da su u cijelom radnom vijeku primali dozu od 50mSv/god. Takva je praksa danas uglavnom napuštena.

Dodatne doze pojedinca iz neprofesionalnog osoblja (tj. šireg stanovništva) zbog rada nuklearnih instalacija su ograničene na oko 1mSv/god. Propisi obično dozvoljavaju da u toku ograničenog broja godina doza može biti i do 5mSv/god, ali uz uvjet da u toku životne dobi (70 godina) ona u prosjeku ne bude veća od 1mSv/god. ICRP ograničava dozu neprofesionalnog osoblja na 1.7mSv/god. Dozvoljena je dodatna doza zračenja stanovništva, je prema propisima istog reda veličine kao i prirodna doza.

Stvarne dodatne doze zračenja stanovništva okolini nuklearnih elektrana su bitno manje od dozvoljenih (vidi tablicu 9.5.1.). Pri projektiranja nuklearnih elektrana standardna je praksa primjenjivati tzv. ALARA (As Low As Reasonably Achievable) princip koji traži za se u okolini elektrane postigne tako niska doza zračenja koliko je to razumno moguće. Danas se kod svake nuklearne elektrane može postići da, u toku normalnog pogona, dodatna godišnja doza zračenja u njezinoj okolini ne bude veća od 0.05mSv/god, s tim da većina nuklearnih elektrana ostvaruje još niže doze, koje se kreću između 0.01 i 0.02mSv/god (dakle svega oko 1% prirodne doze).

9.7 Proračun ekvivalentnih doza zračenja

Detaljnijim proračunima ekvivalentnih doza zračenja bave se specijalisti za radiološku zaštitu. Za nuklearnog energetičara potrebno je da bude upoznat barem sa osnovnim načelima takvih proračuna.

Proračuni ekvivalentnih doza vrše se za vanjska i za unutrašnja zračenja.

Vanjska zračenja značajna su kada se radi o izlaganju organizma sa γ-zrakama i neutronima. Učinci zračenja β-česticama i α-zrakama su izraziti kada se radi o unutarnjem zračenju organizma, a mnogo manje za kada se radi o vanjskom zračenju. Razlog je u činjenici da je prodornost tih čestica u tkivu, (posebno kada je riječ o α-zrakama) vrlo mala, pa ih najvećim dijelom zaustavlja vanjski sloj kože (vidi poglavlja 3.3 i 3.4).

Ekvivalentne doze od vanjskog zračenja

Doze od γ-zračenja

U poglavlju 3.5. razmatrana je količina energije koja se oslobađa prolazom γ-zraka kroz materijal. Analizom je pokazano da oslobođena energija po jedinici mase materijala može biti prikazama relacijom

$$EI(\mu_a/\rho) \qquad J/kgs \tag{9.7.1}$$

gdje je

I tok γ-čestica

E energija γ-čestica

μ_a/ρ maseni apsorpcijski koeficijent.

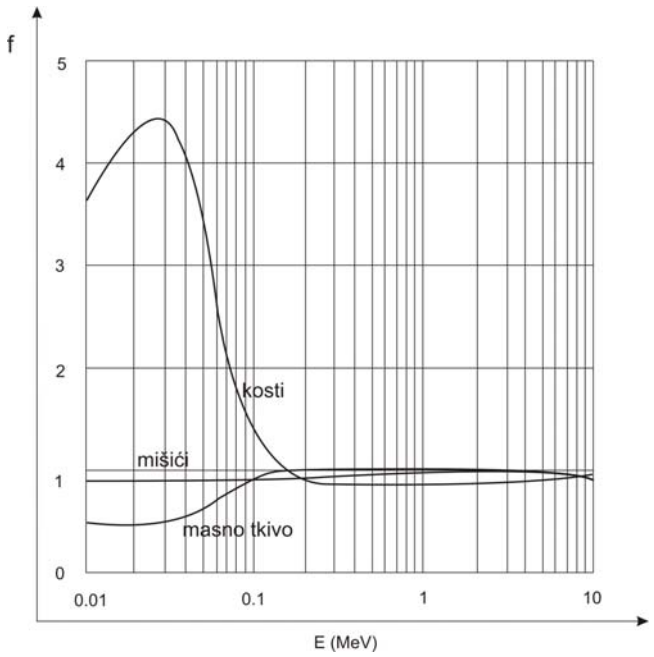
Vrijednosti masenog apsorpcijskog koeficijenta dane su u tablici 3.5.2.

Na osnovi definicije jedinice za ekvivalentnu dozu, možemo na temelju relacije (9.7.1), neposredno napisati izraz koji određuje brzinu efektivne doze od γ-zračenja u organizmu:

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = EI(\mu_a/\rho) \quad \frac{Sv}{s}\left[=\frac{Gy}{s}\right] \tag{9.7.2}$$

Potrebno je podsjetiti da je faktor Q je za γ-zračenje jednak jedinici (tablica 9.2.2).

Tkiva raznih gustoća imaju različite vrijednosti apsorpcijskih koeficijenata za γ-zrake. Zbog toga treba, prosječne vrijednosti apsorpcijskih koeficijenata za tkivo, navedene u tablici 3.5.2, kada se računaju apsorbirane doze u kostima, mišićnom tkivu i masnom tkivu množiti sa koeficijentom f iz slike 9.7.1 (prema K.Morgan and J.Turner, Principles of Radiation Protection, New York, Wiley, 1967.).



Slika 9.7.1 Ovisnost faktora f o energiji za γ-zraka

Ekvivalentnu brzinu doze $\dot{H}$ od γ-zraka u tkivu možemo odrediti na temelju mjerene brzine ekspozicije X. Iz relacije (9.7.1), a i iz definicije ekspozicije i apsorbirane doze očigledno je da mora vrijediti veza tih veličina:

$$\dot{H} = \dot{X}\frac{(\mu_a/\rho)_{tkivo}}{(\mu_a/\rho)_{zrak}}. \qquad (9.7.3)$$

Primjer 9.7.1

Kolika je efektivna doza u cijelom tijelu te u kostima i mišićnom tkivu radnika koji je na svom radnom mjestu podvrgnut ozračenju γ-zrakama energije 0.1MeV, ako je u prostoriji izmjerena ekspozicija $\dot{X} = 5\ \mu Gy/h$? Usporediti primljenu dozu s dozvoljenom dozom za profesionalno osoblje.

Rješenje

Apsorpcijski koeficijent γ-zraka energije 0.1MeV, prema tablici 3.5.2, iznosi:

- za tkivo 0,00271 m^2/kg

- za zrak 0,00223 m^2/kg.

Ekvivalentna će doza zračenja u tkivu biti

$$\dot{H} = 5 * 10^{-6}\frac{0.00271}{0.00223} = 6{,}1\,\mu Sv/h.$$

Slika 9.7.1. pokazuje da su vrijednosti faktora f kod 0,1MeV, za kosti 1,4 , a za mišićno i masno tkivo oko 0,9.

Apsorbirana doza biti će dakle biti za kosti 8,5μSv/h, a za mišićno i masno tkivo 5,5μSv/h.

Uzevši da je u godini oko 2000 radnih sati, radnik koji bi cijelu godinu kontinuirano bio ozračivan dozom čija je brzina 6,1μSv/h, primio bi dozu na cijelo tijelo od oko 12,2mSv/god, što je manje od dozvoljene doze za profesionalno osoblje, koja iznosi 50mSv/god.

Primjer 9.7.2

Koliki je tok γ-zraka energije 0.1MeV potreban da se dobije brzina ekspozicije u zraku 5μGy/h, sa kojom se je računalo u primjeru 9.7.1?

Rješenje

Prema izrazima (9.7.1) i (9.7.2), tok γ-zraka energije 0.1MeV

$$I = \frac{\dot{X}}{E(\mu_a/\rho)_{zraka}} = \frac{5*10^{-6}}{0.1*1.6*10^{-13}*0.0023} = 1.36*10^{11}\ \gamma - zraka/m^2h = 3778\ \gamma - zraka/cm^2s$$

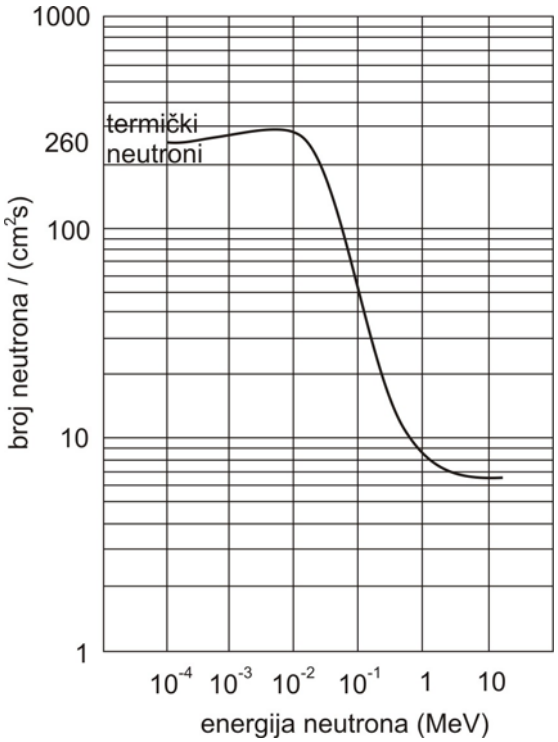
.

Doze od neutronskog zračenja

Apsorbirane doze zbog neutronskog zračenja mnogo se teže računaju nego kada je riječ o γ-zračenju. Razlog je u činjenici što su reakcije neutronskog zračenja sa molekulama tkiva kompleksnije, posebno kada se radi o brzim neutronima.

Nuklearne reakcije sa neutronima mogu rezultirati stvaranjem γ-zraka u tkivu(n,γ reakcije) ili stvaranjem težih nabijenih čestica, zbog interakcije neutrona sa atomima. Najčešće se radi o sudarima neutrona sa atomima vodika u tkivu, koje dovodi do stvaranja protona. Te nabijene čestice izazivaju ionizaciju u okolnom tkivu (sekundarna ionizacija).

Ako obratimo pažnju na efektivnu dozu u tkivu, kod zračenja tkiva sa termičkim neutronima, najveći doprinos efektivnoj dozi daje zračenje izazvano γ-zrakama (udarni presjeci n,γ reakcija su za termičke neutrone relativno veliki, a neutroni nemaju dovoljno energije za izbacivanje jezgara atoma iz elektronskih plašteva). Nasuprot tome, efektivne doze u tkivu zbog zračenja sa brzim neutronima, potječu pretežno od protona, nešto manje od jezgara težih atoma, a najmanje od γ-zraka.



Slika 9.7.2 Tok neutrona koji daje ekvivalentnu dozu od 0.01 mSv/h

Da bi se lakše izračunalo vanjsko ozračenje tijela neutronima, na slici 9.7.2. (prema Appendix 6, ICRP publication 21) prikazan je tok neutrona raznih energija koji dovodi do efektivne doze u tkivu od 10μSv/h.

Primjer 9.7.3

Neki čovjek izložen je toku neutrona od 10^4 neutrona/cm^{2}s energije 2MeV u trajanju od 10 minuta. Kolika je ekvivalentna doza i brzina doze?

Rješenje

Integralni tok neutrona u 10 minuta je $6*10^6$neutrona/cm^2. Iz slike 9.7.2. proizlazi, za neutrone energije 2MeV, da tok od 7neutrona/cm^{2}s daje brzinu apsorbirane doze 10μSv/h Dakle, integralni tok neutrona na sat od $7*3600=2{,}52x10^4$ neutrona/cm^2 dovodi do ekvivalentne doze od 10μSv.

Na temelju danih podataka, ekvivalentna doza zračenja u zadanom primjeru iznosi

$10*6*10^6/(2.52*10^4)$=2381μSv=2.38mSv.

Brzina doze je 14.28mSv/h.

Ekvivalentne doze od unutrašnjeg zračenja

Unutarnje doze zračenja su posljedica inhalacije ili ingestije (gutanja) radioaktivnih materija, odnosno njihovog unošenja u organizam na bilo koji način.

Zbog bioloških procesa pojedini organi mogu koncentrirati pojedine vrste radioaktivnih izotopa, a neki se radioaktivni nuklidi raspoređuju gotovo po cijelom organizmu.

U analizi koja slijedi sa C(t) označiti ćemo aktivnost (broj raspada u jedinici vremena) nekog radioaktivnog izotopa koji je unesen u organizam i koji se koncentrira u nekom organu. Taj je broj ovisan o vremenu t. Uzmimo da u radioaktivnom raspadu svaki atom tog izotopa proizvodi po jednu

česticu (α-česticu, β-česticu ili γ-zraku) sa prosječnom energijom E i faktorom kvalitete Q. Pretpostaviti ćemo, nadalje, da se sva energija emitiranih čestica oslobađa unutar organa mase M koji je koncentrirao taj radioaktivni izotop.

Brzina efektivne doze $\dot{H}$ u organu će biti

$$\dot{H} = \frac{C(t)EQ}{M}\left[\frac{Sv}{s}\right]. \qquad \textbf{(9.7.4)}$$

Dalji problem pri proračunu doze nastaje zbog činjenice da radioaktivni izotopi često emitiraju više raznorodnih čestica različitih energija i da se sva energija emitiranih čestica (posebno kada se radi o γ-zrakama) ne oslobađa u organu u kojem se nalaze atomi radioaktivnog izotopa, nego i u okolnom tkivu. Zbog toga je nužno u proračun uvesti faktor efektivne energetske ekvivalencije ξ, koji je definiran izrazom

$$\xi = \sum_i f_i F_i E_i Q_i \ ,$$

gdje je

- f_i dio radijacije emitirane od radioaktivnog izotopa koja ima energiju E_i
- F_i dio energije čestice i koja se oslobađa u specificiranom organu
- E_i energija čestice i
- Q_i faktor kvalitete čestice i.

Uvođenjem faktora ξ jednadžba (9.7.4) postaje

$$\dot{H} = \frac{C(t)\xi}{M}\left[\frac{Sv}{s}\right]. \qquad \textbf{(9.7.5)}$$

Vrijednosti faktora ξ raznih izotopa sa naznakom organa na koji se odnosi su dani u priručnicima iz zaštite od zračenja. Kao primjer, podaci za neke radioaktivne izotope dani su u tablici 9.7.1.

Primjer 9.7.4

Kosti nekog čovjeka sadrže 1μg izotopa ^{239}Pu. Masa kostiju je približno 7kg. Faktor ξ za taj izotop plutonija je 270MeV, a poluvrijeme raspada 24000 godina. Kolika je efektivna brzina doze zračenja u kostima?

Rješenje

Broj atoma ^{239}Pu u jednom mikrogramu je $2.5*10^{15}$. Konstanta radioaktivnog raspada izotopa ^{239}Pu iznosi $9.16*10^{-13}s^{-1}$. Aktivnost plutonija u kostima iznosi 2290Bq. U danom ćemo primjeru tu aktivnost smatrati konstantnom i ekvivalentnom s C(t).

Efektivna brzina doze u kostima biti će, prema izrazu 9.7.5,

$$\dot{H} = \frac{2290*270*1.6*10^{-13}}{7} = 1.4*10^{-8}\ \frac{Sv}{s} = 50.1\ \mu Sv/h\,.$$

Aktivnost unesenog radionuklida u organizam C(t) mijenja se:

- zbog radioaktivnog raspada

- zbog izlučivanja iz organizma u biološkim procesima.

Na osnovi toga možemo aktivnost unesenog radioaktivnog izotopa u specificiranom organu u vremenu t odrediti kao

$$C(t) = C_0 R(t) e^{-\lambda t}\,, \qquad \textbf{(9.7.6)}$$

gdje je

- C unesena aktivnost u organizam

- R(t) faktor retencije koji pokazuje koji se dio unesenih radioaktivnih nuklida u tijelo u vremenu t=0 nalazi u specificiranom organu u vremenu t.

- λ konstanta radioaktivnog raspada

Uvrštenjem relacije (9.7.6) u jednadžbu (9.7.5), proizlazi

$$\dot{H} = \frac{C_0 \xi}{M} R(t) e^{-\lambda t}\ \frac{Sv}{s} \qquad \textbf{(9.7.7)}$$

Jednadžba (9.7.7) je primjenjiva kod jednokratnog unošenja radioaktivnog izotopa u organizam.

Ako je unošenje radioaktivne tvari u organizam kontinuirano (što je najčešće slučaj) treba definirati unesenu količinu aktivnosti u intervalu dt, kao $C_1 d\tau$, smatrajući da je C_1 količina aktivnosti unesena u organizam u vremenu τ po jedinici vremena.

Količina radioaktivnosti preostala u specificiranom organu u vremenu t biti će

$$C_1 R(t-\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau\,.$$

Na temelju napisane relacije možemo odrediti ukupnu aktivnost radioaktivnih nuklida u nekom organu zbog konstantnog unašanja tog nuklida u organizam u periodu od τ=0 do τ=t:

$$C(t) = C_1 \int_0^t R(t-\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau\,. \qquad \textbf{(9.7.8)}$$

Vremensku razliku t-τ možemo označiti sa x, pa je $d\tau$=dx, a integral postaje

$$\int_0^t R(x) e^{-\lambda x} dx\,.$$

Vrijednost integrala ostaje ista ako varijablu x zamijenimo sa t, pa se dobiva izraz

$$\dot{H} = \frac{C_1 \xi}{M} \int_0^t R(t) e^{-\lambda t} dt \qquad \left[\frac{Sv}{s}\right]. \qquad \textbf{(9.7.9))}$$

Faktor retencije R(t) ovisan je o tzv. biološkom poluvremenu izlučivanja radioaktivnih nuklida iz nekog organa. Taj se faktor može definirati izrazom

$$R(t) = q e^{-\lambda_b t}\,, \qquad \textbf{(9.7.10)}$$

gdje je

q dio količine unesenih radioaktivnih nuklida C koji se koncentriraju u specificiranom organu. Parametar q ovisi i o načinu unošenja radioaktivnih nuklida u organizam (inhalacija ili ingestija)

λ_b konstanta biološkog izlučivanja radioaktivnih nuklida iz specificiranog organa

Analogno kao kod radioaktivnog raspada, može se pisati

$$\lambda_b = ln(2)/T_{b1/2} ,$$

gdje je $T_{b1/2}$ biološko poluvrijeme izlučivanja radioaktivnih nuklida iz specificiranog organa. Uvrštenjem izraza (9.7.10) u relaciju (9.7.9), slijedi

$$\dot{H} = \frac{C_1 \xi q}{M} \int_0^t e^{-(\lambda_b + \lambda)t} dt \quad \left[\frac{Sv}{s}\right]. \qquad \textbf{(9.7.11)}$$

Karakteristike nekih izotopa, potrebne za izračunavanje izraza (9.7.11), navedene su u tablici 9.7.1. (prema ICRP publication No 2)

Tablica 9.7.1 Karakteristike nekih radioaktivnih radioizotopa

Izotop	Vrijeme [dana]		Organ	ξ [MeV]	q	
	poluraspada	poluizlučivanja			inhalacija	ingestija
^{3}H	$4.5*10^{3}$	11.9	cijelo tijelo	0.01	1.0	1.0
^{14}C	$2.1*10^{6}$	10	cijelo tijelo	0.054	1.0	0.75
^{60}Co	$1.9*10^{3}$	9.5	cijelo tijelo	1.5	0.3	0.4
^{90}Sr	$1.1*10^{4}$	$1.3*10^{4}$	cijelo tijelo	1.1	0.3	0.4
		$1.8*10^{4}$	kosti	5.5	0.09	0.12
^{131}I	8.04	$1.4*10^{2}$	cijelo tijelo	0.44	1.0	0.75
			tirioda	0.23	0.3	0.23
^{239}Pu	$8.9*10^{6}$	$7.3*10^{4}$	kosti	270	$2.4*10^{-5}$	0.20
^{235}U	$2.6*10^{11}$	300	kosti	230	$1.1*10^{-5}$	0.028

Relacija (9.7.11) može poslužiti za određivanje unutarnje doze zračenja nakon određenog vremena t u specificiranom organu ili cijelom tijelu, zbog unašanja nekog radioaktivnog nuklida sa specifičnom aktivnošću C_1(Bq/s) u organizam.

Upotrebljiva je, međutim, i za rješenje inverznog problema: Određivanje maksimalno dozvoljene aktivnosti nekog radioaktivnog nuklida po jedinici mase u pojedinih tvarima koje se unose u organizam. Parametar o kojemu je riječ poznat je kao maksimalno dozvoljena koncentracija (MDK) aktivnosti (Bq/kg) pojedinih radioaktivnih nuklida u tvarima koje čine životnu sredinu čovjeka (zrak, voda, hrana).

Maksimalno dozvoljena koncentracija uvjetovana je zahtjevom da u toku određenog vremena dozvoljena doza zračenja u specificiranom organu ne premaši propisanu vrijednost.

Vrijeme u kojem se promatraju posljedice unošenja radioaktivnih nuklida u organizam propisima je određeno na 50 godina. U tom periodu dio nuklida koji imaju kraće poluvrijeme raspada ili kraće biološko vrijeme postižu ravnotežu, a neki (na primjer ^{239}Pu ili ^{235}U), s poluvremenom raspada i izlučivanja mnogo dužim od 50 godina (vidi tablicu 9.7.1.) konstantno povećavaju koncentraciju u tijelu. Iz praktičkih razloga jedinični intenzitet C_1 određuje se sa unošenom aktivnošću po danu, koju ćemo obilježiti sa C_d.

Integracijom izraza (9.7.11) proizlazi

$$\dot{H} = \frac{C_d \xi q}{M(\lambda_b + \lambda)}\left(1 - e^{-(\lambda_b+\lambda)t}\right) \qquad \left[\frac{Sv}{dan}\right]. \tag{9.7.12}$$

Aktivnost C_d unosi se putem uzimanja izvjesnog volumena hrane ili pića ili udisanjem određenog volumena zraka koji sadrže radioaktivne tvari.

Uzmimo, radi primjera, da se u organizam unosi neki radioaktivni nuklid putem uzimanja vode. Pri tome problem koji treba riješiti glasi: Kolika smije biti najveća koncentracija (MDK) tog nuklida u vodi da se kontinuiranim uzimanjem vode ne premaši maksimalno dozvoljena doza (MDD) u cijelom tijelu ili organu u kojemu se taj nuklid koncentrira.

Volumen vode koja se uzima, volumen zraka koji se udiše, kao i volumeni nekih karakterističnih živežnih namirnica koje se troše su propisane za tzv. "standardnog čovjeka" koji služi kao model za proračun. Na osnovi navedenog možemo za vodu pisati

$$C_d = (MDK)_v V_v ,$$

gdje je V_v volumen vode koji se dnevno konzumira.

Uvrštenjem u relaciju (9.7.12) možemo izraziti maksimalno dozvoljenu koncentraciju nekog radioaktivnog nuklida u vodi (MDK) uz koju specificirani organ mase M dobiva u toku vremena t (50 godina) dozvoljenu efektivnu dozu zračenja (MDD) kao

$$(MDK)_v = \frac{(MDD)M(\lambda + \lambda_b)}{\xi q V_v}\left(1 - e^{-(\lambda+\lambda_b)t}\right)^{-1}. \tag{9.7.13}$$

Maksimalno dozvoljene koncentracije radioaktivnih nuklida definiraju se za profesionalno osoblje, a koncentracije za stanovništvo se uzimaju 1% do 10% od tih vrijednosti.

Iznos maksimalno dozvoljenih koncentracija radioaktivnih nuklida u tvarima koje se unose u organizam ovisi, osim o karakteristikama nuklida i organa koji ga koncentrira te količini tvari koja ulazi u organizam zbog održavanja životnih funkcija (voda, zrak, hrana prema definiciji "standardnog čovjeka"), također i o sastavu smjese radioaktivnih nuklida koji se s tim tvarima unose u tijelo. Očigledno je, naime, da će maksimalno dozvoljena doza pojedinog organa biti zbroj pojedinačnih efektivnih doza zračenja tog organa koje potječu od utjecaja svih radioaktivnih nuklida.

Podaci za maksimalno dozvoljene koncentracije radionuklida u vodi i zraku za profesionalno osoblje i stanovništvo su uključeni u propise za zaštitu od radioaktivnog zračenja.

Primjer 9.7.5

Neko nuklearno postrojenje ispušta kontinuirano izvjesnu količinu izotopa ^{131}I čime se njegova koncentracija u zraku u okolini postrojenja održava na $0.06Bq/m^3$. Kolika je prosječna godišnja doza zračenja primljena na tiroidu čovjeka u okolini tog postrojenja?

Kod računa treba uzeti u obzir da je prosječna količina zraka koji udiše odrasli čovjek $20m^3/24h$, a prosječna masa tiroide 20g.

Rješenje:

Iz tablice 9.7.1. možemo za ^{131}I očitati podatke:

T=8.04 dana, T_b=140 dana, ξ=0.23MeV, q=0.3 (za inhalaciju).

Iz danih podataka slijedi $\lambda=9.97*10^{-7}s^{-1}$, $\lambda_b=5.73*10^{-8}s^{-1}$.

$\lambda+\lambda_b=1.05*10^{-6}s^{-1}$.

S obzirom da se radi o kontinuiranom procesu inhaliranja joda, možemo uzeti da je vrijeme t znatno veće od vremena jednog i drugog poluraspada te računati s ravnotežnim slučajem (zanemarujući eksponencijalni član).

Količina inhalirane radioaktivnosti na dan je

$C_d = 0.06 * 20 = 1.2\ Bq$.

Uvrštenjem dobivenih veličina u izraz (9.7.13) slijedi brzina doze na tiroidu zbog kontinuirane inhalacije ^{131}I u date koncentracije

$$\dot{H} = \frac{1.2 * 0.23 * 1.6 * 10^{-13} * 0.3}{0.02 * 1.05 * 10^{-6}} = 6.31 * 10^{-7}\ Sv/dan = 0.23\ mSv/god\ .$$

Primjer 9.7.6

Koliki je (MDK) za tricij (^3H) u vodi za piće ako se doza zračenja pojedinca iz tog izvora ograniči na 1mSv/god? Pretpostavlja se da prema modelu standardnog čovjeka potrošnja vode iznosi 2.5 litara dnevno. Tricij se jednoliko miješa sa vodom u organizmu. Pretpostavlja se da je tijelo teško 60kg.

Rješenje

Podaci za tricij iz tablice 9.7.1. jesu:

$t_{1/2}=4.5*10^3$ dana, $t_{1/2b}$=11.9 dana, ξ=0.01MeV,q=1 (za ingestiju).

Organ u kojemu se radioaktivni nuklid koncentrira: Cijelo tijelo.

Iz danih podataka možemo odmah izračunati

$\lambda=1.54*10^{-4}d^{-1}$, $\lambda_b=5.82*10^{-2}d^{-1}$, $\lambda+\lambda_b=5.84*10^{-2}d^{-1}$,

t=50*365=18250 dana, $(\lambda+\lambda_b)t$=1065.8.

Dozvoljena dnevna doza je $2.74*10^{-6}$Sv.

Uvrštenjem u relaciju (9.7.13) uz zanemarenje eksponencijalnog člana dobivamo

$$MDK_v = \frac{2.74 * 10^{-6} * 60 * 5.84 * 10^{-2}}{0.01 * 1.6 * 10^{-13} * 2.5 * 10^{-3}} = 2.4 * 10^{12}\ 1/dm^3 = 2.7 * 10^7\ Bq/m^3\ .$$

Dobivena vrijednost je nešto niža od one koja je propisima ograničena. Propisima je MDK za tricij u pitkoj vodi ograničena na $6*10^7Bq/m^3$. Razlike mogu nastati radi pretpostavke o vremenu trajanja konzumiranja vode s maksimalnom koncentracijom tricija u godini.(veće se koncentracije mogu dopustiti ako se voda konzumira kraće vrijeme).

9.8 Štitovi od nuklearnog zračenja

Zaštitu od vanjskog nuklearnog zračenja možemo osigurati upotrebom odgovarajućih štitova. Štitovi se izrađuju iz prikladnih materijala i odgovarajućih dimenzija. Zadatak im je da nuklearnim reakcijama između zračenja i materijala štita smanje intenzitet zračenja na izlazu iz štita. Štitovi su neophodna zaštita od γ-zraka i neutronskog zračenja (posebno od zračenja brzih neutrona). Mnogo su rjeđe potrebni za zaštitu od β zračenja, a pogotovo od α zračenja, zbog male prodornosti tih zraka.

U poglavlju 3.5. dan je elementarni prikaz analize prolaza γ-zraka kroz materijale. Tamo je naglašeno da tok γ-zraka nakon prolaza kroz materijal ovisi o jačini izvora, debljini materijala, masenom apsorpcijskom koeficijentu i faktoru nakupljanja. Osnovna poteškoća kod proračuna efikasnosti štitova od zračenja (koji se često nazivaju biološki štitovi), leži upravo u određivanju faktora nakupljanja. Taj faktor ovisi o geometriji i sekundarnim nuklearnim reakcijama u materijalu koje izaziva γ-zračenje (Comptonovo raspršenje, stvaranje parova).

Točan proračun štitova od zračenja kod kompleksnih geometrija izvora zračenja i štita je predmet specijalističkih priručnika. U okviru ovog poglavlja dati će se elementarni prikaz proračuna štitova od γ-zračenja za neke jednostavne geometrije sa ciljem da se ukaže na metode koje se u tu svrhu primjenjuju.

Točkasti izvor γ-zračenja

Zamislimo točkasti izvor γ-zračenja intenziteta S γ-zraka/s, koji se nalazi u sredini kuglastog štita polumjera R.

Tok γ-zraka I (broj γ-zraka/cm^{2}s) koji prolazi kroz površinu plašta kugle polumjera r, manjem od R, dobiva se iz relacije

$$4\pi r^2 I = SB(\mu r)e^{-\mu r} . \qquad \textbf{(9.8.1)}$$

Izraz na desnoj strani relacije ukazuje da je tok γ-zraka ovisan o raspršenju γ-zraka između izvora i polumjera r (koji je izražen s eksponencijalnim članom, vidi jednadžbu 3.5.5) i o faktoru nakupljanja B(μr).

Na temelju relacije (9.8.1) tok γ-zraka na površini štita može se izraziti kao

$$I = \frac{SB(\mu r)e^{-\mu R}}{4R^2\pi} . \qquad \textbf{(9.8.2)}$$

Brzina ekspozicije na površini štita biti će prema relacijama (9.7.1) i (9.7.3)

$$\dot{X} = EI\left(\mu_a/\rho\right)_{zrak} . \qquad \textbf{(9.8.3)}$$

Faktori nakupljanja za izotropni točkasti izvor γ-zraka za nekoliko materijala dani su u tablici 9.8.1.

Tablica 9.8.1 Faktori nakupljanja za izotropni točkasti izvor γ-zraka

MeV	μR

voda	1	2	4	7	10	15	20
0.255	3.09	7.14	23.0	72.9	166	456	982
0.5	2.52	5.14	14.3	38.8	77.6	178	334
1.0	2.13	3.71	7.68	16.2	27.1	50.4	82.2
2.0	1.83	2.77	4.88	8.46	12.4	19.5	27.7
3.0	1.69	2.42	3.91	6.23	8.63	12.8	17.0
4.0	1.58	2.17	3.34	5.13	6.94	9.97	12.9
6.0	1.46	1.91	2.76	3.99	5.18	7.09	8.85
8.0	1.38	1.74	2.40	3.44	4.25	5.66	6.95
10.0	1.33	1.63	2.19	2.97	3.72	4.90	5.98
željezo							
0.5	1.98	3.09	5.98	11.7	19.2	35.4	55.6
1.0	1.87	2.89	5.39	10.2	16.2	28.3	42.7
2.0	1.76	2.43	4.13	7.25	10.9	17.6	25.1
3.0	1.55	2.15	3.51	5.85	8.51	13.5	19.1
4.0	1.45	1.94	3.03	4.91	7.11	11.2	16.0
6.0	1.34	1.72	2.58	4.14	6.02	9.89	14.7
8.0	1.27	1.56	2.23	3.49	5.07	8.50	13.0
10.0	1.20	1.42	1.95	2.99	4.35	7.54	12.4
olovo							
0.5	1.24	1.42	1.69	2.00	2.27	2.65	2.73
1.0	1.37	1.69	2.26	3.02	3.74	4.81	5.86
2.0	1.39	1.76	2.51	3.66	4.84	6.87	9.00
3.0	1.34	1.68	2.43	3.75	5.30	8.44	12.3
4.0	1.27	1.56	2.25	3.61	5.44	9.80	16.3
5.0	1.21	1.46	2.08	3.44	5.55	11.7	23.6
6.0	1.18	1.40	1.97	3.34	5.69	13.8	32.7
8.0	1.14	1.30	1.74	2.89	5.07	14.1	44.6
10.0	1.11	1.23	1.58	2.52	4.34	12.5	39.2

Primjer 9.8.1

Točkasti izvor emitira γ-zrake energije 1MeV s intenzitetom 10 γ-zraka/s. Izvor se nalazi u sredini kuglastog željeznog štita vanjskog polumjera 14cm. Kolika je ekspozicija na površini štita?

Rješenje

Maseni koeficijent μ/ρ za slabljenje toka γ-zraka energije 1MeV za željezo, prema tablici 3.5.1. iznosi $0.00595 m^2/kg$. Gustoća željeza je $7860 kg/m^3$, iz čega proizlazi da je

$\mu = 46{,}8 m^{-1} = 0.468 cm^{-1}$.

Faktor μR je 14*0.486=6.8. Odgovarajuća vrijednost za faktor nakupljanja, dobivena linearnom interpolacijom iz tablice 9.8.1, iznosi 9.88.

Tok γ-zraka na površini štita, prema relaciji 9.8.2, biti će

$$I = \frac{10^8 * 9.88 * e^{-6.8}}{4 * 14^2 * \pi} = 446.8\ \gamma - zraka/cm^2 s\ .$$

Maseni apsorpcijski koeficijent za γ-zrake energije 1MeV u zraku, prema tablici 3.5.2, $(\mu_a/\rho)_{zraka}=0.0028 m^2/kg$. Taj koeficijent ne ovisi bitno o energiji γ-zraka.

Primjenom relacije 9.8.3. dobiva se brzina ekspozicije na površini štita

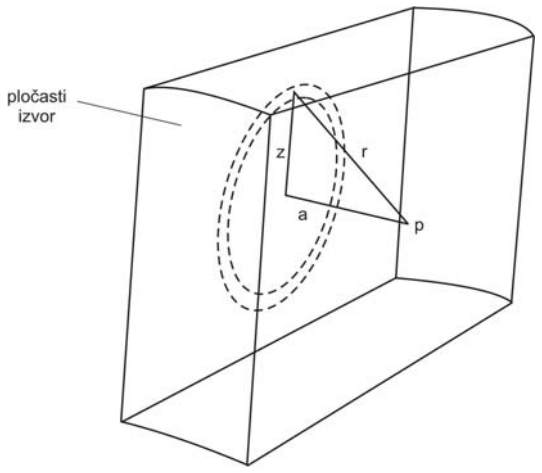
$$\dot{X} = 1.6 * 10^{-13} * 446.8 * 10^4 * 0.0028 = 2.0 * 10^{-9}\ Gy/s = 7.2\ \mu Gy/h\ .$$

Nešto je teži slučaj kada se problem zada obrnuto, tj. kada treba iz zadane ekspozicije na površini odrediti debljinu štita. U tom slučaju treba proračun provesti za nekoliko debljina štitova i rješenje naći interpolacijom.

Neograničeni ravni izvor γ-zraka

Analiza zaštitnih štitova u slučaju neograničenog pločastog izvora γ-zračenja je teža nego kada se radi o točkastom izvoru, ali je značajna kod rješavanja mnogih praktičkih problema (primjerice, γ-zračenje površine velikog spremnika s radioaktivnim materijalom može se aproksimirati zračenjem neograničenog pločastog izvora).

Zamislimo da na jednoj strani štita debljine a imamo pločasti izvor zračenja, s čije se površine emitira S γ-zraka/cm^2s.



Slika 9.8.1 Pločasti izvor γ-zraka

Ako je, prema slici, neka točka P na drugoj strani štita, tada će tok γ-zraka koji do te točke stiže iz zamišljenog kruga polumjera z i širine dz opisanog oko okomice spuštene od točke P na ravninu izvora biti

$$dI = \frac{2S\pi zB(\mu r)e^{-\mu r}dz}{4\pi r^2} = \frac{S}{2}\frac{zB(\mu r)e^{-\mu r}dz}{r^2}. \qquad \textbf{(9.8.4)}$$

Izraz (9.8.4) je napisan neposrednim korištenjem ranije danog izraza za točkasti izvor (relacija 9.8.2). Naime, u odnosu na točku P, svaka točka unutar kruga dz može se tretirati kao točkasti izvor.

Tok γ-zraka, koji iz ravnog izvora dolazi do točke P, dobiva se integracijom izraza (9.8.4) u granicama između z=0 i z=∞.

Iz trokuta označenog na slici 9.8.1. izlazi da je zdz=rdr. Kod zamjene z sa r treba uzeti u obzir da se mijenja donja granica integracije, jer z=0 odgovara r=a.

Integracija izraza (9.8.4) je moguća uz uvjet da se analitički izrazi funkcionalna veza između faktora nakupljanja B(μr) i polumjera r.

U tu je svrhu razvijen matematički izraz za faktor nakupljanja kod točkastog izvora kao zbroj eksponencijalnih članova, inače poznat kao Taylorova formula:

$$B(\mu r) = A_1 e^{-\alpha_1 \mu r} + A_2 e^{-\alpha_2 \mu r} . \qquad \textbf{(9.8.5)}$$

Konstante A_1, A_2, α_1 i α_2 u izrazu (9.8.5) su za neke materijale dane u tablici 9.8.2. (13)

Iz početnog uvjeta kod r=0, proizlazi da mora biti $A_1+A_2=1$.

Tablica 9.8.2 Konstante materijala za proračun nakupljanja

Materijal	energija [MeV]	A_1	$-\alpha_1$	α_2
voda				
	0.5	100.485	0.12687	-0.10925
	1.0	19.601	0.09037	-0.02522
	2.0	12.612	0.05320	0.01932
	3.0	11.110	0.03550	0.03206
	4.0	11.163	0.02543	0.03025
	6.0	8.325	0.01820	0.04164
	8.0	4.635	0.02633	0.07097
	10.0	3.545	0.02991	0.08717
beton				
	0.5	38.225	0.14824	-0.10579
	1.0	25.507	0.07230	-0.01843
	2.0	18.089	0.04250	0.00849
	3.0	13.640	0.03200	0.02022
	4.0	11.460	0.02600	0.02450
	6.0	10.781	0.01520	0.02925
	8.0	8.972	0.01300	0.02979
	10.0	4.015	0.02880	0.06844
željezo				
	0.5	31.375	0.06842	-0.03742
	1.0	24.957	0.06086	-0.02463
	2.0	17.622	0.04627	-0.00526

	3.0	13.218	0.04431	-0.00087
	4.0	9.624	0.04698	0.00175
	6.0	5.867	0.06150	-0.00186
	8.0	3.243	0.07500	0.02123
	10.0	1.747	0.09900	0.06627
olovo				
	0.5	1.677	0.03084	0.30941
	1.0	2.984	0.03503	0.13486
	2.0	5.421	0.03482	0.04379
	3.0	5.580	0.05422	0.00611
	4.0	3.897	0.08468	-0.02383
	6.0	0.926	0.17860	-0.04635
	8.0	0.386	0.23691	-0.05864
	10.0	0.311	0.24024	-0.02783

Na temelju relacija (9.8.4) i (9.8.5) dobivamo

$$dI = \frac{S}{2}\left[\frac{zA_1 e^{-\mu(1+\alpha_1)r} + z(1-A_1)e^{-\mu(1+\alpha_2)r}}{r^2}\right]dz\,.$$

Sada možemo izraz integrirati u granicama od z=0 do z=∞. Integracija se može izvesti ako uzmemo u obzir da je zdz=rdr, s tim da, u smislu prijašnje napomene, donjoj granici odgovara r=a. Nadalje, radi svođenja integrala na standardni oblik potrebno je uvesti supstituciju $t=\mu r(1+\alpha_{1,2})$, čime se dobiva

$$I = \frac{S}{2}\left[A_1 \int_{\mu a(1+\alpha_1)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt + (1-A_1)\int_{\mu a(1+\alpha_2)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt\right]. \qquad \textbf{(9.8.6)}$$

Funkcije tipa

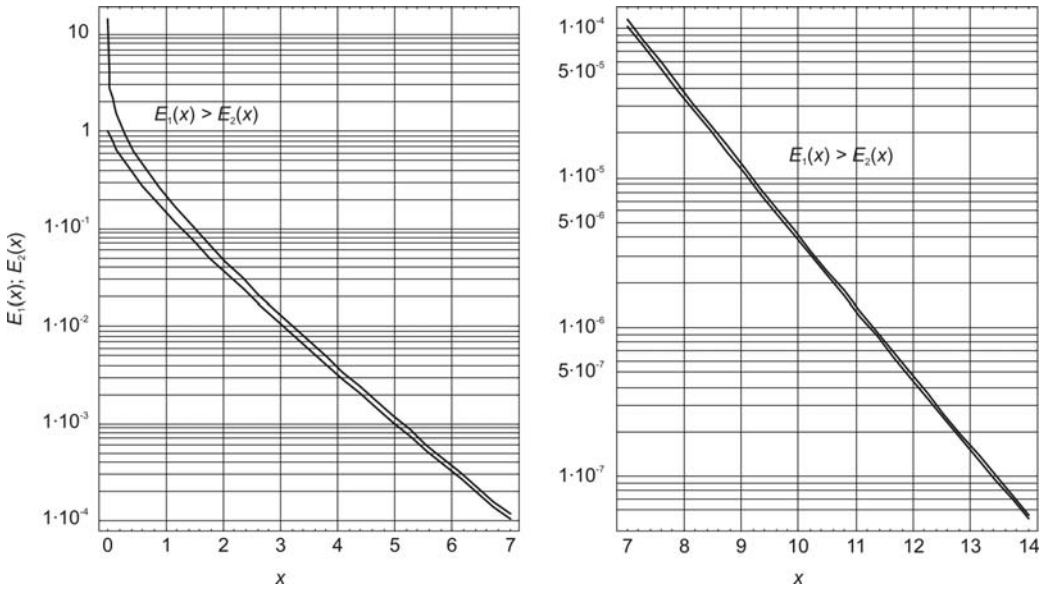
$$E_n(x) = x^{n-1}\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^n}dt\,.$$

jesu standardne i tabelirane u specijalnim priručnicima.

U jednadžbi (9.8.6) javljaju se samo funkcije $E_1[\mu a(1+\alpha_{1,2})]$, jer je n=1, pa se može pisati

$$I = \frac{S}{2}\left\{A_1 E_1\left[\mu a(1+\alpha_1)\right] + (1-A_1)E_1\left[\mu a(1+\alpha_2)\right]\right\}. \qquad \textbf{(9.8.7)}$$

Tok funkcija $E_1(x)$ i $E_2(x)$ u ovisnosti o x prikazan je na slici 9.8.2.



Slika 9.8.2 Funkcije $E_1(x)$ i $E_2(x)$

Primjer 9.8.2

Neograničeni pločasti izvor emitira 10^9 γ-zraka/cm^{2}s s energijom 2MeV. Okolina izvora je zaštićena betonskim zidom debljine 130cm. Gustoća betona je 2350kg/m^3. Kolika je ekspozicija na vanjskoj strani betonskog štita?

Rješenje

Iz tablice 9.8.2. možemo za γ-zrake energije 2MeV u betonskom štitu očitati: A_1=18.089, α_1=-0.04250, α_2=0.00849.

Nadalje, iz tablice 3.5.1. dobivamo koeficijent μ/ρ=0.00445m^2/kg.

Dakle, μ=0.00445*2350=10.46m^{-1}, a μa=10.46*1.3=13.6.

Iz slike 9.8.2. možemo očitati vrijednosti funkcija:

E_1[13.6*(1-0.04250)]=E_1(13)=1.9*10^{-7}

E_1[13.6*(1+0.00849)]=E_1(13.7)=9*10^{-8}.

Tok γ-zraka na površini štita, prema relaciji (9.8.7), biti će

$$I = \frac{10^9}{2}\left(18.089 * 1.9 * 10^{-7} - 17.089 * 9 * 10^{-8}\right) = 949\ \gamma - zraka / cm^2 s\ .$$

Maseni apsorpcijski koeficijent (μ_a/ρ) za γ-zrake energije 2MeV u zraku (Tablica 3.5.2), iznosi 0.00238m^2/kg.

Dobiveni podaci omogućuju da se odredi brzina ekspozicije na vanjskoj površini betonskog štita:

U rješavanju praktičnih problema proračuna štitova od γ-zračenja nailazi se na kompliciranije slučajeve kao što su volumno raspodijeljeni izvori γ-zraka, linearni izvori, proračuni višeslojnih štitova, višedimenzionalni proračuni štitova.

Razmatranje takvih proračuna je van dometa ove knjige, i obično van interesa nuklearnih energetičara. Za njihovo rješavanje treba konzultirati specijalne priručnike.

Štitovi od neutronskog zračenja

Zaštita od izvora zračenja brzih neutrona (među koje spadaju i fisijski neutroni) se teško provodi jer se ti neutroni ne mogu efikasno apsorbirati. Poznato je, naime, da su apsorpcijski udarni presjeci svih materijala za brze neutrone vrlo maleni. Zbog toga se strategija zaštite od brzih neutrona sastoji najprije na njihovom usporavanju, a tek tada apsorpciji. U diskusiji o efikasnosti moderatora za usporavanje neutrona u poglavlju 5.2. naglašeno je da od svih materijala najveću sposobnost usporavanja neutrona ima vodik (neutroni u sudaru sa atomom vodika u prosjeku gube 50% energije, jer je parametar x za vodik, prema tablici 5.2.1, 0.725, a $e^{-\xi} \approx 0.5$). Iz tog je razloga vodik jedan od glavnih komponenata u svakom štitu od neutronskog zračenja. Upotrebljava se bilo voda, bilo drugi materijali sa visokim sadržajem vodika (primjerice, parafin).

Beton koji se najčešće upotrebljava za izradu štitova sadrži oko 10% vode koja vrši funkciju usporavanja neutrona.

Kada je potrebno usporiti vrlo brze neutrone, dobivene iz akceleratorskih meta ili fuzijskih reakcija (energija tih neutrona je oko 14MeV), za zaštitu se upotrebljavaju teži elementi koji usporavaju neutrona putem neelastičnih sudara. Kod visokih energija neutrona te su nuklearne reakcije efikasnije za usporavanje neutrona od elastičnih sudara sa atomima vodika (kod energija fisijskih neutrona su udarni presjeci neelastičnih sudara mnogo manje značajni).

Kada je riječ o štitovima od neutronskog zračenja treba uzeti u obzir da se apsorpcija neutrona u materijalima ostvaruje putem (n,γ) reakcija, u kojima se proizvode γ-zrake čija energija, kod apsorpcije neutrona u vodi, iznosi 2.2MeV, a kod apsorpcije neutrona u težim elementima može biti još veća (apsorpcija neutrona u željezu proizvodi γ-zrake energije 7.6 i 9.3MeV). Zbog toga kod projektiranja štitova od neutronskog zračenja treba voditi računa i o zaštiti od sekundarno nastalih γ-zraka.

Zadaci uz poglavlje 9.

1. U nekom je prostoru izmjerena ekspozicija 3mGy/h od γ-zraka energije 2.5MeV. Koliko se ionskih parova proizvodi u kilogramu zraka tim zračenjem i kolika je primljena doza radnika koji u tom prostoru boravi 20 minuta?

2. Točkasti izvor ^{137}Cs emitira γ-zrake energije 0.662MeV, a aktivnost mu je $5*10^9$Bq. Kolika je brzina ekspozicije na udaljenosti 50cm od izvora?

3. Prilikom veće havarije na nuklearnom postrojenju stanovništvo u okolini postrojenja je izloženo ekspoziciji γ-zraka prosječne energije 1.3MeV intenziteta 2mGy/h iz radioaktivnog oblaka u trajanju od 2 dana. Koliko je postotaka, na osnovi linearne hipoteze odnosa primljene doze i rizika, povećana vjerojatnost smrti od raka ozračenog stanovništva?

4. Koliko vremena u toku godine smije biti radnik izložen brzini ekspozicije od 5mGy/h?

5. U eksperimentalnom kanalu nekog istraživačkog reaktora je tok termičkih neutrona 10^5 neutrona/cm^{2}s. Koliko bi vremena ruke eksperimentatora smjele biti izložene tom toku neutrona da primljena doza ne bude veća od 0.1mSv?

6. Koliki smije biti tok neutrona energije 0.5MeV u nekom prostoru da se u njemu radnik, radi obavljanja nekog posla, može zadržati 5 minuta, a da mu primljena doza ne bude veća od 30mSv?

7. Neki točkasti radioaktivni izvor ima aktivnost $3*10^7$Bq i nema biološkog štita. Izvor emitira γ-zrake energije 0.7MeV. Koliku bi dozu primio čovjek koji bi proveo 10 minuta na udaljenosti 2m od izvora?

8. Kolika je nakon godine dana apsorbirana doza u kostima čovjeka koji dnevno ingestijom unosi u organizam 10^3Bq izotopa ^{90}Sr? Pretpostaviti da masa kostiju iznosi 7kg.

9. Ocijeniti, korištenjem podataka iz tablice 9.7.1, maksimalnu dozvoljenu koncentraciju ^{239}Pu u pitkoj vodi uz uvjet da je (MDD) 1mSV/god. Masu kostiju pretpostaviti identičnom kao u primjeru 8, a količinu dnevno konzumirane vode 2.5 litre.

10. Točkasti izvor koji emitira 10^9 γ-zraka energije 2MeV nalazi se u sredini kuglastog olovnog štita. Koliki mora biti polumjer olovnog štita da brzina ekspozicije na njegovoj površini ne bude veća od 10μGy/h?

11. Ravni pločasti izvor γ-zraka emitira 10^7 γ-zraka/cm^{2}s. 70% γ-zraka ima energiju 2.5MeV, a 30% energiju 1MeV. Okolina se štiti betonskim zidom debljine 1m. Gustoća betona je 2500kg/m. Kolika je brzina ekspozicije i brzina doze na površini betonskog štita?

Reference uz poglavlje 9.

[1] J.A.Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapters 9 and 10, Addison-Wesley, Reading Mass, 1975.

[2] S.Glasstone, A.Sesonke, Nuclear Reactor Engineering, Chapters 9 and 10, Van Nostrand New York, 1967.

[3] R.Knief, Nuclear Reactor Technology, Chapter 3, Hemisfere Publ, Co, New York, 1981.

[4] M.Trampuž, Varstvo okolja pred ionizirajuč sevanji, zbirka zveznih predpisov Jugoslavije, Zavod SRS za varstvo pri delu, Ljubljana, 1989.

[5] Facts about low level radiation, IAEA/PI/A. 14E 1986.

[6] Summary Report on the Post-Accident Review Meeting on the Chernobyl Accident, IAEA, Safety Series 75, INSAG 1.

[7] E.N.Jenkins, Radioactivity, chapter 14, Wykeham publ.Co, London, 1979.

[8] J.Weisman, Elements of Nuclear Reactor Design, Chapter 5, Elsevier Scientific Publ. Co., New York, 1977.

[9] K.Ilakovac, M.Turk, Nuklearno zračenje, Tehnička enciklopedija JAZU, 9. svezak, Zagreb, 1984.

[10] S.Babaev i dr, Jadernaja energetika i okružajušćaja sreda, Moskva, Energoizdat, 1981.

[11] Tomaž Fortuna, Radiološka zaščita v procesni tehniki, Zavod za varstvo pri delu SRS, Ljubljana, 1989.

[12] M.Zorko, Osnove radiološke zaščite, Institut J.Štefan, Ljubljana, 1986.

10 IZVORI TOPLINE U NUKLEARNOM REAKTORU

Uvod

Nuklearni reaktor izvor je toplinske energije. Toplinska energija u reaktoru nastaje u procesima fisije, gdje se dio energije veze nukleona u atomu pretvara u toplinsku energiju, te u procesima interakcije nuklearnog zračenja sa materijalima reaktora, kod čega se također oslobađa toplinska energija. Poznavanje intenziteta i prostornog rasporeda toplinskih izvora u nuklearnom reaktoru osnovni je ulazni podatak za projektiranje sustava hlađenja reaktora. Izvor topline u reaktoru potječu iz nuklearnih reakcija koje oslobađaju energiju, a te su reakcije ovisne o gustoći zračenja (uglavnom neutronskog zračenja, a u izvjesnoj mjeri i γ zračenja) u unutrašnjosti reaktora i o odgovarajućim udarnim presjecima materijala. Zbog neposredne veze između nuklearnih reakcija i izvora topline u ovom ćemo se poglavlju pozivati na neke rezultate dobivene u poglavljima u kojima se je razmatrala fizika reaktora i utjecaj zračenja na materijale.

10.1 Nuklearne reakcije kao izvor topline

Fisije atoma urana i plutonija

Osnovni izvor topline u nuklearnoj energetici potječe od fisija atoma urana i plutonija.

Broj nuklearnih reakcija fisije po jedinici volumena i vremena iznosi $\phi\Sigma_f=\phi N\sigma_f$ (vidi poglavlje 2.11), gdje je ϕ tok neutrona (broj neutrona/m^2s), N broj atoma fisibilnih atoma po jedinici volumena, a σ_f mikroskopski udarni presjek za fisiju. U gotovo svim današnjim energetskim reaktorima pretežan broj fisija izazivaju termički neutroni, stoga ćemo podrazumijevati da se neutronski tok i udarni presjek odnose na te neutrone.

U svakoj se fisiji oslobađa energija, u prosjeku oko 200MeV odnosno $3.2*10^{-11}$J (vidi poglavlje 4.2). Iz tog podatka proizlazi da je potrebno oko $3.1*10^{10}$fisija/s za generiranje snage od 1W.

Broj fisibilnih atoma po kilogramu je (vidi poglavlje 2,4):

$$N=\frac{6.023*10^{26}}{A},$$

gdje je A atomska težina fisibilnih atoma.

Na osnovi danih podataka možemo napisati da će generirana snaga reaktora po kilogramu fisibilnih atoma koji on sadrži biti dana izrazom:

$$P=\frac{6.023*10^{26}}{3.1*10^{10}}\left[\frac{\phi\sigma_f}{A}\right]=1.94*10^{16}\left[\frac{\phi\sigma_f}{A}\right]\frac{W}{kg}, \qquad \textbf{(10.1.1)}$$

U većini slučajeva nemamo u reaktoru čisti fisibilni materijal, jer materijal nuklearnog goriva sadrži samo dio fisibilnih atoma.

Ako je e obogaćenje urana, ili maseni udio fisibilnih atoma u nuklearnom gorivu, broj fisibilnih atoma po kilogramu materijala goriva postaje eN, a izraz (10.2.1) pretvara se u

$$P=1.94*10^{16}e\left[\frac{\phi\sigma_f}{A}\right]\frac{W}{kg}. \qquad \textbf{(10.1.2)}$$

Bitno je primijetiti da je snaga reaktora direktno proporcionalna s tokom neutrona ϕ. Raspodjela generirane snage u reaktoru će stoga odgovarati prostornoj i vremenskoj raspodjeli neutronskog toka.

Primjer 10.1.1

Neki reaktor sadrži 60 tona 3.3% obogaćenog urana. Prosječni tok termičkih neutrona u reaktoru je $1.5*10^{13}$ neutrona/cm^{2}s. Kolika je snaga tog reaktora?

Kolika bi bila snaga istog reaktora nakon odgora jezgre, pri istoj visini neutronskog toka, ako je kod istrošene jezgre obogaćenje urana smanjeno na 1.2%, a težinski sadržaj fisibilnog plutonija povećan na 0.5%?

Rješenje:

Udarni presjeci za fisiju, prema tablici 2.13.1, jesu

-za ^{235}U $582.2*10^{-24}$ cm^2

-za ^{239}Pu $742.5*10^{-4}$ cm^2

Atomske težine ovih izotopa možemo zaokružiti na 235 odnosno 239.

Snaga reaktora koji sadrži 3.3% obogaćeni uran će na temelju relacije (10.2.2) biti:

$$P = 60000*1.94*10^{16}*1.5*10^{13}*0.033*\frac{582.2*10^{-24}}{235} = 1.427*10^{9}\ W = 1427\ MW\ .$$

Snaga reaktora s istrošenom jezgrom zadanih karakteristika iznosi

$$P = 60000*1.94*10^{16}*1.5*10^{13}*\left(0.012*\frac{582.2}{235}+0.005*\frac{742.5}{239}\right)*10^{-24} = 7.9*10^{8}\ .$$

$$= 780\ MW$$

Proizvodnja topline u ozračenom nuklearnom gorivu

Ozračeno nuklearno gorivo, i bez fisija, izvor je toplinske energije. Ta energija nastaje zbog radioaktivnih raspada fisijskih produkata u gorivim elementima reaktora.

U poglavlju 4.4. navedene su neke pojednostavljene relacije (kao na primjer, relacija 4.4.3), kojima je moguće odrediti generiranu toplinsku energiju u ozračenom gorivu nakon obustave reaktora.

Snaga nakon obustave reaktora P ovisi o snazi na kojoj je reaktor radio prije obustave P, periodu rada reaktora prije obustave t_0 i vremenu nakon obustave pogona τ-t_0.

U radioaktivnim materijalima se veći dio energije emitiranih materijalnih čestica i fotona putem interakcije s atomima materijala pretvara u toplinsku energiju. Takva vrsta generirane topline je posebno značajna kod odzračenih nuklearnih gorivnih elemenata u kojima zbog fisija nastaje mnoštvo radioaktivnih izotopa.Nastala radioaktivnost u nuklearnom gorivu ostaje duže vremena i nakon obustave reaktora odnosno nakon nestanka neutronskog toka.Iz tog se razloga toplina koja se generira u gorivu nakon obustave reaktora naziva ostatna toplina. Ostatna toplina u nuklearnom gorivu je značajan sigurnosni problem jer bi izostanak hlađenja nukleanog goriva obustavljenog reaktora doveo do oštećenja i topljenja gorivnih elemenata i ispuštanja radioaktivnih tvari u okoliš.

Od interesa je poznavati iznos ostatne toplinske snage u nuklearnom gorivu u funkciji vremena nakon obustave reaktora i vremena u kojem je reaktor radio na određenoj razini snage (jer o tom vremenu ovisi količina nakupljenih radioaktivnih tvari).

Budući da je zbog mnoštva radioaktivnih izotopa u nuklearnom gorivu teško odrediti doprinos svakog od njih unutarnjem izvoru topline, to se na temelju mjerenja i analiza obično definira njihov zbirni učin.

Proizvodnja toplinske energije u obustavljenom reaktora je bitan faktor za sigurnost postrojenja, jer uvjetuje potrebno hlađenje goriva radi onemogućavanja njegovog pregrijavanja. Zbog toga se u propisima određuju empiričke relacije koje treba koristiti za proračun generirane snage u obustavljenom reaktoru. Jedna od takvih relacija ima oblik:

$$\frac{P}{P_0} = 0.1\left[(\tau - t_0 + 10)^{-0.2} - 0.87(\tau - t_0 + 2*10^7)^{-0.2}\right] - 0.1\left[(\tau + 10)^{0.2} - 0.87(\tau + 2*10^7)^{0.2}\right]. \quad \textbf{(10.1.3)}$$

U izrazu (10.1.3) vremena su izražena u sekundama.

Primjer 10.1.2

Reaktor je radio 10 mjeseci na snazi P_0= 1850MW i nakon toga obustavljen. Kolika se snaga generira u tom reaktoru 7 dana nakon obustave pogona?

Rješenje:

U razmatranom primjeru t_0=10 mjeseci=$2.635*10^7$s,

τ=10 mjeseci+7dana=$2.696*10^7$s,

$\tau - t_0$=$6.048*10^5$s.

Uvrštenjem u relaciju (10.1.3) proizlazi

$\frac{P}{P_0} = 3.2*10^{-3}$, iz čega slijedi, P=5.92MW

Izvor topline u materijalu izloženom nuklearnom zračenju

Često se javlja potreba proračuna izvora topline u materijalu izloženom nuklearnom zračenju. Kod toga se najčešće radi o prolazu γ zračenja kroz debele zidove od betona ili željeza, koji imaju funkciju biološkog ili termičkog štita.

Suglasno rezultatu iz poglavlju 3.5, zakon slabljenja snopa γ zraka u prolazu kroz materijal ima oblik

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \quad \textbf{(10.1.4)}$$

Toplinska snaga po jedinici volumena materijala, oslobođena zbog interakcija zračenja s materijalom, dobiva se iz relacije

$$q_v = EI\mu_a \frac{W}{m^3} \text{ ili } EI\mu_a / \rho \frac{W}{kg},$$

gdje je E energija γ zraka, a μ_a maseni apsorpcijski koeficijent.

Budući da je oslobođena toplinska snaga proporcionalna gustoći snopa γ zraka I, to će, na temelju relacije (10.2.4), raspodjela oslobođene energije zbog prolaza γ zraka kroz materijal biti dana izrazom

$$q_v = q_{v0} e^{-\mu x} \frac{W}{m^3}. \quad \textbf{(10.1.5)}$$

Primjer 10.1.3

U betonski zid gustoće 2650kg/m^3 ulazi snop γ zraka intenziteta 10^{14} fotona/cm^{2}s. Energija γ zraka je 4MeV. Koliko se toplinske energije po jedinici volumena betona oslobađa 20cm unutar betonskog zida?

Rješenje:

Maseni koeficijenti za slabljenje snopa γ zraka i za apsorpciju γ zraka energije 4MeV u betonu, prema tablicama 3.5.1 i 3.5.2, jesu $\mu/\rho=0.00317 m^2/kg$, $\mu_a/\rho=0.00203 m^2/kg$.

Količina oslobođene toplinske snage na čeonoj strani zida

$$q_{v0} = EI_0\mu_a = 4*1.6*10^{-13}*10^{14}*10^4*0.00203*2650$$
$$= 3.44*10^6\ \frac{W}{m^3} = 3.44\ \frac{MW}{m^3}$$

Iz čega slijedi da će količina topline koja se generira u betonu, 20cm od čeone plohe, prema relaciji (10.2.5) biti

$$q_v = 3.44e^{-0.00317*2650*0.2} = 0.64\ \frac{MW}{m^3}.$$

10.2 Prostorna raspodjela generirane energije u reaktoru

Daleko najveći dio toplinske energije u reaktoru proizvodi se u procesima fisije fisibilnih nuklida, pa ćemo se stoga baviti samo prostornom raspodjelom tako nastale toplinske energije.

U poglavlju 10.2. ukazano je da je specifična proizvodnja topline u reaktoru direktno proporcionalna s tokom neutrona ϕ, pa će i njezina prostorna raspodjela biti identična prostornoj raspodjeli neutronskog toka.

Prostorna raspodjela neutronskog toka predmet je razmatranja poglavlja 7.8. Tamo je pokazano da je u cilindričnom reaktoru bez reflektora (cilindrična geometrija reaktora je od praktičnog interesa) raspodjela neutronskog toka dana relacijom

$$\phi(r,z) = \phi_0 J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

Izraz koji opisuje prostornu raspodjelu proizvodnje toplinske snage u reaktoru je dakle moguće neposredno napisati kao

$$q_v = q_{v0} J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\ \left(\frac{W}{m^3}\right). \qquad \textbf{(10.2.1)}$$

Sa q_{v0} označena je najveća vrijednost specifične proizvodnje topline u reaktoru. Ta se vrijednost postiže kod r=0 i z=0 (sredina osi reaktora).

U nuklearnim se reaktorima nuklearno gorivo sastoji iz tankih gorivih šipki koje su razmještene u pravilnom rasporedu, paralelno osi reaktora. Svaka se goriva šipka, dakle, po cijeloj dužini nalazi na istom polumjeru reaktora r, pa je za nju vrijednost Bessel-ove funkcije J_0 konstantna. Iz relacije (10.3.1) proizlazi da je raspodjela generirane topline duž svake gorivne šipke, na udaljenosti r_s od osi reaktora, dana kosinusnom funkcijom. Amplituda te kosinusne funkcije je

$q_{v0}J_0(2.405r_s/R)$, proporcionalna vrijednosti Bessel-ove funkcije J_0 na udaljenosti r_s te gorive šipke od osi reaktora.

Iz provedene diskusije očigledno je da raspodjelu generirane toplinske snage duž svake gorive šipke određuje relacija

$$q_v = q_{v0} J_0\left(\frac{2.405 r_s}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\ \left(\frac{W}{m^3}\right). \qquad \textbf{(10.2.2)}$$

Obično nas zanima toplinski proračun najopterećenije šipke u reaktoru. To je šipka sa najvećom, vrijednošću q_0, odnosno šipka koja je najbliža osi reaktora ($r_s \approx 0$).

Prosječnu vrijednost specifične proizvodnje topline u gorivnoj šipci dobivamo izrazom

$$q_{vsr} = \frac{q_{v0}}{H}\int_{-H/2}^{H/2}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)dz = q_{v0}\frac{2}{\pi}. \qquad \textbf{(10.2.3)}$$

Raspodjela izvora toplinske energije po presjeku gorive šipke

Polumjer gorive šipke kod današnjih reaktora je malen (kod lakovodnih reaktora je reda 10mm), pa možemo smatrati da je proizvodnja topline po presjeku šipke približno konstantna.

Međutim, kod točnijih analiza treba računati s činjenicom da se tok neutrona (i specifična proizvodnja topline koja je s njim proporcionalna), smanjuje prema sredini šipke. Smanjenje nastaje zbog efekta zasjenjenja, koji je za termičke neutrone razmatran u Dodatku 3.

Relacija (D.3.6) pokazuje da tok neutrona u unutrašnjosti cilindrične gorive šipke ovisi o polumjeru šipke r prema izrazu, $\phi(r)=AI_0(K_g r)$.

Proizvedena toplinska snaga u unutrašnjosti gorivne šipke imati će isti prostorni raspored: $q(r)=q_c I_0(K_g r)$, gdje je sa q_c označena toplinska snaga proizvedena u osi šipke.

Prosječnu vrijednost proizvedene toplinske snage $\overline{q_v}$ u presjeku šipke polumjera R možemo dobiti integracijom

$$\overline{q_v} = \frac{1}{R^2\pi}\int_0^R 2\pi r q_c I_0(K_g r)dr = \frac{2q_c I_1(K_g R)}{K_g R} \qquad \textbf{(10.2.4)}$$

(kod integracije Besselove funkcije treba podsjetiti na to da je $\int xI_0(x)dx = xI_1(x)$).

Za male vrijednosti parametra K_gR odnos $I_1(K_gR)/(K_gR)\approx 1/2$.

Primjer 10.2.1

Gorivne šipke sadrže oksid urana (UO_2) sa 3% obogaćenim uranom, promjera 8.19mm. Koliki je odnos minimalne i prosječne proizvodnje topline u presjeku šipke?

Rješenje:

Za oksid 3% obogaćenog urana faktor K_g je izračunat u primjeru 7.5.1, gdje je za taj faktor dobivena vrijednost $35.6m^{-1}$.

Dakle, $K_gR=0.146$ $\quad I_1(K_gR)=0.0732$

$$\frac{q_c}{q_v} = \frac{K_g R}{2I_1(K_g R)} = 0.9973.$$

Specifična proizvodnja topline u osi gorivne šipke je oko 0.3% niža od prosječne proizvodnje topline po presjeku gorive šipke.

U eksperimentalnim se uređajima proizvodnja toplinske energije u unutrašnjosti gorive šipke zbog fisija simulira se proizvodnjom topline u metalnim šipkama grijanim električnom strujom. Snaga generirana u gorivim šipkama obično se izražava po jedinici dužine šipke (W/m).

Primjer 10.2.2

Električki grijanom šipkom od nehrđajućeg čelika potrebno je simulirati gorivu šipku lakovodnog reaktora, u kojoj se proizvodi snaga od 40kW/m. Promjer šipke je 9.5mm. Kolika je struja potrebna za grijanje čelične šipke, a kolika bi bila kada bi se umjesto šipke upotrijebila cijev istog promjera i materijala s debljinom stjenke 1mm?

Rješenje:

Specifični otpor nehrđajućeg čelika iznosi 0.72Ωmm^2/m. Presjek šipke je 70.88mm^2, a cijevi 26.70mm^2.

Struja koja je potrebna za proizvodnju toplinske snage 40kW/m za šipku iznosi

$$I = \sqrt{\frac{40000 * 70.88}{0.72}} = 1984.4\ A.$$

Ako odaberemo cijev umjesto šipke potrebna je za proizvodnju iste jedinične toplinske snage manja struja: 1218 A.

Odnos prosječne i maksimalne snage u nuklearnom reaktoru

Od velikog praktičkog značaja je odnos prosječne i maksimalne toplinske snage proizvedene u nuklearnom reaktoru. Taj nam odnos, između ostalog određuje, i stupanj toplinskog iskorištenja nuklearnog goriva u reaktoru, jer je za ograničenje toplinskog opterećenja goriva mjerodavna samo maksimalna vrijednost toplinske snage.

Prosječnu toplinsku snagu možemo odrediti na temelju relacije

$q_{vsr} = \frac{1}{V}\int_V q_v dV$, ili za cilindrični reaktor

$$q_{vsr} = \frac{q_{v0}}{R^2 \pi H} \int_{r=0}^{R} \int_{z=-\frac{H}{2}}^{z=+\frac{H}{2}} J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) 2r\pi dr dz.$$

Pri integraciji Besselove funkcije treba se prisjetiti da je

i $\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$. Rezultat integracije je

$$\frac{q_{vsr}}{q_{v0}} = \frac{4J_1(2.405)}{2.405} = 0.275. \qquad \textbf{(10.2.5)}$$

Prosječna toplinska snaga u nereflektiranom cilindričnom reaktoru je svega 27.5% maksimalne toplinske snage.

Ako račun provedemo za druge geometrijske oblike reaktora dobivamo:

-za kuglu $q_{vsr}/q_{v0}=0.304$ **(10.2.6)**

-za paralelopipted $q_{vsr}/q_{v0}=0.258$ **(10.2.7)**

Iz navedenih rezultata vidljivo je da je odnos prosječne i maksimalne toplinske snage u reaktoru najpovoljniji kod kuglaste geometrije.

Zadaci uz poglavlje 10.

1. Kolika je količina 2.5% obogaćenog urana potrebna da bi reaktor, u kojemu je prosječni neutronski tok ograničen na $2*10^{17}$ neutrona/cm^{2}s, mogao proizvesti snagu od 1500MW?

2. Kolika se snaga proizvodi u ne reflektiranom cilindričnom reaktoru koji sadrži 200t prirodnog urana i u kojem je maksimalni neutronski tok od $5*10^{13}$ neutrona/cm^{2}s?

3. Koliko vremena nakon obustave reaktora, koji je mjesec dana radio stalno na punoj snazi, proizvedena snaga pada na 0.1% pune snage?

4. Rashladni sustav reaktora za odvođenje zaostale topline projektiran je za 0.4% njegove nominalne snage. Koliko vremena nakon obustave pogona reaktora, koji je 10 mjeseci radio na punoj snazi, morao čekati prije nego uključimo taj rashladni sustav?

5. U neograničenu ravnu stjenku debljine 30cm ulazi tok γ zraka energije 3MeV i intenziteta $5*10^{14}$ fotona/cm^{2}s. Kolika se energija oslobađa stjenci po jedinici njezine površine ako je ona izrađena od betona? Koliko bi se rezultat promijenio ako bi stjenka bila željezna? Podaci potrebni za proračun su dati u poglavlju 3.

6. Nacrtati treba ovisnost srednje i minimalne specifične proizvodnje topline u šipci iz UO_2 o polumjeru šipke, u rasponu od r=3mm do r=6mm.

Reference uz poglavlje 10.

[1] P.A. Petrov, Jadernie energetičeskie ustanovki, poglavlje 6, Gosenergoizdat, Moskva 1958.

[2] B.S. Petuhov i dr., Teploobmen v jedarskih energetičeskih ustanovkah, poglavlje 1, Energoizdat, Moskva 1986.

[3] D. Feretić, Toplinski procesi u nuklearnom reaktoru, poglavlja 1 i 2, Liber, Zagreb 1986.

[4] J.R. Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapter 8, Addison Wesley, Reading PA, 1975.

[5] M. El-Wakil, Nuclear Heat Transport, Chapter 4, International Textbook Co, London, 1971.

[6] R.Alami, P.Ageron, Odvod i preobrazovanje tepla v jederskih reaktorah (prijevod s francuskog), poglavlje 2, Gosenergoizdat, Moskva, 1958.

[7] S. Glasstone, A.Sesonke, Nuclear Reactor Enigeering, Chapter 6, Van Nostrand Reinhold Co, London 1967

11 Prijelaz topline

Uvod

Analiza vođenja i prijelaza topline u nuklearnim postrojenjima od primarnog je značenja za sigurnost reaktora, jer se samo hlađenjem jezgre može spriječiti pregrijavanje nuklearnog goriva. Pregrijani gorivi elementi gube mehanička svojstva, a time i mogućnost zadržavanja radioaktivnih nuklida unutar reaktorske jezgre.

S druge strane, odvođenje (odnosno dobivanje) topline iz nuklearnih reaktora je osnovni razlog za njihovo korištenje u energetici. Sa stanovišta energetike je, naime, toplinska energija jedini korisni proizvod koji ti reaktori daju.

Bitno je primijetiti da je, osim u segmentu koji se odnosi na toplinske izvore, analiza odvođenja i prijelaza topline u nuklearnom reaktoru je identična onoj koja se promijenjuje kod svih aparata i postrojenja gdje se ta vrsta energije proizvodi. Teorija odvođenja topline iz nuklearnog reaktora ima malo specifičnih "nuklearnih" aspekata, pa se ona može primijeniti na sva klasična postrojenja i uređaje (uključivši i hlađenje elektrotehničnih i elektroničkih komponenata).

Kao što je uobičajeno, analiza odvođenja topline će se podijeliti na vođenje topline u krutim tvarima i odvođenje topline rashladnim fluidima (što uključuje i razmatranje najbitnijih elemenata mehanike fluida). Dubina ulaženja u pojedine probleme je prvenstveno diktirana potrebama primjene u okviru djelatnosti inženjera energetičara

Pod pojmom prijelaz topline podrazumijevamo rasprostiranje toplinske energije unutar tvari ili izmjenu te energije među raznim tvarima.

Toplinska energija sadržana u nekoj tvari je proporcionalna s kinetičkom energijom kretanja njezinih molekula, a prema vanjskom svijetu se manifestira kroz temperaturu te tvari.Temperatura je mjerljiva veličina te stoga preko nje i drugih poznatih veličina (masa i vrsta materijala) možemo zaključiti o sadržanoj toplinskoj energiji unutar dotične tvari. Prijelaz topline kako unutar tvari tako i među njima nastaje djelovanjem temperaturnih razlika.Priroda nastoji postići izjednačenu temperaturu u materijalima (odnosno temperaturnu ili toplinsku ravnotežu) ,što pak znači da će toplinska energija uvijek prelaziti s mjesta s višom temperaturom na mjesta s nižom temperaturom.Odnos sadržane topline i temperature u prirodnoj sredini ima stoga tendenciju porasta (u termodinamici se ova pojava označava kao porast entropije u prirodne sredine).

Znanost o prijelazu topline je komplementarna s termodinamikom (koja se kod nas često označava kao znanost o toplini). Ta se znanstvena područja u pogledu proučavanja toplinskih procesa vezanih uz promjenu sadržane topline u tvarima u osnovi razlikuju u slijedećem:

-Klasična termodinamika proučava sustave u ravnoteži te specificira za dva sukcesivna ravnotežna stanja relevantne toplinske parametre tvari

-Znanost o prijelazu topline posmatra **dinamiku** (odnosno brzinu) izmjene topline u tvarima ili između tvari.

Kao ilustraciju navedenog posmatrajmo jedan blok metala koji se hladi od neke više do niže temperature.

Termodinamika može odrediti sadržaj unutarnje energije tog bloka kod više i niže temperature, ali ne može ništa reći o brzini hlađenja i vremenu koje je potrebno da se postigne specifirana niža temperatura.

Tek se primjenom saznanja iz znanosti o prijelazu topline može odrediti brzina odvođenja topline i vrijeme potrebno za hlađenje u funkciji temperaturnih razlika te vrsti i brzini protoka fluida koji se koristi za hlađenje metalnog bloka.

Valja međutim naglasiti da znanost o prijelazu topline za definiranje svojih temeljnih zakonitosti koristi dostignuća termodinamike,poglavito njezin prvi zakon (koji se obično naziva zakon o održanju energije).

Termodinamika ima i svoj drugi zakon, koji definira uvjete pretvorbe toplinske u mehaničku energiju.Taj zakon nema neposrednih dodirnih točaka s teorijom prijelaza topline.

Teorija prijelaza topline se standardno proučava u tri kategorije:

- **Vođenje topline** (u engleskoj terminologiji Heat Conduction) unutar tvari. U najvećem broju slučajeva se vođenje topline posmatra unutar krutih tvari. Medij koji vodi toplinu vođenjem smatramo da je sastavljen iz čestica koje uglavnom ne mijenjaju svoj položaj u prostoru, a energija se širi prijenosom kinetičkih energija vibracija molekula ili toka slobodnih elektrona u metalima.Prijenos toplinske energije nastaje djelovanjem temperaturnih razlika unutar tvari.

-**Konvektivni prijelaz topline** (u engleskoj terminologiji Convective Heat Transfer). Ta se vrsta prijelaza topline po mehanizmu djelovanja bitno razlikuje od predhodnog, jer je za prijelaz topline pored temperaturne razlike bitan i prijenos mase ,odnosno kretanje fluida (najčešće se toplinska energija prenosi fluidima,ma da bi u načelu konvektivni prijenos topline bi mogao uslijediti i zbog kretanja krutih tvari).U praksi se taj vid prijelaza topline razmatra kod analiza prijelaza topline između krutih tvari i fluida koji uz njih struje.

-**Toplinsko zračenje** (u engleskoj terminologiji Thermal Radiation).Svako tijelo zrači u okoliš elektromagnetno zračenje male valne dužine (infracrvene zrake) čija energija i spektar ovise o temperaturi tijela.Toplinsko zračenje je bitno za prijenos topline između tijela s velikom temperaturnom razlikom, a posebno za prijenos topline u svemirskim razmjerima (zračenje sunca na zemlju).

U praktičkim primjerima se često događa da dvije ili sve tri navedene kategorije prijelaza topline djeluju istovremeno.U većini slučajeva se to odnosi na paralelno odvijanje procesa vođenja topline i konvektivnog prijelaza topline.

Valja primijetiti da su za rad elektrotehničkih uređaja i elektroenergetskih postrojenja te dvije kategorije prijelaza topline od mnogo većeg značaja nego toplinsko zračenje.

Mjerne jedinice za temperaturu i toplinsku energiju i oznake toplinskih veličina

Mjerne jedinice za temperaturu

Sukladno zakonskoj obvezi u knjizi će se upotrebljavati samo SI sustav mjernih jedinica.U tom je sustavu jedinica mjerna jedinica za temperaturu **kelvin (oznaka K)**.U tom sustavu jedinica ne postoje negativne vrijednosti jer je nulta vrijednost temperaturne skale temperatura kod koje prestaje kinetičko kretanje molekula.To se stanje označava kao apsolutna nula,pa se i temperaturna skala često naziva apsolutna temperaturna skala. Oznaka za temperaturu je **T** (oznaka **t** će se upotrebljavati za vrijeme)

U praksi se često sreću i upotrebljavaju i druge mjerne jedinice za temperaturu. To su **celzijus (oznaka ^{0}C),** te u zemljama engleskog govornog područja **faranhajt (oznaka ^{0}F)**

Veza navedenih mjernih jedinica je slijedeća:

Nulta vrijednost temperature u ^{0}C odgovara temperaturi smrzavanja vode na atmosferskom tlaku.Toj vrijednosti odgovara u apsolutnoj temperaturnoj skali 273 K (točnije 273,15 K), s tim što je temperaturna razlika od 1K je identična temperaturnoj razlici od 1^{0}C.Iz navedenog slijedi da je pretvorba stupnjeva Celzijusa u stupnjeve Kelvina jednostavna: od vrijednosti temperature u stupnjevima Kelvina treba oduzeti 273 da se dobiju stupnjevi Celzijusa (primjerice temperaturi -5^{0}C odgovara u apsolutnoj skali temperatura 268 K)

Veza između vrijednosti temperatura u celzijusima i farhajtima je nešto složenija jer jedinične razlike temperatura u jednoj i drugoj temperaturnoj skali nisu iste.Ta se veza može izraziti relacijama:

$$T(^0C) = \frac{5}{9}(T(^0F) - 32), \text{odnosno}$$

$$T(^0F) = 1{,}8T(^0C) + 32$$

(Primjerice, temperaturi 100 ^{0}F odgovara temperatura 37,78 ^{0}C,a temperaturi -5 ^{0}C temperatura 23 ^{0}F).Temperatura smrzavanja vode (0 ^{0}C) je 32 ^{0}F.

Mjerne jedinice za toplinsku energiju i toplinsku snagu

Temeljna mjerna jedinica za sve vrste energije u SI sustavu je **džul (oznaka J).** Međunarodni naziv te jedinice je Joule.

Energetski ekvivalent jednog džula je,

1J= 1Nm=1Ws

Na temelju navedenog slijedi da je energija 1kWh ekvivalentna energiji od 3,6 MJ.

U starijoj literaturi se redovito koristi kao jedinica za toplinsku energiju

kalorija (oznaka cal). Kalorija je definirana kao količina topline potrebna da masi od 1 grama vode povisi temperatiru za 1 ^{0}C (točnije, da gramu vode povisi temperaturu od 14,5 do 15,5 ^{0}C).Veza te jedinice s džulom je,

1 cal = 4,186 J

U literaturi s engleskog govornom područja (posebno starijoj) se kao jedinica za toplinsku energiju redovito susreće Btu (British thermal unit),pri čemu vrijedi veza,

1 Btu=1,05506 kJ

(kod grubljih proračuna se može uzeti 1Btu ≈ 1kJ)

Unutarnja toplinska energija tijela

Svako tijelo na nekoj temperaturi sadrži **unutarnju energiju U** koja je proporcionalna temperaturi i masi tijela.Možemo dakle pisati,

U= cmT J

gdje je U unutarnja energija tijela a m(kg) i T(K) njegova masa i temperatura.

Konstanta proporcionalnosti c se naziva **specifična toplina** a ima značenje toplinske energije potrebne da se jedinica mase tijela ugrije za 1K. Iz relacije slijedi da je mjerna **jedinica specifične topline J/kgK.**

Kod razmatranja zakonitosti prijelaza topline,suglasno navodima u uvodu,neće nas zanimati sadržaj topline u tvarima već promjene tog sadržaja u jedinici vremena.Promjena se može izraziti dobivenom ili izgubljenom toplinskom energijom u jedinici vremena Promjena energije po jedinici vremena ima dimenziju snage ,pa bi shodno navedenom kod određivanja prenesene topline mogli govoriti (iako to nije uobičajeno) o prenesenoj **toplinskoj snazi.**

Oznake toplinskih veličina

Oznake koje će se koristiti za toplinske veličine su:

-q_v (J/sm^3) ili (W/m^3) generirana toplinska energija po jedinici vremena i jedinici volumena

-q_p (J/sm^2) ili (W/m^2) prenesena toplinska energija po jedinici vremena i jedinici površine.Ova se veličina obično koristi kod proračuna prijelaza topline s površine tijela u okoliš i često se naziva **toplinski tok**

Kod nekih problema proračuna prijelaza topline,poglavito kod toplinskih proračuna šipki (električni vodiči,nuklearni gorivni elementi) ili cijevi svrsishodno je računati s toplinskom snagom po jednici dužine šipke ili cijevi.U tu svrhu će se koristiti oznake:

-q_{lv} (J/sm^2) ili (W/m^2) za generirana toplinsku energiju po jedinici vremena i jedinici dužine **(površine –korr).**

-q_{lp} (J/sm) ili (W/m) za prenesenu toplinsku energiju po jedinici vremena i jedinici dužine s površine šipke odnosno cijevi u okoliš.

Toplinsku energiju generiranu unutar cijelog volumena tijela ili unutar cijele dužine šipke u jedinici vremena, odnosno prenesenu toplinu s ukupne površine tijela ili površine cijele šipke također u jedinici vremena će se označiti s **Q_v,Q_{1v}, Q_p i Q_{1p}**, a te vrijednosti dobivamo integracijom navedenih veličina po volumenu , površini ili dužini.

11.1 Vođenje topline

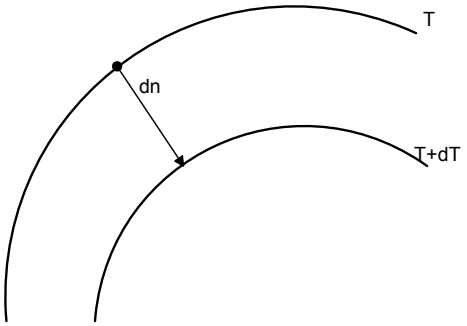
Vođenje topline je proces kojim se toplina prenosi s čestice na česticu unutar tijela (pri tome obično mislimo na krute tvari).Kao što je napomenuto, uvjet za odvijanje tog procesa je postojanje temperaturnih razlika ,dakle toplijih i hladnijih mjesta,unutar tijela.(identično kao što je uvjet za strujanje elektrona unutar tijela ,odnosno nastajanje električne struje, postojanje unutarnje razlike potencijala).

Zamislimo neko kruto tijelo proizvoljnog oblika unutar kojeg postoji određena raspodjela temperature.Ta se raspodjela temperature obično zove **temperaturno polje.** Krivulja koja povezuje točke iste temperature je **izoterma.**

Kod mnogih problema vođenja topline raspodjela topline se javlja i kao funkcija vremena ,tako da se u općenitom slučaju može pisati da je temperatura neke točke u prostoru $T = f(\vec{n},t)$,gdje je $\vec{n}$ vektor položaja te točke u odnosu na ishodište odabranog koordinatnog sustava a t vrijeme..Kod upotrebe pravokutnog koordinatnog sustava odgovarajuća relacija je T= f(x,y,z,t).Problemi prijelaza topline kod kojih se računa s vremenski promjenjivom temperaturom zovu se problemi **nestacionarnog vođenja topline,** a oni kod kojih ovisnost o vremenu ne postoji ili se može zanemariti s problemi **stacionarnog vođenja topline**

Gradijent temperature

Zamislimo dvije susjedne izoterme od kojih je jedna na temperaturi T a druga na temperaturi T+dT. Budući da je riječ o raspodjeli temperature u prostoru izoterme treba shvatiti kao plohe .Presječemo li plohu izoterma ravninom dobivamo skup krivulja koje se nigdje ne sijeku (jer ista točka u prostoru ne može imati različite temperature).Dvije krivulje iz tog skupa su prikazane slikom 11.1.1 Razmak susjednih izotermnih ploha (tj dužina normale ili okomice spuštene s jedne na drugu) je označen kao dn.



Slika 11.1.1 Presjek izotermnih ploha

Promjena temperature u prostoru u smjeru okomitom na izotermnu površinu je definirana **gradijentom temperature** .To je **vektorska veličina** (što je logično jer ovisi o smjeru u prostoru) određena relacijom (pisanom u skalarnom obliku):

$$gradT = \frac{\partial T}{\partial n} \qquad \textbf{(11.1.1)}$$

Vektor gradT, usmjeren okomito na izotermne plohe je moguće u pravokutnom koordinatnom sustavu (koji je najčešće u uporabi) prikazati sumom triju vektora u smjeru koordinatnih osi x,y, i z.

$$\mathrm{gradT} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} \qquad \textbf{(11.1.2)}$$

Fourierov zakon vođenja topline

Već je ranije napomeno da je prijelaz topline uvjetovan postojanjem temperaturne razlike,Toplinska energija se spontano prenosi s mjesta više na mjesto niže temperature.Prenesena toplina je dakle vektorska veličina usmjerena suprotno od temperaturnog gradijenta. Fourier je na temelju takvih spoznaja još početkom 19.stoljeća postavio zakon,

$$\vec{q}_p = -\lambda \, \mathrm{gradT} \qquad \textbf{(11.1.3)}$$

Prema Fourierovom zakonu prenesena je toplina proporcionalna negativnom gradijentu temperature.Faktor proporcionalnosti λ ovisi o materijalu kroz koji se provodi toplina.Što je taj faktor veći to će se uz isti gradijent temperature prenijeti veća količina topline.Fourierov zakon ,poput većine temeljnih zakona fizike, nije moguće izvesti teorijski, ali ga je moguće potvrditi mjerenjima.

Vrlo često se problemi vođenja topline razmatraju u pravokutnom koordinatnom sustavu,a u posebno jednostavnim slučavima nas interesira vođenje topline samo u jednom smjeru (primjerice za smjer x).Za taj se slučaj Fourierov zakon pojednostavljuje u,

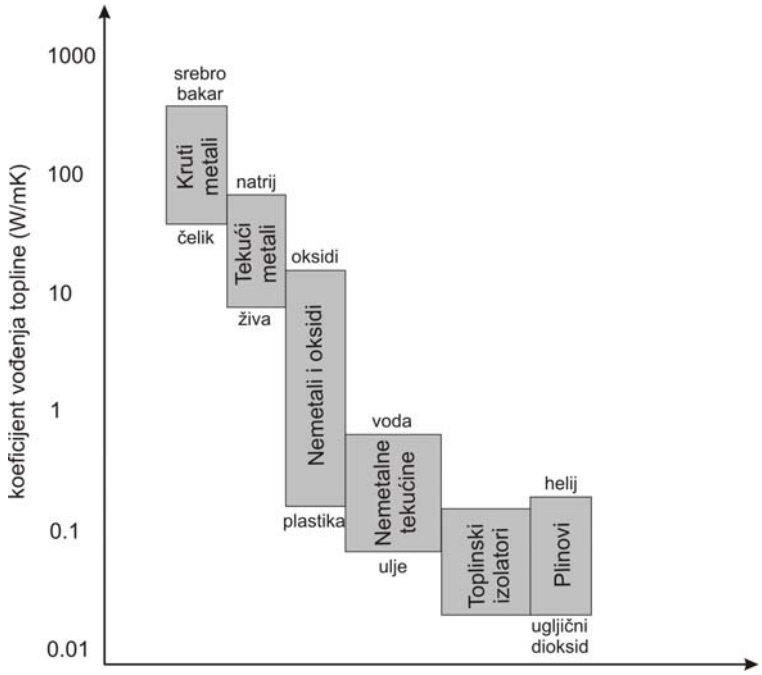
$$\vec{q}_p = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad \textbf{(11.1.4)}$$

Konstanta λ je, suglasno ranije navedenom,ovisna o vrsti materijala kroz koji se provodi toplina,ali je ovisna i o temperaturi .Ta je veličina poznata kao **koeficijent vođenja topline.** Fourierov zakon određuje dimenziju za λ : $(W/m^2)(m/K)$= **(W/m,K)**

Koeficijent vođenja topline

Koeficijent vođenja topline je pokazatelj stupnja propusnosti materijala za prolaz topline.Taj se koeficijent mijenja u širokom rasponu od materijala koji dobro vode toplinu do onih koji je vode veoma loše.Općenito vrijedi pravilo da su dobri vodiči električne struje ujedno i dobri vodiči topline.

Pregled opsega vrijednosti za koeficijent vođenja topline raznih kategorija materijala daje slika 11.1.2



Slika 11.1.2 Koeficijent vođenja topline za razne kategorije materijala

Iz slike vidimo da se kod krutih metala koeficijenti vođenja topline kreću od nekoliko desetaka W/m,K (za čelike) do nekoliko stotina W/m,K(za bakar i srebro).Nešto niže vrijednosti su za tekuće metale.Među njima najvišu vrijednost ima tekući natrij (koji se i upotrebljava kao rashladno sredstvo za jednu kategoriju nuklearnih reaktora), a najnižu živa.Nemetali i oksidi bitno lošije vode toplinu od metala.Koeficijent vođenja topline ovih materijala je približno između 0,1 i 10 W/m,K. Najlošiji vodiči topline su nemetalne tekućine (posebno ulja) i plinovi.Među nemetalnim tekućinama je relativno dobar vodič topline voda ,a među plinovima helij.Neke vrste šupljikavih i vlaknastih materijala (primjerice staklena i šljakasta vuna) imaju približno isti koeficijent vođenja topline kao plinovi(niži od 0,1 W/m,K) ,pa se upotrebljavaju kao toplinski izolatori.

U tablicama 11.1.1 do 11.1.4 [33],[36] su date vrijednosti za koeficijent vođenja topline nekih važnijih materijala. Detaljnije podatke treba potražiti u specijalnim priručnicima.Valja prisjetiti da je koeficijent vođenja topline funkcija temperature pa je uz svaku njegovu vrijednost potrebno navesti i temperaturu na koju se ta vrijednost odnosi.

Tablica 11.1.1 Koeficijent vođenja topline metala λ W/m,K

Metali	Temperatura K								
	273	373	473	573	673	873	1073	1273	1473
Bakar	386	379	374	369	363	353			
Mjed (70%Cu,30%Zn)		128	144	147	147				
Konstantan (60%Cu,40%Ni)		22,2	26						
Srebro	417	415	412						
Aluminij	202	206	215	228	249				
Duraluminij (95%Al,5%Cu)	159	182	194						
Silumin(87%Al,13/Si)	163	175	185						
Čelik (0,5%C)	55	52	48	45	42	35	31	29	31
Nehr.čelik (18%Cr,10%Ni)	16,3	17	17	19	19	22	26	31	
Nikalj-krom (80%Ni,20%Cr)	12,3	13,8	15,6	17,1	18,9	22,5			
Zircalloy *		11,99	12,37	12,82	13,29	14,3			

*1,2-1,7% Sn, 0,07-0,2% Fe, 0,05-0,06 % Cr 0,03-0,06% Ni ,ostatatak Zr

Tablica 11.1.2 Koeficijent vođenja topline nemetala i izolacijskih materijala λ W/m,K

Nemetali	*T(K)*	*λ W/m,K*	*Izolacijski materijali*	*T(K)*	*λ W/m,K*
Aluminijski oksid	303	46	Staklena vuna	300	0,038
Cigla obična	293	0,69	Šljakasta vuna	300	0,04-0,06
Cigla vatrostalna	773	1,04	Stiropor	300	0,033
	1073	1,07	Pluto	300	0.043
	1373	1,09			
Cement	300	1,16			
Beton	300	0,76			
Staklo	293	0,78			
Stako borosilikatno	300-380	1,09			
Polietilen	303	0,33			
PVC	303	0,09			
Teflon	303	0,35			
Guma tvrda	303	0,15			
Kamen	373-573	1,7-2,9			
Drvo (okomito na vlakna)	300	0,06-0,16			

Tablica 11.1.3 Koeficijent vođenja topline tekućina λ W/m,K

Tekućina	*T(K)*	*λ W/m,K*	*Tekućina*	*T(K)*	*λ W/m,K*
Voda (na temperaturi zasićenja)	273	0,552	Motorno ulje	293	0,145
	333	0,651		333	0,140
	373	0,680		373	0,137
	433	0,680		433	0,132
	473	0,665	Živa	273	8,20
	533	0,611		373	10,51
Freon(CCl_2F_2)	223	0,067		473	12,34
	253	0,071	Tekući natrij	573	76,04
	273	0,073		673	71,19
	303	0,071		773	66,34
				873	61,69
				973	56,63
				1073	51,78
				1173	46,93

Tablica 11.1.4 Koeficijent vođenja topline plinova na atmosferskom tlaku λ W/m,K

Plin	*T(K)*	*λ W/m,K*	*Plin*	*T(K)*	*λ W/m,K*
Zrak	200	0,018	Vodik	200	0,128
	300	0,022		300	0,182
	400	0,034		400	0,228
	500	0,040		500	0,272
	600	0,047		600	0,315
	800	0,058		800	0,384
	1000	0,068		1000	0,440
Helij	200	0,118	Ugljični dioksid	220	0,011
	366	0,169		300	0,017
	477	0,197		400	0,025
	589	0,225		450	0,029
	700	0,251		500	0,034
	800	0,275		550	0,038
	900	0,298		600	0,043
Vodena para	400	0,026			
	500	0,034			
	600	0,042			
	700	0,051			
	800	0,059			

Aproksimativni izrazi za ovisnost koeficijenta vođenja topline o temperaturi.

Kod numeričkog rješavanja problema vođenja topline je pogodno poznavati aproksimativne analitičke funkcije ovisnosti tog koeficijenta o temperaturi.Uobičajeno je kada se radi o manjem opsegu promjene temperature koristiti linearnu aproksimaciju tipa,

$$\lambda(T)= AT+B \qquad \textbf{(11.1.5)}$$

U posebnim slučajevima kada su u pitanju veće promjene temperature, ili kada se može traži veća točnost, može se koristiti kvadratna aproksimacija tipa,

$$\lambda(T)=CT^2+AT+B \qquad \textbf{(11.1.6)}$$

A,B i C su konstante određene proračunom

Osim aproksimacija uz korištenje polinoma moguće je funkciju $\lambda(T)$ aproksimirati i na drugi način.Jedan od takvih primjera,koji će se kasnije razmotriti, je izraz koji se koristi za određivanje koeficijenta vođenja topline oksida urana.

Valja međutim naglasiti da se u praksi kod velikog broj aproksimativnih proračuna vođenja topline zanemaruje ovisnost koeficijenta vođenja topline o temperaturi te se računa s konstantnom vrijednošću tog parametra.

Primjer 11.1.1

Potrebno je odrediti optimalnu linearnu korelaciju između koeficijenta vođenja topline i temperature za čelik s 0,5% C u temperaturnom području 473-1073 K.

Rješenje:

Ovisnost koeficijenta vođenja topline navedenog čelika o temperaturi u datom temperaturnom području je navedena u tablici 11.1.1:

T (K)	473	573	673	873	1073
λ (W/m,K)	48	45	42	35	31

Optimalnu linearnu korelaciju između $\lambda(T)$ i T u datom temperaturnom području ćemo odrediti primjenom poznate **metode najmanjih kvadrata**.Rezultat se može opisati linearnom funkcijom

$$\lambda=AT+B$$

Koeficijenti A i B se dobivaju uz korištenje uvjeta da je suma kvadrata razlika između stvarnih vrijednosti i vrijednosti određenih linearnom korelacijom najmanja.

Vrijednosti koeficijenata slijede iz relacija

$$A=\frac{\sum_n T\sum_n \lambda - n\sum_n T\lambda}{\left(\sum_n T\right)^2 - n\sum T^2} \qquad \textbf{(11.1.7)}$$

$$B = \frac{\sum_n \lambda - A\sum_n T}{n} \qquad \textbf{(11.1.8)}$$

gdje je n broj mjerenih vrijednosti T i λ , za dati slučaj n=5

Na temelju danih podataka slijedi,

$$\sum_n T = 3665$$

$$\sum_n \lambda = 201$$

$$\sum_n \lambda^2 = 8279$$

$$\sum_n T\lambda = 140573$$

$$\sum_n T^2 = 2918445$$

Iz čega se dobiva,

$$A = \frac{3665x201 - 5x140573}{3665^2 - 5x2918445} = -0{,}029$$

$$B = \frac{201 + 0{,}029x3665}{5} = 61{,}46$$

Tražena korelacija između λ i T ima oblik,

λ=-0,029T+61,46 W/m,K

Sada možemo usporediti podatke iz tablice 11.1.1 s onima koje određuje dobivena korelacija u datom temperaturnom području

	T (K)	473	573	673	873	1073
Podaci iz tablice 3.1.3.1	λ (W/m,K)	48	45	42	35	31
Vrijednosti dobivene korelacijom	λ (W/m,K)	47,743	44,843	41,943	36,146	30,343
Razlika prema vrijednostima iz tablice%		-0,535	-0,349	-1.207	3,266	-2,119

Izračunata korelacija uz zadovoljavajući točnost (odstupanje samo u jednom slučaju prelazi 3%) odražava ovisnost koeficijenta vođenja topline o temperaturi.

Korelacija samo po sebi, bez provjere, ne daje informaciju o stupnju rasipanja mjerenih vrijednosti oko onih koje ona određuje .Veliko rasipanje daje mjesta sumnji u pouzdanost izračunatih vrijednosti.

Iz tog je razloga izveden parametar zvan **koeficijent korelacije** čija veličina ukazuje koliko korelacija točno odražava mjerene vrijednosti, uzete u cjelini.Koeficijent korelacije varira od –1 do +1. Korelacija najlošije odražava mjerene vrijednosti kada joj vrijednost koeficijenta korelacije

bliska nuli a najbolje kada je blizu jedinice.Negativna ili pozitivna vrijednost koeficijenta ovisi dali λ pada ili raste s porastom temperature.

Koeficijent korelacije se određuje iz relacije ,

$$r = \frac{n\sum_n \lambda T - \sum_n \lambda \sum_n T}{\sqrt{n\sum_n T^2 - (\sum T)^2}\sqrt{n\sum_n \lambda^2 - (\sum_n \lambda)^2}} \qquad \textbf{(11.1.9)}$$

Uvrštenjem poznatih vrijednosti u danom primjeru slijedi,

$$r = \frac{5x140573 - 3665x201}{\sqrt{5x2918445 - 3665^2}\sqrt{5x8279 - 201^2}} = -0{,}995$$

Koeficijent korelacije je blizak jedinici,što ukazuje na vrlo malo rasipanje mjerenih veličina oko onih koje određuje korelacija.

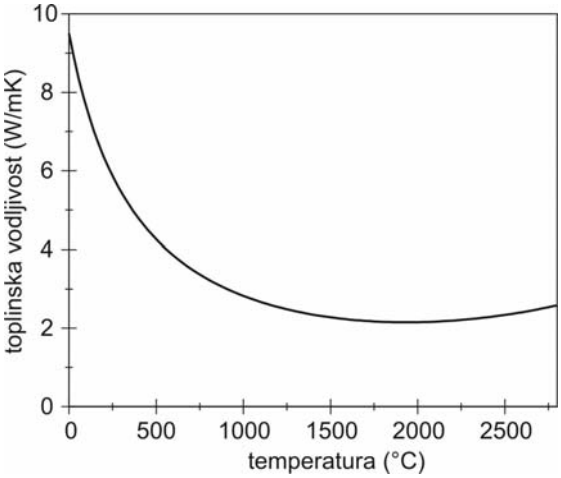
Koeficijent vođenja topline oksida urana (UO_2)

Oksid urana je materijal koji se upotrebljava za izradu gorivnih elemenata nuklearnih reaktora.Zbog značaja tog materijala ne samo s energetskog nego i sa sigurnosnog aspekta, definiranju njegovih karakteristika je posvećena posebna pažnja.

Koeficijente vođenja topline metalnih oksida karakterizira veća ovisnost o temperaturi nego što je to slučaj kod metala. Zahtijevana točnost termičkih proračuna nuklearnih reaktora traži da se kod oksida urana o toj ovisnosti vodi računa.

Ovisnost koeficijenta vođenja topline oksida urana o temperaturi je moguće aproksimirati i analitičkim izrazom.Jedan od takvih izraza (koji kvantificira funkciju približno prikazanu slikom 11.11.3) je [39]

$$\lambda(T) \approx \frac{3824}{129{,}4 + T} + 4{,}786x10^{-11}T^3 \quad \textbf{W/m,K} \qquad \textbf{(11.1.10)}$$



Slika 11.1.3 Kooeficijent vođenja topline UO_2

Iz slike proizlazi da se koeficijent vođenja topline UO_2 smanjuje s porastom temperature dok je temperatura niža od oko 1900 K ,a nakon toga lagano raste s porastom temperature do temperature topljenja UO_2 (oko 3000 K)

Kod proračuna raspodjele temperature u gorivim elementima nuklearnog reaktora i proračuna uvjeta njihovog hlađenja potrebno je ,iz razloga koji će se kasnije obrazložiti,poznavati integral funkcije λ(T)dT u odgovarajućem temperaturnom području.Taj se integral,na temelju relacije 11.11.10 (ili neke slične), moguće također prikazati analitičkim izrazom. Kao primjer,u literaturi [39] se navode izrazi,

za temperature niže od 1900 K,

$$\int_0^T \lambda(T)dT \approx 4040\,ln(191+T) + 2{,}74e^{(0{,}00214T-0{,}584)} - 24802 \qquad \textbf{(11.1.11)}$$

za temperature između 1900 i 3000 K,

$$\int_0^T \lambda(T)dT \approx 2(T-1920) + 2{,}74e^{(0{,}00214T-0{,}584)} - 93477 \qquad \textbf{(11.1.12)}$$

Očigledno je da se vrijednost integrala $\int \lambda(T)dt$ između zadanih temperatura T_1 i T_2 dobiva kao razlika integrala od 0 do T_2 i integrala od 0 do T_1.

Primjer 11.1.2

Usporediti vrijednost integrala λdT za UO_2 u granicama 400 do 1500 K kada je izračunat numeričkom integracijom izraza (11.1.10) ili neposrednim primjenom relacije (11.1.11).

Rješenje:

Numerička integracija izraza (11.1.10) u danim granicama temperature daje 4359 W/m.

Primjena relacije (11.1.11) za izračunavanje razlike integrala λdT 0 do 1500 K i 0 do 400 K se dobiva 4276 W/m

Razlika dobivenih vrijednosti je malena (ispod 2%).

Opći zakon vođenja topline

Kod rješavanja problema vođenja topline u krutim tijelima susrećemo s s potrebom kvantitativnog određivanja odvedene i dovedene toplinske snage i temperature unutar tijela,

U svrhu takve analize zamislimo neko tijelo proizvoljnog oblika u kojemu se proizvodi unutarnja toplina i koje je smješteno u sredinu s kojom izmjenjuje toplinu. Svrha analize je odrediti količinu toplinske snage koje tijelo izmjenjuje s okolnom sredinom i raspodjelu temperature unutar tijela.

Zakon koji se primjenjuje za rješavanje problema ove vrsti je onaj o održanju toplinske energije,odnosno poznati prvi zakon termodinamike.Temeljna postavka ovog zakona je očigledna : Razlika između dovedene i odvedene toplinske energije nekom tijelu mora biti jednaka promjeni njegove unutarnje energije.

Unutarnja energija tijela U (J) određuje sadržaj toplinske energije u tijelu i određena je relacijom:

$$U=c\rho TV \qquad (11.1.13)$$

gdje je

c -specifična toplina materijala tijela (J/kgK)

ρ -gustoća materijala tijela (kg/m^3)

V -volumen tijela (m^3)

T -temperatura

Ako želimo izraziti promjenu unutarnje energije u jedinici vremena dU tijela volumena dV kojemu je temperatura povećana za dT u vremenu dt možemo pisati,

$$dU = c\rho \frac{dT}{dt} dV$$

Promjena unutarnje energije u cijelom volumenu V je naravno,

$$\Delta U = \int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV \qquad (11.1.14)$$

Kod plinova razlikujemo specifičnu toplinu po konstantnom volumenu c_v i specifičnu toplinu po konstantnom tlaku c_p. Naime ako plin grijemo pri konstantnom tlaku on zbog rastezanja vrši određeni rad prema okolini i zato treba uložiti dodatnu energiju za njegovog zagrijavanje .Iz tog je razloga

$c_p > c_v$.

Kod krutih tvari i tekućina je povećanje volumena zbog zagrijavanja zanemarivo pa se može govoriti samo o jednoj vrijednost za specifičnu toplinu c.

Bilanca topline

Zamislimo neko kruto tijelo proizvoljnog oblika volumena V i površine S. Ako se u tom tijelu proizvodi toplinska snaga q_v po jedinici volumena,proizvodnja snage u volumenu dV će biti $q_v dV$.To znači da se proizvedena toplinska snaga u volumenu V može definirani integralom,

$$\int_V q_v dV \qquad (11.1.15)$$

Tijelo toplinu gubi i dobiva kroz površinu.Iz prijašnjih izlaganja je jasno da je da je toplinska snaga koja se prenosi djelovanjem temperaturne razlike vektorska veličina usmjerena prema negativnom gradijentu temperature. Za prelaz toplinske snage kroz površinu tijela mjerodavna je samo komponenta vektora toplinske snage usmjerena okomito na tu površinu.Toplinska snaga koja prolazi kroz površinu dS (smatrati ćemo da se radi o rezultantnom protoku toplinske snage u oba smjera) se može odrediti kao

$$\vec{q}_p \vec{n} dS$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor usmjeren okomito na površinu dS .Produkt

$\vec{q}_p\vec{n}$ označava dakle komponentu vektora $\vec{q}_p$ okomitu na površinu dS.

Ukupni protok toplinske snage kroz površinu S se može izraziti integralom,

$$\int_S \vec{q}_p \vec{n} dS \qquad \textbf{(11.1.16)}$$

Sada možemo temeljem relacija (11.1.14),(11.1.15) i (11.1.16) postaviti bilancu toplinske snage u tijelu volumena V površine S koristeći prvi zakon termodinamike, odnosno postavku da je promjena unutarnje energije tijela jednaka razlici proizvedene topline u tijelu i odvedene topline iz tijela.

$$\int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV = \int_V q_V dV - \int_S \vec{q}_p \vec{n} dS \qquad \textbf{(11.1.17)}$$

Za daljnji postupak neophodno je transformirati drugi integral na desnoj strani relacije (11.1.17), koji se odnosi na integraciju vektora $\vec{q}_p$ po površini S u integral po volumenu **V**.

Za transformaciju može poslužiti poznati teorem Gauss-a i Ostrogradskog koji određuje,

$$\int_S \vec{q}_p \vec{n} dS = \int_V \mathrm{div}(\vec{q}_p) dV \qquad \textbf{(11.1.18)}$$

Iz vektorske analize je poznato da je divergencija vektora **je** skalarna veličina.

Uvrštenjem izraza (11.11.18) u jednadžbu (11.1.17) slijedi,

$$\int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV = \int_V q_v dV - \int_V div(\vec{q}_p) dV$$

Budući da je volumen integracije proizvoljan mora vrijediti ,

$$c\rho \frac{dT}{dt} = q_v - div(\vec{q}_p) \qquad \textbf{(11.1.19)}$$

Tok toplinske snage $\vec{q}_p$ je određen relacijom (11.1.3),

$\vec{q}_p = -\lambda \, \mathrm{grad}T$

Uvrštenjem u izraz (11.1.19) dobivamo traženu bilancu topline,

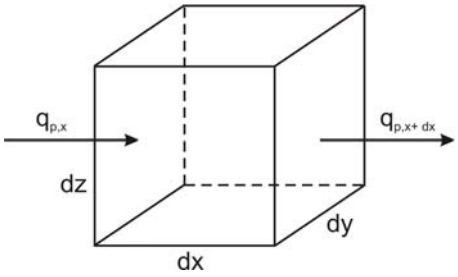
$$c\rho \frac{dT}{dt} = q_V + div(\lambda grad T) \qquad \textbf{(11.1.20)}$$

Izraz (11.1.20) je izveden općim postupkom, bez obzira na oblik tijela na koje se primjenjuje bilanca topline i neovisno o koordinatnom sustavu.

Isti izraz možemo mnogo jednostavnije izvesti ako se ograničimo na pravokutni koordinatni sustav u kojemu posmatramo tijelo u obliku elementarnog kockastog volumena dV sa stranicama

dx,dy i dz . Izvesti ćemo izraz koji određuje neto gubitak topline kroz površinu tako definiranog elementarnog volumena (što odgovara drugom članu na desnoj strani izraza (11.1.20).

Smatrati ćemo da je tok toplinske snage u $\vec{q}_p$ u tom koordinatnom sustavu funkcija položaja u prostoru ,tj. da je $\vec{q}_p$=f(x,y,z).



Slika 11.1.4 Tok toplinske snage $\vec{q}_p$ u elementarnom volumenu dV

Promatrati ćemo, prema slici, najprije komponentu vektora $\vec{q}_p$ u smjeru x, koju ćemo označiti kao $\vec{q}_{p,x}$ .Toplinska snaga koja ulazi u elementarni volumen u smjeru x, dakle kroz plohu dydz, iznosi $\vec{q}_{p,x}$ dydz. Analogno tome,toplinska snaga koja u smjeru x izlazi iz tog volumena ,dakle na položaju x+dx, će biti $\vec{q}_{p,x+dx}$ dydz.Neto gubitak toplinske snage u smjeru x je,

$$(\vec{q}_{p,x+dx} - \vec{q}_{p,x})dydz = \frac{(\vec{q}_{p,x+dx} - \vec{q}_{p,x})}{dx} dxdydz = \frac{\partial \vec{q}_{p,x}}{\partial x} dV$$

Isto ,naravno,vrijedi i za smjerove y i z,pa se gubitak topline iz elementarnog volumena dV može odrediti kao,

$$(\frac{\partial \vec{q}_{p,x}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_{p,y}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_{p,z}}{\partial z})dV = div(\vec{q}_p)dV = -div(\lambda gradT)dV$$

Kompletna bilanca topline za elementarni volumen dV će sugladno ranije navedenom biti,

$$c\rho \frac{dT}{dt} dV = q_V dV + div(\lambda gradT)dV$$

Iz čega neposredno slijedi relacija (11.1.20).

Praktična primjena jednadžbe bilance topline

Izvedena jednadžba bilance topline u volumenu tvari (jednadžba 11.1.20) je u svojem općem obliku teška za praktičnu primjenu.Njezinom se rješavanju kod složenijih zadataka može prići numeričkim metodama.Analitička rješenja,koja se u praksi vrlo često primjenjuju, su uvjetovana znatnim pojednostavljenjem opće jednadžbe bilance topline.

Pojednostavljenja bilance topline mogu biti posljedica zanemarenja ovisnosti konstanti materijala (od kojih je posebno značajan koeficijent vođenja topline λ) o temperaturi i/ili prirode problema koji se rješava (stacionarno ili nestacionarno vođenje topline , postojanje unutarnjeg izvora topline, jednodimenzionalno ili višedimenzionalno vođenje topline).

Razmotriti ćemo utjecaj pojednostavljenja bilance topline na njezin matematički oblik.

Konstantan koeficijent vođenja topline

Kod rješavanja velikog broja praktičkih problema se zanemaruje ovisnost koeficijenta vođenja topline λ o temperaturi.

U slučajevima kada se koeficijent vođenja topline može smatrati konstantnim i/ili kada se promjena tog koeficijenta u očekivanom opsegu temperatura može zanemariti, drugi član na desnoj strani jednadžbe (11.1.20) postaje

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}T) \cong \lambda \mathrm{div}(\mathrm{grad}T) = \lambda \nabla^2 T \qquad \textbf{(11.1.21)}$$

gdje je ∇^2 Laplaceov operator.

Bilanca topline se u tom slučaju svodi na izraz,

$$c\rho \frac{dT}{dt} = q_V + \lambda \nabla^2 T \qquad \textbf{(11.1.22)}$$

Stacionarno vođenje topline

Kod stacionarnog vođenja topline je unutarnja energija tijela konstantna,što znači da nema promjene temperature s vremenom (tj. dT/dt=0).U tom slučaju otpada član na lijevoj strani jednadžbe (11.11.22) te preostaje bilanca topline u obliku,

$$q_V + \lambda \nabla^2 T = 0 \qquad \textbf{(11.1.23)}$$

Ako posmatramo vođenje topline kroz tijelo u kojemu nema unutarnjeg izvora topline (q_V=0) bilanca topline se još pojednostavljuje i svodi na izraz

$$\nabla^2 T = 0 \qquad (11.1.24)$$

Diferencijalni oblik Laplaceovog operatora

Za praktičku primjenu Laplaceovog operatora kod rješavanja problema vođenja topline potrebno je poznavati njegov diferencijalni oblik. Taj je oblik ovisan o vrsti koordinatnog sustava u kojem se posmatra zadani problem.Navesti ćemo diferencijalni oblik Laplaceovog operatora u pravokutnom, cilindričnom osno simetričnom i kuglastom centralno simetričnom koordinatnom sustavu.

-Pravokutni koordinatni sustav s osima x,y i z,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad \textbf{(11.1.25)}$$

- Cilindrični osno simetrični sustav radiusa r i visine z,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad \textbf{(11.1.26)}$$

- Kuglasti centralno simetrični sustav radiusa r,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \qquad \textbf{(11.1.27)}$$

Granični uvjeti kod rješavanja problema vođenja topline

Praktički problemi vođenja topline se mogu riješiti samo uz poznavanje odgovarajućih graničnih uvjeta.

Granični uvjeti za kod prijelaza topline se specificiraju u tri vrste odnosno kategorije:

- Granični uvjeti prve vrste

Kod graničnih uvjeta prve vrste smatramo da se poznate temperature na površini tijela unutar kojeg se posmatra vođenje topline.Ti se uvjeti često koriste kod rješavanja zadataka iz prijelaza topline ,ali su manje upotrebljivi za praktičnu primjenu.

- Granični uvjeti druge vrste

Granični uvjeti druge vrste se primjenjuju kod slučajeva gdje je poznata toplinska snaga koja izlazi ili ulazi u tijelo unutar kog se posmatraju temperaturne promjene.Ti se granični uvjeti naročito pojavljuju kod problema s unutarnjim izvorom topline.

- Granični uvjeti treće vrste

Kod graničnih uvjeta treće vrste je poznata temperatura okoline na koju se prenosi toplinska snaga. Ti se uvjeti najčešće pojavljuju u praktičnoj primjeni.Oni traže poznavanje,ne samo vođenja topline kroz tijelo, nego i prijelaza topline s tijela na okoliš.

OPREZ::: BEZ NUMERIRANJA PODNASLOVA ??????

PODVUČENE IZNJENE

Vođenje topline kroz materijale bez unutarnjeg izvora topline

Izvodom izraza za vođenje topline je pokazano da je najjednostavniji slučaj onaj kada se radi vođenju topline u stacionarnom stanju bez unutarnjeg izvora topline. Raspodjela temperatura u takvom slučaju udovoljava jednadžbi (11.1.24).Valja se prisjetiti da taj izraz vrijedi samo u koliko koeficijent vođenja topline možemo smatrati konstantnim (ili smatrati da je u razmatranom temperaturnom području promjena tog koeficijenta malena te da je dozvoljeno računati sa njegovom srednjom vrijednošću).Posebno je jednostavna analiza jednodimenzionalnog slučajevima vođenja topline u jednostavnim geometrijama.

Vođenje topline u jednoj dimenziji

Sva tijela za koje se razmatraju problemi vođenja topline zapremaju neki prostor ,što znači da su trodimenzionalna.Međutim, u mnogim praktičkim slučajevima jedna od dimenzija tijela je za nekoliko redova veličine manja od drugih pa je toplinski otpor vođenju topline (pojam toplinskog otpora će se detaljnije obraditi u narednom poglavlju) u njezinom smjeru bitno manji nego u ostalim smjerovima.To primjerice odnosi na , debljinu zida u odnosu na njegovu visinu i širinu zida,zatim promjer cijevi ili električnog vodiča u odnosu na dužinu.Kod takvih slučajeva je dovoljno je točno posmatrati vođenje topline samo u smjeru najmanje dimenzije i zanemariti vođenje u smjeru ostalih.

Tek kada se dvije dimenzije tijela poprime isti red veličine potrebno je problem vođenja topline posmatrati dvodimenzionalno.Trodimenzionalno računanje vođenja topline je također moguće ,ali se u praksi izvodi rijetko.

Dobra je okolnost što se potreba prilično kompleksne analize dvodimenzionalnog vođenja topline javlja većinom kod problema vezanih uz pravokutni koordinatni sustav.Kod osno simetričnog cilindričnog i simetričnog kuglastog koordinatnog sustava posmatranje vođenja topline u smjeru radiusa već uključuje analizu vođenja topline po svim smjerovima u površini presjeka ili u cijelom volumenu.

Vođenje topline kroz ravnu stjenku

U slučaju razmatranja ravne stjenke prikladno je problem posmatrati u pravokutnom koordinatnom sustavu.Jednadžba (11.1.24) za takav slučaj poprima oblike dat relacijom (11.1.25):

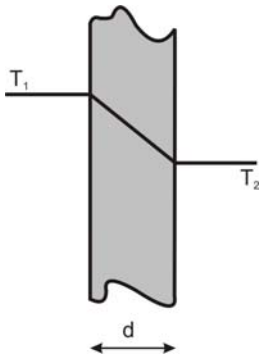
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Ako uzmemo da je ravna stjenka paralelna s plohom y-z, te da se toplina vodi samo u smjeru okomitom na tu plohu (tj. u smjeru x),tada i promjena temperature postoji samo u smjeru x .Sukladno uvodnom razmatranju, ova postavka vrijedi ako je debljina stjenke bitno manja od njezine visine i širine.Jednadžba (11.1.25) se tada svodi na,

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \text{ ,ili,}$$

$$\frac{dT}{dx} = const.$$

Dobiveni izraz pokazuje da je promjena temperature kroz ravnu stjenku linearna.Za daljnju je analizu potrebno definirati granične uvjete.



Slika 11.1.5 Vođenje topline kroz ravnu stjenku

Zamislimo,prema slici **11.1.5**, stjenku debljine d na čijim su čeonim stranama temperature T_1 i T_2.Budući da je izvod temperaturne funkcije po x konstantan možemo pisati,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{d}$$

Nadalje,iz Fourierovog zakona slijedi,

$$q_p = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} \quad \mathbf{W/m^2} \qquad \textbf{(11.1.28)}$$

Ako stjenka ima površinu F,tada će ukupno prenesena toplina Q_p biti,

$$\mathbf{Q_p} = \lambda F \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{d}{\lambda F}\right)} \quad \mathbf{W} \qquad \textbf{(11.1.29)}$$

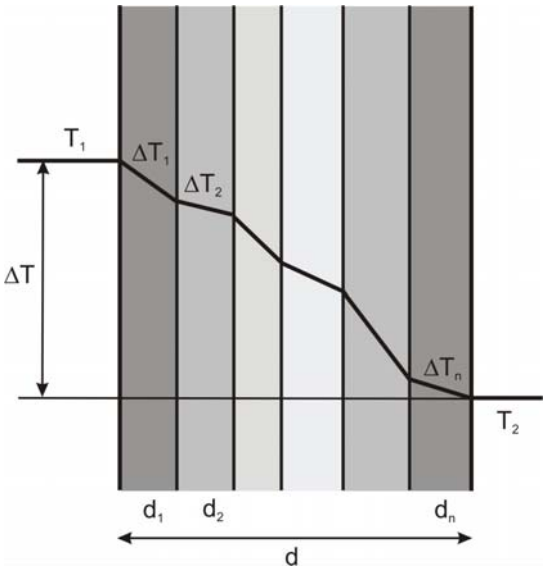
Izraz **(11.1.29)** ima oblik koji je sličan Ohmovom zakonu u elektrotehnici.Ako toplinski tok Q_p shvatimo kao "toplinsku struju" a razliku temperatura kao "toplinski napon" ,tada je nazivnik izraza ekvivalentan toplinskom otporu R_T (K/W).

Pojam toplinskog otpora je koristan za razumijevanje djelovanja serijskih otpora kod višeslojnih stjenki ,a ponekad i paralelnih otpora kod vođenja topline kroz raznorodne materijale.

Primjedba:Kod izvoda jednadžbe **(11.1.29)** upotrijebljen je granični uvjet prve vrste (poznata temperatura površine stjenke).U praksi će se takvi problemi češće rješavati primjenom graničnog uvjeta treće vrste (poznata temperatura medija s jedne i druge strane stjenke)

Vođenje topline kroz višeslojne stjenke

Toplina se,prema slici **11.1.6**, može voditi kroz stijenu debljine d koja se sastoji iz više slojeva debljina $d_1,d_2\ldots d_n$,s koeficijentima vođenja topline u svakom sloju λ_1,λ_2 $\ldots\lambda_n$.i temperaturnim razlikama između površina svakog sloja ΔT_1, $\Delta T_2 \ldots \Delta T_n$



Slika 11.1.6 Vođenje topline kroz višeslojnu stjenku

Korištenjem relacije **(11.1.29)** možemo temperaturne razlike $\Delta T_1,\Delta T_2 \ldots \Delta T_n$. u svakom sloju izraziti kao,

$$\Delta T_1 = Q_p \frac{d_1}{\lambda_1 F}$$

$$\Delta T_2 = Q_p \frac{d_2}{\lambda_2 F}$$

.....

$$\Delta T_n = Q_p \frac{d_n}{\lambda_n F}$$

Zbrajanjem svih temperaturnih razlika od ΔT_1 do ΔT_n se dobiva,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = T_1 - T_2 = \frac{Q_p}{F} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} \text{ , ili,}$$

$$Q_p = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{F} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i}} \quad \mathbf{W} \qquad \textbf{(11.1.30)}$$

usporedbom izraza **(11.1.29)** i (**11.1.30**) vidimo da se kod računanja prijelaza topline kroz višeslojne ploče ekvivalentni toplinski otpor R_{Tekv} dobiva kao suma pojedinačnih toplinskih otpora R_{Ti} svakog sloja.Površina F je obično ista za sve slojeve (u koliko nije trebalo bi svaki toplinski otpor računati s odgovarajućom površinom)

Primjer 11.1.3

Betonski zid s vanjskom toplinskom izolacijom od šljakaste vune između neke prostorije i okoliša ima površinu $10m^2$ .Temperatura na unutarnjoj površini zida je 298 K a temperatura vanjske površine izolacije 270K.Debljina betonskog zida je 15 cm, a debljina sloja šljakaste vune 5 cm.Koliki je gubitak topline kroz zid i kolika je vanjska temperatura betona? Koliki bi bio gubitak topline kroz zid bez toplinske izolacije?

Rješenje:

Na osnovi tablice **11.1.2** ,koeficijenti vođenja topline betona i šljakaste vune su 0,76 W/m,K odnosno 0,05 W/m,K.

Toplinski otpori R_{Ti} iznose

za betonski zid $\frac{0,15}{0,76x10} = 0,01974$ K/ W

za toplinsku izolaciju $\frac{0,05}{0,05x10} = 0,1$ K/ W

Ekvivalentni toplinski otpor $R_{Tekv} = 0,11974$ K/ W

Gubitak topline kroz zid s toplinskom izolacijom je,

$$Q_p = \frac{298-270}{0{,}11974} = 233{,}8 \ \ W$$

Temperatura na vanjskoj strani betona $\Delta T = 298 - 233{,}8x0{,}01974 = 293{,}4$ K.

Gubitak topline kroz zid bez toplinske izolacije bi bio,

$$Q_p = \frac{298-270}{0{,}01974} = 1418{,}4 \ \ W$$

Ugradnjom toplinske izolacije smanjuje se gubitak topline za kroz betonski zid za 1184,6 W , odnosno za oko 83,5% .Ušteda topline zbog ugradnje izolacije je približno 28,4 kWh/dan.

Primjer 11.1.4

Zbog otpadanja dijela toplinske izolacije došlo do povećanja gubitka topline od 20% kroz zid opisan u primjeru **11.1.3**.Kolika je površina zida s koje je otpala izolacija?

Rješenje:

Na temelju ranije navedenih izraza možemo postaviti slijedeću relacije za zid s neoštećenom i oštećenom izolacijom

$$1{,}2\frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{d}{\lambda F}\right)_{beton} + \left(\frac{d}{\lambda F}\right)_{izol.}} = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{d}{\lambda F_1}\right)_{beton} + \left(\frac{d}{\lambda F_1}\right)_{izol.}} + \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{d}{\lambda F_2}\right)_{beton}}$$

Gdje F ukupna površina zida , F_1 površina s koje nije otpala izolacija a F_2 površina zida s koje je otpala izolacija, pri čemu je naravno $F=F_1+F_2$.

Jednadžba pokazuje da je rješenje neovisno o temperaturnoj razlici.

Uvrštenjem u gornji izraz vrijednosti za debljine i koeficijente vođenja topline za betonski zid i izolaciju kao i površinu zida F iz primjera **11.1.3** dobivamo da je povećanje gubitka topline od 20% uzrokovano gubitkom izolacije na površini zida F_2 = 0,395 m^2 (dakle na samo 3,95% površine zida).

Vođenje topline kroz paralelne toplinske otpore

Primjer **11.1.4** se odnosi na slučaj vođenja topline kroz paralelne toplinske otpore , tj kroz toplinske otpore na čijim je krajevima ista razlika temperatura. Slučaj možemo poopćiti radi određivanja ekvivalentnog toplinskog otpora kod paralelnog vođenja topline,

Toplinska snaga koja se prenosi kroz niz paralelnih toplinskih otpora R_{Ti} će biti,

$$\mathbf{Q_p} = \frac{\Delta T}{R_{Tekv}} = \frac{\Delta T}{R_{T1}} + \frac{\Delta T}{R_{T2}} ..... + \frac{\Delta T}{R_{Tn}} = \Delta T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{Ti}} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{Ti}}} \qquad \textbf{(11.1.31)}$$

Rezultat pokazuje da je ekvivalentni toplinski otpor u slučaju vođenja topline kroz niz paralelnih toplinskih otpora inverzna vrijednost sume inverznih vrijednosti pojedinačnih toplinskih otpora.

Vođenje topline kroz ravnu stjenku uz primjenu graničnog uvjeta treće vrste.

Granični uvjet treće vrste je određen temperaturama okoliša i uvjetima prijelaza topline s okoliša na stjenku.

U cilju definiranja veze između temperature okoliša i temperature stjenke moramo se poslužiti jednom od fundamentalnih relacija znanosti o prijelazu topline čiji je značaj sličan značaju Fourierovog zakona. Ta relacija je Newtonov zakon koji određuje da je toplina prenesena s okoliša na stjenku (ili obratno) proporcionalna umnošku površine **stjenke** i razlike temperatura okoliša i stjenke.Faktor proporcionalnosti je koeficijent prijelaza topline α.

Sukladno navedenom se Newtonov zakon može pisati u obliku,

$$Q_p=\alpha F(T_{ok} - T) \quad W \qquad \textbf{(11.1.32)}$$

gdje je T_{0k} temperatura okoliša,T temperatura stjenke a F površina.

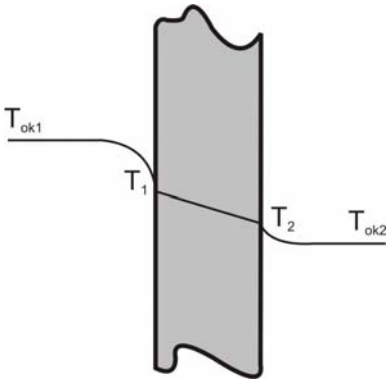
Koeficijent prijelaza topline,čija je dimenzija W/m^2K , ovisi o prirodi fluida u okolišu stjenke i brzini njegovog kretanja.Određivanje tog koeficijenta je u mnogim slučajevima komplicirano i predmet je razmatranja u narednim poglavljima ove knjige.

Iz relacije **(11.1.32)** slijedi,

$$Q_p = \frac{T_{ok} - T}{\frac{1}{\alpha F}}$$

Toplinski otpor prijelaza topline između stjenke i okoline iznosi $1/\alpha F$.Dakle,što je veća površina i koeficijent prijelaza topline to je toplinski otpor manji pa je za prijelaz određene količine toplinske snage potrebna manja razlika temperature okoline i stjenke.

Temperature površine stjenke i okoline su prikazane slikom **11.1.7.**



Slika 11.1.7 Vođenje topline kroz ravnu stjenku uz primjenu graničnog uvjeta treće vrste

Slika pokazuje da se toplina vodi kroz tri serijska toplinska otpora od kojih je jedan unutar stjenke a druga dva na granici između stjenke i okoliša.Na temelju navedenog možemo postaviti relacije,

$$T_{ok1} - T_1 = \frac{Q_p}{\alpha_1 F}$$

$$T_1 - T_2 = Q_p \frac{d}{\lambda F}$$

$$T_2 - T_{ok2} = \frac{Q_p}{\alpha_2 F}$$

Sabiranjem se dobiva,

$$Q_p = \frac{T_{ok1} - T_{ok2}}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{d}{\lambda F} + \frac{1}{\alpha_2 F}} \qquad \textbf{(11.1.33)}$$

Ako je stjenka višeslojna tada treba umjesto drugog člana u nazivniku (koji određuje toplinski otpor jednoslojne stjenke) treba uključiti toplinski otpor višeslojne stjenke prema relaciji (**11.1.30**). Time se dobiva,

$$Q_p = \frac{T_{ok1} - T_{ok2}}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 F}} \qquad \textbf{(11.1.34)}$$

Primjer 11.1.4

Površina betonskog zida neke prostorije iznosi 30 m^2.Debljina zida je 20 cm.Unutar prostorije je potrebno održavati temperaturu 293 K (20^0C).Koliku je toplinsku snagu potrebno trošiti na grijanje prostorije ako je temperatura zraka izvan prostorije 268 K (-5^0C).Koeficijent prijelaza topline s zraka na stjenku zida unutar prostorije je 8 W/m^2K ,a s vanjske strane 10 W/m^2K.Koeficijent vođenja topline za beton je 0,76 W/m,K.

Rješenje:

Primjenom relacije (**11.1.33**) se dobiva potrebna toplinska snaga za održavanje zadane temperature u prostoriji,

$$Q_p = \frac{293 - 268}{\frac{1}{30}\left(\frac{1}{8} + \frac{0{,}2}{0{,}76} + \frac{1}{10}\right)} = 1536 \text{ W}$$

Vođenje topline kroz cilindričnu stjenku

Vođenje topline kroz cilindričnu stjenku je najčešći način vođenja topline u industrijskim i energetskim postrojenjima jer između ostalog obuhvaća cijevi, cilindrične spremnike , električne vodiče i nuklearne gorivne elemente

Vođenje topline u cilindričnom koordinatnom sustavu s osnom simetrijom (temperatura duž svake kružnice koncentrične s osi cilindra je jednaka) je određeno relacijom (11.1.26):

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

U većini praktičnih slučajeva je radius tijela mnogo manji od visine , pa se sukladno napomenama u uvodu ovog poglavlja vođenje topline u smjeru z može zanemariti. Stoga je dozvoljeno pisati,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Diferencijalna jednadžba se veoma lako rješava supstitucijom $\frac{dT}{dr} = u$, iz čega proizlazi,

$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$ separacijom varijabli slijedi,

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

Integriranjem lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo,

ln(u) = -ln(r) +C ili,

ln (ur) =C, odnosno , ur = C_1,

C i C_1 su konstante.

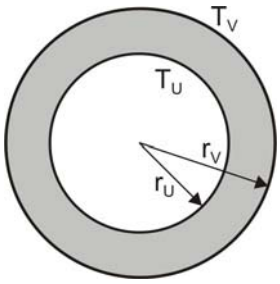
Kao rješenje dobili smo jednadžbu,

$r\frac{dT}{dr} = C_1$, odnosno ponovnim separiranjem varijabli jednadžbu,

$$dT = C_1 \frac{dr}{r}$$

Dobivena jednadžba daje osnovu za definiranje odnosa temperature i polumjera kod cilindrične geometrije u obliku,

$T=C_1 \ln(r) + C_2$



Slika 11.1.8 Vođenje topline kroz cilindričnu stjenku

Konstante integracije treba odrediti iz graničnih uvjeta.

Ako primijenimo granične uvjete prve vrste te ,prema slici, uzmemo da cilindrična stjenka na unutarnjem polumjeru r_u ima temperaturu T_u, a na vanjskom polumjeru r_v temperaturu T_v ,tada uvrštenjem vrijednosti u gornju relaciju i odbijanjem jednadžbi dobivamo,

$$C_1 = \frac{T_u - T_v}{\ln \frac{r_u}{r_v}}$$

Gradijent temperature uz dobivenu vrijednost konstante C_1 postaje,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} = \frac{1}{r} \frac{T_u - T_v}{\ln \frac{r_u}{r_v}}$$

Sada možemo , primjenom Fourierovog zakona, odrediti toplinsku snagu prenesene s unutarnje na vanjsku površinu cijevi po jedinici dužine odnosno kroz površinu $2r\pi$ ($r_v > r > r_u$).Tu ćemo toplinu,u skladu s definiranim oznakama, označiti kao q_{1p}.

Dakle,

$$q_{1p} = -2r\pi\lambda \frac{dT}{dr} = 2\pi\lambda \frac{T_u - T_v}{\ln \frac{r_v}{r_u}} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_v}{r_u}} \quad \text{W/m} \qquad \textbf{(11.1.35)}$$

Jednadžba (**11.1.35**) pokazuje da toplinski otpor cilindrične ljuske s polumjerima r_v i r_u iznosi,

$$\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_v}{r_u}$$

U koliko se radi o višeslojnoj ljusci s n koncentričnih slojeva polumjera r_i i toplinske vodljivosti λ_i ($0<i<n$),dobivamo ,slično kao i kod ravne stjenke,ukupni toplinski otpor kao sumu pojedinačnih toplinskih otpora svakog koncentričnog sloja. za taj se slučaj jednadžba (**11.1.35**) pretvara u,

$$q_{1p} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad \textbf{(11.1.36)}$$

Primjer 11.1.5

Čelična cijev unutarnjeg promjera 50 mm i vanjskog promjera 60 mm obložena je radi toplinske izolacije slojem staklene vune debljine 30 mm.Na unutarnjoj strani cijevi nataložen je sloj vapnenca debljine 3 mm.Temperatura na unutrašnjoj strani cijevi je 570 K a na vanjskoj strani izolacije 350 K. Koliki je gubitak topline po metru dužine cijevi i kolika je temperatura na vanjskoj strani čelične cijevi ?

Rješenje:

Koeficijenti vođenja topline datih materijala prema tablicama 11.1.1 i 11.1.2 su:

čelik 45 W/mK

staklena vuna 0,038 W/mk

kamenac 2,2 W/mk

Uvrštenjem zadanih vrijednosti u relaciju (**11.1.36**) se dobiva,

$$q_{1p} = \frac{570 - 350}{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2,2}\ln\left(\frac{0,025}{0,022}\right) + \frac{1}{45}\ln\left(\frac{0,030}{0,025}\right) + \frac{1}{0,038}\ln\left(\frac{0,060}{0,030}\right)\right]} = 75,54 \text{ W/m}$$

Temperatura na vanjskoj strani čelične cijevi T_c je veća od temperature na vanjskoj površini izolacije za razliku temperature između unutarnje i vanjske strane izolacije.Ta se pak dobiva kao umnožak toplinske snage i termičnog otpora izolacije.Dakle,

$$T_c = 350 + \frac{75,54}{2\pi x 0,038}\ln\left(\frac{0,060}{0,030}\right) = 569,3 \text{ K}$$

Rezultat pokazuje da je temperatura na vanjskoj strani cijevi bliska unutarnjoj temperaturi što znači da je praktički cijela temperaturna razlika složene stjenke jednaka temperaturnoj razlici na izolaciji.

Vođenje topline u cilindričnoj geometriji uz primjenu graničnih uvjeta treće vrste.

Slično kao i kod ravne stjenke u slučaju cilindrične geometrije se mogu primijeniti granični uvjeti treće vrste. Ako su ,prema ranijem T_u i T_v temperature unutarnje i vanjske stjenke cilindrične posude a T_{uo} i T_{vo} temperature fluida u cijevi i oko nje te α_u i α_v koeficijenti prijelaza topline s fluida na stjenku na unutarnjoj i vanjskoj strani cijevi ,možemo pisati,

$q_{1p}=2\pi r_u\alpha_u (T_{uo}-T_u)= 2\pi r_v\alpha_v(T_{vo}-T_v)$

Iz navedene relacije možemo izraziti toplinske otpore na unutarnjoj i vanjskoj strani cijevi kao,

$$\frac{1}{2\pi r_u\alpha_u} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2\pi r_v\alpha_v}$$

Primjena graničnih uvjeta treće vrste traži proširenje izraza (**11.1.35**) odnosno (**11.1.36**) zbog potrebe uključenja toplinskih otpora prijelazu topline između fluida i površine stjenki.Time dobivamo za slučaj jednoslojne cijevi,

$$q_{1p} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_u\alpha_u} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_v}{r_u} + \frac{1}{r_v\alpha_v}\right)} \quad \text{W/m} \qquad \textbf{(11.1.37)}$$

i za slučaj višeslojne cijevi,

$$q_{1p} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0\alpha_0} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{r_n\alpha_n}\right)} \quad \text{W/m} \qquad \textbf{(11.1.38)}$$

Pazi:U jednadžbi promjena sume s i=0 na i=1

Kod višeslojne cijevi r_0 i α_0 označuju polumjer cijevi i koeficijent prijelaza topline za i=0 ,dakle za unutarnju stranu cijevi a r_n i α_n te veličini na vanjskoj strani cijeni , tj.za i=n.

Primjer 11.1.6

Kolika bi bila količina prenesene topline po jedinici dužine cijevi u primjeru **11.1.5**, uz pretpostavku da zadane temperature nisu temperature unutarnje i vanjske stjenke cijevi nego temperature fluida unutar cijevi i izvan cijevi.Koliki je relativni doprinos pojedinih toplinskih otpora ukupnom toplinskom otporu.?

Unutar cijevi struji voda a koeficijent prijelaza topline na stjenku cijevi je 8000 W/m^{2}K. S vanjske strane cijevi je zrak a koeficijent prijelaza topline je 10 W/m^{2}K.

Rješenje:

Korištenjem podataka iz primjera **11.1.5** i uvrštenjem zadanih vrijednosti za koeficijente prijelaza topline u jednadžbu (**11.1.38**) dobivamo prenesenu toplinsku snagu po jedinici dužine cijevi,

$$q_{1p} = \frac{570 - 350}{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{8000x0{,}022} + \frac{1}{2{,}2}ln\left(\frac{0{,}025}{0{,}022}\right) + \frac{1}{45}ln\left(\frac{0{,}030}{0{,}025}\right) + \frac{1}{0{,}038}ln\left(\frac{0{,}060}{0{,}030}\right) + \frac{1}{10x0{,}06}\right]} = 69{,}2$$

W/m

Relativni doprinos pojedinih toplinskih otpora ukupnom toplinskom otporu je:

-Prijelaz topline s vode na stjenku 0,028%

-Vođenje topline kroz naslagu kamenca 0,29%

-Vođenje topline kroz čeličnu stjenku 0,02%

-Vođenje topline kroz toplinsku izolaciju 91,3%

-Prijelaz topline na zrak 8,3%

Značajno je uočiti da vođenje topline kroz toplinsku izolaciju cijevi i prijelaz topline s vanjske površine na zrak daju glavninu toplinskog otpora složene stjenke (zajedno oko 99,6%),te da je doprinos koji toplinskom otporu daje vođenje topline kroz čeličnu stjenku (zbog velikog koeficijenta vođenja topline) , prijelaza topline s vode na stjenku (zbog velikog koeficijenta prijelaza topline) gotovo zanemariv. Nije značajan ni doprinos kamenca, zbog njegove pretpostavljene malene debljine.

Kritična debljina izolacije

Analizom odvoda topline kroz izoliranu cilindričnu stjenku primjenom graničnog uvjeta treće vrste (izraz **11.1.38**) uočeno je da se toplinski otpor sastoji iz tri dijela prvi dio određuje toplinski otpor prijelaza topline na unutarnju stjenku cijevi,drugi se odnosi na toplinski otpor vođenja topline kroz stjenku cijevi i izolaciju a treći na toplinski otpor odvoda topline s površine izolacije na okoliš.Formula (**11.1.38**) primijenjena na cijev s jednoslojnom izolacijom **ima oblik identičan relaciji 11.1.37. dakle, (dodan tekst!!!)**

$$q_{1p} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0\alpha_0} + \frac{1}{\lambda_c} ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_{iz}} ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_2\alpha_1}\right)} \qquad \textbf{(11.1.39)}$$

Gdje su

r_0, r_1, r_2 unutarnji i vanjski polumjer cijevi i vanjski polumjer izolacije,

α_0 i α_1 koeficijenti prijelaza topline na unutarnjoj strani cijevi i s vanjske površine izolacije na okoliš.Valja napomenuti da α_1 uključuje ne samo toplinsku konvekciju nego i toplinsko zračenje u okoliš.

λ_c i λ_{iz} koeficijenti vođenja topline kroz stjenku cijevi i kroz izolaciju.

Razmotriti će se ovisnost toplinskog otpora odnosno odvedene topline o debljini izolacije ,dakle o polumjeru r_2.Izraz pokazuje da su o debljini izolacije (r_2) ovisni treći i četvrti član u nazivniku izraza (**11.1.39**).Treći član ukazuje da se povećanjem debljine izolacije povećava toplinski otpor vođenja topline kroz izolaciju, a četvrti da se povećanjem debljine izolacije povećava površina prijelaza topline u okoliš i time smanjuje toplinski otpor.

Toplinski otpor u funkciji polumjera r_2 se može prikazati izrazom,

$$R_T(r_2) = \frac{1}{\lambda_{iz}} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_2\alpha_1}$$

Polumjer r_2 kod koje se dobiva minimalan toplinski otpor se dobiva izvodom funkcije $R_T(r_2)$,

$$\frac{d(R_T(r_2))}{dr_2} = \frac{1}{\lambda_{iz} r_2} - \frac{1}{r_2^2\alpha_1} = 0$$

iz čega slijedi da je kritični polumjer izolacije,

$$r_{2,krit} = \frac{\lambda_{iz}}{\alpha_1} \text{ m} \qquad \textbf{(11.1.40)}$$

Dobiveni izraz pokazuje da je kritični polumjer $r_{2,krit}$ parametar neovisan o promjeru cijevi. Ta vrijednost pokazuje koliki bi polumjer trebala imati izolirana cijev da bi joj za toplinski otpor bio minimalan. Ako je vanjski promjer cijevi bez izolacije manji od kritičnog promjera dodavanjem izolacije bi se smanjivao toplinski otpor i povećavalo odvođenje topline. Očigledno je da se pojam kritične debljine izolacije nije ograničen na samo cilindričnu geometriju (iako se kod nje najčešće koristi)

Primjer 11.1.7

Neka cijev s polumjerom 1 cm je radi smanjenja gubitka topline izolirana izolacijskim materijalom s koeficijentom vođenja topline λ_{iz} = 0,18W/m,K.Koeficijent odvoda topline u okoliš α_1=12 W/m^{2}K. Odrediti ovisnost toplinskog otpora o debljini izolacije i minimalni polumjer izolirane cijevi kod kojeg bi gubitak topline bio manji nego kod cijevi bez izolacije. .

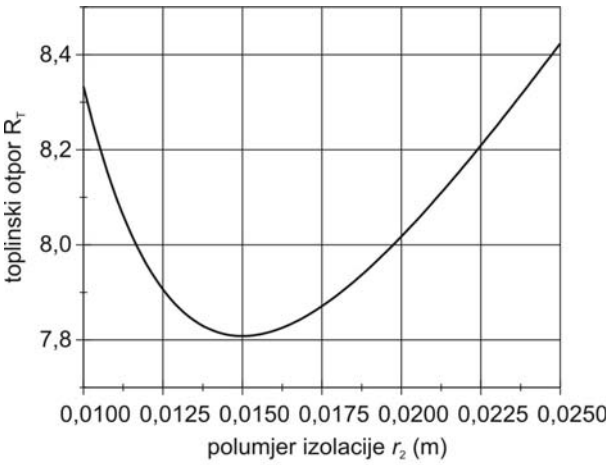
Rješenje:

Kritični polumjer izolacije iznosi,

$$r_{2,krit}=\frac{\lambda_{iz}}{\alpha_1}=\frac{0{,}18}{12}=0{,}015 \text{ m} = 1{,}5 \text{ cm}$$

Kritični polumjer izolacije je veći od polumjera neizolirane cijevi.

Ovisnost toplinskog otpora R_T o polumjeru izolacije r_2 je prikazan slikom 11.1.1.5



Slika 11.1.9 Ovisnost toplinskog otpora o polumjeru izolacije

Iz slike je vidljivo da bi u cilju smanjenja gubitka topline u odnosu na neizoliranu cijev trebalo upotrijebiti izolaciju s vanjskim polumjerom većim od oko 2,4 cm jer tek kod tog promjera toplinski otpor izolirane cijevi postaje jednak toplinskom otporu cijevi bez izolacije.

Primjer 11.1.8

Prolazom električne struje kroz 1,5 MΩ grafitni otpornik proizvodi se toplinska snaga 0,5 W.Otpornik ima polumjer 5 mm, a dug je 20 mm.Radi električne izolacije i boljeg hlađenja otpornik je obložen slojem mikanita. Računa se da se oko 50% topline proizvedene u otporniku odvodi kroz vanjski plašt izolacije.Otpornik se nalazi u zraku temperature 300 K.

Kod kojeg se polumjera izolacije postiže najmanja površinska temperatura otpornika te kakva je ovisnost o vanjskom polumjeru izolacije ako je koeficijent vođenja topline mikanita 0,1 W/m,k, a koeficijent prijelaza topline s površine izolacije na zrak 16 W/m^{2}K.

Rješenje:

Najniža se temperatura površinska otpornika postiže kada izolacija ima polumjer koji je jednak kritičnom polumjeru.

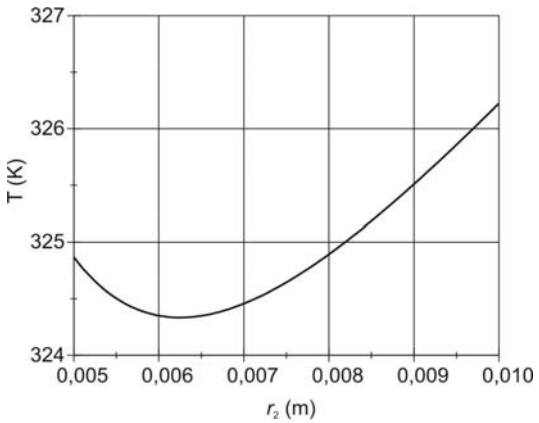
Kritični polumjer izolacije je,

$$r_{2,krit}=\frac{\lambda_{iz}}{\alpha_1}=\frac{0,1}{16}=0,00625 \text{ m} = 6,25 \text{ mm}$$

Ovisnost površinske temperature otpornika o vanjskom polumjeru izolacije dobivamo iz izraza

$$T(r_2)=Q_p R_T + T_{okol}=0,25\left(\frac{1}{(2\pi)(0,02)(0,1)}\ln\frac{r_2}{0,005}+\frac{1}{(2\pi)(0,02)(16)(r_2)}\right)+300 \text{ K}$$

Ovisnost temperature $T(r_2)$ o polumjeru r_2 je prikazana slikom **11.1.10**



Slika 11.1.10 Ovisnost temperature otpornika o vanjskom polumjeru izolacije od mikanita

Iz slike se vidi da se kod kritičnog polumjera postiže najniža temperatura otpornika (324,3 K) te da bi ta temperatura kod r_2 = 0,005 m=5 mm (tj da nema izolacije) iznosila 324,8 K. Kod povećanja vanjskog polumjera izolacije iznad kritičnog polumjera temperatura blago raste da bi kod r_2=10 mm dosegla vrijednost od 326,2 K.

Primjer pokazuje da bi u razmatranom slučaju povećanje debljine izolacije iznad kritične bilo ne samo nepotrebno nego i štetno.

Vođenje topline kroz kuglastu stjenku

Vođenje topline u kuglastom koordinatnom sustavu u uvjetima postojanja centralne simetrije (temperatura na površini svake kugle s istim središtem je jednaka) je određeno relacijom (11.1.27):

$$\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=0$$

Budući da se radi o funkciji jedne varijable možemo izostaviti znak parcijalne derivacije.Postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe je sličan kao kod cilindrične geometrije.Zamjenom

$$\frac{dT}{dr} = u$$

slijedi,

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = 0$$

i separacijom varijabli

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dr}{r}$$

Integracija daje,

$\ln(u)=2\ln(r)+C$ ili,

$$ur^2 = C_1$$

Nakon vraćanja supstitucije,

$$dT = \frac{C_1}{r^2}dr$$

Ponovnim se integriranjem dobiva konačno rješenje diferencijalne jednadžbe,

$$T=-\frac{C_1}{r} + C_2$$

Primjenjujući granične uvjete prve vrste možemo pisati,$T= T_u$ za $r=r_u$ i $T=T_v$ za $r=r_v$.Uvrštenjem graničnih uvjeta u gornju relaciju i odbijanjem dobivenih jednadžbi dobiva se konstanta integracije C_1:

$$C_1 = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{r_v} - \frac{1}{r_u}}$$

Znači da je,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{T_u - T_v}{\frac{1}{r_v} - \frac{1}{r_u}}$$

Količina topline koja prelazi površinu kugle promjera r ,prema Fourierovom zakonu, iznosi,

$$Q_p=-\lambda F\frac{dT}{dr} = -4r^2\pi\lambda\frac{1}{r^2}\frac{T_u - T_v}{\frac{1}{r_v} - \frac{1}{r_u}} = \frac{T_u - T_v}{\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_v}\right)} \quad W \qquad \textbf{(11.1.41)}$$

U koliko se radi o višeslojnoj kuglastoj stjenci s i (i=1…n) koncentričnih ljuski možemo na temelju izraza (**11.1.41**) odmah napisati relaciju za prenesenu toplinsku snagu.

$$Q_p = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{r_{i-1}}-\frac{1}{r_i}\right)}\ W \qquad \textbf{(11.1.42)}$$

gdje je ΔT razlika temperature između unutarnje površine prve ljuske i vanjske površine poslijednje ljuske, r_0 unutarnji promjer prve ljuske i r_n vanjski promjer poslijednje ljuske.

Vođenje topline u kuglastoj geometriji uz primjenu graničnih uvjeta treće vrste.

Jednadžbu (**11.1.42**) možemo modificirati primjenom graničnih uvjeta treće vrste.To će biti potrebno ako tražimo prijelaz topline s fluida u unutrašnjosti kuglastog spremnika na fluid s vanjske strane spremnika.

Ako s α_0 označimo koeficijent prijelaza topline na unutarnju stjenku (čiji je polumjer r_0),a s α_n koeficijent prijelaza topline na vanjsku stijenu (polumjera r_n), možemo pisati,

$$Q_p = 4r_0^2\pi\alpha_0(T_{uo} - T_u) = 4r_n^2\pi\alpha_n(T_v - T_{vo})$$

Iz ovih relacija slijedi da su toplinski otpori prijelaza topline na unutarnju i vanjsku stjenku ,

$$\frac{1}{4r_0^2\pi\alpha_0} \quad \text{i} \quad \frac{1}{4r_n^2\pi\alpha_n}$$

Za primjenu graničnog uvjeta treće vrste izraz **(11.1.42)** treba proširiti uključenjem toplinskih otpora prijelaza topline s fluida na unutarnju i vanjsku stjenku.Time dobivamo,

$$Q_p = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_0^2\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{r_{i-1}}-\frac{1}{r_i}\right)+\frac{1}{r_n^2\alpha_n}\right]} \quad W \qquad \textbf{(11.1.43)}$$

gdje se ΔT odnosi na razliku temperature fluida u unutrašnjosti i izvan kuglastog spremnika.

Primjer 11.1.9

Kuglasti čelični spremnik unutarnjeg promjera 1,2 m sadrži vodu temperature 365 K. Na vanjskoj strani spremnika je zrak temperature 275 K.Spremnik ima debljinu stjenke 5 mm, a s vanjske strane je izoliran slojem staklene vune debljine 20 mm.

Koliki je gubitak toplinske snage iz tog spremnika?

Koeficijenti vođenja topline za čelik i staklenu vunu su 45 W/mK i 0,038 W/mK, a koeficijent prijelaza topline na unutarnjoj strani spremnika (s vode na čeličnu stijenu) je 1500 W/m^2K te na vanjskoj strani spremnika (s površine spremnika na zrak) 8 W/m^2K.

Rješenje:

Uvrštenjem zadanih vrijednosti u jednadžbu (**11.1.43**) dobivamo,

$$Q_p = \frac{365 - 275}{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{1{,}2^2 \text{x} 1500} + \frac{1}{45}\left(\frac{1}{1{,}2} - \frac{1}{1{,}25}\right) + \frac{1}{0{,}038}\left(\frac{1}{1{,}25} - \frac{1}{1{,}27}\right) + \frac{1}{1{,}27^2 \text{x} 8}\right]}$$

$=2757$ W

Primjena rebrastih površina za poboljšanje odvoda topline

Problemi vođenja topline kod mnogih tehničkih uređaja se ne sastoje u sprječavanju gubitka topline (što se rješava toplinskim izolacijama),nego obratno u osiguranju što intenzivnijeg odvoda topline odnosno što intenzivnijeg hlađenja.Takav se slučaj javlja kod izmjenjivača topline te kod većine elektrotehničkih i elektroničnih komponenti kod kojih hlađenjem treba spriječiti pregrijavanje materijala.

Kod razmatranja problema odvođenja topline uz primjenu graničnog uvjeta treće vrste (primjer **11.1.6**) je primijećeno da je odvođenje topline na strani zraka bitno lošije nego kada se to odvođenje događa na strani vode.Takvi odnosi vrijede općenito kada je riječ o hlađenju plinovima u odnosu na hlađenje tekućinama (razlozi za tu pojavu će biti razmatrani u narednim poglavljima ove knjige).Iz navedenog možemo zaključiti da je jedan od temeljnih problema hlađenja tehničkih uređaja loš odvod toplina na strani plinova (najčešće se radi o zraku) kojima se oni hlade.

Newtonov zakon (**11.1.32**) definira količinu odvedene topline relacijom,

$$Q_p=\alpha F(T - T_{ok}) \quad W$$

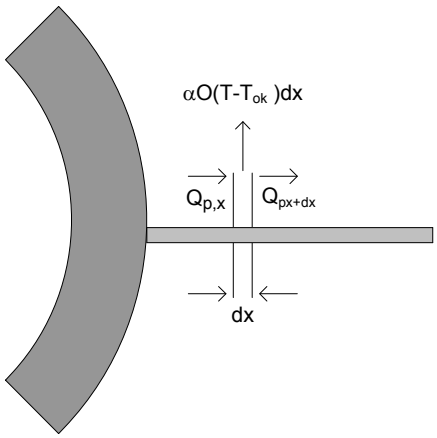
Dakle uz određenu temperaturnu razliku prenesena toplina je razmjerna umnošku koeficijenta prijelaza topline α i površine F s koje se toplina prenosi.

Problem premalenog koeficijent**a** topline plinova za hlađenje tehničkih uređaja možemo djelomično kompenzirati povećanjem površine F.To je povećanje moguće ugradnjom rebara za hlađenje.

Izvedbe rebara za hlađenje mogu biti veoma različite u pogledu dužine,oblika i površine presjeka.Ovdje će se razmotriti učinkovitost jednostavnijih izvedbi rebara s konstantnim presjekom te koncentrična kružna rebra kod cilindričnih objekata.

Rebra kao šipke konstantnog presjeka

Zamislimo da smo na neku stjenku koju treba hladiti (obično je to stjenka cijevi,spremnika, električnog grijača ili slično) pričvrstili šipku iz materijala visoke toplinske vodljivosti (dakle od metala) u to u smjeru okomitom na njezinu površini.Presjek šipke ,koji može imati proizvoljan oblik, se duž šipke ne mijenja. Dužina šipke je bitno veća od ostalih dviju njezinih dimenzija.Uz te uvjete možemo zanemariti promjenu temperature unutar šipke u smjerovima okomitim na njezinu dužinu.Možemo dakle smatrati da se promjena temperature šipke događa samo uzduž njezine najveće dimenzije i da je temperatura po površini svakog njezinog presjeka okomitog na najdužu stranicu jednaka. Budući da je jedan kraj šipke pričvršćen (zavaren) za grijanu stjenku očigledno je da će na spojnom mjestu temperatura šipke biti najviša te da će se duž šipke smanjivati. Uz navedene pretpostavke možemo problem vođenja topline razmotriti jednodimenzionalno.



Slika 11.1.11 Skica šipkastog rebra na površini cijevi

Razmotriti ćemo rebro u obliku šipke prema skici i duž rebra uočiti segment dužine dx. Količina topline koja ulazi u taj segment je $Q_{p,x}$,a količina topline koja iz njega izlazi je $Q_{p,x+dx}$.Razlika tih količina toplina mora biti toplina odvedena u okolinu kroz vanjsku površinu segmenta dx.Ta površina iznosi Odx,gdje je O opseg šipke.Možemo dakle pisati,

$Q_{p,x}-Q_{p,x+dx} = \alpha(T- T_{ok})Odx$ ili,

$$-\frac{dQ_p}{dx} = \alpha O(T - T_{ok}),$$

gdje je T temperatura površine šipke a T_{ok} temperatura okoline.

Prema Fourierovom zakonu ,

$$Q_p=-\lambda F \frac{dT}{dx}$$

F je presjek šipke.

Uvrštenjem slijedi,

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\alpha O}{\lambda F}(T - T_{ok})$$

Uvođenjem zamjena $m^2 = \frac{\alpha O}{\lambda F}$ i $\theta=T-T_{ok}$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu,

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} - m^2\theta = 0$$

Opće rješenje jednadžbe je,

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \qquad \textbf{(11.1.44)}$$

Konstante C_1 i C_2 treba odrediti primjenom graničnih uvjeta.

Granični uvjeti za odvod topline rashladnim rebrima

Ovisno o željenoj točnosti, kod proračuna odvoda topline putem rebara se primjenjuju dva tipa graničnih uvjeta. Razlikuju se sukladno pretpostavkama o načinu odvođenja topline na kraju rebra tj. na udaljenosti x=L, gdje je L dužina rebra.Te bismo granične uvjete mogli opisati prema slijedećem:

Budući da je očigledno da se temperatura duž rebra smanjuje i da bi se ona na velikoj dužini od izvora topline (teorijski za x=∞) izjednačila s temperaturom okoline može se pretpostaviti da će profil temperature kod rebra konačne dužine L ,dakle na odaljenosti od x=0 do x=L ,biti približno isti kao što bi bio da je rebro neograničene dužine.Za takav je proračun dovoljno poznavati samo jedan granični uvjet prve vrste a to je temperatura na početku rebra (kod x=0).

Količina odvedene topline kroz bočne strane rebra je mnogo veća od topline odvedene kroz presjek na kraju rebra, jer su u prvom slučaju bitno veće i temperaturne razlike i površina odvoda topline.Ako zanemarimo količini topline odveden kroz površinu presjeka na kraju rebra ,možemo sukladno Fourierovom zakonu smatrati da je gradijent temperature na kraju rebra približno jednak nuli.Problem dakle rješavano primjenom graničnog uvjeta prve vrste na početku rebra i graničnog uvjeta druge vrste na kraju rebra.Ovaj se granični uvjet smatra dovoljno točnim za rješavanje većine praktičnih slučajeva.

U koliko je potrebna veća točnost proračuna (koji u tom slučaju postaje nešto složeniji) možemo uzeti u obzir i toplinu odvedenu kroz presjek na kraju rebra primjenom graničnog uvjeta treće vrste na odvođenje topline kroz taj presjek.

Valja uočiti da se kod proračuna odvođenja topline putem rashladnih rebara koriste sve tri vrste graničnih uvjeta.Granični uvjet treće vrste je korišten već kod izvoda relacije (**11.1.44**).

U nastavku ćemo odrediti promjenu temperature duž rebra na temelju relacije (11.1.1.17) i uz primjenu navedenih graničnih uvjeta.

Promjena temperature duž rebra konačne dužine uz pretpostavku da je približno jednaka promjeni temperature beskonačno dugog rebra na istoj dužini

Granični uvjeti koji vrijede za rebro neograničene dužine su:

$\theta_{x=0}=\theta_0$ i $\theta_{x=\infty}=0$.

Jednadžba (11.1.1.17) može udovoljiti drugom graničnom uvjetu jedino ako je $C_2 =0$,jer taj član neograničeno raste s porastom dužine x.Preostaje dakle relacija,

$$\theta = C_1 e^{-mx}$$

Integracijska konstanta C_1 primjenom prvog graničnog uvjeta postaje $C_1=\theta_0$.

Konačno rješenje postaje,

$\theta = \theta_0 e^{-mx}$ ili,

$$T = (T_0 - T_{ok})e^{-x\sqrt{\frac{\alpha O}{\lambda F}}} + T_{ok} \qquad \textbf{(11.1.1.18)}$$

Promjena temperature duž rebra uz zanemaren odvod topline s presjeka na kraju rebra

Granični uvjeti ,sukladno uvodnim komentarima, za ovaj slučaj su,

$\theta_{x=0}=\theta_0$ i $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = 0$

Primjenom tih graničnih uvjeta na relaciju (11.1.1.17) slijedi,

$\theta_0 = C_1+C_2$

$-C_1 m e^{-mL} + C_2 m e^{mL} = 0$

Iz navedenih graničnih uvjeta se dobivaju vrijednosti integracijskih konstanti,

$$C_1 = \frac{\theta_0}{1+e^{-2mL}} \text{ i } \quad C_2 = \frac{\theta_0 e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} \qquad \textbf{(11.1.1.19)}$$

Iz dobivenih izraza je očigledno da za velike vrijednosti L, C_2 teži prema nuli, a C_1 prema θ_0 ,pa se rezultat analize svodi na prethodno razmatrani slučaj s beskonačno dugim rebrima.

Nakon uvrštenja izraza za konstante C_1 i C_2 u relaciju (11.1.1.17) i sređivanja se dobiva,

$$\theta = \theta_0 \frac{ch[m(L-x)]}{ch(mL)} \qquad \textbf{(11.1.1.20)}$$

Promjena temperature duž rebra uzimanjem u obzir i odvod topline s presjeka rebra na njegovom kraju

Već je uvodno napomenuto se da ovaj slučaj,iako teorijski najtočniji, rjeđe u praksi koristi zbog veće kompleksnosti proračuna i male razlike u rezultatu u odnosu na prethodnu analizu.Valja naglasiti da,bez obzira na teorijski dio proračuna, rezultat je veoma osjetljiv na ulazne podatke od kojih neke (posebno koeficijent prijelaza topline na okolni medij) ne karakterizira velika točnost.

Granični uvjeti koji se odnose na razmatrani slučaj su na početku rebra isti kao ranije

$\theta_0 = C_1+C_2$

Razlika nastaje u graničnom uvjetu na kraju rebra gdje treba primijeniti granični uvjet treće vrste pa pisati,

$$\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = \alpha_L \theta(L)$$

gdje je s α_L označen koeficijent prijelaza topline s površine presjeka na kraju rebra na okolinu.

Treba primijetiti da granični uvjet nije ovisan o površini presjeka rebra. Primjenom graničnog uvjeta na relaciju (11.1.1.17) slijedi,

$$-\lambda\left(-C_1 m e^{-mL} + C_2 m e^{mL}\right) = \alpha_L\left(C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL}\right)$$

Iz graničnih uvjeta se mogu odrediti integracijske konstante C_1 i C_2 u obliku,

$$C_1 = \frac{\theta_0}{1 + e^{-2mL}\frac{\varphi_1}{\varphi_2}} \qquad \textbf{(11.1.1.21)}$$

$$C_2 = \frac{\theta_0 e^{-2mL}}{\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + e^{-2mL}} \qquad \textbf{(11.1.1.22)}$$

gdje je,

$$\varphi_1 = \frac{\lambda m}{\alpha_L} - 1 \ , \ \varphi_2 = \frac{\lambda m}{\alpha_L} + 1$$

Ako α_L teži k nuli odnos φ_1 φ_2 teži k jedinici pa se granični uvjeti izjednačuju s ranije razmatranim slučajem kod kojeg je odvod topline s površine kraja rebra bio zanemaren.

Promjenu temperature duž rebra dobivamo uvrštenjem dobivenih integracijskih konstanti u relaciju (11.1.1.17).

Primjer 11.1.1.9

U cilju boljeg hlađenja čelične cijevi sa zrakom navarena su na nju rebra u vidu čeličnih šipki promjera 15 mm i dužine 160 mm.Odrediti raspodjelu temperature duž šipki primjenom sve tri grupe graničnih uvjeta.

Temperatura površine cijevi je 400 K, a temperatura okolnog zraka 298 K.Koeficijent vođenja topline čelika je 45 W/mK a koeficijent prijelaza topline na zrak je 15 W/m^2K.

Rješenje:

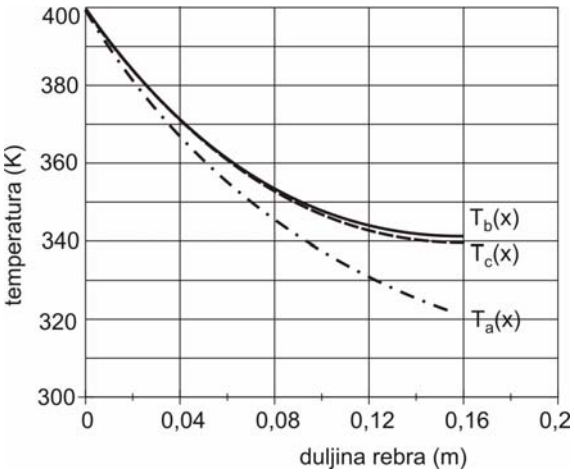
Tražene raspodjele temperatura (koje će se označiti kao Ta,Tb i Tc) se dobiva primjenom izvedenih jednadžbi:

Ta-temperatura duž rebra uz pretpostavku da je raspodjela temperatura na dužini L identična kao kod neograničeno dugog rebra na istoj dužini (jednadžba 11.1.1.18)

Tb- temperatura duž rebra uz zanemaren odvod topline s presjeka na kraju rebra (relacija 11.1.1.20)

Tc- temperatura duž rebra uzimanjem u račun odvod topline na kraju rebra (relacije 11.1.1.17, 11.1.1.21 i 11.1.1.22)

Rezultat proračuna je pokazan na slici 11.1.1.8



Slika 11.1.1.8 Raspodjela temperatura Ta,Tb,i Tc duž rebra

Slika pokazuje izrazitu bliskost raspodjela temperatura Tb i Tc ,ali i znatniji odstupanje raspodjele temperature Ta,što zrači da se zanemarenjem odvoda topline s presjeka na kraju rebra unosi vrlo malena greška u rezultat.Naprotiv tome pretostavka da je stvarna raspodjela temperature duž rebra na dužini L bliska onoj neograničeno dugog rebra na istoj dužini dovodi do prilične greške.Prema očekivanju, proračun daje najvišu temperaturu na kraju rebra pri zanemarenja odvoda topline iz presjeka na kraju rebra.

Numeričke vrijednosti temperatura za sva tri slučaja za x= L/4,L/2,3L/4 i L su dati u tablici 11.1.1.1

Tablica 11.1.1.1 Temperature duž rebra za tri granična uvjeta

	Temperatura duž rebra K			
	x=L/4	x=L/2	x=3L/4	x=L
Ta	367,9	346,0	330,9	320,6
Tb	371,6	353,9	344,1	341,0
Tc	371,4	353,3	343,2	339,7

Toplina odvedena rashladnim rebrom i učinkovitost rebra

Toplini odvedenu rashladnim rebrom možemo jednostavno izračunati uz primjenu dobivenih izraza za raspodjelu temperature duž rashladnog rebra. Očigledno je da toplina koja je odvedena rashladnim rebrom mora biti jednaka toplini koja je ušla u rashladno rebro iz grijane površine (dakle kod x=0).

Na temelju Fourier-ovog zakona možemo pisati,

$$Q_p = -\lambda F\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda F\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0}$$

gdje je $\theta=T-T_{ok}$

Uvrštenjem izraza $\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$ (relacija 11.1.1.17) slijedi,

$Q_p=\lambda F(mC_1- mC_2)$ W **(11.1.1.23)**

Integracijske konstante C_1 i C_2 ovise o odabranim graničnim uvjetima sukladno ranijem razmatranju.

Usvojimo li slučaj s zanemarenim odvodom topline s površine na kraju rebra konstante su date relacijom (11.1.1.19):

$$C_1 = \frac{\theta_0}{1+e^{-2mL}} \text{ i } \quad C_2 = \frac{\theta_0 e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

Uvrštenjem konstanti u jednadžbu (11.1.1.23) nakon sređivanja dobivamo,

$Q_p=\lambda Fm\ \theta_0\ tgh(mL)$ W **(11.1.1.24)**

Učinkovitost rashladnog rebra je određena odnosom odvedene količine topline i količine topline koja bi bila odvedena da je na cijelom rebru razlika temperature prema okolini ista kao na početku rebra θ_o ,dakle količine topline $Q_p =\alpha OL\theta_0$.

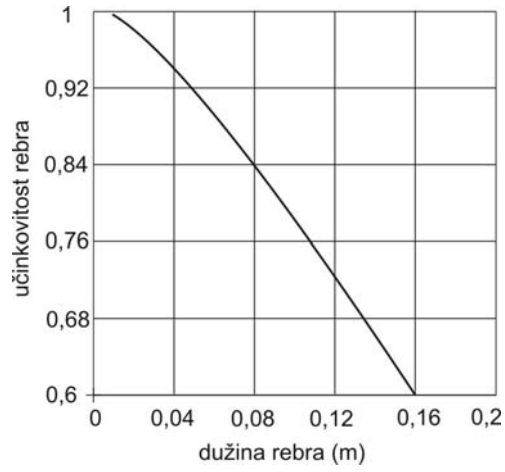
Prema izrazu (11.1.1.24) iskoristivost rebra bismo mogli odrediti odnosom,

$$\eta=\frac{\lambda mFtgh(mL)}{\alpha OL} ,$$

iz čega nakon uvrštenja vrijednosti za m i sređivanja izlazi,

$$\eta = \frac{tgh(mL)}{mL} \quad \textbf{(11.1.1.25)}$$

Ovisnost učinkovitosti rebra o faktoru mL je prikazana na slici 11.1.1.9



Slika 11.1.1.9 Učinkovitost rashladnog rebra u ovisnosti o dužini rebra

Iz slike je vidljivo da učinkovitost rashladnog rebra raste kod smanjenja faktora mL.Viša učinkovitost rebra će se postići kraćim rebrima (malo L) ali na uštrb manjeg odvoda topline iz rebra.Valja se pri tome prisjetiti da je izraz (11.1.1.25) zasnivan na zanemarenju odvoda topline s površine presjeka na kraju rebra,dakle na malom odnosu te površine u odnosu na ukupnu površini odvoda topline.Takva je pretpostavka manje točna kod kratkih rebara.Nadalje, bolja učinkovitost se

može postići s rebrima iz materijala s velikim koeficijentom vođenja topline λ (bakar ,srebro) i rebrima s malim odnosom opsega i površine presjeka (debela rebra).Isto tako bolja se učinkovitost postiže uz manji koeficijent prijelaza topline s rebra na okoliš α, jer je tada promjena temperature duž rebra manja (ali i količina odvedene topline s rebra na okoliš).

U praksi se nastoji da rebra što bolje odvode toplinu uz prihvatljivu učinkovitost i cijenu.

Primjer 11.1.1.10

Potrebno je odrediti učinkovitost rashladnog rebra razmatranog u primjeru 11.1.1.9 uz zanemaren odvod topline s presjeka na kraju rebra, te kod zadane dužine rebra ispitati ovisnost učinkovitosti rebra i količine odvedene topline o masi rebra.

Rješenje:

Iz podataka o rebru i materijalima u primjeru 3.2.1.4.1 slijedi:

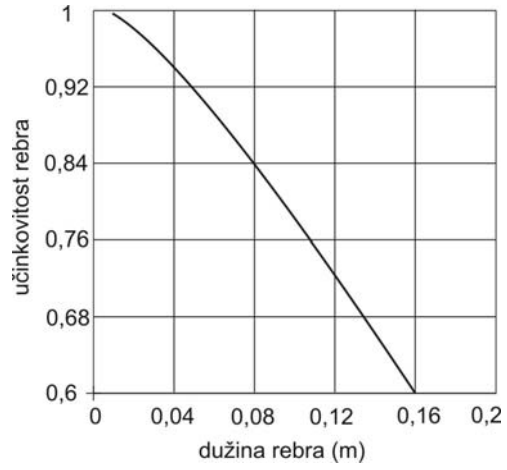
$$m=\sqrt{\frac{\alpha O}{\lambda F}}=9{,}428$$

Učinkovitost rebra,

$$\eta=\frac{tgh(mL)}{mL}=\frac{tgh(9{,}428x0{,}16)}{9{,}928x0{,}16}=0{,}601$$

Toplina odvedena kroz rebro u funkciji površine presjeka rebra F je definirana kao $Q_p(F)=\theta_0\alpha OL\eta(F)$, a odvedena toplina po jedinici mase rebra kao $Qm(F)=Q_p(F)/(\rho FL)$

Tražene ovisnosti učinkovitosti rebra,odvedene topline iz rebra i odvedene topline po jedinici mase rebra o presjeku rebra su ilustrirane slikom 11.1.1.10



Slika 11.1.1.10 Ovisnost učinkovitosti rebra (puna crta),odvedene topline kroz rebro $Q_p(F)$ W(crtkano) i odvedene topline kroz rebro po jedinici njegove mase Qm(F) W/kg (točkasto) o presjeku rebra F m^2

Iz slike je vidljivo da učinkovitost rebra i prenesena toplina kroz rebro rastu s povećanjem presjeka rebra ,ali prenesena toplina po jedinici mase rebra pada.Iz navedenog slijedi da se tanjim

rebrima (odnosno u datom slučaju šipkama manjeg promjera) može po jedinici mase,odnosno po jedinici cijene materijala rebra, prenijeti veća količina topline.

Primjer 11.1.1.11

Za hlađenje tranzistora zrakom treba izraditi 8 rebara od trake aluminijskog lima širine 3 mm i debljine 0,4 mm.Kolika mora biti dužina rebara ako treba odvesti 0,8 W toplinske snage uz temperaturu tranzistora 340 K i temperaturu okoline 300 K. Koeficijent vođenja topline materijala je 175 W/mK a koeficijent prijelaza topline na okolinu 8 W/m^2K.Odvod topline s vrha rebra zanemariti.

Kolika bi bila potrebna dužina rebra kada bismo upotrijebili aluminijsku traku iste širine ali dvostruke debljine (0.8 mm)?

Rješenje:

Odvedenu toplinu možemo odrediti kao umnožak maksimalno moguće odvedene topline (kod koje bi cijelo rebro bilo na temperaturi početka rebra) i učinkovitosti rebra.Za 8 rebara će odvedena toplina biti,

$$Q_p = 8\alpha OL\theta_0\eta = 8\alpha OL\theta_0 \frac{tgh(mL)}{mL},$$

uzimanjem u obzir da je $m=\sqrt{\frac{\alpha O}{\lambda F}}$,slijedi,

$$Q_p = 8\theta_0\sqrt{\alpha\lambda OF}\,tgh(mL) \quad W$$

Iz dobivenog izraza slijedi da tražena duljina rebra iznosi,

$$L = \frac{1}{m} atgh\left(\frac{Q_p}{8\theta_0\sqrt{\alpha\lambda OF}}\right) \quad m \qquad \textbf{(11.1.1.26)}$$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti dobivamo,

$O=6{,}9\times10^{-3}$ m, $F= 1{,}2\times10^{-6}$ m^2 , m= 16,095 m^{-1}

Potrebna dužina rashladnog rebra prema izrazu (11.1.1.26) L= 0,059 m.

Učinkovitost rebra prema relaciji (11.1.1.25) η= 0,779

Za traku debljine 0.8 mm dobivamo:

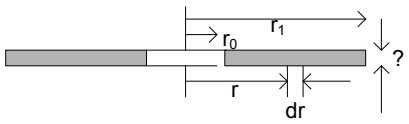
m= 12,032 , potrebna dužina rebra L= 0,045 m, učinkovitost rebra η=0,912

Rezultat pokazuje da se udvostručenjem debljine (a time i mase) rebra potrebna dužina ne smanjuje za odgovarajući iznos ,pa za prijenos iste količine topline treba rebro veće mase.

Kružna rebra

Za hlađenje cilindričnih objekata manjeg promjera česta je uporaba kružnih koncentričnih rebara konstantne debljine.

Kod ovih rebara, za razliku od predhodno analiziranih,površina kroz koju se vodi toplina raste proporcionalno s promjerom rebra.



Slika 11.1.1.11 Presjek kružnog rashladnog rebra

Ako, prema slici, unutar rebra debljine δ na polumjeru r zamislimo uski kružni vijenac širine dr ,možemo za njega za postaviti bilancu topline.

Bilanca topline iskazuje da razlika topline koja je izašla kroz površinu presjeka rebra na promjeru r+dr i one koja je ušla kroz površinu presjeka na polumjeru r, mora biti jednaka toplini odvedenoj u okolinu iz površine kružnog vijenca širine dr ,dakle iz površine $4\pi rdr$.

Na osnovi navedenog možemo pisati,

$(2\pi\delta rq_p)_r - (2\pi\delta rq_p)_{r+dr} = 4\pi rdr\alpha(T-T_{ok})$

Uz napisane relacije slijedi,

$$-\frac{d(rq_p)}{dr} = \frac{2r\alpha\theta}{\delta}$$

Primjenom Fourierovog zakona slijedi,

$$\lambda\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{2r\alpha(T-T_{ok})}{\delta}$$ ili,

Substitucijom $\theta = T-T_{ok}$ te diferenciranjem i sređivanjem se dobiva,

$$r^2\frac{d^2\theta}{dr^2} + r\frac{d\theta}{dr} - r^2\frac{2\alpha\theta}{\lambda\delta} = 0$$

Uvođenjem nove varijable $z = r\psi$, gdje je $\psi = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}$ se jednadžba transformira u,

$$z^2\frac{d^2\theta}{dz^2} + z\frac{d\theta}{dz} - z^2\theta = 0$$

Dobivena jednadžba je modificirana Besselova diferencijalna jednadžba nultog reda čije je rješenje,

$$\theta = C_1I_0(z) + C_2K_0(z) \qquad \textbf{(11.1.1.27)}$$

gdje su $I_0(z)$ i $K_0(z)$ modificirane Besselove funkcije nultog reda.

Slično kao kod ravnih rebara konstante C_1 i C_2 se mogu odrediti iz graničnih uvjeta.

Uobičajeno je računati raspodjelu temperature u rebru uz zanemarenje odvoda topline iz vanjskog ruba rebra.

Ako s r_0 označimo unutarnji polumjer rebra (koji je istovjetan polumjerom cijevi na koju je rebro pričvršćeno) a s r_1 vanjski polumjer rebra te odgovarajuće vrijednosti varijable z s z_0 i z_1 možemo pisati

$\theta_{z=z_0} = \theta_0$

$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=z_1} = 0$

Izvodi Besselovih funkcija $I_0(z)$ i $K_0(z)$ su, $\frac{dI_0(z)}{dz} = I_1(z)$ i $\frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z)$,

gdje su $I_1(z)$ i $K_1(z)$ modificirane Besselove funkcije prvog reda.

Uvrštenjem rubnih uvjeta u relaciju (11.1.1.54) se dobiva,

$\theta_0=C_1I_0(z_0)+C_2K_0(z_0)$

$C_1I_1(z_1)- C_2K_1(z_1) = 0$ ili,

$\theta_0=C_1I_0(r_0\Psi)+C_2K_0(r_0\Psi)$

$C_1I_1(r_1\Psi)- C_2K_1(r_1\Psi) = 0$

Integracijske konstante se dobivaju iz napisanih relacija.

Ako uvedemo zamjenu:

$F(r_0,r_1,\Psi)= I_0(r_0\Psi)K_1(r_1\Psi)+I_1(r_1\Psi)K_0(r_0\Psi)$

Integracijske konstante možemo definirati relacijama,

$C_1 = \frac{\theta_0 K_1(r_1\psi)}{F(r_0,r_1,\psi)}$, $C_2 = \frac{\theta_0 I_1(r_1\psi)}{F(r_0,r_1,\psi)}$

Uz date vrijednosti konstanti jednadžba (11.1.1.27) postaje,

$$\theta(r)=\theta_0\left[\frac{K_1(r_1\psi)}{F(r_0,r_1,\psi)} I_0(r\Psi)+\frac{I_1(r_1\psi)}{F(r_0,r_1,\psi)} K_0(r\Psi)\right] \qquad \textbf{(11.1.1.28)}$$

Odvedena toplina i učinkovitost kružnog rashladnog rebra

Odvedena toplina rashladnim rebrom je toplina koja je u rashladno rebro ušla kroz površinu na najmanjem polumjeru rebra ,odnosno kroz površinu dodira rebra i predmeta koji se hladi.

Dozvoljeno je dakle pisati,

$$Q_p = -2\pi r_0 \delta\lambda\left(\frac{dT(r)}{dr}\right)_{r=r_0} = -2\pi r_0 \delta\lambda\left(\frac{d\theta(r)}{dr}\right)_{r=r_0}$$

Ako uvrstimo izraz za $\theta(r)$ iz jednadžbe (11.1.1.28) dobivamo,

$$Q_p = 2\pi r_o \delta \lambda \psi \theta_0 \left(\frac{K_1(r_0\psi)I_1(r_1\psi) - K_1(r_1\psi)I_1(r_0\psi)}{F(r_0, r_1, \psi)} \right) \qquad \textbf{(11.1.1.29)}$$

Učinkovitost rashladnog rebra će suglasno ranijem navedenom biti odnos topline odvedene rebrom i topline koja bi se odvela rebrom kada bi cijela njegova površina rebra bila na istoj temperaturi kao na najmanjem polumjeru r_0 (pri čemu je razlika temperature prema okolini θ_0). Na temelju takve definicije se može napisati izraz,

$$\eta = \left(\frac{Q_p}{2\alpha(r_1^2 - r_0^2)\pi\theta_0} \right) \qquad \textbf{(11.1.1.30)}$$

Primjer 11.1.1.12

U cilju hlađenja neke elektroničke komponente upotrebljena su kružna rebra unutarnjeg promjera 5 mm i vanjskog promjera 20 mm.Rebra su izrađena od aluminijskog lima debljine 0,2 mm.Koeficijent toplinske vodljivosti materijala je 205 W/mK, a koeficijent prijelaza topline s površine rebra na zrak 8,2 W/m^2K.Temperatura hlađene komponente je 380 K a temperatura zraka 300 K.

Koliko se topline odvodi rebrom u okolinu i kolika je učinkovitost rashladnog rebra?

Ispitati ovisnost odvedene topline i učinkovitosti rebra o njegovom vanjskom polumjeru i debljini.

Rješenje:

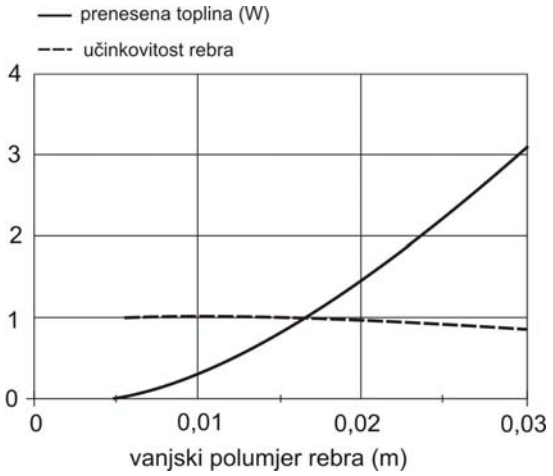
Uvrštenjem zadanih vrijednosti i primjenom odgovarajućeg računarskog programa slijedi,

$\Psi = 20\ m^{-1}$

Q_p (prema izrazu 11.1.1.29) = 1,459 W

η (prema izrazu 11.1.1.30) = 0,944

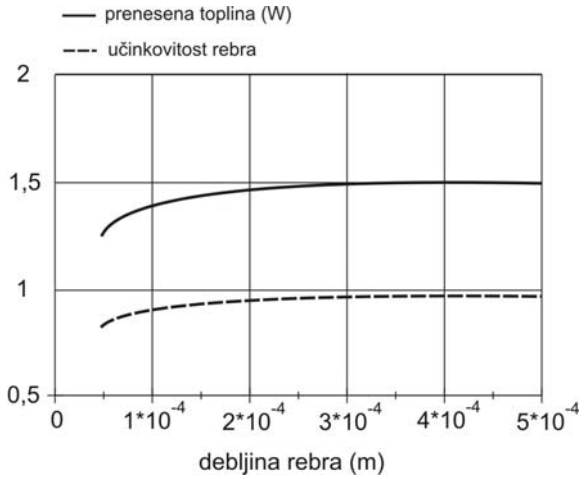
Ovisnost rebrom odvedene topline topline Q_p (W) i učinkovitosti rebra (eta) o promjeru r1 (m) ,u granicama 10-30 mm, je prikazana slikom 11.1.1.12



Slika 11.1.1.12 Ovisnost odvedene topline u okoliš (W) i učinkovitosti aluminijskog kružnog rebra o vanjskom promjeru r_1 m

Slika pokazuje da kada raste vanjski promjer rebra odvedena toplina s površine rebra na okoliš osjetljivo raste a učinkovitost blago pada .

Na slici 11.1.1.12 je prikazana ovisnost odvedene topline i učinkovitosri rebra u o debljini aluminijskog kružnog rebra u granicama 0,1 - 0,3 mm.



Slika 11.1.1.13 Ovisnost odvedene topline u okoliš Q_p(W) i učinkovitosti aluminijskog rebra (eta) o debljini rebra

Odvedena toplina i učinkovitost rebra se lagano smanjuju s smanjenjem debljine rebra. Upotrebom dvostruko tanjeg rebra od referentnog (dakle rebra debljine 0,1 mm) smanjili bismo odvedenu toplinu na okoliš i učinkovitost rebra za oko 5% a za izradu rebra potrošili dvostruko manje materijala.

Izvedena analiza pokazuje da, kada se rebra izrađuju od materijala visoke toplinske vodljivosti, treba, u granicama koje dozvoljava čvrstoća materijala, uzeti što tanja rashladna rebra.

Rebra s promjenjivom debljinom

Iz ranijih primjera je vidljivo da se toplinski tok kroz rebro smanjuje prema kraju rebra,što znači da iskorištenje materijala rebra za vođenje topline pada prema kraju rebra.Ovo nije toliko značajno za tanka rebra koja se upotrebljavaju za odvod manjih količina topline (na primjer za hlađenje elektroničkih komponenata) nego za veće izmjenjivače topline kod kojih je težina rebara značajan element troška opreme.

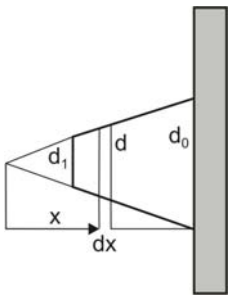
Navedena činjenica upućuje na zaključak da bi bilo svrsishodno izrađivati rashladna rebra kojima se debljina postupno smanjuje prema kraju.

Analizom se može pokazati da bi bilo optimalno imati profil debljine rebra u obliku konkavnih kružnih lukova koji se spajaju na vrhu rebra.

Rebro čija se debljina mijenja u obliku kružnih lukova je komplicirano za izradu pa se zato često upotrebljavaju rebra čija se debljina smanjuje linearno, dakle rebra čiji presjek odgovara trapezu.Svojstva takvih rebara ne odstupaju bitno od onih s idealnim profilom.

Trapezno rebro

Skica trapeznog rebra je prikazana slikom 11.1.1.14



Slika 11.1.1.14 Skica presjeka trapeznog rebra

Kut koji zatvaraju produžeci stranica trapeznog rebra ćemo označiti s 2φ.Rebro ima duljinu L (koja je proizvoljna jer sva toplina ide okomito na nju). Najveća debljina je u bazi rebra (d_0),a najmanja na vrhu rebra (d_1).

Odrediti ćemo bilancu topline za isječak rebra dx , na udaljenosti x od točke sjecišta produžetaka stranica rebra, kod koje je debljina rebra d.

Debljinu d možemo izraziti pomoću udaljenosti x i kuta φ kao d= 2x tgφ.

Sukladno tome, površina presjeka rebra na tom mjestu će biti F=2xLtgφ.

Površina rebra koja odgovara isječku dx je 2L dx/cosφ.

U osnovici rebra označiti ćemo $x=x_0$,a na vrhu rebra $x=x_1$ .Visina rebra h će na osnovi navedenog biti x_0-x_1.

Bilancom topline isječka dx se izjednačava razlika topline vođene kroz presjeke rebra na udaljenosti x i x+dx s toplinom koja je odvedena u okoliš s površinom tog isječka,dakle,

$$d(\lambda F\frac{d\theta}{dx}) = d(2\lambda xLtg\varphi\frac{d\theta}{dx}) = 2\alpha L\theta\frac{dx}{\cos\varphi}$$

Ili nakon sređivanja,

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\theta}{dx}\right) = \frac{\alpha}{\lambda\sin\varphi}\theta$$

Diferenciranjem dobivamo jednadžbu,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda\sin\varphi}\frac{\theta}{x} = 0$$

Uvođenjem zamjene,

$$z = \frac{\alpha}{\lambda\sin\varphi}x$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\theta}{dz} - \frac{\theta}{z} = 0 \qquad \textbf{(11.1.1.31)}$$

Dobivena jednadžba spada u kategoriju diferencijalnih jednadžbi koji se mogu reducirati u Besselove differencijalne jednadžbe.

To su općenito jednadžbe tipa:

$$\frac{d}{dx}\left(x^a \frac{dy}{dx}\right) + bx^c y = 0 \ ,$$

ili nakon diferenciranja i dijeljenja s x^a jednadžbe tipa,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + bx^{c-a}y = 0 \qquad \textbf{(11.1.1.32)}$$

Čije je rješenje

$$y(x) = x^{\nu/a} Z_{|\nu|}(\alpha\sqrt{|b|}x^{1/\alpha}) \qquad \textbf{(11.1.1.33)}$$

gdje,

- $Z_{|\nu|}$ označuje Besselove funkcije $J_{|\nu|}$ i $Y_{|\nu|}$ ako je b pozitivan , i Besselove funkcije $I_{|\nu|}$ i $K_{|\nu|}$ ako je b negativan

a,b i c su cijeli realni brojevi

$\alpha=2/(c-a+2)$

$\nu=(1-a)/(c-a+2)$

U jednadžbi (11.1.1.31) u usporedbi s jednadžbom (11.1.1.32) imamo,

a=1, b=-1, c-a=-1 , iz čega slijedi $\alpha= 2$ i $\nu= 0$, pa će rješenje jednadžbe (11.1.1.58) sukladno relaciji (11.1.1.33),a uzevši u obzir da je b negativan, biti,

$$\theta = C_1 I_0\left(2\sqrt{z}\right) + C_2 K_0\left(2\sqrt{z}\right) \qquad \textbf{(11.1.1.34)}$$

Dalja analiza i granični uvjeti su slični kao kod kružnih rebara:

U osnovici rebra razlika temperature prema okolišu je poznata tj. $z=z_0$, $\theta = \theta_0$.

Na vrhu rebra smatramo da nema odvoda topline u okoliš tj. da je za $z=z_1$ $d\theta/dz=0$.

Iz tih graničnih uvjeta se određuju integracijske konstante C_1 i C_2.

$$\theta_1 = C_1\left(2\sqrt{z_0}\right) + C_2 K_0\left(2\sqrt{z_0}\right)$$

$$C_2 = C_1 \frac{I_1(2\sqrt{z_1})}{K_1(2\sqrt{z_1})}$$

Iz čega nakon uvrštavanja slijedi izraz za raspodjelu temperature duž rebra,

$$\theta = \theta_0 \frac{I_0\left(2\sqrt{z}\right)K_1\left(2\sqrt{z_1}\right) + K_0(s\sqrt{z})I_1\left(2\sqrt{z_1}\right)}{F(z_0, z_1)} \qquad \textbf{(11.1.1.35)}$$

gdje je,

$$F(z_0, z_1) = I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_1}) + I_1(2\sqrt{z_1})K_0(2\sqrt{z_0})$$

Količinu topline koju odvodi rebro u okoliš se dobiva Fourierovim zakonom,

$$\mathbf{Q_p} = \lambda d_0 L\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=x_o} = \frac{\alpha d_0 L\theta_0}{\sqrt{z_0}\sin\varphi}\frac{I_1(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_1}) - I_1(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_0})}{F(z_0, z_1)} \qquad \textbf{(11.1.1.36)}$$

Primjedba:Izvod funkcije ima pozitivan predznak jer je tok topline u smjeru negativnih vrijednosti x. Također se valja prisjetiti da je $dx = dz\frac{\lambda\sin\varphi}{\alpha}$.

Maksimalna odvedena toplina rebrom se dobiva uz uvjet da cijela površina rebra ima razliku temperatura prema okolišu θ_0.

Površina prijelaza topline s rebra na okoliš uz zanemarenje površine presjeka na vrhu rebra je

$$\frac{2L(x_0 - x_1)}{\cos\varphi}$$

Maksimalno odvedena toplina je dakle,

$$\mathbf{Q_{p,max}} = \alpha\theta_0\frac{2L(x_0 - x_1)}{\cos\varphi} \qquad \textbf{(11.1.1.37)}$$

Učunkovitost rashladnog rebra će sukladano navedenom biti,

$$\eta = \frac{Q_p}{Q_{p,max}} \qquad \textbf{(11.1.1.38)}$$

Trokutasto rebro

U specijalnom slučaju trokutastog rebra $z_1=0$. U tom se slučaju relacije pojednostavljuju jer su vrijednosti Besselovih funkcija nultog argumenta slijedeće:$I_0(0)=1$, $I_1(0)=0$.

Za slučaj trokutastog rebra dobivamo,

$$F(z_0,z_1)_{z_1\to 0} \to I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_1}),$$

što primjenjeno na navedene relacije dovodi do izraza,

$$\theta = \theta_0 \frac{I_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_0})} \qquad \textbf{(11.1.1.39)}$$

$$\mathbf{Q_p} = \lambda d_0 L\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=x_o} = \frac{\alpha d_0 L\theta_0}{\sqrt{z_0}\sin\varphi}\frac{I_1(2\sqrt{z_0})}{I_0(2\sqrt{z_0})} \qquad \textbf{(11.1.1.40)}$$

Primjer 11.1.1.13

Čelično trapezno rebro za hlađenje cijevi zračnog hladnjaka ima visinu h=50 mm, duljinu L=20 mm , širinu u osnovici d_0= 4 mm i širinu na vrhu d_1= 1 mm.Temperatura rebra u osnovici (koja je ujedno i temperatura cijevi) je 450 K, a temperatura okolišu 300 K.Koeficijent vođenja topline materijala cijevi je 120 W/mK dok je koeficijent prijelaza topline na okolni zrak 15 W/m^2K.

Odrediti količinu topline koja se odvodi rashladnim rebrom u okoliš, učinkovitost rashladnog rebra i ovisnost učinkovitosti rebra o njegovoj širini na vrhu.

Rješenje:

Na temelju zadanih veličina se dobiva

$\sin(\varphi) = 0.03$, $z_0 = 0{,}741$, $z_1 = 0{,}185$, ,

Primjena relacija (11.1.1.36), (11.1.1.37) i (11.1.1.38) daje vrijednosti,

Q= 3,847 W

Q_{max}= 4,502 W

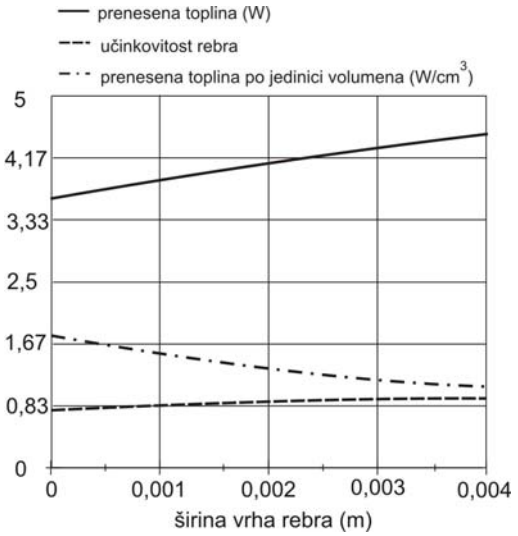
$\eta = 0{,}854$

Ovisnost odvedene količine topline Q (W) ,odnosa odvedene topline i volumena rebra (W/cm^3) (što je proporcionalno odnosu odvedene topline i mase rebra) i učinkovitosti rebra η o širini vrha trapeznog rebra (pri tome širina rebra u osnovici i dužina rebra zadržavaju zadane vrijednosti) je prikazana slikom 11.1.1.15.

Za specijalni slučaj trokutnog rebra (tj. kada je širina vrha rebra približno jednaka nuli) dobivamo:

Q= 3.588 W

η= 0,797



Slika 11.1.1.15 Ovisnost rebrom odvedene topline Q(d) (W),odnosa odvedene topline i volumena rebra Q(d)/V(d) (W/cm^3) i učinkovitosti rebra η o širini vrha trapeznog rebra d (m)

Slika pokazuje da ,prema očekivanju, količina odvedene topline i učinkovitost rebra rastu s porastom širine vrha rebra (kod učinkovitosti je taj porast manje izrazit) ali količina odvedene topline i volumena (ili mase) rebra pada.Kod trokutnog rebra po jedinici mase rebra odvodimo najveću količinu topline.

Vođenje topline u slučaju promjenjivog koeficijenta λ

Kao što je ranije napomenuto, kod točnijih proračuna ,kao što su primjerice, temperaturne razlike unutar gorive šipke nuklearnog reaktora treba uzeti u obzir temperaturnu ovisnost koeficijenta vođenja topline. Kod proračuna ove vrste ne možemo koristiti relaciju (11.1.22), jer je ona izvedena uz pretpostavku konstantne vrijednosti λ.

U cilju dobivanja podloge za proračun raspodjele temperature unutar gorive šipke uz promjenjivu vrijednost λ, moramo poći ponovo od zakona o održanju energije, odnosno bilance topline u volumnom segmentu unutar šipke. U tu svrhu zamislimo unutar šipke prsten debljine dr i jedinične dužine na udaljenosti r od njezinog središta. Postaviti ćemo, primjenom Fourier-ovog zakona, bilancu topline u tom prstenastom volumenu, izjednačavanjem količine topline koja izlazi sa onom koja ulazi i onom koja se u tom volumenu proizvodi.

- Toplina koja ulazi Q_u: $-2\pi r\lambda \dfrac{dT}{dr}$

- Toplina koja izlazi Q_i: $-2\pi(r+dr)\left[\lambda\dfrac{dT}{dr}+\dfrac{d}{dr}\left(\lambda\dfrac{dT}{dr}\right)dr\right]$.

- Toplina koja se proizvodi Q_{pr}: $q_v 2\pi r dr$

Iz bilance topline Q_i-Q_u-Q_{pr}=0, nakon sređivanja i zanemarivanja članova koji sadrže diferencijale višeg reda, proizlazi relacija,

$$r\frac{d\lambda}{dr}\frac{dT}{dr}+\lambda r\frac{d^2T}{dr^2}+\lambda\frac{dT}{dr}+q_v r=0\text{, ili}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\lambda r\frac{dT}{dr}\right]+q_v=0. \qquad \textbf{(11.1.1.41)}$$

Integracija izraza (11.1.1.41) u granicama od r=0 do r=r, daje

$$\lambda r \frac{dT}{dr} = \frac{q_v r^2}{2}.$$

Dobiveni izraz možemo ponovo integrirati od r=0 do r=r, uzevši u obzir da su odgovarajuće temperature T_0 (u osi šipke) i T_r kao i da je toplinska vodljivost λ funkcija temperature. Dakle,

$$\int_{T_r}^{T_0} \lambda dT = -\int_{r}^{0} \frac{q_v r}{2} dr = \frac{q_v r^2}{4}. \qquad \textbf{(11.1.1.42)}$$

Ako je potrebno izračunati razliku između temperatura u osi i površini gorive šipke potrebno je u izraz (11.1.1.42) uvrstiti polumjer gorive šipke R.

Iako je bilanciranje topline po diferencijalnim segmentima volumena uobičajeno kod izračunavanja temperaturnih polja u gorivim elementima (posebno kada se radi o programiranju za računalo).

U specijalnom slučaju pune šipke možemo do rezultata iskazanog relacijom (11.1.1.42) možemo doći na daleko jednostavniji način.

Ako, naime, zamislimo unutar šipke volumen jedinične dužine ograničen polumjerom r, očito je da u stacionarnom stanju sva toplina proizvedena unutar tog volumena mora biti odvedena kroz njegovu površinu. Bilanca topline ima dakle oblik

$$2r\pi\left(-\lambda \frac{dT}{dr}\right) = r^2 \pi q_v, \text{ ili}$$

$$\lambda dT = -\frac{q_v r}{2} dr$$

Koeficijent λ je funkcija temperature.

Integracijom dobivenog izraza u granicama od r=0 do r i od T_0 do T neposredno dobivamo relaciju (11.1.1.42).

Proračun temperaturne razlike unutar gorivne šipke od oksida urana

Empirički izrazi za ∫λdT za oksid urana su dati je formulama (11.1.10), (11.1.11) i (11.1.12) Za druge materijale dobiva se numeričkom integracijom funkcije λ(T).

Primjer 11.1.1.14

Potrebno je odrediti razliku temperature između osi i površine gorive šipke iz oksida urana, promjera 9.5mm, u kojoj se proizvodi snaga 46kW/m.

Rješenje:

Razliku temperatura unutar gorive šipke odrediti ćemo korištenjem relacije (11.1.42). Pri korištenju izraza (11.1.11) potrebno je podsjetiti da je

$$\int_{T_R}^{T_0} \lambda dT = \int_{0}^{T_0} \lambda dT - \int_{0}^{T_R} \lambda dT.$$

Potrebno je, nadalje, provjeriti da li uz zadanu proizvodnju topline temperatura osi šipke prelazi 1920K, jer je to granica korištenja relacije (11.1.11).

Budući da je snaga generirana po jedinici dužine šipke

$q_{1v} = R^2 \pi q_v$, može se pisati

$$\frac{q_v R^2}{4} = \frac{Q_{1v}}{4\pi} = \frac{46000}{4\pi} = 3661 \frac{W}{m}.$$

Rješenje zadanog problema je moguće ako je poznata jedna referentna temperatura unutar šipke. Uzmimo da površinska temperatura gorive šipke iznosi 720K (što je blisko realnom slučaju). Na temelju relacije (11.1.11) može se pisati,

$$\int_0^{1920} \lambda dT - \int_0^{720} \lambda dT = 6216 - 2735 = 3481 < \frac{q_v R^2}{4}.$$

Rezultat pokazuje da je temperatura u osi šipke viša od 1920K, te se mora koristiti izraz (11.1.12). Temperaturu u osi šipke T_0 odrediti ćemo iz jednadžbe

$$\int_{1920}^{T_0} \lambda dT = \frac{q_v R^2}{4} - \int_0^{1920} \lambda dT + \int_0^{720} \lambda dT = 180 \frac{W}{m}.$$

Jednadžba je zadovoljena za T_0=2004K.

Temperaturna razlika između osi i površine gorive šipke u kojoj se proizvodi snaga od 46kW/m iznosi 2004-720=1284K.

Zbog znatne temperaturne ovisnosti koeficijenta vođenja topline, računanje temperaturnih razlika unutar gorive šipke nuklearnog reaktora s pretpostavljenim prosječnim vrijednostima tog koeficijenta može dovesti do nedopustivih grešaka.

Toplinski otpor zazora između obloge i nuklearnog goriva

Gorive šipke nuklearnog reaktora se u praksi izvode iz cijevi legure cirkonija (ili, mnogo rjeđe, nehrđajućeg čelika), koje su punjene tabletama iz oksida urana (UO_2). Između cijevi (odnosno obloge) od cirkonija i urana postoji vrlo mali zazor ispunjen plinom. Toplinski otpor tog zazora treba uzeti u obzir kod proračuna raspodjela temperature prilika u gorivoj šipci.

Zbog velikog broja parametara koji utječu na toplinski otpor i zbog značajne doze nesigurnosti u teoretskoj interpretaciji eksperimentalnih podataka, publiciran je veliki broj radova i korelacija koje se odnose na taj problem.

Treba se, nadalje, podsjetiti da se zazor između nuklearnog goriva i obloge puni sa helijem pod tlakom radi smanjenja toplinskog otpora. U toku pogona u zazor ulaze plinoviti fisijski produkti (pretežno ksenon i kripton) i povećavaju tlak plina u zazoru. Zazor se tokom vremena mijenja (smanjuje) zbog vanjskog tlaka i plastične deformacije (odnosno puzanja) materijala obloge.

Za toplinski otpor kontakta su, nadalje, od bitnog utjecaja tlak, temperatura i hrapavost dodirnih ploha.

U toku pogona reaktora zbog termičkog naprezanja uslijed temperaturnog cirkuliranja dolazi u dijelu gorivih šipki do pucanja keramičkog goriva (UO_2), što također utječe na toplinski otpor zazora. Opisani efekti uglavnom dovode tokom pogona do smanjenja termičkog otpora u zazoru, a teško ih je vjerno obuhvatiti eksperimentom i teoretskim analizama.

Iz navedenih činjenica nije teško zaključiti o kompleksnosti problema koji predstavlja pouzdano izračunavanje toplinskog otpora između gorive šipke i obloge gorivog elementa.

Detaljnije tretiranje ove problematike je predmet specijalističke literature.

Ovdje ćemo navesti samo jednu od jednostavnijih korelacija za izračunavanje koeficijenta prijelaza topline u zazoru između goriva i obloge gorive šipke. Ta korelacija, prema Lanning-u i dr [30], daje usrednjenje mjerenja na reaktorima iz 16 izvora i vrijedi za gorive šipke kojima je zazor punjen helijem.

Korelacija ima oblik:

$$\alpha_z = 321 + \frac{1167\sqrt{T_z}}{\frac{2\delta}{D}} - \frac{23600}{\frac{2\delta}{D}} \qquad \left(\frac{W}{m^2K}\right), \qquad \textbf{(11.1.1.43)}$$

gdje je

α_z koeficijent prijelaza topline sa gorive šipke na oblogu

T_z temperatura u zazoru (K)

δ/D odnos širine zazora i promjera šipke

Primjer 11.1.1.15

Potrebno je odrediti koeficijent prijelaza topline u zazoru između gorivne šipke iz UO_2. Širina zazora je 0.06mm, promjer gorive šipke 9.5mm, a temperatura u zazoru 650K.

Rješenje:

Uvrštenjem zadanih vrijednosti u relaciju (11.1.1.43), dobivamo

$$\alpha_z = 321 + \frac{1167\sqrt{650}}{\frac{2*0.06}{9.5}} - \frac{23000}{\frac{2*0.06}{9.5}} = 4.87*10^5 \frac{W}{m^2K}.$$

Vođenje topline u dvije dimenzije

Iako se većina problema vođenja topline krutim tijelima odnosi na vođenje topline u jednoj dimenziji (temperatura se pretežno mijenja samo u jednom smjeru) postoji niz problema kod kojih moramo vođenje topline posmatrati u dvije dimenzije (promjena temperature se ne može zanemariti u dva smjera, što znači da u pravokutnom koordinatnom sustavu se temperatura mijenja po površini ravnine u smjerovima x i y). U iznimno rijetkim slučajevima je potrebno računati i s vođenjem toline i tri dimenzije.

Prema relaciji 11.1.25 diferencijalna jednadžba vođenja topline u dvije dimenzije (pri čemu se predpostavlja da je promjena temperature u smjeru z je zanemariva u odnosu na promjene temperature u smjerovima x i y),bez unutarnjeg izvora topline, može u pravokutnom koordinatnom sustavu biti prikazano diferencijalnom jednadžbom :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(11.1.1.44)}$$

Ako u jednadžbu (11.1.1.44) uvedemo umjesto apsolutne temperature T razliku temperature $\theta = T - T_0$,gdje je T_0 neka konstantna referentna temperatura možemo diferencijalnu jednadžbu pisati u obliku,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0 \qquad \textbf{(11.1.1.45)}$$

Kod traženje rješenja diferencijalne jednadžbe su moguća dva pristupa.

Analitičko rješenje

Numeričko rješenje

Analitička su rješenja od temeljnog značaja kada se radi o ranije razmatranim jednostavnijim slučajevima prijelaza topline u jednom smjeru.Međutim kada se radi o vođenju topline u dvije (a pogotovo u tri) dimenzije analitička su rješenja od vrlo ograničenog značaja i u pravilu primjenjiva samo na najjednostavnije primjere uz jednostavne granične uvjete.Kod složenijih problema su od bitnog značaja numerička rješenja.Numerička rješenja ,osim u najjednostavnijim slučajevima, traže podršku računala.S obzirom na zamjetan razvoj računarske tehnike numerička rješenja postaju sve značajnija u praksi.

U nastavku ćemo se osvrnuti na analitički a poglavlju 11.2 na numerički pristup kod analize vođenja topline u dva smjera.

Analitičko rješenje vođenja topline u dva smjera

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (11.1.1.45) nije teško ako uzmemo u obzir da je $\theta(x,y)$ linearna funkcija , što znači da je promjena temperature u jednom smjeru neovisna o njezinoj promjeni u drugom smjeru.U takvom slučaju možemo pretpostaviti rješenje tipa $\theta(x,y)=X(x)Y(y)$ gdje je X(x) funkcija sano od x a Y(y) funkcija samo od y..

Uvrštenjem u (11.1.1.45) slijedi,

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0 \text{ ili dijeljenjem s } X(x)Y(y),$$

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

Budući da je lijeva strana jednadžbe funkcija samo od x a desna samo od y uvjet jednakosti lijeve i desne strane za sve vrijednosti x odnosno y je moguće ispuniti samo ako su jedna i druga strana jednake nekoj konstanti.Tu konstantu ćemo označiti s λ te pisati,

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\lambda X(x)=0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2}-\lambda Y(y)=0 \qquad \textbf{(11.1.1.46)}$$

Dobivene relacije dozvoljavaju da se rješenja diferencijalne jednadžbe (11.1.1.45) za smjerove x i y potraže neovisno.

Rješenja navedenih diferencijalnih jednadžbi su:

$$X(x)= C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)$$

$$Y(y)=C_3e^{-\lambda y}+C_4e^{\lambda y}$$

Budući da je temperaturna funkcija θ(x,y) produkt funkcija X(x) i Y(y) slijedi,

$$\theta(x,y)=(C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x))(C_3e^{-\lambda y}+C_4e^{\lambda y}) \quad \textbf{(11.1.1.47)}$$

Konstante možemo odrediti primjenom graničnih uvjeta.

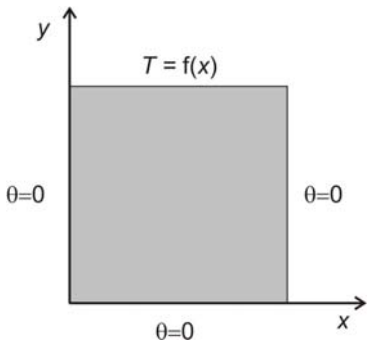
Razmatrati ćemo vrlo jednostavan primjer vođenja topline u dva smjera s graničnim uvjetom prve vrste.

Radi se o vođenju topline kroz pravokutnu ploču dimenzija L i H čije se dvije stranice poklapaju s osima x-y koordinatnog sustava i čije se tri stranice (x=0,y=0 i x=L) održavaju na konstantnoj temperaturi a temperatura četvrte (y=H) se mijenja u funkciji koordinate x. Debljinu ploče u smjeru z ćemo smatrati veoma velikom, tako da je gradijent temperature u tom smjeru zanemariv.Uz taj se uvjet može vođenje topline smatrati dvodimenzionalnim.

Opisani se granični uvjeti,prikazani slikom 11.1.1.16 se mogu definirati izrazima:

1. $\theta(0,y) =0 \quad (0<y< H)$
2. $\theta(L,y) =0 \quad (0<y<H)$
3. $\theta(x,0) =0 \quad (0<x<L)$
4. $\theta(x,H) =f(x) \quad (0<x<H)$

Gdje je f(x) proizvoljna funkcija od x



Slika 11.1.1.16 Prikaz graničnih uvjeta

Prvi rubni uvjet je ispunjen uz uvjet da je $C_1=0$, a treći ako je $C_3= -C_4$.

Time se funkcija θ svodi na,

$\theta(x,y) = C_2C_4\sin(\lambda x)(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})$

Drugi rubni uvjet dovodi do relacije,

$0=C_2C_4\sin(\lambda L)(e^{\lambda L}-e^{-\lambda L})$

Ovaj rubni uvjet može biti ispunjen ako je,

$\lambda L = n\pi$

Odnosno ako je,

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

n= 1,2,3..... rubni uvjet je zadovoljen za neograničeno veliki broj vrijednosti n,što znači da će funkcija θ(x,y) imati neograničeno veliki broj rješenja.Budući da se radi o linearnoj funkciji rješenje diferencijalne jednadžbe je suma svih rješenja koje udovoljavaju rubne uvjete.

Uvrštenjem slijedi da funkcija θ(x,y) ima oblik,

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \qquad \textbf{(11.1.1.48)}$$

Kod pisanja gornje jednadžbe je uzeto u obzir da je $e^{\lambda L}-e^{-\lambda L}=2\sinh(\lambda L)$

Četvrti rubni uvjet će biti upotrijebljen za definiranje konstanti C_n.

Primjenom tog rubnog uvjeta slijedi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi H}{L} \qquad (0<x<L) \qquad \textbf{(11.1.1.49)}$$

Jednadžba (11.1.1.49) označuje razvoj funkcije f(x) u Fourier-ov sinusni red. Koeficijenti Fourier-ovog reda su,

$$C_n \sinh\frac{n\pi H}{L}$$

Prema teoriji Fourier-ovlh redova koeficijente reda u intervalu 0<x<L možemo odrediti izrazom,

$$C_n \sinh\frac{n\pi H}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Na temelju navedenog izraza možemo napisati matematički oblik za funkciju θ(x,y),

$$\boldsymbol{\theta(x,y)=}\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi y}{L}}{\sinh\frac{n\pi H}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad \textbf{(11.1.1.50)}$$

U specijalnom, ali za praksu interesantnom slučaju, kada je f(x) konstantna, i jednaka θ_c , integral u gornjem izrazu se svodi na,

$$\theta_c\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} = \theta_c\frac{L}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \theta_c\frac{L}{n\pi}((-1)^{n+1}+1) \qquad \textbf{(11.1.1.51)}$$

Uvrštenjem slijedi,

$$\theta(x,y) = \theta_c \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi H}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \textbf{(11.1.1.52)}$$

Posebno jednostavan slučaj nastaje kada je $f(x)= \theta_m \sin \frac{\pi x}{L}$.U tom naime slučaju možemo jednadžbu (11.1.1.49) pisati kao,

$$\theta_m \sin \frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi H}{L}$$

U tom je slučaju očigledno da sve vrijednost C_n osim C_1 moraju biti nula te se relacija svodi na,

$\theta_m = C_1 \sinh \frac{\pi H}{L}$ iz čega slijedi,

$$C_1 = \frac{\theta_m}{\sinh \frac{\pi H}{L}}$$

Funkcija θ(x,y) postaje,

$$\theta(x,y) = \theta_m \frac{\sinh \frac{\pi y}{L}}{\sinh \frac{\pi H}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \qquad \textbf{(11.1.1.53)}$$

Primjer 11.1.1.16

Duga šipka kvadratnog presjeka s stranicom 2 cm ima na tri stranice temperaturu 100 K a na četvrtoj temperaturu 300 K. Kolika je temperatura u sredini šipke?

Rješenje.

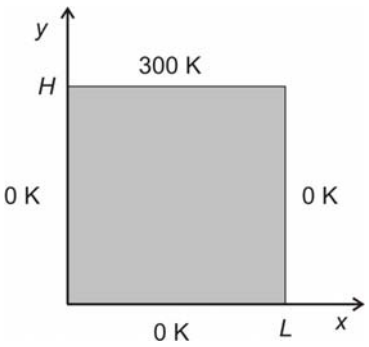
Ako se uzme sa jedna strana šipke leži na x osi a druga na y osi rubni uvjeti prema slici 11.1.1.16 se mogu opisati kao,

1.θ(0,y) =0 0<y<H

2.θ(L,y) =0 0<y<H

3.θ(x,0) =0 0<x<L

4.θ(x,H) =200 0<y<H



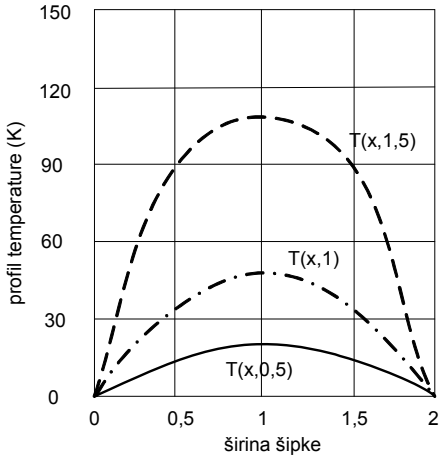
Slika 11.1.1.17 Rubni uvjeti za proračun

U datom slučaju H=L. θ(x,y) je definirana kao temperaturna razlika između temperatura na tri strane šipke (100K) i temperature na četvrtoj strani (300K).

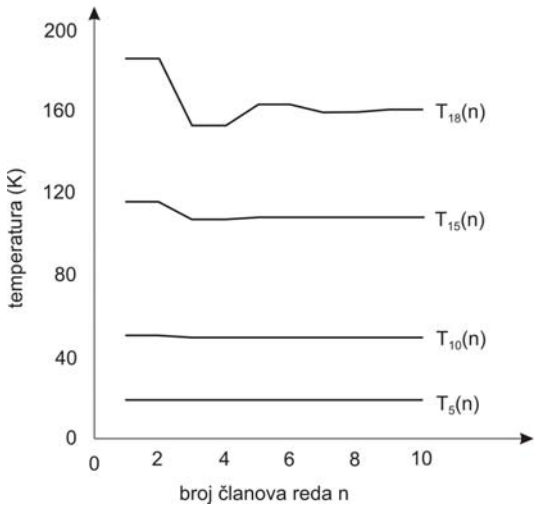
Rezultat proračuna na temelju relacije (11.1.1.52) je prikazan slikom 11.1.1.18.

Izračunati su profili temperature θ za vrijednosti 0<x<L i vrijednosti y 0,5 1,0 i 1,5 cm.Krivulje su sinusne funkcije simetrične u odnosu na x=1 (sredina šipke) za koje temperature postižu maksimum.

Od interesa je osvrnuti se i na broj potrebnih članova Fourierovog reda iznad kojeg je rješenje stabilno. Račun proveden za x=1 i vrijednosti y 0.5 1,0, 1.6 i 1,8 cm pokazuje sa se stabilnost rješenja postiže tim brže sto je odnos y/L manji. Za vrijednosti y/L<0.5 približno točno rješenje se postiže već s jednom članom reda,Rezultat proračuna je prikazuje slika 11.1.2.19



Slika 11.1.1.18 Ovisnost profila temperature unutar šipke za vrijednost y 1,5 1,0 i 0,5 cm



Slika 11.1.1.19 Ovisnost rezultata proračuna temperature u sredini presjeka šipke (x=1cm) o broju članova reda za vrijednosti y=18, 15, 10 i 5 mm

Veličine Ux(n) na slici određuju udaljenost od grijane stranice y (mm) i broj članova Fourier-ovog reda n.

Stabilne vrijednosti temperaturnih razlika θ u sredini presjeka šipke (x=1 cm) proračunate uz 10 članova reda u razvoju su 160 K,109 K , 50 K i 19,083 K. Rezultat pokazuje da je za dobivanje stabilnih vrijednosti temperatura kod približavanja grijanoj strani šipke (odnosno s porastom y) potrebno računati s većim broj članova reda..

11.1.1 Vođenje topline kroz materijale s unutarnjim izvorom topline

Proračun vođenja topline kroz materijale ovisi o postojanju izvora topline unutar razmatranog materijala.Porijeklo unutarnjih izvora topline u materijalu može biti raznorodno.Nabrojiti ćemo samo neke važnije za elektrotehniku i energetiku.

Prolaz električne struje

Visokofrekventno zagrijavanje dielektrika

Mikrovalno zagrijavanje

Nuklearno zračenje

Fisije teških atomskih jezgara

Unutarnji izvori topline koji potječu iz nuklearnih reakcija su razmatrani u poglavlju 10. Ovdje ćemo se osvrnuti na druge od navedenih unutarnjih izvora topline.

.

Prolaz električne struje kroz materijale

Prolazom električne struje I(A) kroz vodič čiji je električki otpor R(Ω) dolazi do stvaranja toplinske energije, čiji je iznos određen izrazom,

$$\mathbf{Q_V} = I^2 R = I^2 \rho \frac{L}{S} \quad (W) \qquad \textbf{(11.1.2.1)}$$

gdje je,

$(\Omega \frac{mm^2}{m})$ specifični električni otpor vodiča

L dužina vodiča (m)

S presjek vodiča (mm^2)

Valja naglasiti da specifični električni otpor ovisi o temperaturi.Slični kao kod ranijeg razmatranja koeficijenta vođenja topline uobičajeno je ovisnost o toplini aproksimirati linearnim funkcijom,

$$\rho=\rho_0(1+\alpha(T-T_0)) \qquad \textbf{(11.1.2.2)}$$

ρ_0 je specifični električni otpor pri temperaturi T_0 (koja se obično definira kao temperatura 293 K)

Podaci o specifičnim električkim otporima na temperaturi 293 K i temperaturnim koeficijentima otpora nekih važnijih elektrotehničkih materijala su dati u tablici 11.1.2.1 [41],[43]

Tablica 11.1.2.1 Specifični električni otpori važnijih materijala

Materijal	Specifični električki otpor $\Omega mm^2/m$	Temperaturni koeficijent otpora α 1/K
Srebro	**0,0164**	**0,0041**
Bakar	**0,0172**	**0,0039**
Aluminij	**0,0283**	**0,0637**
Natrij	**0,0488**	**0,0055**
Mjed	**0,075**	**0,0016**
Željezo	**0,098**	**0,0055**
Čelik(pros-jek)	**0,15**	**0,005**

Primjer 11.1.2.1

Kolika se toplinska snaga stvara po metru dužine aluminijskog vodiča presjeka 240 mm^2 s čeličnom jezgrom 55 mm^2 (Al/Č uže) kada kroz njega protječe struja od 5kA.Koliki se dio topline generira u čeličnoj jezgri vodiča?

Rješenje.

S obzirom da je isti pad napona po metru dužine užeta u aluminijskom vodiču i čeličnoj jezgri možemo pisati,

$$\frac{I_č \rho_č}{S_č} = \frac{(5000 - I_č)\rho_{al}}{S_{al}}$$

gdje je $I_č$ dio struje koji prolazi kroz čelični jezgru vodiča.

Iz date relacije slijedi,

$$I_č = \frac{5000}{1 + \frac{\rho_č S_{al}}{\rho_{al} S_č}}$$

Uz zanemarenje ovisnosti odnosa specifičnih otpora čelika i aluminija o temperaturi, uvrštenjem zadanih vrijednosti i korištenjem tablice 11.1.2.1 dobivamo $I_č$= 207 A te I_{al} = 4793 A.

Toplinska snaga koja nastaje po metru dužine vodiča je,

$$q_{1V} = \frac{I_{al}^2 \rho_{al}}{S_{al}} + \frac{I_č^2 \rho_č}{S_č} = 2826 \ \text{W/m}$$

U čeličnoj jezgri vodiča se generira svega oko 4% toplinske snage.

Primjer 11.1.2.2

Aluminijski kabel sa presjekom 500mm^2 provodi struju od 985A. Vodič je izoliran sa gumenom izolacijom debljine 6mm. Specifični otpor vodiča je 0.028$\Omega mm^2/m$. Koeficijent toplinske vodljivosti aluminija je 229W/mK, a gumene izolacije 0.16W/mK. Vanjska površina izolacije održava se na temperaturi 310K.

Kolika je maksimalna temperatura izolacije i aluminijskog vodiča? Kolika bi bila maksimalno dozvoljena struja ako je maksimalna temperatura gumene izolacije ograničena na 360K?

Rješenje:

Generirana toplinska snaga po metru dužine vodiča,

$$Q_{1v} = \frac{985^2 * 0.028}{500} = 54.3\ W/m\ .$$

Polumjer aluminijskog vodiča je 12.6mm, a vanjski polumjer izolacije 18.6mm.

Razlika temperature vanjske i unutarnje površine izolacije

$$\Delta T = \frac{Q_{1v}}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_v}{r_u} = 21\ K\ .$$

Temperatura na unutarnjoj površini izolacije iznosi 331K. Maksimalna temperatura aluminijskog vodiča je

$$331 + \frac{54.3}{4 * \pi * 229} = 331.002\ K\ .$$

Porast temperature unutar aluminijskog vodiča je zanemariv!

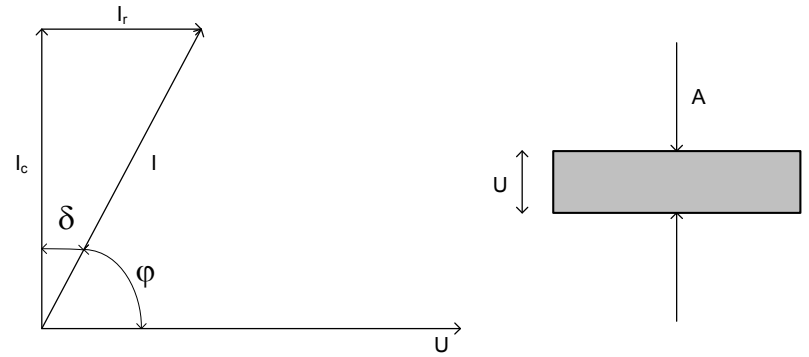
Ograničenje maksimalne temperature gumene izolacije na 360K, odnosno, maksimalnog porasta temperature kroz izolaciju na 50K, zahtijevalo bi da struja u vodiču ne bude veća od

$$985 * \left(\frac{50}{21}\right)^{1/2} = 1520\ A\ .$$

Ovisnost električnog otpora vodiča i koeficijenata vođenja topline o temperaturi je zanemarena.

Dielektrično zagrijavanje

Dielektrično zagrijavanje je pojava kod koje prolazom izmjenične struje kroz kondenzator uslijed naizmjenične promjene polarizacije dolazi do zagrijavanja dielektričnog materijala.To znači da pored kapacitivne komponente struje mora računati i s postojanjem njezine djelatne komponente, koja ovisi o prirodi dielektrika.Djelatna komponenta struje kroz dielektrik se tumači činjenicom da polarizacija materijala kod viših frekvencija ne može slijediti frekvenciju struje iz čega slijedi fazni pomak u odnosu na narinuto električno polje.



Slika 11.1.2.1 Prikaz struja u dielektriku

Rad izmjenične struje je određen s,

$P=UI\cos\varphi \quad W$

gdje je U napon(V) ,I jakosi struje (A) te φ kut između vektora struje i napona.

Iz slike vidimo da je $\cos\varphi = \sin\delta$ gdje je δ kut između djelatne komponente I_r i ukupne struje I.Taj je kut vrlo malen pa se približno može uzeti da je $\sin\delta \cong \mathrm{tg}\delta$

($\mathrm{tg}\delta$ je odnos djelatne I_r i kapacitivne komponente struje I_c).Iz navedenof slijedi da je gubitak energije u kondenzatoru s kapacitivnim otporom $1/C\omega$,

$$Q_V = UI\,\mathrm{tg}\delta = U^2 C\omega\,\mathrm{tg}\delta \quad W \qquad \textbf{(11.1.2.3)}$$

C je kapacitet kondenzatora (F=As/V) ,a ω (1/s) kutna frekvencija izmjenične struje ($\omega=2\pi f$,gdje je f frekvencija, odnosno broj titraja u sekundi).

Kapacitet pločastog kondenzatora površine $S(m^2)$ i razmaka ploča d (m) se može izraziti kao,

$$C = \varepsilon\frac{S}{d} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d} \quad F(=As/V) \qquad \textbf{(11.1.2.4)}$$

gdje je ε dielektričnost, ε_0 električna konstanta (dielektričnost vakuuma

($=8{,}855\times10^{-12}$ F/m) a ε_r relativna dielektričnost

Uvrštenjem relacije (11.1.2.4) u jednadžbu (11.1.2.3) slijedi,

$$Q_V = \varepsilon_0\frac{S}{d}U^2\omega\varepsilon_r\,\mathrm{tg}\delta \quad W \qquad \textbf{(11.1.2.5)}$$

Budući da je volumen dielektrika Sd to je generirana toplinska snaga po jedinici volumena ,

$$q_V = \varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\omega\varepsilon_r\,\mathrm{tg}\delta \quad W/m^3 \qquad \textbf{(11.1.2.6)}$$

Ako je pak riječ o cilindričnom kondenzatoru (koaksijalnom kabelu) , gdje je dielektrik smješten između koalsijalnih vodiča radiusa r_1 i r_2 ,kapacitet je po jedinici dužine kondenzatora je,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad F/m$$

pa će sukladno izrazu (11.1.2.3) dielektrični gubici, odnosno proizvedena toplina, po jedinici dužine kondenzatora (kabela) biti

$$q_{1V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 U^2 \omega \varepsilon_r tg\delta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad W/m \qquad \textbf{(11.1.2.7)}$$

Relativna dielektričnost ε_r i faktor gubitaka tgδ ovise o prirodi dielektrika.Vrijednosti tih parametara za neke dielektrike su dati u tablici 11.1.2.1

Tablica 11.1.2.1 Relativna dielektričnost i faktor gubitaka dielektrika

Materijal	Relativna dielektričnost ε_r	Faktor gubitaka 10^3 xtgδ	Toplinska vodljivost λ W/mK
Mineralno ulje	2,2	5	0,13
Silikonsko ulje	2,6	1	0,15
Porculan	5-7,5	1,5-12	1-4
Steatit	6-7	0,5-7	1-4
Staklo borosilikatno	4,9-6	2-3	0,7-1,0
Tinjac (muskovit)	6-7	0,2-1	0,5-0,6
Mikafolij	3-4,6	20-40	0,15
Tvrdi papir epoksidni	5	50	0,3
Guma tvrda	2,5-3,5	5-10	0,2
Poliamid	2,9-3,9	4-15	0,3
Polietilen	2,2	0,3	0,32
Poliimid	3,5	4	0,16
Polipropilen	2,2	0,5	0,35
Polistirol	2,5	0,5	0,22
Polivinilklorid	2,8-3,3	7-15	0,16

Primjedba:U tablici su navedene približne vrijednosti faktora ε_r i tgδ za opseg frekvencija 10^2-10^{10} Hz i pri sobnoj temperaturi .Kod točnijih proračuna treba uzeti u obzir ovisnost tih faktora o frekvenciji i temperaturi.

Ranije navedeni fazni pomak između napona i struje kroz dielektrik (što ukazuje da otpor dielektrika sadrži kapacitivni i radni dio), se može interpretirati kao da je dielektričnost kompleksna veličina koja sadrži svoju realnu i imaginarnu komponentu, tj. da je moguće pisati,

ε=ε'-jε"

gdje je odnos ε"/ε' identičan odnosu djelatne i kapacitivne struje kroz dielektrik.Faktor ε" je proporcionalan s gubicima u dielektriku.

Na temelju navedenog se može pisati,

$$tg\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Primjer 11.1.2.3

Pločica polivinilklorida debljine 1 mm smještena je između paralenih elektroda.Napon među elektrodama je 120V a frekvencija 20 Mhz.Kolika se toplinska snaga razvija po cm^3 dielektrika.

Rješenje:

Na temelju podataka iz tablice 11.1.2.1 slijedi da je za polivinilklorid produkt $\varepsilon_r tg\delta$ u granicama 0.0196 i 0,0495.Radi konzervativnosti računati ćemo s najvišom vrijednošću.

Primjenom relacije (11.1.2.6) se dobiva ,

$$q_V = 8{,}855x10^{-12}\left(\frac{120}{0{,}001}\right)^2 x2\pi x20x10^6 x0{,}0495 = 793200 \quad W/m^3 = 0{,}79\ W/cm^3$$

Primjer 11.1.2.4

Koliko se toplinske snage gubi u dielektriku po metru dužine kabela izoliranog polietilenom s razlikom napona između koaksijalnog vodiča i metaliziranog plašta 1kV pri frekvenciji 10 MHz. Promjer vodiča je 1 cm, a promjer plašta 1,4 cm.

Rješenje:

Za polietilen prema tablici 11.1.2.1 produkt $\varepsilon_r tg\delta$ iznosi $2.2x0{,}3x10^{-3} = 0{,}66x10^{-3}$.

Primjenom izraza 11.1.2.7 slijedi,

$$q_{1V} = \frac{(2\pi)^2 x8{,}855x0{,}66x10^{-2}}{\ln\frac{1{,}4}{1{,}0}} = 6{,}85\,7 \quad W/m$$

Zagrijavanje materijala elektromagnetskim zračenjem

Općenito uzevši elektromagnetsko zračenje prolazom kroz materijal zbog interakcija s česticama materijala gubi dio svoje energije.Ta se energija predaje materijalu i mafestira kao unutarnji izvor toplinske energije te izaziva njegovo zagrijavanje. Spektar energija elektromagnetskog zračenja s kojim se susrećemo u praksi je veoma širok: Od niskofrekventnog elektromagnetskog zračenja iz elektroenergetskih postrojenja (50 Hz) na jednoj do veoma visokofrekventnog i prodornog γ zračenja na drugoj strani.

U elektrotehnici nas posebno zanima zagrijavanje materijala mikrovalnim zračenjem i gama zračenjem pa ćemo se na unutarnje izvore nastale zbog tih zračenja posebno osvrnuti.

Mikrovalno zračenje

Mikrovalno elektromagnetsko zračenje prolazeći kroz dielektrički materijal predaje dio svoje energije tom materijalu.Predana energija se kod manifestira kroz naizmjeničnu polarizaciju i oscilaciju molekula materijala, odnosno kao toplinska energija.

Poznato je iz fizike da je energija kvanta elektromagnetskog zračenja proporcionalna frekvenciji tog zračenja,prema Planck-ovom zakonu:

$$E = h\nu \qquad \textbf{(11.1.2.8)}$$

gdje je -E energija elektromagnetskog kvanta (J)

-ν frekvencija zračenja (1/s)

-h Planck-ova konstanta = $6{,}6x10^{-35}$ (Js)

Valna dužina λ i frekvencija ν elektromagnetskog zračenja su povezani relacijom, λν= c (c je brzina svjetlosti = $3x10^8$ m/s).

U tehnici se za frekvenciju umjesto ν upotrebljava oznaka f.

Valnu dužinu elektromagnetskih valova možemo korištenjem Planck-ovog zakona povezati s njihovom energijom.U fizici je uobičajeno energiju elektromagnetskog kvanta mjeriti u elektronvoltima (1eV=$1,60219x10^{-19}$ J) .Iz navedenog slijedi veza između valne dužine i frekvencije elektromagnetskog zračenja i odgovarajuće energije kvanta izražene u elektronvoltima,

$$\lambda = \frac{1,23x10^{-7}}{E(eV)} \quad m \qquad \textbf{(11.1.2.9)}$$

$$f=2,44x10^{15}\, E(eV) \quad Hz \qquad \textbf{(11.1.2.10)}$$

Elektromagnetsko zračenje energije 1eV ima valnu dužinu 0,123μm i frekvenciju $2,44x10^6$ GHz. Zračenje s energijom većom od 1eV ima dokazane biološke učinke i poznato je kao ionizirajuće zračenje.

Od interesa za korištenje kao izvor topline za zagrijavanje materijala je tzv. mikrovalno zračenje s frekvencijom oko 2 GHz. Energija kvanta tog zračenja je reda 10^{-6} eV.

Za proračun internog izvora topline koje nastaje zbog mikrovalnog zračenja bitno je poznavati funkciju prodiranja, odnosno funkciju slabljenja zračenja koje prolazi kroz materijal.

Kod većine zračenja se funkcija slabljenja temelji na predpostavci da je slabljenje zračenja po jedinici puta kroz materijal proporcionalno intenzitetu zračenja. Iz te predpostavke slijedi eksponencijalni zakon slabljenja zračenja,tj funkcija tipa,

$$P(x) = P_{x=0} e^{-\frac{x}{d}} \quad W/m^2 \qquad \textbf{(11.1.2.11)}$$

gdje su P(x) i $P_{x=0}$ snaga po jedinici površine na dubini x i na ulazu u materijal (x=0), a d konstanta ovisna o prirodi materijala.

Izraz (11.1.2.11) pokazuje da je snaga zračenja da dubini d je e puta manja od ulazne snage.

Određivanje konstante d je veoma kompleksno.Navesti će se samo jedan pojednostavljeni izraz [44]:

$$d \cong \frac{0,25\lambda_0}{\pi\sqrt{\varepsilon'}} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{(1+\tan^2\delta)}-1}} \approx \frac{1,5x10^8}{\pi f\sqrt{\varepsilon'}\tan\delta} = \frac{1,5x10^8\sqrt{\varepsilon'}}{\pi f\varepsilon''} = \frac{\lambda_0\sqrt{\varepsilon'}}{2\pi\varepsilon''} \quad m \qquad \textbf{(11.1.2.12)}$$

gdje je f frekvencija zračenja (1/s) a λ_0 valna dužina (m).

Izraz ukazuje da je dubina prodiranja mikrovalnog zračenja u materijal obrnuto proporcionalna s frekvencijom zračenja i s gubicima u dielektriku.

Podaci o faktorima ε' i ε" nekih materijala su dati u tablici 11.1.2.2[44]

Tablica 11.1.2.2 Faktori ε' i ε" nekih dielektričkih materijala

Materijal	Tempera-tura K	Frekvencija mikrovalnog zračenja			
		1 GHz		3 GHz	
		ε'	ε"	ε'	ε"
Destilirana voda	298	77,5	1,2	76,7	12,0
Ulje za kablove	298	2,17	0,009	2,16	0,0043
Staklo	298	3,78	0,0002	3,78	0,0002
Pleksiglas	300	2,66	0,017	2,6	0,015
Teflon	295	2,1	0,0003	2,1	0,0003
Guma	298	2,85	0,069	2,8	0,05

Primjer 11.1.2.5

Snop mikrovalnog zračenja frekvencije 2,44 GHz upada okomito na ploču dielektričnog materijala.Intenzitet zračenja je 10 W/cm^2.Koliko se toplinske snage oslobodi u sloju 10mm od površine ploče ako je u pitanju destilirana voda,staklo i guma.

Rješenje:

Karakteristike navedenih materijala kod frekvencije 2,44 GHz će se odrediti linearnom interpolacijom podataka iz tablice 11.1.2.2.Konstantu d se na temelju poznatih karakteristika materijala određuje iz izraza 11.1.2.12.

Oslobođena toplinska snaga do dubine 10 mm se primjenom relacije 11.1.2.11 dobiva kao

$$\Delta P = P_{x=0}(1-e^{-0,01/d}) = 10(1-e^{-0,01/d}) \quad W/m^2$$

Rezultati priračuna su navedeni u tablici 11.1.2.3

Tablica 11.1.2.3 Oslobođena toplinska snaga u dielektricima

Materijal	ε'	ε"	Konstanta d m	Oslobođena toplinska snaga do dubine 10mm W/cm^2
Destilirana voda	76,9	9,0	0,019	4,09
Staklo	3,78	0,0002	190,24	$5,2x10^{-4}$
Guma	2,81	0,055	0,596	0,17

Rezultat pokazuje da se u destiliranoj vodi (a pogotovo ako u vodi koja ima primjesa soli ili drugih minerala koji joj povećavaju električnu vodljivost) zbog velike vrijednosti ε"oslobađa znatno više toplinske snage nego u drugim materijalima.To upućuje na zaključak da kod vlažnih materijala treba očekivati manju dubinu prodiranja mikrovalova nego kod suhih materijala kao i da će njihova prodornost kroz materijale električnih vodiča biti veoma mala ili zanemariva.

Nasuprot tome valja uočiti da kroz materijale poput stakla mikrovalovi prolaze praktički bez gubitka energije.

Raspodjela temperatura u materijalu s unutarnjim izvorom topline

Jednadžba za raspodjelu temperatura u materijalu s konstantnim koeficijentom vođenja topline λ i unutarnjim izvorom topline q_v je data relacijom (11.1.23):

$$q_V + \lambda \nabla^2 T = 0$$

Izrazi (11.1.25), (11.1.26), (11.1.27) određuju Laplaceov operator ∇^2 za pravokutni ,cilindrični osno simetrični i kuglasti centralno simetrični koordinatni sustav.

Kompleksnost rješenja relacije (11.1.23) ovisi o geometriji tijela,prostornoj ovisnosti proizvedene topline i graničnim uvjetima.Razmotriti ćemo nekoliko jednostavnih primjera od značaja za praksu.Među njima je najznačajnija cilindrična geometrija jer se promjenjuje kod većine električnih vodiča i nuklearnih gorivnih elemenata.

Ravna ploča s unutarnjim izvorom topline

Prostorno neovisni izvor topline

U slučaju ravne ploče s prostorno neovisnim izvorom topline čija je debljina mnogo manja širine i dužine (što znači da se mogu zanemariti gradijenti temperature u tim smjerovima) jednadžba (11.1.23) postaje:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad \textbf{(11.1.2.13)}$$

Smjer x je okomit na ploču.

Dvostrukim integriranjem jednadžbe (11.1.2.13) slijedi,

$$T = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2 \qquad \textbf{(11.1.2.14)}$$

Konstante integracije C_1 i C_2 ćemo odrediti iz graničnih uvjeta.

Ako debljinu ploče smještenu u ushodište koordinatnog sustava označimo s d te primijenimo granične uvjete prve vrste možemo pisati,

$T_{x=0} = T_1$

$T_{x=d} = T_2$

Uvrštenjem u relaciju (11.1.2.14) slijedi,

$$T = T_1 - \frac{q_v x^2}{2\lambda} + \frac{x}{d}\left(T_2 - T_1 + \frac{q_v d^2}{2\lambda}\right) \qquad \textbf{(11.1.2.15)}$$

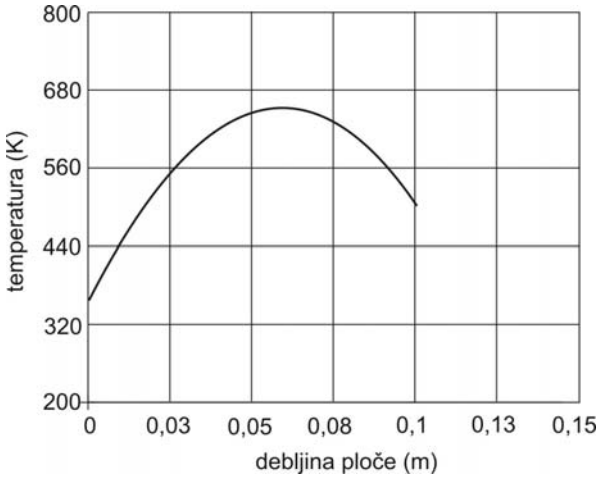
Primjer 11.1.2.6

U čeličnoj ploči debljine 100 mm se indukcijskim zagrijavanjem proizvodi unutarnja toplina 5 MW/m^3 .Ako se temperature na površinama ploče održavaju na 350 K i 500 K kakav je profil temperature i kolika je maksimalna temperatura unutar ploče?

Koeficijent vođenja topline čelika λ je 29 W/m,K.

Rješenje:

Uvrštenjem datih vrijednosti u relaciju (11.1.2.15) dobivamo paraboličnu funkciju koja određuje ovisnost temperature unutar ploče o udaljenosti x od čeone strane.Prikaz te funkcije daje slika 11.1.2.2 .Iz slike proizlazi da je maksimalna temperatura unutar ploče 647 K na udaljenosti od približno 60 mm od čeone strane



Slika 11.1.2.2 Profil temperature unutar ploče s unutarnjim izvorom topline

Isti problem možemo rješiti i primjenom graničnih uvjeta treće vrste.U tom slučaju je umjesto temperatura na površini ploče poznata temperatura medija T_{ok} (to je najčešće zrak) u kojemu se ploča nalazi i koeficijent prijelaza topline α s površine ploče na taj medij.

U većini slučajeva se predpostavlja da je temperatura medija na obje strane ploče ista.Poslijedica toga je simentrična raspodjela temperature u unutrašnjosti ploče u odnosu na njezinu sredinu, maksimalna temperatura u sredini i jednake temperature na obje površine.

Uz navedene okolnosti granični uvjeti promjenjeni na relaciju (11.1.2.14) se svode na ,

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=d/2} = 0$$

$$\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \alpha\left(T_{x=0} - T_{ok}\right)$$

Prvi granični uvjet izražava činjenicu da temperaturna funkcija u sredini ploče /tj. kod x=d/2) ima maksimum a drugi da je odvedena toplina iz površine ploče jednaka toplini predatoj u okoliš (pozitivni predznak lijeve strane drugog graničnog uvjeta je zbog pozitivnog gradijenta temperature kod x=0,na suprotnoj strani bi taj predznak bio negativan).Lako je provjeriti da se uvrštenjem tih graničnih uvjeta u relaciju (11.1.2.14) dobiva,

$$C_1 = \frac{q_v d}{2\lambda} \qquad \textbf{(11.1.2.16)}$$

$$C_2 = \frac{q_v d}{2\alpha} + T_{ok} \qquad \textbf{(11.1.2.17))}$$

Primjer 11.1.2.7

U primjeru 11.1.2.1 razmatrana je količina topline koja nastaje u kondenzatoru koji se sastoji iz pločice polivinil klorida debljine 1 mm smještene između paralelnih elektroda.Napon na elektrodama je 120 V a frekvencija 20MHz. Računom je dobiveno da proizvedena toplinska snaga u dielektriku iznosi 0,79 W/cm^3.

Na temelju tih vrijednosti i podataka da toplinska vodljivost polivinil klorida prema tablici 11.1.2.1 iznosi 0,09 W/mK i da su temperature elektroda 320 K, potrebno je odrediti maksimalnu temperaturu dielektrika kondenzatora.

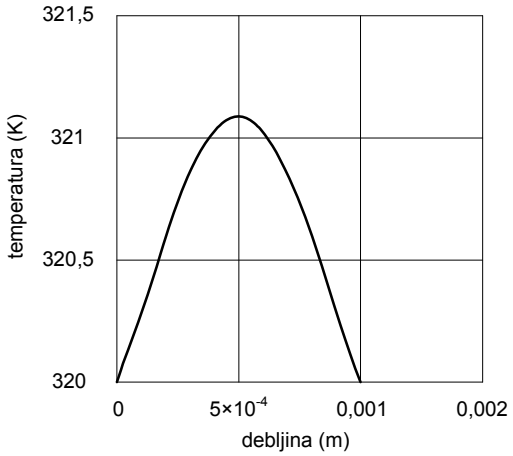
Rješenje:

Ako u relaciji (11.1.2.15) postavimo $T_1=T_2$ dobivamo,

$$T = T_1 - \frac{q_v}{2\lambda}\left(x^2 - xd\right)$$

Funkcija je prikazana slikom 11.1.2.3.

Uz date uvjete je povišenje temperature u dielektriku vrlo maleno (nešto više od 1 K).



Slika 11.1.2.3 Profil temperature u PVC dielektriku kondenzatora

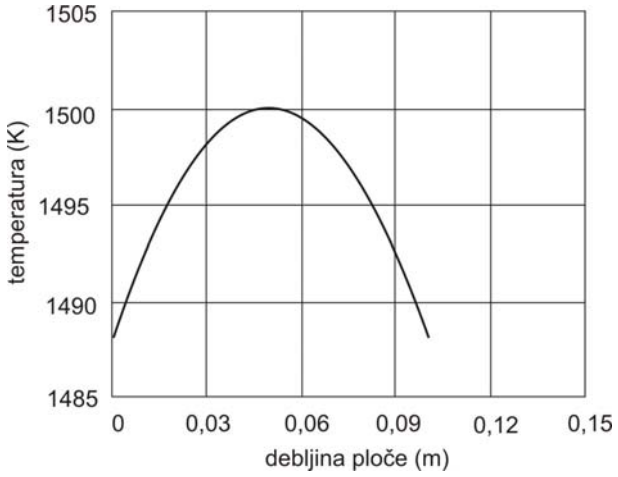
Primjer 11.1.2.8

Kolika se toplina može proizvoditi u čeličnoj ploči iz primjera 11.1.2.4 ako se ona nalazi u zraku temperature 320 K a u njoj maksimalna temperatura ne smije biti veća od 1500 K.Koeficijent prijelaza topline s površine ploče na zrak je 12 W/m^{2}K.Kakav je u tom slučaju profil temperature unutar ploče i kolike su temperature na njezinoj površini?

Rješenje:

Uvrštenjem izraza za konstante C_1 i C_2 (relacije 11.1.2.16 i 11.1.2.17) u jednadžbu (11.1.2.15) u kojoj postavimo x=d/2 te zadane vrijednosti za T_{max} i T_{ok}. dobivamo,

$$q_v = \frac{T_{max} - T_{ok}}{\frac{d^2}{8\lambda} + \frac{d}{2\alpha}} = 2{,}803 \times 10^5 \text{ W/m}^3 = 280 \text{ kW/m}^3.$$



Slika 11.1.2.4 Profil temperature u presjeku ploče hlađene zrakom s unutarnjim izvorom topline

Temperature na površini ploče su 1488 K.

Temperaturna razlika između sredine i površine ploče je svega 12 K ,što je poslijedica visoke toplinske vodljivosti metala i malenog koeficijenta prijelaza topline s površine ploče na zrak.

Raspodjela temperatura u ravnoj ploči s prostorno promjenjivim izvorom topline zbog apsorpcije elektromagnetskog zračenja

Proračun temperaturne raspodjele unutar ravne ploče s prostorno promjenjivim unutarnjim izvorom topline može biti od interesa u praksi kada se radi o toplini generiranoj prolazom elektromagnetskog zračenja. Kada je riječ o γ zračenju ploča ima funkciju biološkog štita kojemu je zadatak da apsorpcijom zračenja smanji njegov intenzitet. U takvim slučajevima je unutarnji izvor topline u štitu po jedinici volumena najveći na strani koja je podvrgnuta zračenju i eksponencijalno se smanjuje prema dubini štita,kao što je to razmatrano u poglavlju 3.. Kod gama zračenja ovisnost generirane topline q_v o dubini štita x određen izrazom (3.5.5):

$$q_v = q_{0v} e^{-\mu x} = \mu_a I_0 E e^{-\mu x}$$

Ako taj izraz uvrstimo u jednadžbu (11.1.2.13) slijedi,

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \mu_a I_0 E \frac{e^{-\mu x}}{\lambda} = 0 \qquad \textbf{(11.1.2.18)}$$

Dvostrukim integriranjem se dobiva,

$$T = -\frac{\mu_a I_0 E}{\lambda \mu^2} e^{-\mu x} + C_1 x + C_2 \qquad \textbf{(11.1.2.19)}$$

Integracijske konstante C_1 i C_2 se dobivaju iz rubnih uvjeta.Ako se radi o ravnom zidu debljine a čija je jedna strana u ishodištu koordinatnog sustava i ima temperaturu T_1 , a druga temperaturu T_2(dakle ako primijenimo granične uvjete prve vrste), možemo pisati,

$T_{x=0} = T_1$

$T_{x=a}=T_2$

Uvštenjem izlazi,

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{a} + \frac{\mu_a I_0 E}{\lambda \mu^2}\left[1 - e^{-\mu x} - \frac{x}{a}(1 - e^{-\mu a})\right] \qquad \textbf{(11.1.2.20)}$$

Bez poteškoća bi se integracijske konstante C_1 i C_2 mogle odrediti i pri primijeni graničnih uvjeta treće vrste (iako u tom slučaju dobivamo mnogo glomazniji izraz za temperaturu T). Naime, ako su umjesto temperatura čeonih stijenki T_1 i T_2 poznate temperature okoliša na obje strane zida T_{0k1} i T_{ok2} i odgovarajući koeficijenti prijelaza topline α_1 i α_2 možemo konstante C_1 i C_2 u jednadžbi (11.1.2.19) odrediti iz relacija,

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \alpha_1(T_{x=0} - T_{ok1})$$

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=a} = \alpha_2(T_{x=a} - T_{ok2})$$

Ako je elektromagnetsko zračenje većih valnih dužina (infracrveno zračenje) proračun je u osnovi isti.Razlika je u definiranju faktora apsorpcije zračenja odnosno dubine prodiranja zračenja u materijal ,prema ranijim analizama za tu vrstu zračenja.. Taj slučaj je obrađen u primjeru 11.1.2.3

Primjer 11.1.2.9

Vanjska strana betonskog zida biološke zaštite u nekom nuklearnom postrojenju se održava na temperaturi 290 K a unutarnja na temperaturi 320 K.Debljina zida je 1 m, gustoća betona 2650 kg/m^3 a toplinska vodljivost 1,1 W/m,K.Zid je s unutarnje strane izložen toku γ-zraka intenziteta 3x10^{15} fotona/m^{2}s prosječne energije 3MeV Potrebno je odrediti raspodjelu temperature unutar betonskog zida i položaj maksimalne temperature betona.

Rješenje:

Iz tablice 3.5.1 se interterpolacijom određuju maseni koeficijenti za slabljenje snopa γ-zraka u betonu μ/ρ=0,00363 m^2/kg i za apsorpciju γ-zraka u betonu μ_a/ρ=0,00225 m^2/kg.Iz čega slijedi μ=9,6195m^{-1} μ_a=5,9625m^{-1}.

Gustoća oslobođene toplinske energije na čeonoj strani betonskog zida iznosi,

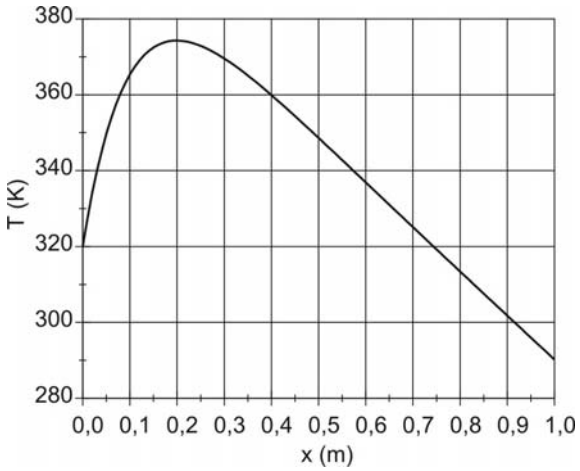
$q_{0v}= EI_0\mu_a$=3x1,6x10^{-13}x3x10^{15}x0,00225x2650=8,586x10^3 W/m^3.

Faktor $\frac{q_{0v}}{\lambda\mu^2} = \frac{8586}{1{,}1x(0{,}00363x2650)^2} = 84{,}35$ K

Na temelju navedenih podataka i izraza (11.1.2.20) možemo definirati funkciju raspodjele temperature u betonskom zidu,

$$T = 320 - 30x + 84{,}35\left[1 - e^{-9{,}6195x} - x(1 - e^{-5{,}9625})\right] \quad K$$

Grafički prikaz temperaturne funkcije daje slika 11.1.2.5



Slika 11.1.2.5 Raspodjela temperatura unutar betonskog zida

Maksimalna temperatura u unutrašnjosti zida je 369,2 K a postiže se na udaljenosti oko 0,2 m od čeone strane zida.

Primjer 11.1.2.10

Snop elektromagnetskog zračenja frekvencije 1800 MHz intenziteta 0,05 W/cm^2 ulazi u nepokretni sloj vode (čije karakteristike možemo poistovjetiti s organskim tkivom) debljine 5 cm i temperature 310 K.Koliko je povišenje temperature u vodi zbog apsorpcije energije tog zračenja?

Rješenje:

Dielektrične konstante za vodu kod date frekvencije zračenja ,prema tablici 11.1.2.3 su: $\varepsilon' = 77{,}18$ $\varepsilon'' = 5{,}52$.Valna dužina elektromatskog zračenja frekvencije 1800 MHz je približno 0,16m.

Koeficijent toplinske vodljivosti za vodu temperature 310 K iznosi približno 0,65 W/m,K.

Prema izrazu (11.1.2.12) dubina penetracije zračenja kroz materijal je,

$$d \approx \frac{\lambda_0 \sqrt{\varepsilon'}}{2\pi\varepsilon''} = 0{,}04 \text{ m}$$

Oslobođena energije zbog prolaza zračenja kroz materijal je data izrazom (11.1.2.11),

$$P(x) = P_{x=0} e^{-\frac{x}{d}} \quad W/m^2$$

Iz čega proizlazi da je oslobođena energija po jedinici volumena materijala,

$$q_v = -\frac{dP(x)}{dx} = \frac{P_{x=0}}{d} e^{-\frac{x}{d}} \quad W/m^3$$

Uvrštenjem u relaciju (11.1.2.13) slijedi,

$$\frac{d^2T}{dx^2} + (\frac{1}{d})\frac{P_{x=0}}{\lambda} e^{-\frac{x}{d}} = \frac{d^2T}{dx^2} + q_{v0} e^{-\frac{x}{d}} = 0$$

Analognim postupkom kao kod izvođenja jednadžbe (11.1.2.19) nakon dvostruke integracije dobivamo,

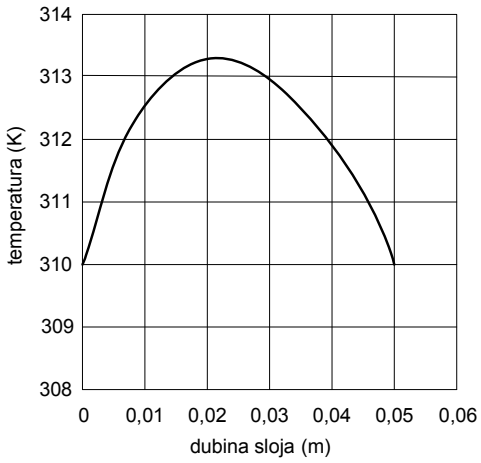
$$T = -\frac{P_{x=0} d}{\lambda} e^{-\frac{x}{d}} + C_1 x + C_2$$

Ako primijenimo rješenje iskazano relacijom (11.1.2.20) te uzmemo u obzir da je $T_1=T_2$ dobivamo izraz

$$T = T_1 + \frac{P_{x=0} d}{\lambda}\left[1 - e^{-\frac{x}{d}} - \frac{x}{a}(1 - e^{-\frac{a}{d}})\right]$$

a = 0,05 m (debljina sloja vode)

Rezultat proračuna raspodjele temperature je prikazan slikom 11.1.2.6.



lika 11.1.2.6 Profil temperature u sloju vode zbog apsorpcije elektromagnetskog zračenja frekvencije 1800 MHz intenziteta 0,05 W/cm^2

Slika pokazuje profil temperature u sloju vode.Maksimalno povišenje temperature u sloju vode zbog apsorpcije elektromagnetskog zračenja intenziteta 0,05 W/cm^2=500 W/m^2 nastaje na dubini od oko 2,3 cm i iznosi 3,4 K.

Cilindrično tijelo s unutarnjim izvorom topline

U praksi se često javlja problem proračuna temperatura unutar cilindričnih tijela s unutarnjim izvorom topline (električni vodiči, nuklearni gorivni elementi).

U koliko se zanemari ovisnost koeficijenta vođenja topline λ o temperaturi rješenje možemo tražiti u primjeni jednadžbe (11.1.23) s Laplaceovim operatorom u cilindričnoj geometriji.Ako nadalje predpostavimo da se radi o cilindru velike dužine kod kojega je moguće zanemariti aksijalno u odnosu na radijalno vođenje topline, jednadžba (11.1.23) poprima oblik:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{q_v}{\lambda}=0 \qquad \textbf{(11.1.2.21)}$$

Množenjem s r diferencijalna jednadžba se može napisati kao,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{q_v r}{\lambda}$$

Integracijom slijedi,

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{q_v r^2}{2\lambda}+C_1$$

Dijeljenjem s r i ponovnim integriranjem dobivamo,

$$T=-\frac{q_v r^2}{4\lambda}+C_1 \ln r+C_2 \qquad \textbf{(11.1.2.22)}$$

Konstante određujemo iz početnih uvjeta.U koliko se radi o punom cilindru,konstanta C_1 mora biti jednaka nuli, jer u protivnom temperatura u sredini (tj. kod r=0) ne bi mogla biti konačna. Ako je C_1=0 , konstanta C_2 odgovara temperaturi unutar cilindra kod r=0, pa vrijedi relacija,

$$T_r=T_{r=0}-\frac{q_v r^2}{4\lambda} \qquad \textbf{(11.1.2.23)}$$

Temperatura se dakle smanjuje s povećanjem polumjera cilindra po paraboličnom zakonu.Ako vanjski promjer cilindra označimo kao R,razlika između temperature u sredini i na njegovoj površini je,

$$T_{r=0}-T_{r=R}=\frac{q_v R^2}{4\lambda} \qquad \textbf{(11.1.2.24)}$$

U praksi se rjeđe pojavljuje slučaj šupljeg cilindra (odnosno cijevi) unutar kojeg se proizvodi toplina.Temperaturno polje unutar stjenke šupljeg cilindra u takvom slučaju možemo odrediti iz relacije (11.1.2.22) , u koliko su poznati rubni uvjeti na unutarnjoj i vanjskoj površini na temelju kojih možemo odrediti konstante C_1 i C_2.

Najčešći je slučaj da se na grijani cilindar primjenjuju rubni uvjeti treće vrste. Pri tome se redovito zadaje proizvedena energija unutar cilindra , temperatura fluida koji hladi cilindar i koeficijent prijelaza topline s površine cilindra na fluid.Uz navedeno rubni uvjet postaje,

$$\left(-\lambda\frac{dT}{dr}\right)_{r=R}=\alpha\left(T_{r=R}-T_{ok}\right)$$

gdje je T_{ok} temperatura okoliša(odnosno fluida koji hladi cilindar).

Lijeva strana gornje jednadžbe, na osnovi relacije (11.1.2.23) je $\frac{q_v R}{2}$,pa temperaturna razlika između površine cilindra i okoline iznosi,

$$T_{r=R}-T_{ok}=\frac{q_v R}{2\alpha} \qquad \textbf{(11.1.2.25)}$$

Dobiveni izraz,zajedno s izrazom (11.1.2.24) dozvoljava postavljanje veze između temperature unutar grijanog cilindra T_r i temperature okoliša uz datu proizvodnje energije.Ta je veza data s relacijom,

$$T_r = \frac{q_v\left(R^2 - r^2\right)}{4\lambda} + \frac{q_v R}{2\alpha} + T_{ok} \qquad \textbf{(11.1.2.26)}$$

Primjer 11.1.2.11

Koliku je jakost električne struje moguće provesti šipkom od nehrđajućeg čelika promjera 15 mm koja se hladi vodom temperature 350 K uz koeficijent prijelaza topline α= 1000 W/m^{2}K, uz uvjet da njezina maksimalna temperatura ne bude veća od 600 K? Kolika je u tom slučaju temperatura površine šipke i kakav je profil temperature unutar šipke?

Koeficijent vođenja topline nehrđajućeg čelika λ=19 W/m,K.

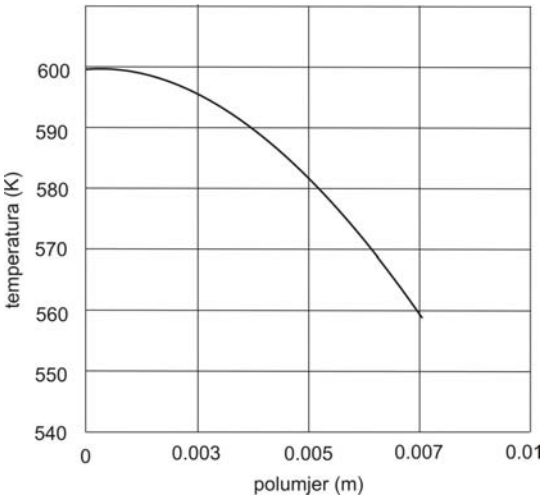
Rješenje:

Toplinsku snagu pri kojoj temperatura u osi šipke iznosi 600 K dobivamo iz relacije (11.1.2.26) postavkom r=0.Dakle,

$$q_v = \frac{T_{r=0} - T_{0k}}{\frac{R^2}{4\lambda} + \frac{R}{2\alpha}}$$

Uvrštenjem zadanih veličina slijedi q_v=5,568x10^7 W/m^3 = 55,68 MW/m^3.

Grafički prikaz funkcije (11.1.2.26) za razmatrani slučaj daje slika 11.1.2.7



Slika 11.1.2.7 Ovisnost temperature unutar šipke o polumjeru.

Površinska temperatura šipke je 558,8 K, a njezina srednja temperatura približno 580 K.Ovaj je podatak potreban za određivanje prosječne vrijednosti specifičnog električnog otpora materijala šipke.

Specifični električni otpora čelika kod temperature 560K je približno 0,38 Ωmm^2/m.Primjenom izraza (11.1.2.1) električna struja potrebna za generiranje toplinske snage q_v unutar šipke je,

$$I = 10^{-3} S \sqrt{\frac{q_v}{\rho}} = 2139A$$

gdje je S presjek šipke u mm^2.

Izraz je dobiven uzimanjem u obzir da proizvodnja toplinske snage po jedinici dužine šipke $Q_{1v}=10^{-6}q_vS$.

Vođenje topline u gorivnom elementu nuklearnog reaktora

Kao što je ranije napomenuto, goriva šipka sastoji se iz materijala nuklearnog goriva (to je u pravilu oksid urana), obloge gorivnog elementa i zazora između goriva i obloge. Kod proračuna temperaturnih razlika unutar gorivne šipke trebamo primijeniti već ranije dobivene izraze, vodeći računa da se razlika temperature između osi šipke i površine obloge sastoji iz zbroja temperaturnih razlika u navedenim elementima šipke.

Primjer 11.1.2.12

Goriva šipka nekog vodom hlađenog reaktora sastoji se iz tableta UO_2 promjera 8.5mm i obloge iz legure cirkonija (Zircalloy 2) debljine 0.57mm. Između goriva i obloge zazor je punjen helijem debljine 0.07mm. U šipci se proizvodi snaga 40kW/m. Površina obloge hlađenjem se održava na temperaturi 620K.

Kolika je temperatura UO_2 u sredini gorivne šipke?

Rješenje:

Proračun temperatura započeti ćemo od poznate površinske temperature i generirane snage.

Iz tablice 11.1.1. interpolacijom za datu temperaturu, dobiva se koeficijent toplinske vodljivosti za Zircalloy 13.1 W/mK.

Temperaturna razlika na oblozi gorivne šipke

Temperaturni pad kroz oblogu (ΔT_0) se dobiva primjenom izraza za vođenje topline kroz cilindričnu stjenku (izraz 11.1.1.8):

$$\Delta T_0 = Q_{1v}\left[\frac{1}{2\pi\lambda} ln \frac{r_v}{r_u}\right].$$

Vanjski polumjer obloge iznosi 8.5/2+0.07+0.57=4.89mm, a unutrašnji 4.32mm.

Uvrštenjem numeričkih podataka dobiva se ΔT_0=60.2K.

Temperatura na unutrašnjoj strani obloge je 680.2K.

Temperaturna razlika na zazoru između obloge i goriva

Pretpostaviti ćemo srednju temperaturu u zazoru 682K.

Uvrštenjem u izraz (11.1.1.43) uz δ/D=0.00824, dobiva se koeficijent prijelaza topline u zazoru, $\alpha_z=4.17*10^5$ W/mK. Površina prijelaza topline u zazoru po metru dužine šipke $F_1=0.027m^2$.

Temperaturni pad u zazoru biti će na osnovi dobivenih podataka

$$\Delta T_z = \frac{Q_{1v}}{F_1 \alpha_z} = 3.55\ K\ .$$

Temperatura na površini goriva je približno 684K.

Maksimalna temperatura goriva

Postupak za određivanje maksimalne temperature goriva je u osnovi identičan kao u primjeru 11.1.1.14.

Faktor $q_v R^2/4=Q_{1v}/(4\pi)$ iznosi 3183W/m.

U razmatranom je slučaju temperatura u sredini gorive šipke niža od 1920K. Do takvog se zaključka dolazi jer je

$$\int_0^{1920} \lambda dT - \int_0^{684} \lambda dT > \frac{q_v R^2}{4}\ .$$

Maksimalnu temperaturu goriva T izračunati ćemo iz relacije,

$$\int_0^{T} \lambda dT = \frac{Q_{1v}}{4\pi} + \int_0^{684} \lambda dT = 3183 + 2472 = 5755\ \frac{W}{m}\ .$$

Jednadžbu ćemo riješiti primjenjujući relaciju (11.1.11), a zadovoljena je za T=1708K.

Promjena temperature unutar gorive šipke je 1708-620=1088K.

Kuglasto tijelo s unutarnjim izvorom topline

Kuglasta tijela s unutarnjim izvorom topline se rijetko sreću u primjeni.Jedan od tipičnih primjera su kuglasti gorivni elementi visokotemperaturnog nuklearnog reaktora.Taj će se slučaj razmatrati zasebno jer na njega, zbog izrazite ovisnosti koeficijenta vođenja topline nuklearnog goriva o temperaturi, ne možemo primijeniti ponovno izraz (11.1.23).

Primjenom tog izraza s Laplaceovim operatorom u kuglastoj geometriji slijedi,

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad \textbf{(11.1.2.27)}$$

Izraz se može napisati u obliku,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{q_v r^2}{\lambda}$$

Dvostrukim integriranjem se dobiva izraz,

$$T_r = -\frac{q_v r^2}{6\lambda} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Kod pune kugle, radi konačne vrijednosti temperature u sredini kugle, konstanta C_1 mora biti jednaka nuli ,a konstanta C_2 jednaka temperaturi u sredini kugle $T_{r=0}$.

Iz navedenog je razloga dozvoljeno pisati,

$$T_{r=0} - T_r = \frac{q_v r^2}{6\lambda} \qquad \textbf{(11.1.2.28)}$$

Slično kao u slučaju cilindrične geometrije možemo i na ovaj slučaj primijeniti rubne uvjete treće vrste.Ovisnost temperature u unutrašnjosti kugle o generiranoj toplini i temperaturi okoliša tada postaje,

$$T_r = \frac{q_v(R^2 - r^2)}{6\lambda} + \frac{q_v R}{3\alpha} + T_{ok} \quad (11.1.2.29)$$

11.2 Numeričke metode u rješavanju problema vođenja topline

Postoji niz problema vođenja topline za koja su analitička rješenja nepraktična kako zbog težine analitičkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi tako i zbog i primjene složenijih graničnih uvjeta.

Kod takvih problema je primjena numeričkh postupaka od presudne važnosti.Numerički postupci koji se u osnovi svode na pretvorbu diferencijalnih jednadžbi u niz algebarskih jednadžbi su posebno značajni nakon razvoja računala i računarskih programa koji su omogućili njihovu primjenu u praksi.

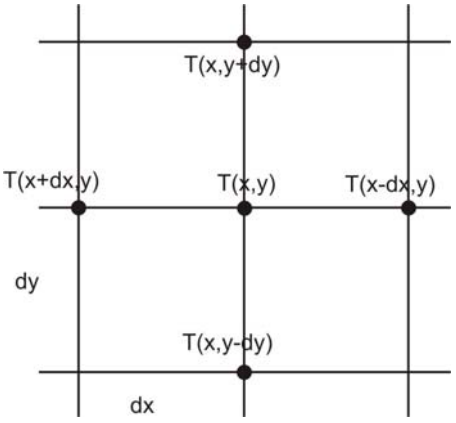
Razmotrimo kao primjer ponovo diferencijalnu jednadžbu koja određuje vođenje topline u dva smjera tj relaciju (11.1.1.44) bez promjene temperature u smjeru z.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Napisanu diferencijalnu jednadžbu možemo zamijeniti s odgovarajućom algebarskom jednadžbom u kojoj su diferencijalne prostorne promjene temperature u smjerovima x i y zamijenjene s konačnim prirastima temperature u konačnim prostornim intervalima Δx i Δy.

Najjednostavnije je prostorne intervale definirati pravokutnom rešetkom.Iz razloga koji će kasnije biti obrazloženi proračun se pojednostavljuje ako se prostorni intervali Δx i Δy odaberu jednakim.

Model elementarne ćelije za proračun temperatura metodom konačnih razlika je prikazan slikom 11.2.1



Slika 11.2.1 Elementarna ćelija za proračun temperatura metodom konačnih razlika

Zamislimo neku točku (koju ćemo zvati čvorom prostorne rešetke) unutar temperaturnog polja s koordinatama (x,y) u kojoj je temperatura T(x,y).Na udaljenosti Δx i Δy od te točke temperature će biti prema danoj skici biti T(x+Δx,y),T(x-Δx,y),T(x,y+Δy) i T(x,y-Δy).

Na osnovi navedenog možemo aproksimirati drugi izvod temperaturne funkcije u točki x,y u smjeru x kao,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{T(x+\Delta x,y)-T(x,y)}{\Delta x} - \frac{T(x,y)-T(x-\Delta x.y)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T(x+\Delta x,y)+T(x-\Delta x,y)-2T(x,y)}{\Delta x^2}$$

Točnost aproksimacije je to veća što su elementarni razmaci manji.

Analogno vrijedi za smjer y,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T(x,y+\Delta y)+T(x,y-\Delta y)-2T(x,y)}{\Delta y^2}$$

U koliko odaberemo elementarne prostorne razmake Δx i Δy jednakima diferencijalna jednadžba (11.1.1.44) se svodi na algebarsku relaciju,

$$T(x+\Delta x,y)+T(x-\Delta x,y)+T(x,y+\Delta y)+T(x,y-\Delta y)\cong 4T(x,y) \qquad \textbf{(11.2.1)}$$

Jednadžba (11.2.1) pokazuje da je temperatura u svakom čvoru elementarne ćelije jednaka aritmetičkoj sredini temperatura u četiri susjedna čvora.Ta je jednadžba dovoljna za rješavanje problema dvodimenzionalne raspodjele temperature u krutom tijelu u pravokutnoj geometriji kod kojega su zadani rubni uvjeti prve vrste (poznate temperature na površini tijela).

Iako je relacija u osnovi jednostavna rješavanje se usložnjava ako imamo veći broj čvorova (manji prostorni razmaci),jer za svaki čvor treba postaviti posebnu jednadžbu. Sustav tako dobivenih algebarskih jednadžbi se u većini slučajeva rješava korištenjem matričnog postupka.

Rješavanju problema pomaže činjenica da je kod većine praktičnih primjera zbog simetrije dovoljno odrediti raspodjelu temperature samo u jednom dijelu površine krutog tijela.

Primjer 11.2.1

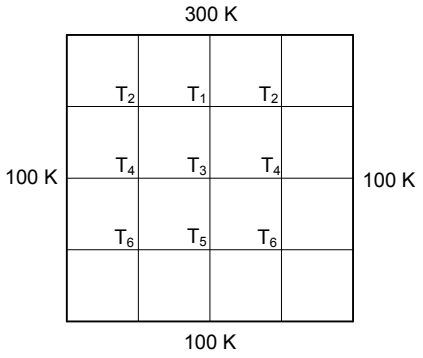
U primjeru 11.1.2.10 je razmatrana analitički proračun raspodjele temperaturnog polja unutar duge šipke s kvadratnim presjekom dimenzije 2x2 cm analitičkim postupkom.Tri stranice tog presjeka su održavane na temperaturi 100 K a četvrta na temperaturi 300 K.

Kolike su temperature u sredini presjeka šipke (ravnina x=L/2) ako se taj problem riješi numeričkom metodom?

Rješenje:

Presjek šipke dimenzija 2x2 cm podijeliti ćemo radi jednostavnosti u samo 16 polja dimenzija 0.5x0,5 cm i temperature u čvorovima unutar kvadrata označiti T_1….T_6 .Zbog simetrije

temperaturnog polja, temperature na obje strane središnjeg presjeka su jednake,kao što je označeno na slici 11.2.2



Slika 11.2.2 Prostorni raspored temperatura u presjeku šipke radi proračuna metodom konačnih razlika

Slika pokazuje da će se temperaturno polje u razmatranom slučaju moći odrediti pomoću 6 algebarskih jednadžbi.Podloga za postavljanje jednadžbi je relacija (11.2.1).

Budući da matrica, za koju će trebati odrediti inverziju, mora biti imati jednak broj redova i stupaca jednadžbe treba pisati tako da svaka sadrži sve tražene temperature (T_1 do T_6).

$-4T_1+2T_2+T_3+0T_4+0T_5+0T_6=-300$

$T_1-4T_2+0T_3+T_4+0T_5+0T_6=-400$

$T_1+0T_2-4T_3+2T_4+T_5+0T_6=0$

$0T_1+T_2+T_3-4T_4+0T_5+T_6=-100$

$0T_1+0T_2+T_3+0T_4-4T_5+2T_6=-100$

$0T_1+0T_2+0T_3+T4+T_5-4T_6=-200$

Na temelju gornjih jednadžbi možemo korištenjem matrica provesti proračun temperatura $T_1 \ldots T_6$. Rezultat je,

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}^{-1} x \begin{vmatrix} -300 \\ -400 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \\ -200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 205{,}375 \\ 185{,}714 \\ 150 \\ 137.5 \\ 119{,}643 \\ 114{,}286 \end{vmatrix}$$

Tražene temperature u sredini presjeka T_1,T_3 i T_5 su dakle oko 205 150 i 119 K.

Analitičko rješenje pomoću relacije (11.1.2.38) s 10 članova reda u razvoju funkcije daje kao rezultat proračuna istih temperatura vrijednosti θ=T-100 = 108 , 50, 19 K. Rezultati su praktički identični onima kod numeričkog rješenja, osim u točki koja je najbliža izvoru topline (tj najbliža toploj stjenci).Primjer pokazuje da numerički postupak,posebno kada očekivani gradijent temperature nije velik, možemo primijeniti s dovoljnom točnošću, čak i uz odabir relativno velikih prostornih intervala.

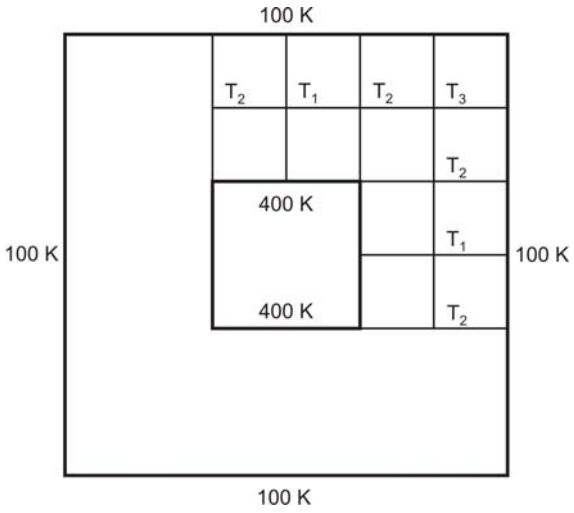
Primjer 11.2.2

Betonski kvadratni dimnjak ima vanjsku stranicu dužine 36 cm i stranicu kvadratnog dimnog kanala 12 cm.Temperatura vanjske stjenke je 200 K a dimnog kanala 400 K.Kakve su temperature u unutrašnjosti stjenke dimnjaka?

Rješenje:

Definirati ćemo prostorni raspored temperatura unutar stjenke kanala sukladno slici 11.2.3.

Uz navedeni raspored elementarnih volumena i zadanih temperatura stjenke dimnjaka (dakle uz primjenu graničnih uvjeta prve vrste) te zbog činjenice da je radi simetrije dovoljno proračunati samo četvrtinu presjeka dimnjaka, proračun se može ograničiti samo na određivanje na slici označenih temperatura T_1,T_2 i T_3.



Slika 11.2.3 Prostorni raspored temperatura unutar stjenke dimnjaka

Odgovarajući sustav algebarskih jednadžbi je,

$-4T_1+2T_2+0T_3=-500$

$T_1-4T_2+T_3=-500$

$0T_1+2T_2-4T_3=-200$

Rješenjem prikazanom u matričnom obliku,

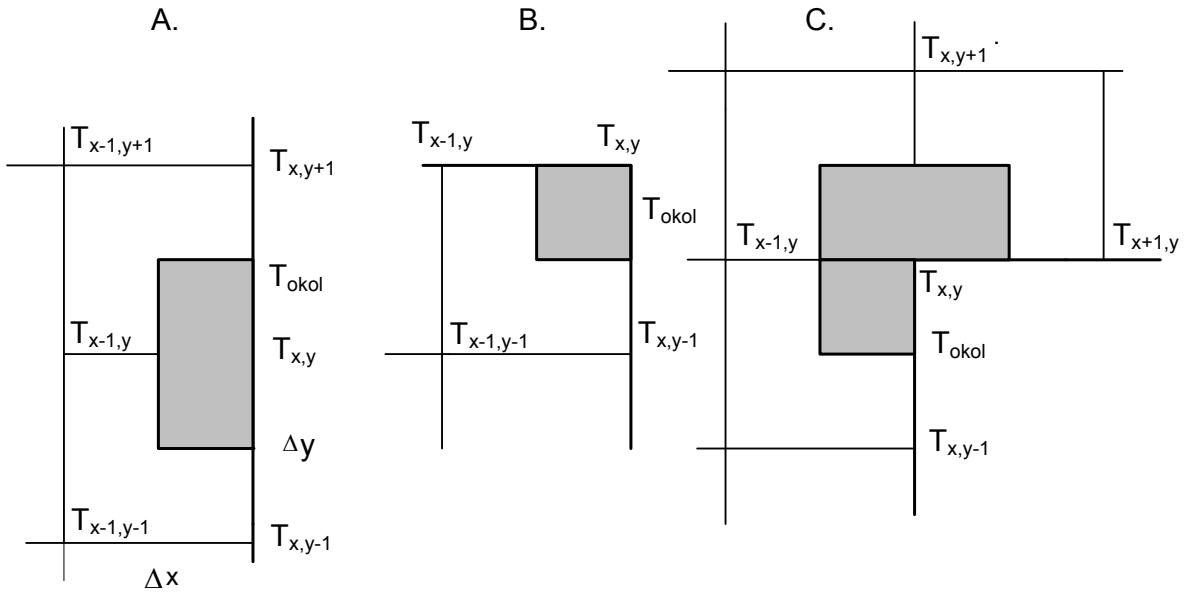
$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}^{-1} \text{x} \begin{vmatrix} -500 \\ -500 \\ -200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 237{,}5 \\ 225 \\ 162{,}5 \end{vmatrix}$$

Temperature T_1 i T_2 su bliske dok je temperatura T_3 osjetljivo niža.

Primjena numeričkog postupka kod dvodimenzionalnog vođenja topline uz granične uvjete treće vrste.

Kod rješavanja praktičkih problema vezanih uz vođenje topline najčešće se kao granični uvjet zadaje temperatura okoliša (a ne temperatura površine tijela) i koeficijent prijelaza topline s površine tijela na okoliš.Temperatura površine tijela je ovisna o prijelazu topline.

U tom je slučaju potrebno je odrediti odnos temperature na površini tijela,temperatura u njegovoj unutrašnjosti i temperatura okoliša.Najčešće se susrećemo sa slučajevima kada je točka na granici tijela i okoline na ravnoj plohi i na vanjskom ili unutarnjem uglu .Na slici 11.2.4 su ti slučajevi označeni s A;B i C.



Slika 11.2.4 Modeli za određivanje temperatura na granici krutog tijela i okoliša u slučaju primjene graničnih uvjeta treće vrste.

Točka na granici krutog tijela i okoliša čiju temperaturu treba odrediti je na slici označena kao $T_{x,y}$ .Temperaturu te točke ćemo odrediti korištenjem bilance topline elementa volumena čiji je presjek na slici označen osjenčanom plohom.Element volumena je odabran tako da na njegovim graničnim plohama možemo izraziti gradijent temperatura i temperaturu prema okolišu pomoću temperatura u čvorovima elementarnih ćelija.Iz tih je razloga širina elementa volumena odabrana $\Delta x/2$ odnosno $\Delta y/2$.

Gradijent temperature na udaljenosti $\Delta x/2$ i $\Delta y/2$ od svakog čvora je određen odnosom razlika temperatura između susjednih čvorova u smjerovima x i y podijeljenim s prostornim udaljenostima Δx odnosno Δy. Temperaturu prema okolišu možemo smatrati jednakom temperaturi u točki $T_{x,y}$ u razmaku $\Delta x/2$ odnosno $\Delta y/2$ od te točke u oba smjera. Dimenziju elementa volumena okomito na plohu x,y (smjer z) ćemo označiti s L.

Na temelju navedenih napomena možemo korištenjem Fourier-ovog i Newton-ovog zakona postaviti jednadžbe bilance topline elemenata volumena za slučajeve A.B i C.

Ravna ploha (slučaj A):

$$-\lambda\frac{\Delta x}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x,y+1}}{\Delta y}-\lambda\frac{\Delta x}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x,y-1}}{\Delta y}-\lambda\Delta yL\frac{T_{x,y}-T_{x-1,y}}{\Delta x}=\alpha\Delta yL(T_{x,y}-T_{okol})$$

Lijeva strana jednadžbe označuje toplinu koja je u element volumena ulazi iz unutrašnjosti tijela a desna toplinu koja je iz tog elementa volumena predana okolišu.Ako odaberemo $\Delta x=\Delta y$,nakon sređivanja slijedi,

$$-T_{x,y}\left(2+\frac{\alpha\Delta x}{\lambda}\right)+T_{x-1,y}+\frac{1}{2}T_{x,y+1}+\frac{1}{2}T_{x,y-1}=-\frac{\alpha\Delta x}{\lambda}T_{okol} \qquad \textbf{(11.2.2)}$$

Jednadžba (11.2.2) pokazuje kako temperatura neke točke na ravnoj plohi koja graniči s okolišom ovisi o temperaturama u tri susjedna čvora i temperaturi okoliša.

Vidi se nadalje da na temperaturu u točki T(x,y) utječu tri temperature grijanog tijela.Temperatura u susjednom čvoru unutar tijela utječe sa punim iznosom a temperature u susjednim čvorovima na graničnoj plohi s polovičnim iznosima.

U slučaju da je koeficijent prijelaza topline prema okolišu veoma malen (tijelo je toplinski izolirano) temperatura T(x,y) postaje neovisna o okolnoj temperaturi i iznosi,

$$T_{x,y} = \frac{T_{x-1,y}}{2} + \frac{T_{x,y+1}}{4} + \frac{T_{x,y-1}}{4}$$

Vanjski ugao (slučaj B):

Bilanca topline za osjenčani element volumena označen na slici 11.2.4 za slučaj B. postaje,

$$-\lambda \frac{\Delta y}{2} L \frac{T_{x,y} - T_{x-1,y}}{\Delta x} - \lambda \frac{\Delta x}{2} L \frac{T_{x,y} - T_{x,y-1}}{\Delta y} = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2} L \left(T_{x,y} - T_{okol}\right)$$

Sređivanjem, uz $\Delta x=\Delta y$, se dobiva,

$$-T_{x,y}\left(1 + \frac{\alpha \Delta x}{\lambda}\right) + \frac{1}{2} T_{x-1,y} + \frac{1}{2} T_{x,y-1} = -\frac{\alpha \Delta x}{\lambda} T_{okol} \qquad \textbf{(11.2.3)}$$

U slučaju toplinski izoliranog tijela temperatura na vanjskom uglju postaje aritmetička sredina dviju temperatura na susjednom čvorovima na vanjskim plohama tijela.Dakle,

$$T_{x,y} = \frac{T_{x-1,y} + T_{x,y-1}}{2}$$

Unutarnji ugao (slučaj C):

Na temelju osjenčanog elementa prikazanog na slici 11.2.4 za ovaj slučaj imamo bilancu topline,

$$-\lambda \Delta x \frac{T_{x,y} - T_{x,y+1}}{\Delta y} - \lambda \Delta y \frac{T_{x,y} - T_{x-1,y}}{\Delta x} - \lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{x,y} - T_{x+1,y}}{\Delta x} - \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{x,y} - T_{x,y-1}}{\Delta y}$$
$$= \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2} \left(T_{x,y} - T_{okol}\right)$$

Sređivanjem i postavkom $\Delta x=\Delta y$ slijedi relacija,

$$T_{x,y}\left(3 + \frac{\alpha \Delta x}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} T_{x+1,y} - \frac{1}{2} T_{x,y-1} - T_{x,y+1} - T_{x-1,y} = \frac{\alpha \Delta x}{\lambda} T_{okol} \qquad \textbf{(11.2.4)}$$

Primjer 11.2.3

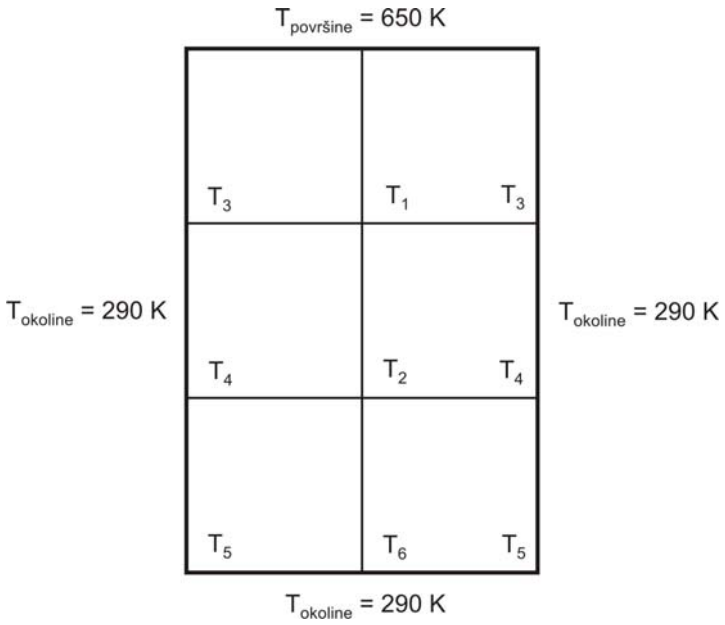
Keramička cijev koja provodi tople plinove ima na vanjskoj strani uzdužna rebra dimenzija 2x3 cm.Jedna od kraćih stranica keramičkog rebra je u kontaktu s grijanim elementom i održava se na temperaturi 1100 K.Ostale tri stranice se hlade zrakom temperature 290 K.

Koeficijent vođenja topline keramike je λ=1,1 W/m,K ,a koeficijent prijelaza topline s površine metala na zrak je 12 W/m^2K.

Kakav je raspored temperatura u unutrašnjosti presjeka keramičkog rebra.Raspored temperatura značajan za određivanje termičkih naprezanja materijala.

Rješenje:

Raspored temperatura u presjeku rashladnog rebra je odabran prema slici 11.2.5.Uzeto je u obzir da su temperature simetrične u odnosu na sredinu presjeka.Radi olakšanja proračuna odabrani su dosta veliki elementi volumena (Δx=0,01 m), što upućuje da će rezultat proračuna označenih temperatura T_1….T_6 biti aproksimativan.



Slika 11.2.5 Prostorni raspored temperatura za proračun metodom konačnih razlika uz granične uvjete treće vrste na hlađene tri plohe rashladnog rebra

Temperature se određuju korištenjem izvedenih relacija:

-T_1 i T_2 relacija (11.2.1)

-T_3,T_4 i T_6 relacija (11.2.2)

-T_5 relacija (11.2.3)

Koeficijenti u navedenim relacijama su:

$$\frac{\alpha\Delta x}{\lambda} = \frac{12x0{,}01}{1{,}1} = 0{,}109$$,iz čega slijedi,

$$2 + \frac{\alpha\Delta x}{\lambda} = 2{,}109 \ , \ 1 + \frac{\alpha\Delta x}{\lambda} = 1{,}109 \text{ , te } \ \frac{\alpha\Delta x}{\lambda} T_{okol} = 31.61$$

Jednadžbe potrebne za proračun temperaturnog polja uz navedene koeficijente postaju,

$-4T_1+T_2+2T_3+0T_4+0T_5+0T_6=-1100$

$T_1-4T_2+0T_3+2T_4+0T_5+T_6=0$

$T_1+0T_2-2,109T_3+0,5T_4+0T_5+0T_6=-581,64$

$0T_1+T_2+0,5T_3-2,109T_4+0,5T_5+0T_6=-31,64$

$0T_1+0T_2+0T_3+0,5T_4-1,109T_5+0,5T_6=-31,64$

$0T1+T_2+0T_3+0T_4+T_5-2,109T_6=-31,64$

Sustav jednadžbi ćemo riješiti pomoću matrice,

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2,109 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & -2,109 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -1,109 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2,109 \end{vmatrix}^{-1} x \begin{vmatrix} -1100 \\ 0 \\ -581,64 \\ -31,64 \\ -31,64 \\ -31,64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 924,49 \\ 801,77 \\ 898,09 \\ 775,90 \\ 707,83 \\ 730,79 \end{vmatrix}$$

Rezultat pokazuje profil temperatura u unutrašnjosti keramičkog rebra.Najniža temperatura je ,prema očekivanju na vanjskom uglju rebra (T_5=707,83 K) a najviša u sredini rebra najbliže korijenu (T_1=924,49 K).

Dvodimenzionalno vođenje topline s unutarnjim izvorom topline

U koliko se radi o dvodimenzionalnom vođenju topline s unutarnjom proizvodnjom topline q_v bilanca topline se temeljem jednadžbe (11.1.23) pretvara u,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q_v}{\lambda}=0 \qquad \textbf{(11.2.5)}$$

U svrhu numeričkog rješenja drugi izvodi temperaturne funkcije u smjerovima x i y mogu zamijeniti izrazima:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\approx\frac{T(x+\Delta x,y)+T(x-\Delta x,y)-2T(x,y)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\approx\frac{T(x,y+\Delta y)+T(x,y-\Delta y)-2T(x,y)}{\Delta y^2}$$

Ako uzmemo prostorne korake u smjerovima x i y jednakima (tj. $\Delta x=\Delta y$). Aproksimacija jednadžbe (11.2.5) postaje,

$$T(x+\Delta x),y + T(x-\Delta x,y) + T(x,y+\Delta y) + T(x,y-\Delta y) - 4T(x,y) + \frac{q_v(\Delta x)^2}{\lambda} \approx 0 \quad \textbf{(11.2.6)}$$

U slučaju promjene graničnih uvjeta treće vrste (što je najčešći slučaj) možemo se poslužiti ranijim razmatranjima takvog slučaja .Razlika je jedino u količini ulazne topline u elemente prikazane slikom 11.2.4.Treba naime uzeti o obzir da se u osjenčanim površinama na slici proizvodi unutarnja energija. U slučaju kada je granična površina na ravnoj plohi proizvedena toplina u elementarnom volumenu jedinične dužine iznosi $q_v L\Delta x\Delta y/2$,a kada je na vanjskom uglu $q_v L\Delta x\Delta y/4$.

Bilanca topline za ravnu plohu time postaje,

$$-\lambda\frac{\Delta x}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x,y+1}}{\Delta y} - \lambda\frac{\Delta x}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x,y-1}}{\Delta y} - \lambda\Delta yL\frac{T_{x,y}-T_{x-1,y}}{\Delta x} + \frac{q_v L\Delta x\Delta y}{2} =$$
$$\alpha\Delta yL(T_{x,y}-T_{okol})$$

Lijeva strana jednadžbe označuje toplinu koja je u element volumena ulazi iz unutrašnjosti tijela a desna toplinu koja je iz tog elementa volumena predana okolišu.Ako odaberemo $\Delta x=\Delta y$,nakon sređivanja slijedi,

$$-T_{x,y}\left(2+\frac{\alpha\Delta x}{\lambda}\right) + T_{x-1,y} + \frac{1}{2}T_{x,y+1} + \frac{1}{2}T_{x,y-1} = -\frac{q_v(\Delta x)^2}{2\lambda} - \frac{\alpha\Delta x}{\lambda}T_{okol} \qquad \textbf{(11.2.7)}$$

Bilanca topline za vanjski ugao postaje,

$$-\lambda\frac{\Delta y}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x-1,y}}{\Delta x} - \lambda\frac{\Delta x}{2}L\frac{T_{x,y}-T_{x,y-1}}{\Delta y} + \frac{q_v L\Delta x\Delta y}{4} = \alpha\frac{\Delta x+\Delta y}{2}L\left(T_{x,y}-T_{okol}\right)$$

Sređivanjem, uz $\Delta x=\Delta y$, se dobiva,

$$-T_{x,y}\left(1+\frac{\alpha\Delta x}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}T_{x-1,y} + \frac{1}{2}T_{x,y-1} = -\frac{q_v(\Delta x)^2}{4\lambda} - \frac{\alpha\Delta x}{\lambda}T_{okol} \qquad \textbf{(11.2.8)}$$

Primjer 11.2.4

Bakrena sabirnica dimenzija 20x40 mm i toplinske vodljivosti 375 W/m,K položena u zraku provodi električnu struju gustoće 2 A/mm^2 .Temperatura zraka je 305 K a koeficijent prijelaza topline s površine sabirnice na zrak 8 W/m^2/K. Kolika je maksimalna temperatura sabirnice u kolika temperatura na njezinoj površini ?

Rješenje:

Specifični električni otpor bakra u funkciji temperature se može odrediti iz relacije,

$\rho = 0{,}0172(1+0{,}0039(T-293))\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$

Budući da je srednja temperatura bakra T unaprijed nepoznata pretpostaviti ćemo da će biti 50 K iznad okoline tj. 355 K (u koliko račun pokaže znatno odstupanje od te vrijednosti treba izraditi korekciju).

Iz tih vrijednosti slijedi ρ = 0,021 Ω mm^2/m.

Proizvedena toplina u sabirnici iznosi,

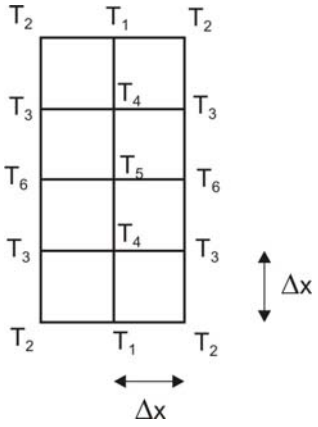
$$q_v = 10^6 \rho \left(\frac{I}{S} \right)^2 \quad W/m^3$$

gdje je I jakost struje A a S presjek sabirnice u mm^2.

Na temelju zadanih vrijednosti se dobiva, $q_v = 8{,}4x10^4$ W/m^3

Daljnji se postupak temelji na numeričkom postupku koji traži definiranje prostornih razmaka i korištenje izraza (11.2.6) do (11.2.8).

Na temelju zadanih veličina dobivamo ovisnost proizvedene topline o gustoći struje.



Slika 11.2.6 Prostorni raspored temperatura unutar sabirnice

Odabrati ćemo prostorni korak Δx=1cm=0,01 m i odrediti konstante :

$$a = q_v \frac{\Delta x^2}{\lambda} = 0{,}0224 \qquad b = \alpha \frac{\Delta x}{\lambda} = 2{,}13x10^{-4}$$

$c = bT_{0k} = 0{,}065$

Na temelju navedenih podataka,slike 11.2.6 te izraza (11.2.6),(11.2.7) i (11.2.8.) možemo postaviti sustav jednadžbi:

-T1(2+b)+T2+0T3+T4+0T5+0T6=-a/2-c

0.5T1-(1+b)T2+0,5T3+0T4+0T5+0T6=-a/4-c

0T1+0,5T2-T3(2+b)+0T4+0T5+0,5T6=-a/2-c

T1+0T2+2T3-4T4+T5+0T6=-a

0T1+0T2+0T3+2T4-4T5+2T6=-a

0T1+0T2+T3+0T4+T5-(2+b)T6=-a/2-c

Jednadžbe ćemo rješiti matričnim računom:

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(2+b) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -(1+b) & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -(2+b) & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(2+b) \end{vmatrix}^{-1} x \begin{vmatrix} -a/2-c \\ -a/4-c \\ -a/2-c \\ -a \\ -a \\ -a/2-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 375 \\ 374{,}993 \\ 375{,}004 \\ 375{,}011 \\ 375{,}015 \\ 375{,}007 \end{vmatrix}$$

Račun pokazuje da su temperaturne razlike u unutrašnjosti presjeka sabirnice minimalne.Razlika između temperature u sredini (T_5) i one na uglu (T_2) iznosi svega 0,022 K. Razlog tome je visoka toplinska vodljivost bakra i malen koeficijent odvoda topline s površine sabirnice na zrak.

Iz tog je razloga u proračunima ove vrste opravdano zanemariti temperaturne razlike u unutrašnjosti sabirnice i srednju temperaturu njezine površine (koja je vrlo bliska svim temperaturama u presjeku sabirnice) odrediti iz bilance topline postavkom.

$$q_v P = \alpha O(T - T_{ok}),$$

gdje je T srednja temperatura površine sabirnice,P presjek sabirnice , O njezin opseg.Buduće da je u razmatranom slučaju,

$$\frac{P}{O} = \frac{8\Delta x^2}{12\Delta x} = \frac{2\Delta x}{3},$$

Možemo pisati,

$$T \approx T_{0k} + \frac{2q_v \Delta x}{3\alpha} = 305 + \frac{2x8{,}4x10^4 x0{,}01}{3x8} = 375 \text{ K}$$

Što je gotovo identično s temperaturama sabirnice dobivenim matričnim proračunom.

Numeričko rješenje vođenja topline u nestacionarnom stanju

Vođenje topline u nestacionarnom stanju je značajno kod analize toplinskih pojava,posebno u nuklearnim reaktorima, jer određuje ne samo konačne vrijednosti temperatura unutar materijala već i brzinu promjene tih temperatura. Te su analize posebno značajne kod analiza sigurnosti postrojenja.

Primjena numeričkih metoda kod rješavanja problema vođenja topline u nestacionarnom stanju je neophodna. Samo se neki najjednostavniji problemi ovog tipa mogu riješiti analitički. Takva su rješenja obično, iako sadrže niz pretpostavki i pojednostavljenja, previše komplicirana za praktičnu upotrebu.

Ako pak u račun uvedemo realistične uvjete (kao što je na primjer ovisnost koeficijenta vođenja topline o temperaturi), analitičko rješenje vođenja topline u nestacionarnom stanju postaje nemoguće.

Kao primjer nestacionarnog vođenja topline u materijalu sa temperaturno ovisnim parametrima materijala, razmotriti ćemo kompleksan slučaj radijalnog vođenja topline u nestacionarnom stanju kroz gorivu šipku nuklearnog reaktora s temperaturno ovisnim parametrima materijala.

Relacija od koje moramo poći je bilanca topline u nestacionarnom stanju (jednadžba 11.1.20). Akumulirana toplina se mijenja kada proizvodnja topline u kontrolnom elementu nije uravnotežena

s gubitkom topline. Ta promjena po jedinici volumena i jedinici vremena određena je članom $c\rho\frac{\partial T}{\partial t}$, gdje je c specifična toplima, a ρ gustoća materijala.

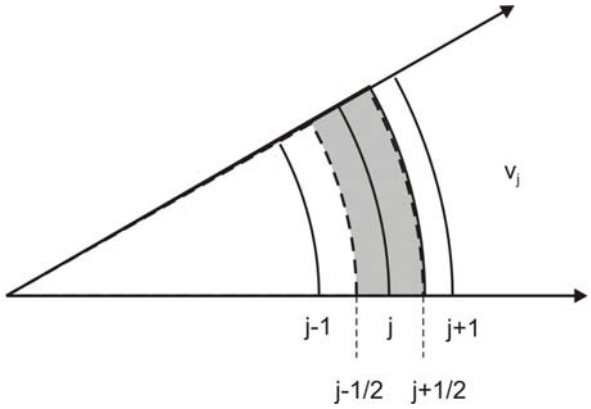
Osnovna relaciju nestacionarnog vođenja topline u krutim tvarima je dana jednadžbom 11.1.20 u obliku,

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda gradT) + q_V .$$

Kod postupka koji slijedi pretpostaviti će se da su koeficijent vođenja topline λ,gustoća materijala ρ i specifična toplina c ovisni o temperaturi.

Relacija nema oblik na koji možemo neposredno primijeniti numerički metodu rješavanja postavljene zadaće (nestacionarni prijelaz topline u gorivoj šipci).

Da bismo je preuredili za postavljanje algoritma numeričkog rješavanja moramo se vratiti na njen izvod, koji je zasnovan na bilanci topline u krutoj tvari i postaviti direktno bilancu topline elementarnog volumena (za ovaj slučaj prstena) čiji je segment, prema slici 11.2.7, označen polumjerima j-1/2 i j+1/2. Vrijeme ćemo također podijeliti na konačne intervale i označiti ih s Δt_i (i=1, 2,...).



Slika 11.2.7 Segment gorivne šipke

Bilanca topline sastoji se od:

- topline koja ulazi u prsten

$$\lambda_{[T(j-1,j),i-1]}A_{j-1,j}\frac{T_{j-1,i-1}-T_{j,i-1}}{r_j - r_{j-1}}$$

- topline koja izlazi iz prstena

$$\lambda_{[T(j,j+1),i-1]}A_{j,j+1}\frac{T_{j,i-1}-T_{j+1,i-1}}{r_{j+1} - r_j}$$

- topline koja se akumulira u prstenu

$$V_j(c\rho)_{[T(j,i-1)]}\frac{T_{j,i}-T_{j,i-1}}{\Delta t_i}$$

- topline koja se generira u prstenu j po jedinici volumena i jedinici vremena nakon vremenskog koraka i-1.

$q_{vj,i-1}$

gdje je

V_j volumen zone j (između polumjera j-1/2 i j+1/2)

$(c\rho)_{(T(j,i-1)]}$ volumni kapacitet materijala po jedinici volumena u zoni j, na temperaturi T koja nastaje nakon vremenskog koraka i-1

$\lambda_{(T(j,j-1,i-1)}$ koeficijent vođenja topline UO_2 za srednju temperaturu u zoni između polumjera j i j-1 nakon vremenskog koraka i-1.

$T_{j,i}$ temperatura u zoni j i nakon vremenskog koraka i

$A_{j-1,j}$ srednja površina prijelaza topline po jedinici dužine između polumjera od j i j-1 prostornih koraka.

Δt_i vremenski korak

r_j polumjer jednak j prostornih koraka

Koristeći navedene izraze možemo definirati bilancu topline u prstenu između polumjera j-1/2 i j+1/2 relacijom

$$V_j (c\rho)_{[T(j,i-1)]} \frac{T_{j,i} - T_{j,i-1}}{\Delta t_i} = q_{vj,i-1} + \frac{T_{j-1,i-1} - T_{j,i-1}}{R_{j-1,j}} - \frac{T_{j,i-1} - T_{j+1,i-1}}{R_{j,j+1}}. \quad \textbf{(11.2.9)}$$

Sa $R_{j-1,j}$ označen je toplinski otpor unutar šipke između polumjera j-1 i j. Toplinski otpor može se izračunati iz relacije

$$\frac{1}{R_{j-1,j}} = \frac{\lambda_{[T(j-1,j)i-1]} A_{j-1,j}}{r_j - r_{j-1}} \quad \textbf{(11.2.10)}$$

Jednadžba (11.2.9) određuje temperaturu u vremenskom intervalu i i polumjeru j u funkciji temperatura u vremenskom intervalu i-1 na polumjerima j-1, j, i j+1 i proizvedene topline u zoni j.

Polumjer gorive šipke treba podijeliti u N prostornih intervala (j=1,..., N-1), čime dobivamo sustav od N-1 jednadžbi koje povezuju prostornu raspodjelu temperaturu unutar gorive šipke u vremenskom intervalu i sa prostornom raspodjelom temperature u vremenskom intervalu i-1. Proračun počinje sa vremenskim intervalom i=1, koji se odnosi na raspodjelu temperature u stacionarnom stanju.

Na temelju relacije (11.2.1.44) možemo eksplicitno izraziti temperaturu u vremenskom intervalu i u funkciji temperature,proizvedene topline i parametara materijala u vremenskom intervalu i-1

$$T_{i,j} = \frac{q_{vj,i-1} \Delta t_i}{V_j (c\rho)_{[T(j,i-1)]}} + m_{j-1,j} T_{j-1,i-1} + m_{j,j+1} T_{j+1,i-1} + (1 - m_{j-1,j} - m_{j,j+1}) T_{j,i-1} \quad \textbf{(11.2.11)}$$

gdje je

$$m_{j-1,j} = \frac{\Delta t_i}{V_j (c\rho)_{[T(j,j-1)]} R_{j-1,j}}$$

$$m_{j,j+1} = \frac{\Delta t_i}{V_j (c\rho)_{[T(j,j-1)]} R_{j,j+1}}.$$

Opisana metoda proračuna raspodjele temperatura u gorivoj šipci u nestacionarnom stanju, poznata kao eksplicitna metoda, može dovesti do nestabilnosti u proračunu ukoliko je odabran prevelik vremenski korak.

Prvi prostorni interval počinje u osi šipke (j-1=0), a posljednji interval završava na zazoru između gorive šipke i obloge [R_z=(j+1)Δr], za koji toplinski otpor poprima vrijednost

$$\frac{1}{R_{j,z}} = \alpha_z A_{j,z},$$

gdje je α_z koeficijent prijelaza topline zazora.

Pri izradi programa za rješavanje jednadžbi nestacionarnog vođenja topline u gorivoj šipci na elektroničkom računala treba uzeti u obzir empiričke izraze za ovisnost koeficijenta vođenja topline i volumnog toplinskog kapaciteta materijala nuklearnog goriva o temperaturi.

11.3 Protok fluida

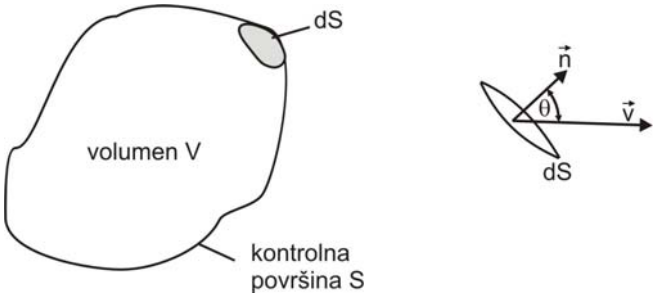
Hlađenje nuklearnih reaktora, a i svih drugih aparata u energetici i industriji u kojima se proizvodi toplina, ostvaruje se protokom fluida. Kada se radi o tekućinama, onda je to najčešće voda, a kada je u pitanju plin onda je to obično zrak. Za hlađenje nuklearnih reaktora se pored vode (koja je daleko najraširenija), u nekim slučajevima koriste tekući metali i plinovi (CO_2 i helij).

Poznavanje zakonitosti protoka fluida neophodno je za analizu hlađenja nuklearnog reaktora ili bilo kojeg drugog toplinskog aparata.

Jednadžba održanja mase

Jednadžba održanja mase fluida u gibanju je jedan od osnovnih zakona hidromehanike.

Zamislimo prema slici 11.3.1, unutar prostorno neograničenog fluida u gibanju, volumen V zatvoren unutar kontrolne površine S.



Slika 11.3.1 Kontrolni volumen i kontrolna površina u fluidu

Zakon o održanju mase formulira očiglednu postavku da promjena mase unutar zatvorenog volumena mora biti jednaka razlici mase koja u njega ulazi i mase koja iz njega izlazi.

Promjenu mase unutar volumena u jedinici vremena može se prikazati integralom

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_V \rho dV,$$

gdje je ρ gustoća fluida.

Ako je $\vec{n}$ jedinični vektor okomit na površinu F, tada se bilanca izmjene mase (razlika ulazne i izlazne mase), dakle promjena mase u volumena fluida sadržanog unutar površine F, može opisati površinskim integralom po toj površini

$$\oint_F \rho \vec{v} \vec{n} dF \qquad \textbf{(11.3.1)}$$

gdje je sa $\vec{v}$ označen vektor brzine fluida.

Dopušteno je dakle pisati

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV = \oint_F \rho \vec{v} \vec{n} dF \,,$$

Prema teoremu Gaussa i Ostrogradskog

$$\oint_F \rho \vec{v} \vec{n} dF = \oint_V div\left(\rho \vec{v}\right) dV \,.$$

Budući da jednadžba vrijedi za proizvoljni volumen V, možemo izostaviti znak integrala i pisati

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = div\left(\rho \vec{v}\right). \qquad \textbf{(11.3.2)}$$

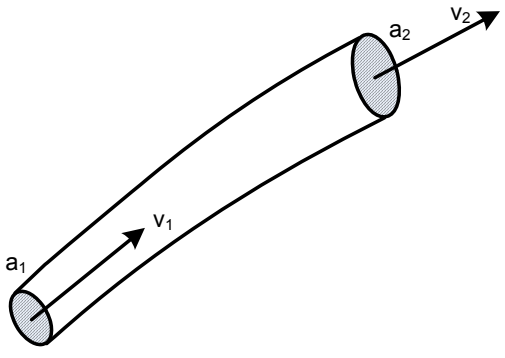
Dobivena relacija je opći oblik zakona o održanju mase fluida u gibanju. Za stacionarno stanje ona se svodi na

$$div\left(\rho \vec{v}\right) = 0 \qquad \textbf{(11.3.3)}$$

Kod nestišljivih fluida gustoća je konstantna, pa imamo

$$div\, \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \,.$$

Kao posebno jednostavan slučaj možemo, prema na slici 11.3.2, razmotriti fluid koji struji u takozvanoj strujnici.



Slika 11.3.2 Strujnica fluida

Strujnica je zamišljena cijev unutar strujnog polja čiji presjek, okomito na smjer strujanja brzine fluida, iznosi a. Tekućina se kroz stjenke strujnice ne miješa s okolinom.

Ako u takvoj strujnici promatramo dva presjeka a_1 i a_2 u kojima su brzine fluida v_1 i v_2, i na nju primijenimo relaciju (11.3.1) za stacionarno stanje (integral po zatvorenoj površini je jednak nuli), proizlazi

$$\oint_F \rho \vec{n}\vec{v} dF = \rho_1 a_1 v_1 - \rho_2 a_2 v_2 = 0 \,. \qquad \textbf{(11.3.4)}$$

Za svaki volumen strujnice između dva presjeka a, ulazna protočna masa sa $\rho_1 v_1 a_1$ (kg/s), jednaka je izlaznoj masi $\rho_2 v_2 a_2$ (kg/s). Znači, u svakom presjeku strujnice, okomitom na smjer brzine fluida v, vrijednost produkta ρva ostaje ista odnosno

$$\rho va = const. \qquad \textbf{(11.3.5)}$$

Primjer 11.3.1

Koliko se mijenja kinetička energija vodene struje koja iz tanke cijevi utječe u cijev četiri puta većeg presjeka?

Rješenje:

Prema jednadžbi održanja mase (relacija 11.3.5) za konstantnu gustoću mora vrijediti

$$v_1 a_1 = v_2 a_2$$

Budući da je $a_2=4a_1$, to će brzina strujanja u širem presjeku biti 4 puta manja.

Kinetička energija određene mase vode kada ulazi iz tanje u deblju cijev mijenja se u odnosu $(v_2/v_1)^2=1/16$.

Izgubljena kinetička energija pretvara se u trenje i vrtloženje tekućine.

Primjer 11.3.2

U nekom cjevovodu konstantnog presjeka struji brzinom 1m/s voda tlaka 2MPa na temperaturi zasićenja. Uslijed ugrijavanja cijevi voda se pretvara u paru. Kolika će biti brzina strujanja suho zasićene pare?

Rješenje:

Iz parnih tablica može se očitati gustoća vode tlaka 2Mpa=20bar na temperaturi zasićenja $\rho_v=849.6 kg/m^3$. Gustoća suho-zasićene pare istog tlaka je $\rho_p=10.05 kg/m^3$.

Iz jednadžbe (11.3.5) slijedi $\rho_v v_v=\rho_p v_p$.

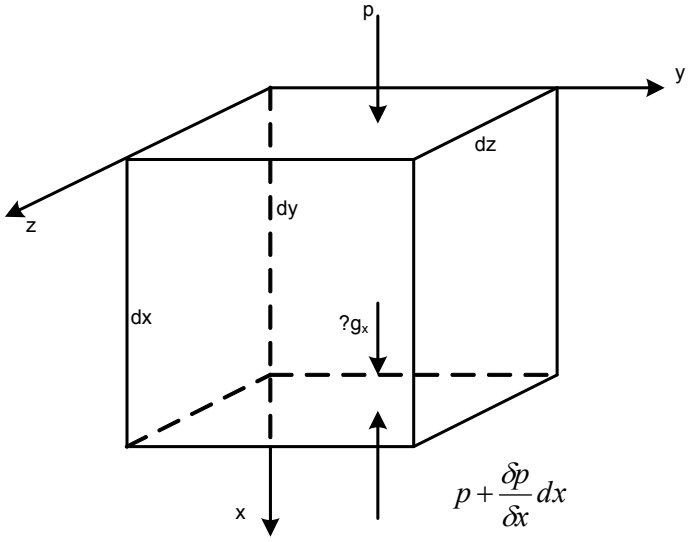
Brzina pare u cjevovodu biti će dakle

$v_p=v_v(\rho_v/\rho_p)=84.5 m/s$.

Očuvanje količine gibanja fluida

Zakon o očuvanju momenta gibanja tekućine, je pored zakona o održanju mase, temeljni zakon hidromehanike. Taj se zakon zasniva na Newtonovom zakonu: Sila je jednaka masi puta ubrzanje.

U cilju analize tog zakona, razmotriti ćemo u pravokutnom koordinatnom sustavu elementarni volumen dV fluida u gibanju i odrediti sile koje na njega djeluju. Silu na element fluida se u općem slučaju može rastaviti na komponente u smjerovima x, y i z.



Slika 11.3.3 Sile na element fluida

Analizirati ćemo, suglasno slici 11.3.3, najprije sile koje na element fluida djeluju u smjeru x.

Sila gravitacije

Komponenta sile gravitacije u smjeru x je g_x. Sila gravitacije koja djeluje na element fluida bit će

$$g_x \rho dV = g_x \rho dx dy dz .$$

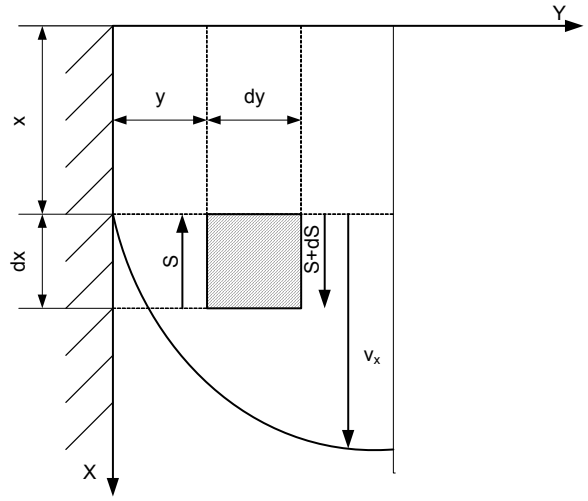
Sila zbog razlike tlaka

Ako se tlak tekućine mijenja u smjeru x, bilancu sila na element volumena tekućine u tom smjeru možemo odrediti kao

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV .$$

Sila zbog unutrašnjeg trenja tekućine

U tekućini koja struji redovito dolazi do razlike brzine strujanja između slojeva tekućine. To je naročito lako uočljivo ako promatramo strujanje tekućine u blizini krute stjenke.



Slika 11.3.4 Sile unutrašnjeg trenja fluida

Prema Newtonovom zakonu sila trenja po jedinici površine koja djeluje između slojeva tekućine koji međusobno proklizavaju je proporcionalna sa promjenom brzine okomito na smjer strujanja fluida (promjena brzine v_x u smjeru y). Dakle

$$s = \mu \frac{dv_x}{dy}. \qquad \textbf{(11.3.6)}$$

Koeficijent μ je dinamički viskozitet tekućine. Ovisan je o prirodi tekućine. Dimenzija dinamičkog viskoziteta je prema definiciji tog faktora u relaciji (11.3.6), kg/(ms). U praksi se često sreće i kinematički viskozitet ν definiran kao μ/ρ. Dimenzija kinematičkog viskoziteta je m^2/s. Podaci o dinamičkom i kinematičkom viskozitetu tekućina mogu se naći u priručnicima iz hidromehanike.

Ako sada, na osnovi relacije (11.3.6) i slike 11.3.4 odredimo bilancu sila na element tekućine dV zbog unutrašnjeg trenja možemo za smjer x pisati

$$\left(s + \frac{ds}{dy} dy \right) dxdz - sdxdz = \frac{ds}{dy} dxdydz = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} dV .$$

Dobiveni izraz dovoljan je ako se brzina v_x mijenja samo u smjeru y. Općenito će se ta brzina mijenjati u svim smjerovima prostora i zbog toga u bilancu sila trenja treba uključiti i utjecaj promjene brzine u smjerovima x i z. Izraz koji opisuje silu trenja na element volumena tekućine ima dakle oblik:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV = \mu \nabla^2 v_x dV . \qquad \textbf{(11.3.7)}$$

Ukupna sila na element fluida u smjeru x

Zbrajanjem svih sila koje djeluju na element volumena dV u smjeru x dobivamo

$$\left(g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \right) dV .$$

Ukupna sila mora biti jednaka produktu mase i akceleracije. Budući da je brzina v_x funkcija prostornih koordinata i vremena tj. v_x=f(t, x, y, z), akceleraciju moramo, prema definiciji G. Stokesa [35], potražiti kao individualnu vremensku derivaciju funkcije v_x, s oznakom $\frac{Dv_x}{dt}$.

Time dobivamo

$$\frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Jednadžba očuvanja momenta gibanja može, na osnovi danih izraza, biti formulirana kao

$$\rho dV \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \left(\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \right) dV ,$$

i u sažetijem obliku

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x .$$

Za smjerove y i z možemo napisati analogne izraze:

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y .$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z .$$

Sve tri jednadžbe mogu se povezati u jednu primjenu vektorske relacije

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - grad\ p + \mu \nabla^2 \vec{v} . \qquad \textbf{(11.3.8)}$$

Jednadžba (11.3.8) je Stokes-Navierova jednadžba za nestišljivi fluid.

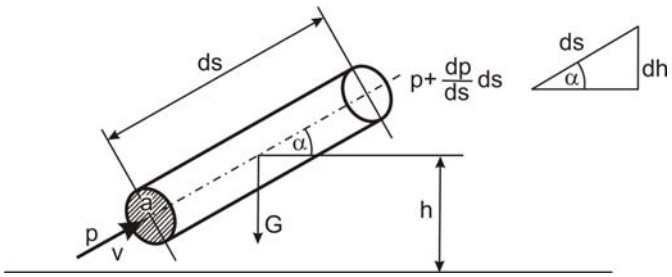
Ako je fluid stišljiv (tj. je plin), u bilancu sila treba uvesti i sile deformacije elementa fluida. U tom je slučaju izvod dosta kompliciran i izvan dometa ove knjige. Izvod rezultira jednim dodatnim članom u izrazu (11.3.8), koji u tom slučaju postaje

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - grad\ p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} grad\ div\, \vec{v} . \qquad \textbf{(11.3.9)}$$

Jednadžba održanja mase nestišljivog fluida (jednadžba 11.3.3.), je pokazala da za takav fluid vrijedi: $div(\vec{v}) = 0$. Posljednji je član u relaciji (11.3.9) za nestišljivi fluid jednak nuli. U slučaju nestišljivog fluida bez unutarnjeg trenja (μ=0) , su posljednja dva člana jednaka nuli.

U praksi jednadžba održanja momenta gibanja služi kao podloga za proračun odnosa brzine strujanja fluida i promjene tlaka u nekom sustavu.

Razmotrit ćemo veoma jednostavan primjer strujanja nestišljivog fluida bez unutarnjeg trenja u stacionarnom stanju kroz neku strujnicu u smjeru koji određuje prostorni vektor $\vec{s}$, kao što je to ilustrirano slikom 11.3.5.



Slika 11.3.5 Djelovanje sila na element strujnice fluida

Zakon održanja momenta gibanja fluida za takav se slučaj svodi na

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - grad\ p , \qquad \textbf{(11.3.10)}$$

gdje je

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = v_x \frac{dv}{dx} + v_y \frac{dv}{dy} + v_z \frac{dv}{dz} = \vec{v} \frac{d\vec{v}}{ds} .$$

Skalarni produkt vektora $\vec{v}\frac{d\vec{v}}{ds}$ može se pisati kao $v\frac{dv}{ds}$, jer se njihovi smjerovi poklapaju.

Smjer vektora sile gravitacije je vertikala, pa će komponenta sile u smjeru s biti $g\cos(90+\alpha) = -g\sin(\alpha) = -g\frac{dh}{ds}$.

Gradijent promjene tlaka u smjeru s je $\frac{dp}{ds}$.

Jednadžba (11.3.10) može se razmatrani slučaj pisati u obliku

$$v\frac{dv}{ds} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} + g\frac{dh}{ds} = 0\,. \qquad \textbf{(11.3.11)}$$

Relacije (11.3.11) je poznata kao Bernoullijeva jednadžba u diferencijalnom obliku.

Jednadžbu možemo integrirati između dva presjeka strujnice, koje ćemo označiti s 1 i 2, pa dobivamo

$$\int_1^2 v dv + \frac{1}{\rho}\int_1^2 dp + g\int_1^2 dh = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(h_2 - h_1) = 0\,.$$

Znači,

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 = \frac{v_1^1}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1\,, \qquad \text{ili za bilo koji presjek,}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = const.$$

Dobili smo Bernoullijevu jednadžbu u uobičajenom obliku.

Primjene Bernoullijeve jednadžbe

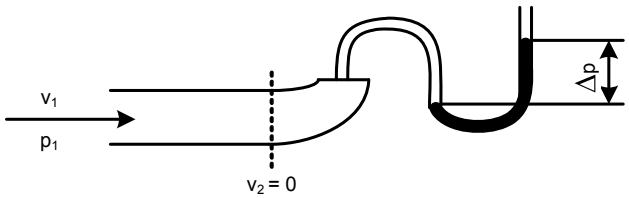
Iako je Bernoullijeva jednadžba izvedena uz pretpostavku da se radi o nestišljivom fluidu bez unutarnjeg trenja, postoji niz primjera njezine praktične primjene.

Mjerenje protoka tekućina

Jedna od češćih primjena Bernoullijeve jednadžbe, na koju ćemo se i ovdje osvrnuti, je mjerenje protoka fluida. Mjerenje protoka zasniva se na korištenju djelomične ili potpune pretvorbe kinetičke energije fluida u strujanju u potencijalnu energiju razlike tlaka.

Pitotova cijev

Pitotova cijev je naprava koja može poslužiti za mjerenje brzine protoke fluida u cijevima i kanalima. Princip djelovanja naprave je vidljiv iz slike 11.3.6. Pitotovu cijev treba uroniti u cijev ili kanal (najlakše u otvoreni kanal) u kojemu je brzina strujanja fluida v_1 i tlak fluida p_1. U cijevi, pomoću stupca tekućine mjerimo razliku tlaka p_2-p_1.



Slika 11.3.6 Pitotova cijev

Za horizontalno postavljenu cijev je $h_1=h_2$, pa možemo pisati Bernoullijevu jednadžbu u obliku

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}.$$

Budući da je brzina fluida unutar cijevi jednaka nuli ($v_2=0$), to se brzina fluida v_1 dobiva iz izraza

$$v_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2-p_1)}. \qquad \textbf{(11.3.12)}$$

Jedinica za tlak

Jedinica za tlak u SI sustavu jedinica je paskal.

Paskal je definiran kao tlak koji proizvodi sila od jednog njutna po kvadratnom metru.

Primjer 11.3.3

U Pitotovoj je cijevi, prema slici 11.3.6, uronjenoj u otvoreni kanal u kojem struji voda, izmjeren stupac vode od 10cm. Kolika je brzina vode u kanalu?

Rješenje

Stupac vode visine h odgovara razlici tlaka između unutrašnjosti Pitotove cijevi i kanala od ρgh paskala

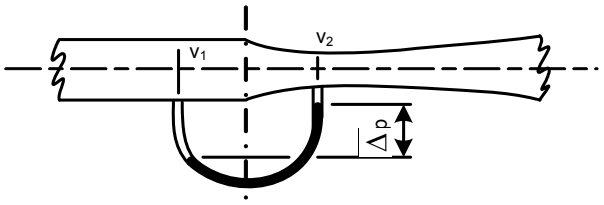
Ako uzmemo da je gustoća vode približno 1000kg/m^3, visina stupca vode od 0.1m odgovara razlici tlaka od 981Pa.

Brzina vode u kanalu iznosi

$$v_1=\sqrt{\frac{2*981}{1000}}=1.4 \qquad m/s.$$

Venturijeva sapnica

Venturijeva sapnica je precizna naprava kojom se mjere protoci tekućina u industrijskim postrojenjima. U nuklearnim elektranama tipa PWR Venturijeva sapnica upotrebljava se u tzv. sekundarnoj kalorimetriji, koja je osnova za baždarenje termičke snage nuklearnog reaktora. Princip djelovanja Venturijeve sapnice je prikazan slikom 11.3.7.



Slika 11.3.7 Venturijeva sapnica

Mjerenje protoka Venturijevom sapnicom zasniva se na mjerenju razlike tlaka u tekućini koja struji kroz poznate presjeke. Bernoullijeva je jednadžba za horizontalno smještenu ($h_1=h_2$) Venturijevu sapnicu:

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}.$$

S druge strane, zakon održanja mase fluida uvjetuje

$v_1A=v_2a$, ili, $\quad v_2=v_1\frac{A}{a}$,

gdje su A i a presjeci ulaznog i najužeg dijela Venturijeve sapnice.

Iz navedenih relacija lako se dobiva izraz za brzinu strujanja fluida u ovisnosti o razlici tlaka u Venturijevoj sapnici

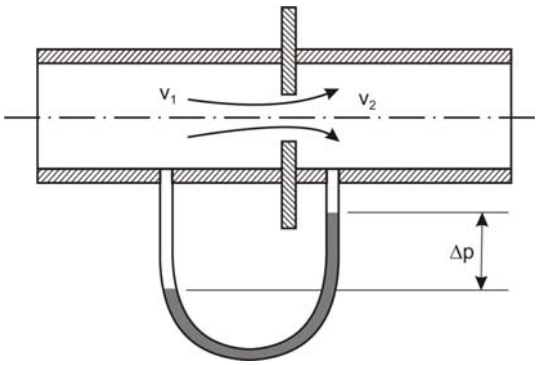
$$v_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{(p_1-p_2)}{(A/a)^2-1}}\quad m/s\,. \qquad \textbf{(11.3.13)}$$

Volumni protok fluida kroz Venturijevu sapnicu ulaznog presjeka A možemo odrediti kao $W=Av_1$.

Ne treba smetnuti s uma da Bernoullieva jednadžba pretpostavlja strujanje bez trenja. Zbog toga treba Venturijevu sapnicu izvesti pažljivo da se trenje tekućine u njoj svede na minimum. Posebno je važna izvedba difuzora, kojim treba smanjiti gubitak tlaka zbog vrtloženja tekućine. Tlak tekućine bi u se idealnom slučaju nakon difuzora trebao vratiti na iznos prije sapnice. U praksi kod upotrebe relacije (11.3.14) moramo računati s nekim korekcijskim faktorom. Taj se faktor kod dobro izvedenih sapnica kreće između 0.98 i 0.99.

Prigušnica

Prigušnica je jednostavna naprava koja se u industriji široko primjenjuje za mjerenje protoka tekućina. Sastoji se iz pločice s kalibriranim koncentričnim otvorom manjim od promjera cijevi, koja se ugrađuje u cjevovod (slika 11.3.8).



Slika 11.3.8 Prigušnica

Pad tlaka na prigušnici je funkcija protoka. Ako napišemo Bernoullijevu jednadžbu za presjek cijevi prije prigušnice i za sam otvor prigušnice, dobivamo ovisnost protoka i pada tlaka izraženu istom relacijom kao kod Venturijeve sapnice. Međutim kod prigušnice zbog nagle promjene slobodnog presjeka strujanja dolazi do vrtloženja fluida. Vrtloženje dovodi do veće promjene tlaka na prigušnici nego što bi, kod istog protoka, to bio slučaj kod Venturijeve sapnice. Zbog toga, kada upotrebljavamo izraz (11.3.14) za izračunavanje protoka fluida pomoću prigušnice, treba rezultat množiti iskustvenim korekcijskim faktorom prigušnice. Korekcijski faktori C, ovisno o promjeru i izvedbi prigušnice variraju između 0.6 i 0.8. Podaci za korekcijske faktore prigušnice mogu se naći u priručnicima iz hidromehanike.

Izraz kojim treba računati protok fluida kada je na prigušnici izmjeren pad tlaka Δp ima dakle oblik

$$W = CA\sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{(\Delta p)}{(A/a)^2 - 1}} \qquad m^3/s. \qquad \textbf{(11.3.14)}$$

gdje su A i a promjeri cjevovoda i prigušnice.

Primjer 11.3.4

U cjevovod promjera 100mm kroz koji protječe hladna voda(ρ=1000kg/m^3) ugrađena je prigušnica sa otvorom promjera 60mm. Korekcijski faktor prigušnice je 0.65. Na prigušnici je izmjeren pad tlaka od 1500Pa. Koliki je protok vode kroz cjevovod?

Rješenje:

Unutarnji presjek cjevovoda A=7.85*10^{-3}m^3. Odnos A/a iznosi 2.78.

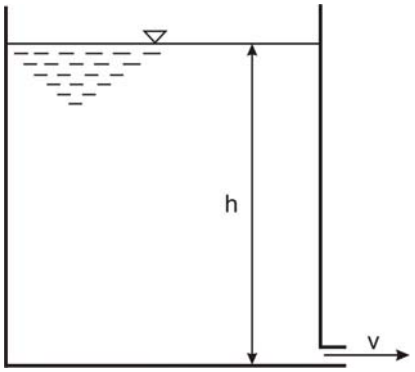
Uvrštenjem zadanih veličina u relaciju (11.3.15) dobiva se

$$W = 7.85*10^{-3}*0.65\sqrt{\frac{2*1500}{1000(2.78^2-1)}} = 3.41*10^{-3} \qquad m^3/s$$

$$= 3.41 \; l/s$$

Brzina istjecanja tekućine iz posude

Zamislimo veliku posudu u kojoj se nalazi tekućina. Ispod površine tekućine, na dubini h, posuda ima maleni otvor kroz koji tekućina istječe. Problem se sastoji u određivanju brzine istjecanja tekućine, iz koje možemo odrediti i vrijeme pražnjenja posude.



Slika 11.3.9 Istjecanje tekućine

Postaviti ćemo, prema slici 11.3.9, Bernuollijevu jednadžbu za presjeke koji odgovaraju slobodnom licu tekućine i otvoru kroz koji ona istječe. Pri tome ćemo uzeti u obzir da je tlak u oba presjeka isti i da je brzina spuštanja razine tekućine u posudi mnogo manja od brzine istjecanja tekućine kroz otvor ($v_1 << v_2$).

Uz navedene primjedbe, primjena Bernoullijeve jednadžbe dovodi do izraza

$$gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 .$$

Ako sada uzmemo u obzir da je $h_1-h_2=h$ i ako brzinu v_2 označimo sa v, dobivamo

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \textbf{(11.3.15)}$$

Relacija (11.3.16) poznata je kao Torricellijeva formula.

U koliko se tekućina u posudi nalazi pod tlakom koji je za Δp veći od tlaka sredine u koju ona istječe, tada u Bernoullijevoj jednadžbi treba uzeti u obzir tu razliku tlaka. Izraz (11.3.16) se time pretvara u

$$v = \sqrt{2\left(gh + \Delta p/\rho\right)} . \qquad \textbf{(11.3.16)}$$

Primjer 11.3.5

Posuda promjera 60cm ispunjena je vodom do visine 80cm. Pri dnu posude nalazi se otvor promjera 1cm. Koliko je vremena potrebno da se posuda isprazni?

Rješenje:

Ako uzmemo u obzir da se visina tekućine u posudi presjeka A mijenja, zbog istjecanja tekućine kroz presjek a, za dh u vremenu dt, možemo postaviti jednakost

$$Adh = vadt = \sqrt{2gh}adt ,$$

ili,

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{2g}\,\frac{a}{A}dt .$$

Jednadžbu možemo integrirati, uzevši u obzir da se visina tekućine u posudi mijenja od h do 0 u vremenu od 0 do t. Vrijeme istjecanja tekućine iz posude dobivamo iz izraza:

$$t = \sqrt{2h/g}\,\frac{A}{a} .$$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti izlazi

$t = 4\,225\sqrt{2 * 0.8/9.81} = 1706\ s$.

Kritična brzina istjecanja fluida

Ovisnost između brzine strujanja fluida i razlike tlaka koja to strujanje podržava je od značaja za rješenje niza praktičkih zadataka u mehanici fluida. Taj problem je od posebnog interesa kod nuklearnih postrojenja, jer je brzina gubitka rashladnog fluida nakon pojave pukotine u rashladnom sustavu reaktora jedno od prioritetnih sigurnosnih pitanja.

Razmotrimo postavljeno pitanje najprije kvalitativno.

Pretpostavimo da je na nekoj posudi u kojoj vlada tlak p_0 nastao otvor kroz koji tekućina istječe u prostor s tlakom p_1. Strujna slika biti će usporediva s strujanjem fluida kroz prigušnicu, prema slici 11.3.8. S povećanjem tlaka p_0, brzina fluida rasti će, prema izrazu (11.3.15) proporcionalno s $(p_0-p_1)^{0.5}$.

Porast brzine istjecanja fluida s porastom razlike tlaka nije, međutim neograničen. Kada brzina istjecanja dosegne brzinu zvuka fluida na tlaku i temperaturi kod mjesta istjecanja, daljnje povećanje razlike tlaka ne dovodi da povećanja brzine istjecanja. Brzina fluida koja odgovara tom stanju je poznata kao kritična brzina, a odgovarajući protok kao kritični protok.

Kritični protok definiran je kao istjecanje fluida brzinom zvuka. Razmotriti ćemo stoga način određivanja te brzine kod jednofaznih fluida i dvofaznih smjesa.

Brzina zvuka u jednofaznim fluidima dobiva se iz relacije $c = \sqrt{K/\rho}$, gdje je K volumenski modul elastičnosti (za vodu temperature 288K iznosi $2.15*10^9$Pa), a ρ gustoća tekućine. Za idealne je plinove $K=\kappa p$ Pa, gdje je κ oko 1.4.

Primjer 11.3.6

Kolika je brzina zvuka u vodi temperature 288K, a kolika u zraku na tlaku 1bar i temperature 298K?

Rješenje.

Gustoća vode temperature 288K je 999.1kg/m^3, pa brzina zvuka iznosi, $c=(2.15*10/999.1)^{1/2}=1447$m/s.

Gustoća zraka na tlaku 1bar=10^5Pa i temperaturi od 298K je približno 1.17kg/m^3, a κ za zrak približno 1.4.

Brzina zvuka u zraku biti će

$c=(1.4*10^5/1.17)^{1/2}=346$m/s.

U analizama sigurnosti nuklearnih energetskih postrojenja posebno mjesto zauzimaju analize istjecanja dvofaznih smjesa (smjese vode i pare). Detaljnije razmatranje istjecanja dvofaznih smjesa je veoma kompleksno i predmet specijalističke literature. Ovdje će se o tome dati samo nekoliko uvodnih napomena.

Kritični protok dvofaznih smjesa obično se odvojeno tretira kod istjecanja kroz duge cijevi, gdje smjesa postiže termodinamičku ravnotežu i kod kratkih cijevi ili sapnica, gdje se takva ravnoteža ne postiže.

Kod istjecanja pothlađene tekućine visokog tlaka u okolinu (takav se slučaj tipično javlja kod nuklearnih reaktora koji su hlađeni vodom pod tlakom), javlja se pojava naglog isparavanja kada tlak vode koja istječe padne ispod tlaka zasićenja. Isparavanje stvara protutlak koji ograničava brzinu istjecanja fluida.

Tong [27] navodi slijedeći izraz za proračun kritičnog masenog protoka pothlađene vode iz otvora na spremniku:

$$G_k = \{2\rho[p_0 - (1-C)p_s]\}^{0.5} \quad kg/m^2 s \qquad \textbf{(11.3.17)}$$

gdje je

ρ gustoća pothlađene tekućine

p_0 tlak tekućine u spremniku

p_s tlak zasićenja tekućine

C empirički koeficijent ovisan o tlaku zasićenja:

p_s [MPa]	1	2	3	4	5	6
C	0.27	0.25	0.23	0.22	0.21	0.20

Primjer 11.3.7

Veliki spremnik sadrži vodu tlaka 5MPa i temperature 474K. Na spremniku nastaje otvor površine 5mm^2. Kolika je kritična brzina istjecanja vode u okolinu?

Rješenje:

Tlak zasićenja vode na temperaturi 474K je oko 1.6MPa, a gustoća vode kod te temperature približno 868kg/m^3.

Koeficijent C na tlaku zasićenja je 0.26.

Kritični specifični maseni protok istjecanja tekućine biti će na osnovi relacije (11.3.18)

$G_k = 8.14 * 10^4$ kg/m^{2}s.

Iz dobivenog rezultata slijedi da kritični maseni protok vode zadanih parametara kroz pukotinu površine 5mm^2 iznosi 0.407kg/s.

11.4 Strujanje tekućina u cijevima i kanalima

Kod analize hidrodinamičkih pojava u energetskim i drugim postrojenjima potrebno je odrediti vezu između brzine strujanja fluida i razlike tlaka koja je potrebna da to strujanje podržava.

Jednadžbe očuvanja momenta gibanja fluida (jednadžbe 11.3.8 i 11.3.9) pokazuju da promjena tlaka fluida nastaje uslijed promjene brzine strujanja (promjena brzine je prisutna i u stacionarnom stanju ako se mijenja presjek strujanja), uslijed promjene elevacije i uslijed trenja (trenje ovisi o viskoznosti). Razmatrati ćemo samo nekompresibilne fluide (tj. tekućine). Kod strujanja izotermne tekućine u zatvorenoj petlji je zbroj doprinosa promjene tlaka tekućine zbog promjene brzine i promjene elevacije jednak nuli, pa preostaje samo dio koji ovisi o unutarnjem trenju. Utjecaj promjene brzine i promjene elevacije na tlak tekućine je sadržan u Bernoullijevoj jednadžbi.

U razmatranju koje slijedi analizirati ćemo promjenu tlaka zbog trenja tekućine. Trenje se javlja kako unutar tekućine tako i na graničnom sloju između tekućine i stjenke cjevovoda.

Utjecaj trenja na promjenu tlaka tekućine je teško riješiti isključivo teoretskom analizom te se krajni rezultat dobiva eksperimentom. Međutim, za interpretaciju i poopćenje eksperimentalnih rezultata, moraju se stvoriti odgovarajuće teoretske podloge. To je potrebno jer eksperimentalni rezultati ne ovise samo o jednoj, nego o nizu međusobno povezanih veličina. Najprikladnije je odrediti vezu, ne između pojedinačnih veličina nego između prikladno formiranih bezdimenzionalnih grupa sastavljenih od tih veličina. Takve veze, obično nazivane korelacije, temelj su za praktične proračune strujanja fluida i prijelaza topline sa krutih stijenki na fluide.

Rješenje postavljenog problema (pad tlaka u fluidu koji protječe cjevovodom) osvijetlit ćemo na dva načina:

-primjenom teorije sličnosti strujanja fluida

-dimenzionalnom analizom

Teorija sličnosti strujanja

Teoriju sličnosti strujanja je postavio Nusselt polazeći od slijedećeg pitanja: Uz koje je uvjete rezultate o strujanju fluida dobivene na nekom modelu postrojenja, odnosno eksperimentalnom uređaju, moguće koristiti za stvarno postrojenje?

Korištenje rezultata moguće je samo ako se držimo odgovarajućih pravila u pogledu odnosa dimenzija eksperimentalnog uređaja i postrojenja, odnosa brzina fluida, stvojstava fluida itd., odnosno ako poštujemo odgovarajuće kriterije sličnosti strujanja u jednom i drugom slučaju.

Kriterij sličnosti je zadovoljen uz istovjetnost strujnog polja u eksperimentalnom uređaju i stvarnom postrojenju, što znači da diferencijalne jednadžbe koje takvo strujno polje opisuju moraju biti identične.

Odnose pojedinih veličina koje se odnose na eksperimentalni model i stvarno postrojenje označit ćemo

-dužine $o_1 = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$

(veličine sa apostrofom se odnose na model, a bez apostrofa na stvarno postrojenje)

-brzine $o_v = \frac{v'}{v}$

-fizikalna svojstva fluida $o_\rho = \frac{\rho'}{\rho}$, $o_\lambda = \frac{\lambda'}{\lambda}$, $o_\mu = \frac{\mu'}{\mu}$, ...

-razlike tlakova $o_p = \frac{\Delta p'}{\Delta p}$

-gravitaciju (odnosno vanjsku silu na fluid) $o_g = \frac{g'}{g}$

Diferencijalna jednadžba kojom je dana brzina fluida u ovisnosti o silama koje djeluju na nestišljivi fluid je jednadžba održanja momenta gibanja (jednadžba 11.3.8):

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - grad(p) + \mu\nabla^2\vec{v} .$$

Ili za jedan smjer (smjer x), u pravokutnom koordinatnom sustavu, u razvijenoj formi i za stacionarno stanje

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right). \quad \textbf{(11.4.1)}$$

Ako sada, smatrajući da je jednadžba (11.4.1) napisana za stvarno postrojenje, želimo napisati istu jednadžbu za eksperimentalni model, moramo uzeti u obzir definirane odnose pojedinih veličina. Time dobivamo

$$\left(\frac{o_\rho o_v^2}{o_l}\right)\rho'\left(v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v_y'}{\partial y'}+v_z'\frac{\partial v_z'}{\partial z'}\right)=\left(o_\rho o_g\right)\rho' g_x'-\left(\frac{o_p}{o_l}\right)\frac{\partial p'}{\partial x'}+$$
$$+\left(\frac{o_\mu o_v}{o_l^2}\right)\mu'\left(\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v_z'}{\partial z'^2}\right) \quad \textbf{(11.4.2)}$$

Jednadžba (11.4.2) postaje identična s jednadžbom (11.4.1) uz uvjet da se koeficijenti uz pojedine članove mogu pokratiti, odnosno ako je ispunjeno

$$\frac{o_\rho o_v^2}{o_l}=o_\rho o_g=\frac{o_p}{o_l}=\frac{o_\mu o_v}{o_l^2}. \quad \textbf{(11.4.3)}$$

Iz dobivenih odnosa možemo neposredno napisati uvjete kojima mora udovoljiti strujanje fluida u modelu i stvarnom postrojenju da bi se sačuvala sličnost strujanja.

Iz prvog i posljednjeg člana jednadžbe (11.4.3) proizlazi

$$\frac{o_v o_\rho o_l}{o_\mu}=1 \text{ ili } \frac{v\rho x}{\mu}=\frac{v'\rho' x'}{\mu'} \quad \textbf{(11.4.4)}$$

a na temelju prvog i trećeg člana

$$\frac{o_p}{o_\rho o_v^2}=1 \text{ ili } \frac{\Delta p}{\rho v^2}=\frac{\Delta p'}{\rho' v'^2} \quad \textbf{(11.4.5)}$$

Rezultat pokazuje da je uvjet sličnosti strujanja identičnost bezdimenzionalnih grupa $\frac{\rho v x}{\mu}$ i $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$ u modelu i stvarnom postrojenju.

Bezdimenzionalna grupa $\frac{\rho v x}{\mu}$ je u hidromehanici poznata kao Reynoldsov broj (ili Reynoldsova značajka), s tim što u većini praktičnih slučajeva strujanja tekućine u cijevima, linearna dimenzija x odgovara ekvivalentnom promjeru cijevi d.

S druge strane bezdimenzionalna grupa $\frac{\Delta p}{\rho v^2}$ poznata kao Eulerov broj (Reynolds i Euler bili su poznati istraživači u području hidrodinamike i strujanja fluida). Reynoldsov i Eulerov broj se skraćeno označuju s Re i Eu.

Iz provedene diskusije možemo zaključiti slijedeće:

-Pad je tlaka (Δp) u tekućini koja struji razmjeran je sa ρv^2.

-U nekom određenom strujnom polju Reynoldsov i Eulerov brojev su međusobno ovisni (sadrže dio istovjetnih parametara, pa promjena jedne značajke uz uvjet očuvanja sličnosti strujanja dovodi do promjene druge), pa je dopušteno pisati

$$Eu = f(\mathrm{Re}) \textbf{ ili } \Delta p = \rho v^2 f(\mathrm{Re}). \qquad \textbf{(11.4.6)}$$

Konačan rezultat, izražen jednadžbom (11.4.6), pokazuje da je pad tlaka u fluidu koji cirkulira nekim cjevovodom ili kanalom proporcionalan s faktorom ρv^2 pomnoženim nekom funkcijom Reynoldsove značajke. Karakter te funkcije može se odrediti jedino eksperimentom.

Dimenzionalna analiza

Sada ćemo isti problem riješiti primjenom dimenzionalne analize i teorema koji je poznat kao Thomsonov teorem, odnosno kao Buchinghamov Π-teorem. Teoremi se zasnivaju na dimenzionalnoj homogenosti jednadžbi koje izražavaju odnose fizikalnih veličina (svaki član jednadžbe mora imati istu dimenziju).

Za razliku od ranije izložene teorije sličnosti, primjena dimenzionalne analize zahtjeva više inženjerskog iskustva u pogledu međusobne ovisnosti parametara tekućine u strujnom polju.

U razmatranom slučaju osnovno je znati o kojim veličinama ovisi pad tlaka tekućine u cjevovodu, bez obzira kakva je ta ovisnost. To saznanje može biti zasnovano na rezultatima eksperimenta ili na teorijskoj analizi.

Analiza pokazuje da se pad tlaka Δp može izraziti kao,

$\Delta p = f(\rho, v, \mu, D, L)$, što se može napisati i u obliku,

$$f(\Delta p, \rho, v, \mu, D, L) = 0, \qquad \textbf{(11.4.7)}$$

gdje su

ρ, v, μ gustoća, brzina i viskozitet tekućine

D, L promjer i dužina cjevovoda.

Thomsonov teorem glasi:

Ako neka fizikalna pojava ovisi o n neovisnih parametara, $f(Q_1Q_2...Q_n)=0$, a ti se parametri mogu mjeriti sa p osnovnih dimenzija (dužina, masa, vrijeme,...), tada je tu istu fizikalnu pojavu moguće prikazati u ovisnosti od n-p bezdimenzionalnih grupa koje su od tih parametara sastavljene. Funkciju $f(Q_1, Q_2,..., Q_n)$ moguće je dakle nadomjestiti s relacijom

$$f(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-p}) = 0. \qquad \textbf{(11.4.8)}$$

Bezdimenzionalne se grupe, naravno, mogu dobiti samo kao kvocijenti dimenzija fizikalnih veličina. Kako će se na optimalan način te grupe formirati ponovo ovisi o iskustvu. Postupak definicije bezdimenzionalnih grupa sastoji se u odabiru p fizikalnih veličina koje ćemo zvati osnovne fizikalne veličine. Broj osnovnih fizikalnih veličina je dakle jednak broju osnovnih mjernih jedinica. Bezdimenzionalne grupe se sada lako formiraju poštujući princip bezdimenzionalnosti svake grupe, tako što će ostale veličine biti dovedene u odnos prema odabranim osnovnim veličinama.

Postupak će biti jasniji ako ga ilustriramo primjenom na postavljeni problem pada tlaka tekućine koja teče kroz cjevovod.

Iz relacije (11.4.7) vidimo da je n=6.

Osnovne dimenzije s kojima možemo izraziti fizikalne veličine, ako dužinu označimo sa L, masu sa M i vrijeme sa T, jesu redom

$$\Delta p\left[\frac{M}{LT^2}\right],\ \rho\left[\frac{M}{L^3}\right],\ \mu\left[\frac{M}{LT}\right],\ v\left[\frac{L}{T}\right],\ D,\ L,[L].$$

Dimenzija dinamičkog viskoziteta μ određena iz definicije te veličine u relaciji (11.3.6).

Sve smo veličine odredili sa tri osnovne dimenzije (M, L, i T), pa je p=3 i n-p=3.

Ovisnost pada tlaka o parametrima tekućine i cjevovoda moći ćemo dakle zamijeniti odnosom triju bezdimenzionalnih grupa, dakle

$$f(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3)=0\,. \qquad \textbf{(11.4.9)}$$

Svrsishodno je (radi dobivanja bezdimenzionalnih grupa poznatog oblika) za tri osnovne fizikalne veličine odabrati ρ, v i D. Bezdimenzionalne grupe ćemo formirati kao odnose preostalih veličina (Δp, μ, L) i arbitrarnih eksponencijalnih funkcija osnovnih veličina. Time dobivamo:

$$\Pi_1=\frac{\Delta p}{\rho^{a_1}v^{b_1}D^{c_1}}$$

$$\Pi_2=\frac{\mu}{\rho^{a_2}v^{b_2}D^{c_2}}$$

$$\Pi_3=\frac{L}{\rho^{a_3}v^{b_3}D^{c_3}}$$

Eksponenti se određuju izjednačenjem dimenzija u brojniku i nazivniku:

$$\frac{M}{LT^2}=\left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_1}\left(\frac{L}{T}\right)^{b_1}L^{c_1}$$

$$\frac{M}{LT}=\left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_2}\left(\frac{L}{T}\right)^{b_2}L^{c_2}$$

$$L=\left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_3}\left(\frac{L}{T}\right)^{b_3}L^{c_3}.$$

Izjednačenjem eksponenata istovjetnih dimenzija na lijevoj i desnoj strani danih relacija neposredno izlazi:

$a_1=1,\ b_1=2,\ c_1=0$

$a_2=1,\ b_2=1,\ c_2=1$

$a_3=0,\ b_3=0,\ c_3=1.$

Tražene bezdimenzionalne grupe jesu:

$$\Pi_1=\frac{\Delta p}{\rho v^2}=Eu,\ \Pi_2=\frac{\mu}{\rho vD}=\frac{1}{\mathrm{Re}},\ \Pi_3=\frac{L}{D}.$$

Primjenjujući relaciju (11.4.9), možemo sada pisati

$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$ ili

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{L}{D} f(\mathrm{Re}). \qquad \textbf{(11.4.10)}$$

Očito je da ovisnost pada tlaka o dužini cjevovoda mora biti linearna, pa je takva i ovisnost bezdimenzionalnih grupa Π_1 i Π_3.

Relacija (11.4.10) je identična sa relacijom (11.4.6) koja je dobivena koristeći princip sličnosti strujanja fluida. U relaciji (11.4.6) nedostaje član $\frac{L}{D}$, jer je polazna diferencijalna jednadžba napisana za jedinični volumen unutar polja strujanja fluida.

Faktor trenja

Uobičajeno je u jednadžbi (11.4.10) funkciju Reynoldsove značajke zamijeniti s parametrom ξ, poznatim kao faktor trenja i definiranim kao $\xi=2f(\mathrm{Re})$. Time ona postaje

$$\Delta p = \xi \frac{L}{D} \frac{v^2 \rho}{2}. \qquad \textbf{(11.4.11)}$$

Relacija (11.4.11) poznata je kao Darcyeva formula.

Podaci za faktor ξ u funkciji Reynoldsovog broja za cijevi raznih hrapavosti sadržani su u poznatim Moodyevim krivuljama, koje se mogu naći u svim priručnicima iz hidromehanike.

U velikoj će nas većini slučajeva interesirati strujanje tekućine kroz glatke cijevi (cijevi normalne komercijalne kvalitete koje se upotrebljavaju u energetskim postrojenjima približno su glatke). Za takve cijevi vrijede odnosi:

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}} \quad \text{za Re<3000 (laminarno strujanje)}$$

$$\xi = \frac{0.184}{\mathrm{Re}^{0.2}} \qquad \text{za Re>3000 (turbolentno strujanje).} \qquad \textbf{(11.4.12)}$$

Cjevovod obično, osim cijevi, sadrži i niz elemenata koji utječu na lokalne promjene tlaka. To su proširenja, suženja, koljena, ventili, prigušnice itd. Promjenu tlaka na svakom od tih elemenata određujemo pomoću izraza

$$\Delta p_i = \varphi_i \frac{v^2 \rho}{2},$$

gdje je φ_i faktor lokalne promjene tlaka za pojedini element cjevovoda.

Podaci o numeričkim vrijednostima faktora φ_i su raspoloživi u priručnicima iz hidromehanike,

Na temelju provedene diskusije možemo napisati izraz za ukupni gubitak tlaka tekućine koja protječe kroz cjevovod koji se sastoji od j ravnih segmenata uz i lokalnih otpora.

Pad tlaka u cjevovodu se određuje iz relacije:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} v_j^2 \xi_j \frac{L_j}{D_j} + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \varphi_i\right] \qquad \textbf{(11.4.13)}$$

Indeks j se odnosi na ravne segmente cjevovoda, a indeks i na lokalne otpore. Brzine fluida v_i mjerodavne za izračunavanje lokalnih otpora su brzine u cijevima ispred tih otpora.

Izraz (11.4.13) pretpostavlja nestišnjivi fluid (ρ=konst.).

Primjer 11.4.1

Kroz horizontalni cjevovod dužine 30m i unutarnjeg promjera 100mm protječe voda konstantne temperature 300K brzinom 1m/s. Cjevovod sadrži tri koljena polumjera 300mm, prigušnicu sa otvorom jednakim 50% površine presjeka cijevi i 2 ventila. Koliki je pad tlaka u tom cjevovodu?

Rješenje

Budući da se radi o cjevovodu konstantnog presjeka brzina protoka fluida je u svim segmentima konstantna ($v_i=v_j=1$m/s).

Lokalni otpori strujanju navedenih elemenata cjevovoda iznose:

-koljeno sa $\frac{r}{R}=3$ φ=0.13

-prigušnica sa $A_1/A_2=0.5$ φ=4.0

-obični ventil φ=3.9.

Za vodu temperature 300K gustoća iznosi 983kg/m^3, a dinamički viskozitet $\mu=4.7*10^{-4}$kg/ms.

Reynoldsov broj $\mathrm{Re}=\frac{vD\rho}{\mu}=\frac{1*0.1*983}{4.7*10^{-4}}=2.09*10^5$.

Strujanje je turbulentno, pa faktor trenja ξ iznosi $0.184\mathrm{Re}^{-0.2}=0.0159$.

Pad tlaka vode u cjevovodu biti će

$$\Delta p=\frac{1*983}{2}\left(0.0159\frac{30}{0.1}+3*0.13+4+2*3.9\right)=8336\ Pa.$$

Pojam lokalnog otpora strujanju fluida ponekad se primjenjuje i na dijelove cijelog energetskog postrojenja, kao što je nuklearni reaktor ili izmjenjivač topline. Tako, primjera radi pad tlaka kroz jezgru reaktora i cijelu reaktorsku posudu u NE Krško dobivamo uz faktore φ_i 10.4 i 18.1.

Ekvivalentni promjer

U dosadašnjim smo razmatranjima pretpostavljali da tekućina struji kroz cijevi kružnog presjeka, smatrajući da se linearna dimenzija u Reynoldsovom broju i relaciji (11.4.11) odnosi na promjer cijevi. Ako presjek cijevi ili kanala nije kružan treba odrediti pod kojim se uvjetima mogu primijeniti spoznaje o sličnosti strujanja i u takvom slučaju.

Nusselt je, na temelju Prandtlove teorije graničnog sloja u okviru svojih analiza prijelaza topline, postavio pojam ekvivalentnog promjera. Rezultat analize pokazuje da se strujanje fluida u kanalu proizvoljnog presjeka može smatrati sličnim strujanju tog fluida u okrugloj cijevi sa ekvivalentnim promjerom d_{ek} definiranim kao

$$d_{ek} = \frac{4F}{O}, \qquad \textbf{(11.4.14)}$$

gdje je

F presjek kanala

O oplakivani opseg.

Potrebno je napomenuti da se kod proučavanja prijelaza topline sa stjenke na fluid, u definiciju ekvivalentnog promjera, uvodi pojam grijanog opsega, koji ne mora biti ekvivalentan oplakivanom opsegu.

Primjer 11.4.2

Tekućina protječe kroz kanale čiji je presjek:

1. kvadratičan sa stranicom a,

2. prstenasti između koncentričnih cijevi polumjera r_1 i r_2

3. okrugao s promjerom D.

Koliki su odgovarajući ekvivalentni promjeri?

Rješenje

1. kod cijevi kvadratičnom presjeka

$$d_{ek} = \frac{4a^2}{4a} = a\,.$$

2. za prstenasti prostor između polumjera r_1 i r_2

$$d_{ek} = \frac{4\left(r_1^2 - r_2^2\right)\pi}{2\left(r_1 + r_2\right)\pi} = 2\left(r_1 - r_2\right) = d_1 - d_2\,.$$

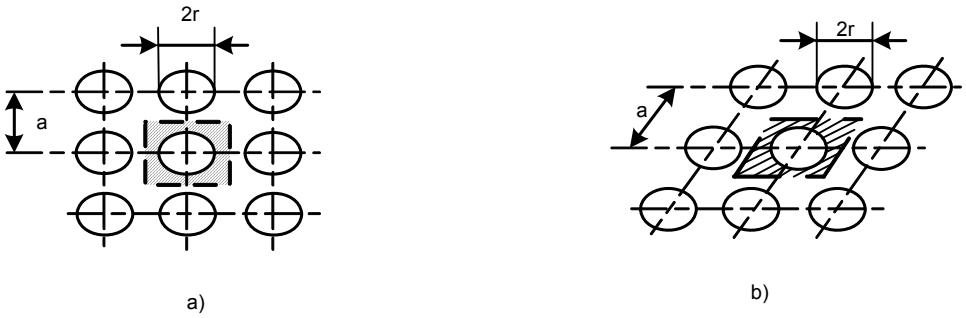
3. za cijev promjera D

$$d_{ek} = \frac{D^2\pi}{D\pi} = D\,.$$

Ekvivalentan promjer okrugle cijevi jednak je stvarnom promjeru cijevi

Ekvivalentan promjer, definiran relacijom (11.4.14), primjenjuje se i na geometrijske oblike koji se veoma razlikuju od zatvorenih kanala. Tako se, primjerice, primjenjuje i na jezgru nuklearnog reaktora gdje rashladni fluid protječe aksijalno kroz snop gorivih šipki.

Šipke su raspoređene u pravilnom kvadratnom ili trokutastom rasporedu. Osi šipki se nalaze na udaljenosti, a na uglovima kvadrata ili vrhovima istostraničnih trokuta (Slika 11.4.1).



Slika 11.4.1 Definicija ekvivalentnog promjera: (a) kvadratna rešetka, (b) trokutasta rešetka

Ako zamislimo da svakoj gorivoj šipki polumjera r u kvadratičnom rasporedu pripada zamišljeni kvadratični kanal stranice, a svakoj gorivoj šipci u trokutastom rasporedu romboidni kanal koji se sastoji iz dva istostranična trokuta sa stranicom a (šrafirane površine na slici 11.4.1), možemo, korištenjem relacije (11.4.14), izraze za ekvivalentni promjer napisati:

-za kvadratičan raspored gorivih šipki

$$d_{ef} = 4\frac{a^2 - r^2\pi}{2r\pi} = 2\left(\frac{a^2}{r\pi} - r\right)$$

-za trokutasti raspored gorivih šipki

$$d_{ek} = 4\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 - r^2\pi}{2r\pi} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a^2}{r\pi} - r\right)$$

Prilikom proračuna faktora trenja upotrebom definiranih ekvivalentnih promjera u reaktorskoj jezgri treba računati sa nešto modificiranim (većim) vrijednostima od onih koje daje relacija (11.4.12).

Kod kvadratnog rasporeda gorivih šipki (taj je raspored najčešći) faktor trenja određen je formulom

$$\xi = 1.76\,\mathrm{Re}^{-0.39}. \qquad \textbf{(11.4.15)}$$

Pad tlaka kod dvofaznog toka

U nuklearnim i drugim energetskim postrojenjima česta je pojava da se unutar cjevovoda, zbog grijanja, tekućina dijelom pretvara u paru. Pojavom dvije faze (tekućina + para) uvjeti strujanja tekućine se mijenjaju, jer promjena gustoće fluida uvjetuje promjenu brzine strujanja. Analiza promjene tlaka u dvofaznoj smjesi je dosta komplicirana i za njezino upoznavanje treba konzultirati specijalističku literaturu. Ovdje će se razmotriti samo neki osnovni aspekti ove pojave.

Model koji se najčešće koristi kod proučavanja pada tlaka u dvofaznoj smjesi zasniva se na njezinoj aproksimaciji s homogenom smjesom. Pad tlaka u cjevovodu zbog protoka takve homogene smjese se tada uspoređuje s onim koji bi nastao da kroz cjevovod protječe ista masa tekućine.

Ranije izvedena Darcyeva formula

$$\Delta p = \xi \frac{L}{d_{ek}} \frac{\rho v^2}{2}$$

može se napisati kao

$$\Delta p = \xi \frac{L}{d_{ek}} \frac{G_1^2}{2\rho}, \qquad \textbf{(11.4.16)}$$

gdje je G_1 specifičan maseni prorok (kg/m^{2}s).

A faktor trenja, određen relacijom (11.4.12),

$$\xi = 0.184\,\mathrm{Re}^{-0.2} = 0.184\left[\frac{d_{ek}\rho v}{\mu}\right]^{-0.2} = 0.184\left[\frac{G_1 d_{ek}}{\mu}\right]^{-0.2}. \qquad \textbf{(11.4.17)}$$

Ako dvofazni tok aproksimiramo s homogenim modelom, kod kojega je zanemarena pojava različitih brzina strujanja tekuće i parne faze (odnosno zanemareno tzv. klizanje faza), možemo $G_1=v\rho$ smatrati konstantnim. Uz taj uvjet možemo, na temelju izraza (11.4.16) i (11.4.17), zaključiti da je odnos promjene tlaka u tekućini i dvofaznoj smjesi ovisan o faktoru

$$\frac{\left(\mu_t/\mu_p\right)^{0.2}}{\left(\rho_t/\rho_p\right)}$$

(indeks p odnosi se na paru, a indeks t na tekućinu) i o težinskom udjelu pare u smjesi (ovaj je udio poznat u literaturi kao faktor kvalitete smjese).

Tong [27], koristeći se radovima više istraživača, navodi rezultate proračuna odnosa pada tlaka u cjevovodu kod protjecanja dvofazne smjese i kod protjecanja tekućine, pri istom masenom protoku.

Taj odnos je definiran relacijom

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_{ds} = \varphi^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_t.$$

Indeks ds odnosi se na dvofaznu smjesu, a indeks t na tekućinu.

Rezultati proračuna faktora φ^2 dani su u ovisnosti o faktoru

$$\frac{\left(\mu_t/\mu_p\right)^{0.2}}{\left(\rho_t/\rho_p\right)}$$

(budući da su parametri u ovom izrazu funkcije temperature, umjesto njega se, kao nezavisna varijabla može uzeti temperatura smjese), i o kvaliteti smjese. Računato je za konstantan specifični maseni protok smjese (G_1=1356kg/m^{2}s).

Dio rezultata, koji se odnosi na smjesu vode i vodene pare, dan u tablici 14.4.1.

Tablica 11.4.1 Ovisnost faktora φ^2 o temperaturi i kvaliteti X% smjese voda-vodena para kod masenog protoka 1356kg/m^{2}s

X%	520K	570K	620K
1.0	2.0	1.2	1.0
5.0	4.5	2.2	1.3
10.0	10.0	4.5	2.0

20.0	17.0	8.0	3.0
40.0	28.0	12.0	4.0
100.0	40.0	20.0	5.5

Ako specifični maseni protok smjese znatnije odstupa od navedene vrijednosti (1356 kg/m^{2}s), treba računati s korekcijom zbog promjene utjecaja klizanja faza. Korekcija je ovisna i o kvaliteti smjese. Gruba procjena korekcije pokazuje da korekcijski faktor u prosjeku varira između 1.2 i 0.8 kada se maseni protok mijenja između 50% i 200% navedenog. Kod većeg se protoka korekcijski faktor smanjuje.

Primjer 11.4.3

Smjesa vode i vodene pare temperature 600K s kvalitetom X=30% i masenim protokom G=1000kg/m^{2}s protječe kroz cjevovod dužine 10m i promjera 100mm. Potrebno je procijeniti približan pad tlaka smjese u tom cjevovodu.

Rješenje

Gustoća vode temperature 550K iznosi oko 753kg/m^3, a dinamički viskozitet oko 1*10^{-4}kg/ms.

Faktor trenja tekućine biti će prema relaciji (11.4.17)

$$\xi = 0.184\left(G_1\, d_{ek}/\mu\right)^{-0.2} = 0.0116\,.$$

Pad tlaka, prema Darcyevoj formuli,

$$\Delta p = \xi \frac{L}{d_{ek}} \frac{G_1^2}{2\rho} = 770\ Pa\,.$$

Faktor φ^2 za dvofazni tok odrediti ćemo linearnom interpolacijom iz tablice 11.4.1. Približni iznos φ^2 za kvalitetu smjese X=30% i temperaturu 550K je 14.6.

Maseni protok je 35% niži onoga za koji je računata tablica 11.4.1, pa je procijenjen korekcijski faktor oko +7%, čime se konačna vrijednost faktora φ^2 svodi na oko 15.6.

Približan pad tlaka dvofazne smjese u cjevovodu je

Δp_{ds}=770*15.6=12012Pa.

Potrebno je uočiti znatno povećanje pada tlaka kod dvofazne smjese u odnosu na tekućinu.

Snaga potrebna za podržavanje protoka fluida

Ako je potrebno podržavati protok fluida od Q m^3/s kroz neki cjevovod u kojemu je pad tlaka Δp, tada snaga koju je za to potrebno utrošiti iznosi,

$$P = \Delta p Q = \Delta p v F\,,$$

gdje je F presjek cjevovoda.

Uvrštenjem izraza za Δp iz relacije (11.4.11) proizlazi

$$P = \xi \frac{LF}{d_{ek}} \frac{v^3 \rho}{2}\,. \qquad \textbf{(11.4.18)}$$

Snaga potrebna za podržavanje cirkulacije fluida je proporcionalna s trećom potencijom brzine protjecanja fluida.

Primjer 11.4.4

Voda temperature 520K protječe brzinom 2m/s kroz horizontalni cjevovod standardne komercijalne kvalitete promjera 150mm i dužine 100m. Kolika je snaga potrebna za podržavanje tog protoka?

Rješenje

Voda temperature 520K ima gustoću 794kg/m^3 i kinematički viskozitet $\nu=1.37*10^{-7}$ m^2/s.

Reynoldsov broj

$$\mathrm{Re} = \frac{v d_{ek}}{\nu} = \frac{2*0.15}{1.37*10^{-7}} = 2.19*10^6 .$$

Faktor trenja

$$\xi = 0.184\,\mathrm{Re}^{-0.2} = 0.0099 .$$

Presjek cjevovoda F=0.0177m^2.

Snaga potrebna za podržanje protoka fluida bit će, na temelju relacije (11.4.18)

$$P = 0.0099\frac{0.0177*100}{0.15}\frac{2^3*789}{2} = 371\,W .$$

Ovisnost snage potrebne za održavanje cirkulacije fluida u nuklearnom reaktoru o prirodi fluida

Protokom fluida kroz reaktor odvodimo proizvedenu toplinu uz određenu temperaturnu razliku između ulazne i izlazne temperature tog fluida. Toplinska snaga reaktora u ovisnosti o protoku, karakteristikama fluida i temperaturnoj razlici fluida određuje se iz relacije

$$Q_r = v\rho c F \Delta T_f \qquad \textbf{(11.4.19)}$$

gdje su

v, ρ i c brzina, gustoća i specifična toplina fluida

F presjek protoka fluida u jezgri

ΔT_f razlika između izlazne i ulazne temperature rashladnog fluida reaktora.

Iz jednadžbe (11.4.19) možemo izraziti brzinu fluida

$$v = \frac{Q_r}{c\rho F \Delta T_f} . \qquad \textbf{(11.4.20)}$$

Ako se izraz (11.4.20) uvrsti u relaciju (11.4.18), dobivamo izraz kojim je snaga potrebna za održanje cirkulacije fluida izražena u ovisnosti o snazi reaktora, temperaturnoj razlici, svojstvima rashladnog fluida, presjeku rashladnih kanala i faktoru trenja.

$$P = \xi \frac{L}{d_{ek}} \frac{Q_r^3}{\Delta T_f^3} \frac{1}{F^2} \frac{1}{c^3 \rho^2} \qquad \textbf{(11.4.21)}$$

Iz relacije (11.4.21) proizlazi da kod dane snage reaktora, protočnog presjeka i temperaturne razlike snaga P ovisi i o prirodi rashladnog fluida, što je izraženo članom $1/(c^3\rho^2)$.

Rashladni fluidi nuklearnih reaktora uglavnom su voda, plin (pretežno CO_2) i tekući natrij. Podaci za te fluide kod parametara uobičajenih u energetskim reaktorima jesu:

-voda	(16MPa, 670K)	ρ=700kg/m^3	c=5693J/(kgK)
-CO_2	(2MPa, 370K)	ρ=19kg/m^3	c=1088J/(kgK)
-tekući natrij	(770 K)	ρ=834kg/m^3	c=1262J/(kgK)

Vrijednosti faktora $1/c^3\rho^2$:

-za vodu	$1.106*10^{-17}$
-za CO_2	$2.151*10^{-12}$
-za tekući natrij	$7.153*10^{-16}$

Rezultat pokazuje da faktor $1/c^3\rho^2$ ima najmanju vrijednost kada je rashladni fluid voda. Kod danih parametara, taj je faktor za vodu $1.94*10^5$ puta manji nego za CO_2 i 64.7 puta manji nego za tekući natrij.

Ako bismo dakle prema jednadžbi (11.4.21) željeli neki reaktor dane snage i uz istu temperaturnu razliku hladiti s CO_2 umjesto vodom, morali bi utrošiti preko 100000 puta veću snagu za podržavanje cirkulacije rashladnog fluida! Takav pristup, naravno, u praksi ne dolazi u obzir.

Kod reaktora hlađenih plinom moramo intervenirati na smanjenje drugih članova relacije (11.4.21).

Faktor $Q_r^3/(\Delta T_f^3 F^2)$ u toj relaciji ukazuje na rješenja koja ćemo kod tih reaktora, u poređenju reaktorima hlađenim vodom, mijenjati. Kod plinom hlađenih reaktora morati ćemo ići na reaktore manjih snaga (manji Q_r), reaktore graditi s većim presjecima rashladnih kanala (veći F) te u njima dopustiti veću promjenu temperature fluida (veći ΔT_f). Unatoč svim tim zahvatima, kod plinom hlađenih reaktora odnos snage potrebne za održavanje cirkulacije fluida (koja se u literaturi obično označava kao snaga pumpanja fluida) i snage reaktora mnogo je veći nego kod vodom hlađenih reaktora.

Reaktori hlađeni tekućim metalima projektiraju se uz veće temperaturne razlike fluida u jezgri od reaktora hlađenih vodom, što djelomično kompenzira negativni utjecaj većeg faktora $1/c^3\rho^2$.

11.5 Prijelaz topline na nemetalne rashladne fluide

Odvođenje topline kod većine toplinskih aparata uključivši i nuklearne reaktore vezano je uz mehanizam prijelaza topline s krute stjenke na rashladni fluid koji tu stjenku hladi. Najzastupljeniji rashladni fluid je voda (najčešće obična, znatno rjeđe teška) i to bilo u tekućoj fazi ili kao dvofazna mješavina (voda-para). Nadalje, kao rashladni fluidi pojavljuju se i plinovi. Najčešće zrak, ali u nuklearnoj tehnologiji dosta se koriste, zbog povoljnih nuklearnih, toplinskih i drugih svojstava (toksičnost, korozija) helij i ugljični dioksid.

Tekući metali se koriste za hlađenje brzih oplodnih reaktora.

U ovom će se poglavlju analizirati hlađenje krute stjenke nemetalnim jednofaznim rashladnim fluidom.

Podaci o prijelazu topline sa stjenke na fluid, upotrebljivi u praksi, dobivaju se kombiniranjem eksperimentalnih podataka i teoretskih postavki. Analogno kao kod proučavanja pada tlaka kod strujanja fluida, teoretske postavke pomažu kod definiranja odnosa bezdimenzionalnih grupa fizikalnih parametara. Pri tome se koristi teorija sličnosti ili dimenzionalna analiza.

Jednadžba održanja toplinske energije

Zakon održanja toplinske energije fluida proizlazi iz prvog zakona termodinamike, čiji je postulat da unesena toplinska energija u element tvari mora biti jednaka porastu entalpije tog elementa, odnosno jednaka porastu njegove unutarnje energije i izvršenom radu prema okolini.

Taj smo zakon već ranije za element krute tvari i stacionarno stanje izrazili relacijom (11.1.14). Promjena unutarnje energije po jedinici mase tvari i jedinici vremena može se izraziti kao

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Kod fluida koji se kreće temperatura je funkcija prostornih koordinata i vremena, dakle, T=T(x,y,z,t), pa se kod deriviranja te funkcije mora odrediti njezin totalni diferencijal. Uobičajeno je stoga promjenu unutarnje energije pisati kao $c\rho \frac{DT}{dt}$.

Promijenjena količina topline u razmatranom elementu fluida je zbroj topline koju je taj element fluida primio iz okoline, topline koja je u njemu generirana kao i topline koja je nastala iz mehaničkog rada zbog ekspanzije, kompresije ili trenja unutar fluida. U velikoj većini praktičkih primjera (izuzetak je kada sa radi o strujanju fluida sa veoma velikim brzinama) udio topline koja se generira mehaničkim radom zbog trenja i kompresije je zanemariv.

Zbog toga je opravdano izjednačiti promjenu unutarnje energije elementa fluida s promjenom toplinske energije koju on izmjenjuje s okolinom i toplinske energije koja se u njemu generira. Ako sada iskoristimo jednadžbu (11.1.21), možemo neposredno pisati

$$c\rho \frac{DT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + q_v. \qquad \textbf{(11.5.1)}$$

Prvi član na desnoj strani daje rezultantni gubitak toplinske snage po jedinici volumema fluida.

Budući da je

$$DT = \frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz,$$

relaciju (11.5.1) možemo pisati kao

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{c\rho}\nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}. \qquad \textbf{(11.5.2)}$$

Jednadžbom (11.5.2.) formuliran je zakon održanja energije fluida u gibanju.

Kod promatranja stacionarnog stanja (to će u narednom razmatranju biti slučaj), otpada prvi član na lijevoj strani jednadžbe (11.5.2).

Zamislimo sada element fluida koji razmjenjuje toplinsku energiju s krutom stjenkom. Količina topline, koju fluid razmjenjuje s stjenkom po jedinici površine i jedinici vremena, određena je Fourierovim zakonom:

$$q_\rho = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p . \qquad \textbf{(11.5.3)}$$

Izvod temperature je u smjeru normale na površinu stjenke.

S druge strane, količina topline koja se izmjenjuje po jedinici površine i jedinici vremena između stjenke i fluida definirana je i relacijom koju je postavio još Newton:

$$q_\rho = \alpha(T_s - T_f) = \alpha\Delta T , \qquad \textbf{(11.5.4)}$$

gdje su

α koeficijent prijelaza topline sa stjenke na fluid, s dimenzijom W/m^2K

T_s, T_f temperature stjenke i fluida

Očigledno da relacije (11.5.3) i (11.5.4) moraju biti identične. Koeficijent prijelaza topline α može se dakle definirati kao

$$\alpha = -\lambda\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p}{T_s - T_f} . \qquad \textbf{(11.5.5)}$$

Uvjet sličnosti temperaturnog polja

Relaciju (11.5.2) za stacionarno stanje bez unutarnjeg izvora topline (unutar fluida obično nemamo izvor topline), te relaciju (11.5.5) upotrijebiti ćemo osnovu za postavljanje uvjeta sličnosti temperaturnog polja u modelu i stvarnom postrojenju.

Analogno kao u poglavlju 11.4, prilikom određivanja uvjeta sličnosti strujanja fluida, postaviti ćemo odnose između relevantnih veličina (te ćemo odnose označiti sa o_x, gdje je x oznaka fizikalne veličine za koju se postavlja odnos).

Ako zamislimo da su relacije (11.5.2) i (11.5.5), napisane za stacionarno stanje bez unutarnjeg izvora topline, odnose na stvarno postrojenje, tada će one za eksperimentalni model biti:

$$\frac{o_v o_T}{o_l}\left(v_x'\frac{\partial T'}{\partial x} + v_y'\frac{\partial T'}{\partial y} + v_z'\frac{\partial T'}{\partial z}\right) = \frac{o_\lambda o_T}{o_c o_\rho o_l^2}\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}\right) \qquad \textbf{(11.5.6)}$$

$$o_\alpha\alpha = -\frac{o_\lambda}{o_l}\lambda\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p}{T_s - T_0} .$$

U skladu s diskusijom u poglavlju 11.4. uvjet sličnosti temperaturnog polja u eksperimentalnom modelu i stvarnom postrojenju (sličnost temperaturnog polja osigurava primjenjivost eksperimentalnih rezultata na stvarno postrojenje) je da su diferencijalne jednadžbe koje opisuju takvo temperaturno polje u oba primjera identične.

Taj uvjet je ispunjen ako se koeficijenti u jednadžbama (11.5.6) i (11.5.7) koji određuju odnose pojedinih veličina mogu pokratiti. Drugim riječima, uvjet sličnosti je ispunjen ako se može pisati

$$\frac{o_v o_T}{o_l} = \frac{o_\lambda o_T}{o_c o_\rho o_l^2}$$

$$o_\alpha = \frac{o_\lambda}{o_l}. \qquad \textbf{(11.5.7)}$$

Iz navedenih odnosa proizlazi

$$\frac{o_c o_\rho o_l o_v}{o_\lambda} = 1, \text{ i}$$

$$\frac{o_\alpha o_l}{o_\lambda} = 1.$$

Uvjet sličnosti temperaturnog polja uvjetovan je zadovoljenjem slijedećih odnosa:

$$\frac{c\rho lv}{\lambda} = \frac{\rho vl}{\mu}\frac{\mu c}{\lambda} = \frac{\rho v d_{ek}}{\mu}\frac{\mu c}{\lambda}. \qquad \textbf{(11.5.8)}$$

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha d_{ek}}{\lambda}. \qquad \textbf{(11.5.9)}$$

U tim izrazima linearna dimenzija l zamijenjena je s ekvivalentnim promjerom d_{ek}, jer se kod strujanja fluida u kanalima svih vrsta ekvivalentni promjer pojavljuje kao geometrijski parametar.

U izrazu (11.5.9) faktor $\frac{\rho v d_{ek}}{\mu} = \frac{v d_{ek}}{\nu}$ raspoznajemo kao Reynoldsovu značajku. Faktor $\mu c/\lambda$ je također bezdimenziona grupa. Taj faktor poznat je kao Prandtlova značajka (obilježava se sa Pr), a ima široku primjenu kod problema vezanih uz prijelaz topline. Za produkt Reynoldsove i Prandtlove značajke uveden je naziv Pecletova značajka (skraćeno Pe).

S druge strane sličnost prijelaza topline u graničnom sloju uvjetuje istovjetnost bezdimenzione grupe $\alpha d_{ek}/\lambda$ u eksperimentalnom modelu i stvarnom postrojenju. To je Nusseltova značajka (skraćeno Nu).

Ako promatramo temperaturno polje u fluidu koji struji oko stjenke sa kojom izmjenjuje toplinu, očigledno je da su sve tri značajke koje određuju uvjete sličnosti strujanja i temperaturnog polja međusobno ovisne. Termička sličnost je nemoguća bez hidrodinamičke sličnosti. Moguće je dakle pisati

f(Nu,Re,Pr)=0 ili

Nu=f(Re,Pr) **(11.5.10)**

Nusseltova značajka sadrži koeficijent prijelaza topline α, pa se relacija (11.5.10) može pisati i kao

$$\alpha = \frac{\lambda}{d_{ek}} f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}).$$

Relacija (11.5.10) daje osnovu za izračunavanje prijelaza topline sa stjenke na nemetalni fluid kod prisilne cirkulacije.

Dimenzionalna analiza

Iste rezultate moguće je dobiti i primjenom dimenzione analize, opisane u poglavlju 11.4.

Pri tome moramo najprije, na temelju iskustva ili inženjerske procjene, imenovati parametre o kojima ovisi toplinski tok između stjenke i fluida.

To su fizikalni parametri samog fluida, te ekvivalentni promjer i temperaturna razlika između stjenke i fluida.

Funcionalnu ovisnost toplinskog toka možemo, na temelju navredenog, opisati slijedećom relacijom:

$$q = f\left(v, \rho, c, \mu, \lambda, d_{ek}, \theta\right). \qquad \textbf{(11.5.11)}$$

Ovdje se radi o vezi 8 fizikalnih veličina (n=8). Za razliku od relacije (11.4.7), koja se je odnosila na otpor strujanju fluida u kanalu, gdje smo sve dimenzije mogli izraziti sa samo tri osnovne mjerne jedinice (L,T i M), fizikalne veličine navedene u relaciji (11.5.12) uvode dvije dodatne jedinice: za toplinsku energiju (H) i za temperaturnu razliku (θ).

Broj osnovnih mjernih jedinica time je povećan na pet (p=5), pa će se relacija (11.5.12), prema Buckinghamovom Π teoremu, moći nadomjestiti s relacijom između 3 bezdimenzione grupe (n-p=3), dakle relacijom tipa $f(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3)=0$.

Dimenzije su fizikalnih veličina u relaciji (11.5.12) redom:

$$q\left[\frac{H}{L^2T}\right], \qquad v\left[\frac{L}{T}\right], \; d_{ek}[L], \; \mu\left[\frac{M}{LT}\right], \qquad \rho\left[\frac{M}{L^3}\right], \qquad \lambda\left[\frac{H}{LT\theta}\right], \qquad c\left[\frac{H}{M}\right], \qquad \theta[\theta]$$

Ako se kao osnovne veličine izdvoje θ, λ, ρ, d_{ek} i v, te primijeni analogni postupak kao kod razmatranja hidrauličkog otpora strujanju, dolazi se do jednadžbe (11.5.11).

Eksperimentalni rezultati

Teoretskom smo analizom utvrdili da se koeficijent prijelaza topline sa stjenke na rashladni fluid može odrediti iz funkcionalne veze Nusseltove, Reynoldsove i Prandtlove značajke, tj. na temelju relacije

Nu=f(Re,Pr).

Karakter te funkcionalne veze moguće je konkretizirati jedino eksperimentom. Da bi se nepoznata funkcionalna veza mogla odrediti postavljena je najprije hipoteza da se ona može prikazati slijedećom empiričkom formulom:

$$Nu = C\,Re^{m}\,Pr^{n} \qquad \textbf{(11.5.12)}$$

gdje su C, m i n konstante koje treba definirati na temelju eksperimentalnih podataka.

Dittus i Boelter [13] su još 1930. godine na bazi mjerenja prijelaza topline između stjenke kanala i turbulentne struje nemetalnog fluida postavili veoma poznatu korelaciju

$$Nu = 0.023\,Re^{0.8}\,Pr^{0.4} \qquad \textbf{(11.5.13)}$$

Dittus-Boelterova korelacija računa s izotermnim fluidom i ne uzima u obzir promjenu fizikalnih svojstava fluida zbog promjene temperature fluida u blizini stjenke. Naime, temperatura fluida neposredno uz stjenku je bliža temperaturi stjenke nego što je to slučaj sa prosječnom temperaturom fluida (jer se neposredno uz stjenku nalazi slabo pokretan film fluida).

Iz tog je razloga nešto točnija korelacija koju su postavili Sieder i Tate [13], i koja ima oblik

$$Nu = 0.23 Re^{0.8} Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_S}{\mu} \right)^{0.14}, \qquad \textbf{(11.5.14)}$$

gdje je μ_s viskozitet fluida na temperaturi stjenke, a μ viskozitet na prosječnoj temperaturi fluida.

U literaturi se mogu sresti i druge slične korelacije. Na primjer, Colburn [8] je predložio korelaciju oblika

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}, \qquad \textbf{(11.5.15)}$$

kod koje su svi parametri fluida, osim specifične topline, računati na temperaturi stjenke.

Poteškoća kod primjene korelacija Sieder-Tate i Colburna je u činjenici da temperatura stjenke nije poznata unaprijed, pa se do rješenja dolazi putem iteracija.

Primjer 11.5.1

Voda prosječne temperature 333K protječe brzinom 5m/s kroz cjevovod unutarnjeg promjera 100mm i dužine 5m. Iz stjenke cijevi na vodu prelazi toplinski tok od $10^6 W/m^2$. Procjeniti primjenom korelacije Dittus-Boelter i Sieder-Tate koeficijent prijelaza topline sa stjenke na vodu i temperaturu stjenke.

Rješenje

Za vodu prosječne temperature 333K možemo iz priručnika očitati slijedeće parametre: $\rho=983 kg/m^3$, $\nu=4.78*10^{-7} m^2/s$, $\lambda=0.651 W/mK$, $c=4.190 kJ/kgK$.

Reynoldsova značajka $Re=vd_{ek}/\nu=1.046*10^6$

Prandtlova značajka $Pr=c\nu\rho/\lambda=3.02$

Prema Dittus-Boelterovoj relaciji $Nu=0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}=2340$

Koeficijent prijelaza topline $\alpha=Nu\lambda/d_{ek}=15233 W/m^2K$.

Temperatura površine stjenke cjevovoda

$$t_s = t_v + \frac{q_p}{\alpha} = 333 + \frac{10^6}{15\,233} = 399\ K\ .$$

Dinamički viskozitet vode na temperaturi stjenke $\mu_s=2.23*10^{-4} kg/ms$.

Faktor $(\mu_s/\mu)^{0.14}=0,9$

Koeficijent prijelaza topline prema korelaciji Sieder-Tate

$\alpha=15233*0.9=13710 W/m^2K$.

Korigirana temperatura stjenke je 406K.

Ako korigirana temperatura pokaže veću razliku treba ponovo odrediti viskozitet na temperaturi stjenke, zatim novu vrijednost koeficijenta prijelaza topline, pa opet novu temperaturu stjenke, sve dok razlika između dva uzastopna proračuna ne dade dovoljno malenu vrijednost.

Kada voda protječe kroz reaktorsku jezgru paralelno sa gorivim elementima raspoređenim u kvadratnom ili trokutastom rasporedu (vidi sliku 11.4.1.) treba, prema Tongu [27], računati s modificiranom Dittus-Boelterovom korelacijom, čiji je oblik

$$Nu = \left(0.0333E + 0.0127\right)\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad \textbf{(11.5.16)}$$

gdje je E dio presjeka jedinične ćelije koji zauzima voda.

Ekvivalentni je promjer za taj slučaj definiran u poglavlju 11.4.

Kada je fluid plin, može se računati s praktički konstantnim Prandtlovim brojem, pa se tada, prema Dittus-Boelterovu korelaciju modificirati tako da se Nusseltov broj izrazi samo pomoću Reynoldsovog broja, uz približne vrijednosti, C=0.02 i m=0.8, dakle

$$Nu = 0.02\,\mathrm{Re}^{0.8} \qquad \textbf{(11.5.17)}$$

Primjer 11.5.2

Zrak približno atmosferskog tlaka struji brzinom 15m/s cjevovodom promjera 300mm. Na jednom je mjestu unutar cjevovoda izmjerena temperatura zraka 470K. Na istom je mjestu izmjerena temperatura unutarnje stjenke cijevi 350K. Koliko topline prelazi na stjenku po jedinici dužine cijevi.

Rješenje

Za zrak temperature 470K kinematički viskozitet je $\nu=3.55*10^{-5}m^2/s$, a koeficijent vođenja topline $\lambda=0.037W/mK$.

Reynoldsova značajka $Re=vd_{ek}/\nu=1.27*10^5$.

Koeficijent prijelaza topline $\alpha=0.02\lambda/d_{ek}Re^{0.8}=30W/m^2K$.

Količina topline koja prelazi na stjenku po metru dužine cijevi

$Q=\alpha\Delta TF=3393W/m$.

11.6 Prijelaz topline kod prirodne cirkulacije

U razmatranju prijelaza topline u prethodnom poglavlju brzina cirkulacije fluida smatrala se neovisnom varijablom. To je opravdano kada je u pitanju prisilna cirkulacija fluida, kod koje se fluid kreće uslijed djelovanja pogonske sile pumpe ili plinskog puhala.

U tehnici su od značaja i uvjeti prijelaza topline u slučajevima kada se fluid kreće zbog sile uzgona, odnosno kada se radi o prirodnoj cirkulaciji fluida.

Takvi slučajevi strujanja javljaju se u praksi kada se razmatra hlađenje postrojenja nakon obustave ili ispada pogona pumpe rashladnog sredstva (što je od posebnog značaja za nuklearne reaktore), kada se radi o hlađenju komponenata unutar bazena (npr. istrošenog nuklearnog goriva) kao i u slučajevima gdje je takav način cirkulacije fluida normalno predviđen (neki uređaji za grijanje, mnogi izmjenjivači topline i dr.).

Uvjeti sličnosti strujanja fluida kod prirodne cirkulacije slijede, analogno kao kada se radi o prisilnoj cirkulaciji, iz jednadžbi očuvanja mase, momenta gibanja i energije.

Analizirajući uvjete sličnosti strujanja fluida u poglavlju 11.4, došli smo do uvjeta definiranih jednadžbom (11.4.3):

$$\frac{o_\rho o_v^2}{o_l} = o_\rho o_g = \frac{o_p}{o_l} = \frac{o_\mu o_v}{o_l^2}.$$

Kod prisilne cirkulacije nismo za definiranje sličnosti strujnog polja koristili uvjet $o_\rho o_g$, koji određuje utjecaj gravitacije na strujanje. Taj utjecaj gotovo je zanemariv kada se radi o prisilnoj cirkulaciji, ali je presudan za podržavanje prirodne cirkulacije.

Kod prirodne cirkulacije fluid se kreće zbog uzgona koji rezultira iz razlike gustoće unutar fluida. Promjena gustoće je posljedica promjene temperature.

Član ρg u jednadžbi (11.4.1), koji određuje silu gravitacije po jedinici volumena fluida, možemo zamijeniti s $g(\rho-\rho_0)$, gdje je $\rho-\rho_0$ razlika gustoće fluida koja nastaje zbog temperaturne razlike $\Delta T=T-T_0$. Sa T_0 označena je nulta, odnosno niža temperatura unutar fluida.

S druge strane možemo pisati

$\rho_0=\rho(1+\varphi\Delta T)$ ili

$\rho-\rho_0=-\rho\varphi\Delta T$.

Iz navedenog odnosa proizlazi $o_\rho o_g=o_g o_\rho o_\varphi o_T$.

Sada možemo, koristeći se jednadžbom (11.4.3), pisati

$$o_g o_\rho o_\varphi o_T = \frac{o_\mu o_v}{o_l^2}. \qquad \textbf{(11.6.1)}$$

S druge strane, iz iste jednadžbe proizlazi

$$\frac{o_\rho o_v o_l}{o_\mu} = 1, \qquad \textbf{(11.6.2)}$$

što izražava da je jednakost Reynoldsovih značajki uvjet sličnosti strujanja fluida u modelu i stvarnom postrojenju.

U cilju eliminiranja odnosa brzina (kod prirodne cirkulacije brzina nije neovisna varijabla) dozvoljeno je desnu stranu jednadžbe (11.6.1) podijeliti sa jednadžbom (11.6.2). Time proizlazi:

$$o_g o_\rho o_\varphi o_T = \frac{o_\mu^2}{o_l^3 o_\rho}, \text{ ili } \frac{o_g o_\rho^2 o_\varphi o_l^3 o_T}{o_\mu^2} = 1.$$

Dobivena jednakost upućuje da je uvjet sličnosti strujanja fluida u slučaju prirodne cirkulacije izražen zahtjevom da bezdimenzionalni faktor

$$\frac{g\rho^2\varphi l^3\Delta T}{\mu^2} = \frac{g\varphi l^3\Delta T}{v^2}$$

bude isti u eksperimentalnom modelu kao u stvarnom postrojenju.

Taj faktor je poznat kao Grashoffova značajka (skraćeno Gr).

Ako sada obratimo pažnju na temperaturno polje, možemo, analogno kao u slučaju prisilne cirkulacije fluida, koristiti diferencijalne jednadžbe (11.5.6), (11.5.7) i (11.5.8) da bismo odredili uvjete sličnosti tog polja.

Jednadžba (11.5.7) definira temperaturno polje u graničnom sloju i iz nje proizlazi da je uvjet sličnosti izražen uvjetom da Nusseltova značajka ostane identična...

S druge strane, iz jednadžbe (11.5.6.), odnosno iz jednadžbe (11.5.8), proizlazi uvjet sličnosti izražen relacijom (11.5.9) koja pokazuje da je produkt Reynoldsove i Prandtlove identičan u modelu i postrojenju..

Budući da je jednakost Reynoldsovih značajki već uključena u Grashoffovu značajku, to se sličnost strujnog i temperaturnog polja kod prirodne cirkulacije fluida može obuhvatiti uvjetom da su Nusseltova, Grashoffova i Prandtlova značajka budu identične.

Pošto su ove značajke međuzavisne, može se pisati

$$Nu = f(Gr, \mathrm{Pr}). \qquad \textbf{(11.6.3)}$$

Dimenzionalna analiza prijelaza topline kod prirodne cirkulacije fluida

Ako bismo htjeli ispitati dobivenu ovisnost dimenzionalnom analizom trebali bismo poći od ovisnosti toplinskog toka o geometriji strujnog polja i parametrima fluida. Kod takve bismo analize zaključili da je toplinski tok ovisan o istim parametrima fluida kao i kod prisilne cirkulacije, da neovisnu brzinu fluida moramo zamijeniti pokazateljem uzgona fluida φg, te da geometrijski faktor treba nešto drukčije definirati (umjesto ekvivalentnog promjera treba uzeti oplakivanu dužinu zagrijane stjenke).

Iz danih napomena slijedi da u relaciji (11.5.12) treba parametre v i d_{ek} zamijeniti s φg i L, dakle

$$\rho_p = f(\rho, \mu, c, \lambda, \varphi g, \theta, L). \qquad \textbf{(11.6.4)}$$

Dimenzija parametra φg je $L/\theta T^2$. Dimenzije ostalih veličina u jednadžbi (11.6.4) su navedene u poglavlju 11.5.

Kao kod slučaja prisilne cirkulacije i ovdje se radi o funkcionalnoj vezi osam neovisnih parametara koji se mogu izraziti sa 5 osnovnih dimenzija (M, L, T, H i θ). Zbog toga će dana funkcionalna veza moći biti zamijenjena sa vezom triju bezdimenzionalne grupe, dakle s vezom tipa $\Pi_1=f(\Pi_2, \Pi_3)$.

Ako odaberemo veličine θ, λ, ρ, μ i L kao osnovne, dimenzionalnom analizom (koja je detaljnije opisana u poglavlju 11.4) dobivamo kao rezultat $\Pi_1=Nu$, $\Pi_2=Pr$ i $\Pi_3=Gr$, iz čega neposredno slijedi relacija (11.6.3).

Eksperimentalni rezultati

Mjerenja prijelaza topline kod prirodne cirkulacije pokazala su da se izmjerene veličine mogu dobro povezati sa odnosima bezdimenzionalnih grupa ako pretpostavimo da funkcija (11.6.3) ima oblik

$$Nu = C(Gr\,Pr)^n \qquad \textbf{(11.6.5)}$$

Koeficijent prijelaza topline sa stijenke na fluid biti će

$$\alpha = \frac{\lambda}{L} C(Gr\,Pr)^n . \qquad \textbf{(11.6.6)}$$

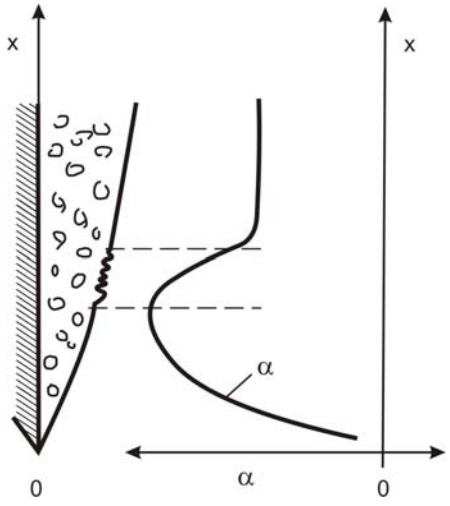
Mihejev [21] preporučuje da se fizikalne veličine koje ulaze u produkt GrPr računaju na srednjoj temperaturi (tj. na temperaturi koja je srednja vrijednost između temperature stijenke i prosječne temperature fluida), te da se uz to usvoje slijedeće vrijednosti C i n u ovisnosti o produktu (GrPr):

$(GrPr)_{sr}$	C	n
$1*10^{-3}$-$5*10^{2}$	1.18	1/8
$5*10^{2}$-$2*10^{7}$	0.54	1/4
$>2*10^{7}$	0.135	1/3

Linearna dimenzija u Grashoffovoj i Nusseltovoj značajki je visina vertikalne plohe ili visina cijevi koja zagrijava fluid. Kada fluid cirkulira okomito na horizontalno postavljenu cijev, tada je linearna dimenzija vanjski promjer te cijevi.

Kada produkt (GrPr) dosegne veću vrijednost od 10^7 strujanje fluida postaje turbulentno. Primjenom izraza (11.6.6) može se pokazati da u tom slučaju koeficijent prijelaza topline postaje neovisan o linearnoj dimenziji L.

Kao ilustracija, na slici 11.6.1. prikazana je promjena koeficijenta prijelaza topline a po visini zagrijane vertikalne stijene (smjer x), koja se hladi prirodnom cirkulacijom fluida. Koeficijent najprije pada zbog povećanja debljine graničnog sloja, zatim raste zbog povećanja turbulencije zagrijanog fluida, da bi nakon određene visine ostao konstantan, odnosno neovisan o linearnoj dimenziji x.



Slika 11.6.1 Promjena koeficijenta prijelaza topline pri prirodnoj cirkulaciji po visini grijane stijenke



Slika 11.6.2 Strujanje fluida u uvjetima prirodne cirkulacije oko horizontalno položene cijevi

Primjer 11.6.1

Istrošene gorivne šipke nuklearnog reaktora hlade se u bazenu za ozračeno gorivo. Visina šipki je 3.6m, a promjer 9.5mm. Prosječna temperatura vode u bazenu je 303K. Kolika je najviša toplinska snaga koja se smije proizvoditi u gorivoj šipki, ako ne želimo da njezina površinska temperatura bude viša od 343K?

Rješenje

Srednja temperatura između fluida i stjenke je 0.5(303+343)=323K.

Fizikalne karakteristike vode kod srednje temperature:

$\varphi=5*10^{-4}$/K, $\rho=988$kg/m^3, c=4.184 kJ/kgK, $\lambda=0.639$ W/mK, $\mu=5.64*10^{-4}$kg/ms.

Grashoffova značajka

$$Gr = \frac{\varphi g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{5*10^{-4}*9.81*40*988^2*3.6^3}{\left(5.64*10^{-4}\right)^2} = 2.81*10^{13}.$$

Prandtlova značajka

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda} = \frac{5.64*10^{-4}*4184}{0.639} = 3.69.$$

Produkt $(GrPr)_{sr}$ je veći od $2*10^7$, pa suglasno jednadžbi (11.6.6), koeficijent prijelaza topline treba odrediti iz relacije

$$\alpha = 0.135\frac{\lambda}{L}(Gr\,Pr)_{sr}^{1/3} = 1126\,W/m^2K$$

Najveća snaga koja se smije proizvesti po metru dužine šipke da površinska temperatura ne bude veća od 343K iznosi

$q_{1v}=\pi d\alpha\Delta T=1344$W/m

Primjer 11.6.2

Vertikalni parovod bez izolacije ima visinu 4m i promjer 100mm. Temperatura vanjske površine parovoda je 440K, dok je temperatura okolnog zraka, koji miruje, 300K. Koliko se topline gubi iz parovoda?

Rješenje

Fizikalne konstante zraka pri srednjoj temperaturi 370K jesu

$\lambda=0.0307$W/mK, $v=2.36*10^{-5}$m^2/s, $\varphi=1/300$K^{-1}, Pr=0.72.

Grashoffov broj

$$Gr = \frac{\varphi g \Delta T L^3}{v^2} = 5.26*10^{11}$$

$$(Gr\,Pr)_{sr} = 3.79*10^{11}.$$

Koeficijent prijelaza topline, za $(GrPr)_{sr}>10^7$, prema relaciji (11.6.6) biti će

$$\alpha = 0.135\frac{\lambda}{L}\left(Gr\,\mathrm{Pr}\right)_{sr}^{1/3} = 7.49\,W/m^2K\,.$$

Gubitak topline cjevovoda iznosi

$Q=\alpha\Delta T d\pi L=7.49*140*0.1*\pi*4=1318W.$

Primjer 11.6.3

Kroz vodič dalekovoda presjeka 300mm provodi se struja od 750A. Električni otpor vodiča $R(T)=0.06[1+0.004(T-293)\Omega/km$.

Vodič je u zraku temperature 310K. Kolika je temperatura na površini vodiča?

Rješenje

Rješenje treba, zbog nepoznate površinske temperature vodiča, potražiti iterativnim postupkom.

Pretpostaviti ćemo temperaturnu razliku između površine vodiča i zraka od 70K. Srednja temperatura graničnog sloja tada je 345K.

Konstante zraka kod srednje temperature jesu

$\rho=0.996kg/m^3$, $c=1.021kJ/kgK$, $\lambda=0.0286W/mK$, $v=2.05*10^{-5}m^2/s$, $\varphi=1/300K^{-1}$, $Pr=0.72$.

Promjer vodiča zadanog presjeka je 19.5mm.

Grashoffova značajka

$$Gr = \frac{9.81*70*0.0195^3}{300*\left(2.05*10^{-5}\right)^2} = 4.04*10^4\,.$$

$$\left(Gr\,\mathrm{Pr}\right)_{sr} = 2.91*10^4$$

Nusseltovu značajku izračunati ćemo iz relacije (11.6.5), uzevši u obzir da za ovaj primjer konstante C i n iznose 0.54 i 0.25. Dakle,

$$Nu = o.54\left(Gr\,Pr\right)_{sr}^{0.25} = 7.05\,.$$

Koeficijent prijelaza topline sa vodiča na zrak

$$\alpha = \frac{\lambda}{d}Nu = 10.34\,W/m^2K\,.$$

Električni otpor vodiča $R=0.06*1.35=0.081\Omega/km$.

Toplinska snaga generirana u vodiču $q_{1v}=I^2R=45563W/km$.

Površina vodiča $F=61.3m^2/km$.

Temperaturna razlika između površine vodiča i zraka je

$\Delta T=q_{1v}/\alpha F=71.9K$.

Temperatura površine vodiča je 310+71.9=381,9K.

Dobivena vrijednost bliska je pretpostavljenoj pa nije potrebno ponavljati proračun. U protivnom bi ga slučaju trebalo u drugoj iteraciji ponoviti, polazeći od dobivene temperaturne razlike.

Brzina cirkulacije fluida kod prirodne konvekcije

Kod proračuna temperaturnih uvjeta u postrojenju kod kojeg se odvija proces prirodne cirkulacije fluida od interesa je ponekad poznavati i brzinu cirkulacije fluida. Brzina cirkulacije ovisi o sili uzgona i o hidrauličkom otporu rashladnog kruga.

-Sila uzgona po jedinici površine iznosi

$$\Delta p = (\rho_h - \rho_t) gL = \Delta\rho gL\,, \qquad \textbf{(11.6.7)}$$

gdje je $\Delta\rho$ razlika gustoće toplog i hladnog fluida.

-Pad tlaka u cirkulacijskoj petlji može odrediti iz Darcyeve formule (izraz 11.4.13)

$$\Delta p = \xi_t \frac{\rho_s v^2}{2}\,, \qquad \textbf{(11.6.8)}$$

gdje je ξ_t faktor hidrauličkog otpora cjelokupne cirkulacijske petlje, a ρ_s srednja gustoća fluida.

Izjednačenjem relacija (11.6.7) i (11.6.8) proizlazi

$$\frac{\rho_s}{\Delta\rho} = \frac{2gL}{v^2 \xi_t}\,. \qquad \textbf{(11.6.9)}$$

Ako se pak fluid koji cirkulira uslijed apsorpcije topline zagrijao za ΔT, povećanje toplinske snage fluida je

$$\Delta P = \rho_s v c S_f \Delta T\,, \qquad \textbf{(11.6.10)}$$

gdje je S_f presjek struje fluida (ako fluid cirkulira unutar zatvorenog rashladnog kanala, onda je taj presjek ekvivalentan presjeku tog kanala).

Koeficijent volumnog istezanja fluida može se izraziti kao,

$$\varphi = \frac{1}{\rho_s}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\,.$$

Iz navedene definicije φ, te relacija (11.6.8) (11.6.9) i (11.6.10) proizlazi

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_s} = \varphi\Delta T = \frac{\varphi\Delta P}{\rho_s v c S_f} = \frac{v^2 \xi_t}{2gL}\,.$$

Brzinu fluida kod prirodne cirkulacije možemo, na temelju dobivenih izraza, odrediti iz relacije

$$v = \left[\frac{2gL\Delta P\varphi}{\rho_s c S_f \xi_t}\right]^{1/3}\,. \qquad \textbf{(11.6.11)}$$

Ako se hidraulički otpor može svesti samo na otpor ravne cijevi dužine L i ekvivalentnog promjera d_{ek}, faktor ξ_t postaje $\xi L/d_{ek}$.

Primjer 11.6.4

Istrošeni gorivni element nuklearnog reaktora nalazi se u bazenu gdje se hlade prirodnom cirkulacijom vode prosječne temperature 313K. Gorivni element visine 3.65m sadrži šipke promjera 9.5mm smještene u kvadratnom rasporedu sa korakom 15mm. U gorivu se proizvodi ostatna toplina od 170W po metru gorivne šipke.

Kolika je brzina cirkulacije i porast temperature vode unutar gorivnog elementa?

Pretpostaviti da je cjelokupan hidraulički otpor cirkulaciji fluida jednak hidrauličkom otporu unutar samog gorivnog elementa.

Rješenje

Ekvivalentni promjer d_{ek} strujnog kanala na osnovi relacije (11.4.14) i zadanih veličina iznosi 20.65mm, a njegov presjek $S_f=a^2-r_g^2\pi=154*10^{-6}m^2$.

Fizikalne konstante vode temperature 313K jesu

$\rho=992kg/m^3$, $c=4.178kJ/kgK$, $\lambda=0.681W/mK$,

$v=6.58*10^{-7}m^2/s$, $\varphi=0.6*10^{-3}K^{-1}$.

Faktor trenja ξ, prema relaciji (11.4.15) biti će $1.76Re^{-0.39}$.

Budući da je brzina cirkulacije nepoznata, nepoznata je i Reynoldsova značajka, pa smo prisiljeni faktor trenja pretpostaviti. Pretpostaviti ćemo $\xi=0.05$, odnosno $\xi_t = \xi \frac{L}{d_{ek}} = 8.84$.

Snaga koju proizvodi gorivna šipka $\Delta P=170*3.65=620.5W$.

Brzina cirkulacije će, na temelju relacije (11.6.11) iznositi

$$v = \left[\frac{2*9.81*3.65*620.5*0.6*10^{-3}}{992*4178*154*10^{-6}*8.84} \right]^{1/3} = 0.168\ m/s .$$

Na temelju izračunate brzine proizlazi:

Reynoldsova značajka Re=5272,

Korigirani faktori ξ i ξ_t jesu: $\xi=0.062$, $\xi_t=10.96$.

Korigirana brzina cirkulacije fluida v=0.157m/s.

Povećanje temperature vode u gorivnom elementu, suglasno relaciji (11.6.10), biti će

$$\Delta T = \frac{\Delta P}{\rho_s v c S_f} = 6.19\ K .$$

11.7 Prijelaz topline pri ključanju

Poznavanje prijelaza topline u uvjetima ključanja fluida je neophodno za analizu toplinskih pojava u energetskim postrojenjima. Ključanje fluida je u tim postrojenjima veoma često prisutno. Kada govorimo o fluidu koji ključa, u energetici, redovito mislimo na vodu. Kod nekih nuklearnih i kemijskih postrojenjima ponekad se koriste i drugi tekući fluidi (ukapljeni plinovi, organski spojevi, tekući metali). Razmatranje koje je predmet ovog poglavlja odnositi će se isključivo na vodu.

Fenomen ključanja vode je poznat iz pradavnih vremena, ali se na detaljnoj fizikalnoj analizi te pojave i njezinih popratnih efekata još i danas intenzivno radi. Ključanje vode od posebnog je značenja za rad energetskih postrojenja (parnih kotlova, izmjenjivača topline, nuklearnih reaktora), s tim što je u nuklearnoj energetici ključanje tijesno povezano i sa analizama sigurnosti rada postrojenja.

Kod proučavanja prijelaza topline kada je prisutno ključanje fluida, zbog kompleksnosti fizikalne pojave, manje se koriste bezdimenzionalne grupe koje smo upoznali prilikom analize prijelaza topline na fluid koji ne mijenja fazu. Kod ključanja se redovito eksperimentalno ispituje korelacija između temperaturne razlike i toplinskog toka pri danim fizikalnim karakteristikama fluida, tlaku i pothlađenosti.

Kod razmatranja prijelaza topline uz ključanje razlikovati ćemo dva slučaja:

-Prijelaz topline pri bazenskom ključanju

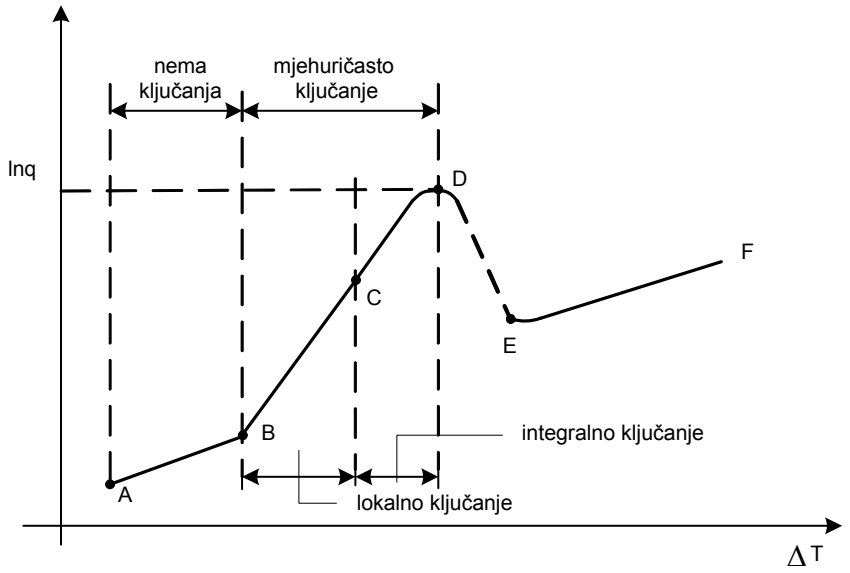
-Prijelaz topline kod ključanja fluida u cijevima ili kanalima uz prisilnu cirkulaciju.

Kod energetskih postrojenja ključanje uz prisilnu cirkulaciju je od mnogo većeg značaja nego bazensko ključanje.

Prijelaz topline pri bazenskom ključanju

Pod bazenskim ključanjem podrazumijevamo pojavu ključanja stagnantnog fluida zbog grijanja putem nekog uronjenog grijaćeg tijela.

Razmotrimo pobliže mehanizam tog ključanja pomoću slike 11.7.1.



Slika 11.7.1 Toplinski tok pri ključanju fluida

Slika prikazuje ovisnost toplinskog toka (W/m^2) o razlici temperature između stijenke grijaćeg tijela i fluida.

Razlikujemo slijedeće faze fizikalnog procesa bazenskog ključanja:

1)Konvektivno zagrijavanje fluida. U ovoj fazi, koja je na slici 11.7.1. prikazana odsječkom A-B, još nema ključanja. Temperatura grijača je niža od temperature zasićenja fluida kod danog tlaka. Koeficijent prijelaza topline, s obzirom da se radi o prirodnoj cirkulaciji, određujemo na temelju relacije

Nu=f(Gr,Pr) i odgovarajućih korelacija, koje su bile predmet analiza u poglavlju 11.6.

2)Mjehuričasto ključanje pothlađenog fluida (odsječak B-C na slici 11.7.1.). Kada površinska temperatura grijaćeg tijela postane viša od temperature zasićenja, na površini grijača se pojavljuju mjehurići pare. Intenzitet pojave mjehurića raste s porastom temperature stijenke. Mjehurići se otkidaju od površine grijača i ponovo kondenziraju, jer je fluid pothlađen (prosječna temperatura

fluida je niža od temperature zasićenja). Pojavom parnih mjehurića intenzivira se turbulencija u fluidu i prijenos topline sa stijenke na fluid zbog kondenzacije mjehurića, što dovodi do znatnog porasta koeficijenta prijelaza topline. Ta činjenica odražava se na slici 11.7.1. (odsječak B-C) sa strmijim porastom toplinskog toka kod porasta temperaturne razlike.

3)Integralno mjehuričasto ključanje (odsječak C-D). Kada se prosječna temperatura fluida približi temperaturi zasićenja, smanjuje se kondenzacija parnih mjehurića unutar fluida, te para počinje izlaziti iz vodene mase. Parni mjehurići raspoređeni su po cijelom volumenu fluida. Gradijent porasta toplinskog toka u ovisnosti o temperaturnoj razlici približno je isti kao kod mjehuričastog ključanja pothlađenog fluida.

4)Filmsko ključanje i kritični toplinski tok (blizina točke D). U koliko intenzitet ključanja na površini dosegne stupanj kod kojega se gubi kontakt tekućine sa površinom grijača, toplinski otpor prijelazu topline na fluid naglo raste. U tom slučaju, naime, sloj pare na površini grijača djeluje kao toplinski izolator. Budući da je u točki D maksimalan toplinski tok, to bi održanje tog toplinskog toka u uvjetima velikog toplinskog otpora zahtijevalo veliko povećanje temperaturne razlike. Temperatura fluida je približno konstantna i odgovara temperaturi zasićenja, pa se povećanje temperaturne razlike može odraziti samo na račun odgovarajućeg povećanja temperature površine grijača.

Temperatura površine grijača raste na visoku vrijednost koja ga može oštetiti ili razoriti (u engleskoj je literaturi ova pojava poznata kao "burnout" tj. pregorijevanje). Toplinski tok koji odgovara početku filmskog ključanja nazvan je kritični toplinski tok.

Radi ilustracije, ako fluid ključa na atmosferskom tlaku kritični toplinski tok je približno $1.2*10^6 W/m^2$. Odgovarajuća vrijednost koeficijenta prijelaza topline neposredno pred početak filmskog ključanja, $\alpha=(3.5\text{-}4.5)*10^4 W/m^2K$ i temperaturna razlika 25-35K. U trenutku nastanka filmskog ključanja (prijelaz se događa u dijelu sekunde) koeficijent prijelaza topline pada za približno 30 puta, a toliko raste i temperaturna razlika, čime se temperatura stijenke penje na preko 1000K. Istoj temperaturnoj razlici u uvjetima filmskog ključanja odgovara mnogo manji toplinski tok (točka E na slici 11.7.1).

5)Stabilno filmsko ključanje

U području temperaturnih razlika, koje je na slici 11.7.1. označeno s E-F, grijač se hladi strujom pare. U tom području vrijedi isti zakon prijelaza topline kao da se radi o hlađenju plinovitim fluidom.

Za praktičnu primjenu analiza odvođenja topline uz ključanje, interesantna je samo u području mjehuričastog ključanja. Okhotin [11] preporučuje da se u uvjetima bazenskog ključanja koeficijent prijelaza topline kod mjehuričastog ključanja računa po izrazu

$$\alpha = \frac{3.4 p_s^{0.18} q_p^{2/3}}{1 - 0.0045 p_s} \qquad W/m^2K \qquad \textbf{(11.7.1)}$$

gdje je p_s tlak zasićenja u 10^5Pa (10^5Pa=1bar), q_p toplinski tok u W/m^2.

Primjer 11.7.1

Bojler s uronjenim električnim grijačem i tlakom 0.6MPa proizvodi 1t/h pare. Napojna voda ulazi u bojler na temperaturi zasićenja. Kolika mora biti dužina spiralnog grijača promjera 15mm da mu površinska temperatura ne bude viša od 20K iznad temperature zasićenja?

Rješenje

Temperatura vode u bojleru je na temperaturi zasićenja. Temperatura zasićenja pri tlaku 0.6MPa iznosi 431.8K. Razlika entalpije pare i vode na toj temperaturi je 2085.6kJ/kg.

Ako zanemarimo gubitke topline potrebna snaga grijača je $2.085*10^9$J/h=579kW.

Toplinski tok u zadanom primjeru je nepoznat. Odrediti ćemo ga iz relacije (11.7.1) postavkom $\alpha=q_p/\Delta T=q_p/20$ i $p_s=6$. Time dobivamo

$q_p=8.97*10^5 W/m^2$.

Potrebna površina grijača je $0.645m^2$, a dužina 13.7m.

Koeficijent prijelaza topline s površine grijača na kipuću vodu $\alpha=4.48*10^4 W/m^2K$.

Prijelaz topline pri ključanju uz prisilnu cirkulaciju fluida

U uvodnom dijelu ovog poglavlja napomenuto je da je prijelaz topline kod ključanja u uvjetima prisilne cirkulacije fluida u cijevima i kanalima od primarnog značaja u energetici. Takav način prijelaza topline naime ostvaruje se u mnogim aparatima klasične i nuklearne energetike.

U cilju stvaranja fizikalne slike procesa ključanja u uvjetima prisilne cirkulacije fluida, zamislimo da pothlađeni fluid ulazi u cijev koja mu predaje toplinu i koja ima temperaturu za neki iznos ΔT veću od temperature fluida.

Dok je temperatura stijenke cijevi niža od temperature zasićenja fluida prijelaz topline se odvija po mehanizmu konvektivnog odvođenja topline, za koji su mjerodavne korelacije Dittus-Boeltera, Sieder-Tate, ili druge slične njima (vidi poglavlje 11.5).

Tek kada temperatura stijenke nadvisi temperaturu zasićenja fluida, na površini cijevi se pojavljuju mjehurići pare. Time počinje proces pothlađenog mjehuričastog, odnosno lokalnog ključanja.

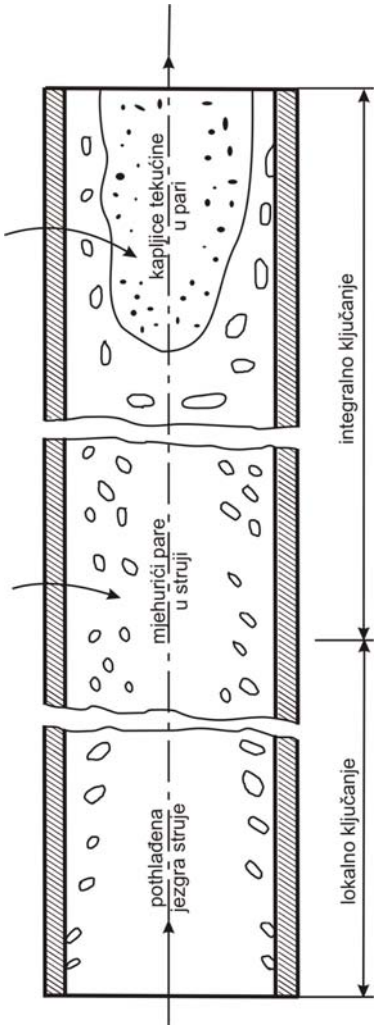
Tek kada temperatura fluida dosegne temperaturu zasićenja lokalno ključanje prelazi u integralno ključanje.

Daljim se povišenjem temperature stijenke mjehuričasto ključanje sve više intenzivira, dok konačno ne prijeđe u filmsko ključanje. Toplinski tok koji se kod tog prijelaza javlja je kritični toplinski tok.

Važno je primijetiti da se iz opisanog mehanizma razvoja ključanja ne smije zaključiti da kritičnom toplinskom toku mora obavezno prethoditi integralno ključanje fluida. Kritičan toplinski tok može se dobiti uz određene uvjete i kod pothlađenog fluida.

Vidimo da je mehanizam razvoja fizikalnog procesa ključanja u uvjetima prisilne cirkulacije kvalitativno identičan kao kod bazenskog ključanja. Razlika je u prostornom rasporedu. Naime, kod cirkulacije fluida pretvorba jednog tipa prijelaza topline u drugi događa se duž grijanog cjevovoda, a kod bazenskog ključanja proces se odvija u stagnantnom fluidu.

Mjehuričasto i integralno ključanje u vertikalnom grijanom kanalu se, prema Tongu[27], može ilustrirati na način prikazan slikom 11.7.2.



Slika 11.7.2 Razvoj ključanja u vertikalnoj grijanoj cijevi

Iz navedenog proizlazi da proces razvoja pojedinih faza ključanja fluida, opisan slikom 11.7.1, ostaje u potpunosti primjenjiv i na ključanje uz prisilnu cirkulaciju fluida. Više autora (Lamarsh[29], Tong [27], i dr.) preporučuju da se za izračunavanja prijelaza topline u fazi mjehuričastog ključanja fluida u prisilnoj cirkulaciji primjeni korelacija koju su razvili Jenns i Lottes. Ta korelacija ima u SI sustavu jedinica slijedeći oblik

$$T_p - T_s = \frac{25\left(q_p / 10^6\right)^{0.25}}{e^{p/6.28}} \quad K \qquad \textbf{(11.7.2)}$$

gdje je, T_p površinska temperatura stijenke, T_s temperatura zasićenja, q_p toplinski tok (W/m^2), p tlak fluida (MPa).

Poteškoća u praktičnoj primjeni Jenns-Lottusove formule nastaje zbog unaprijed nepoznatih uvjeta (tlak, temperaturna razlika) kod kojih počinje mjehuričasto ključanje (točka B na slici 11.7.1.).

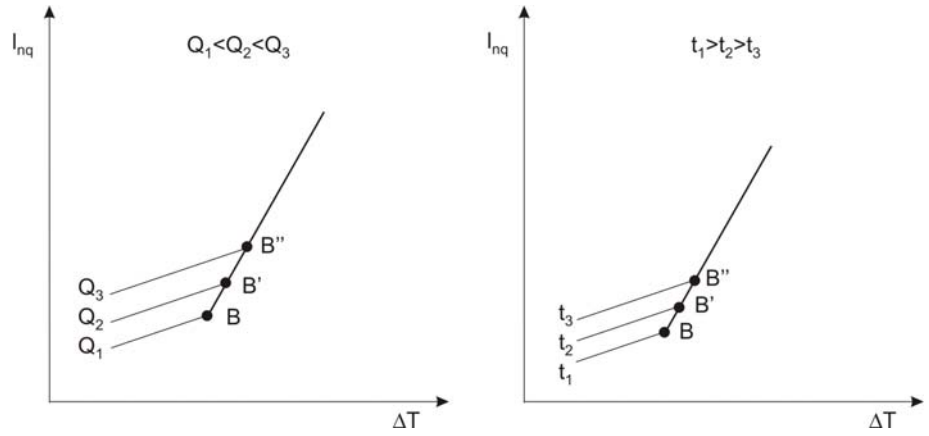
Veličinu toplinskog toka i temperature kod koje se pri proračunu prijelaza topline mora prijeći sa konvektivnog na ključajući model treba posebno istražiti.

Prijelaz topline prije početka ključanja (isječak A-B) na slici 11.7.1. se dobiva iz Dittus-Boelterove ili neke slične korelacije. Kao rezultat proračuna možemo dobiti temperaturnu razliku između stijenke i fluida (prosječna temperatura fluida), kao $\Delta T=q_p/\alpha$. U točki B moraju

temperaturna razlika i toplinski tok biti isti kao ako ih računamo koristeći Dittus-Boelterovu ili Jenns-Lottesovu korelaciju.

Izraz (11.7.2) određuje razliku između površinske temperature i temperature zasićenja fluida, dok je konvektivan prijelaz topline vezan uz razliku površinske temperature i prosječne temperature fluida. Parametre u zoni početka mjehuričastog ključanja možemo dakle odrediti samo ako je poznato i pothlađenje fluida u toj zoni.

Toplinski tok i temperaturna razlika na početku mjehuričastog ključanja ovise o protoku fluida i pothlađenju. Što je veći protok i pothlađenje mjehuričasto ključanje počinje kod većeg toplinskog toka. Ti su odnosi ilustrirani slikom 11.7.3.



Slika 11.7.3 Ovisnost početka mjehuričastog ključanja o protoku i pothlađenju fluida

Izjednačenjem temperaturne razlike za konvektivni prijelaz topline i prijelaz topline uz mjehuričasto ključanje u točki B dobivamo relaciju

$$\frac{q}{\alpha} = T_p - T_f = \left(T_p - T_s\right) + \left(T_s - T_f\right) = \frac{25\left(q_p / 10^6\right)^{0.25}}{e^{p/6.28}} + \Delta T_{pothl.} \qquad \textbf{(11.7.3)}$$

gdje je $\Delta T_{pothl.}=T_s-T_f$, pothlađenje fluida.

Primjer 11.7.2

U sredini rashladnog kanala vodom hlađenog nuklearnog reaktora održava se prosječna temperatura rashladnog fluida od 588K i tlak 14MPa. Koeficijent prijelaza topline u turbulentnoj struji (bez mjehuričastog ključanja) $\alpha=4.44*10^6 W/m^2K$.

Koliki bi trebao biti toplinski tok da u sredini kanala tog reaktora dođe do mjehuričastog ključanja?

Rješenje

Temperatura zasićenja vode tlaka 14MPa je 609K, pa pothlađenje vode u sredini kanala iznosi 21K.

Toplinski tok koji odgovara početku mjehuričastog ključanja dobivamo rješenjem jednadžbe (11.7.3), ako u nju postavimo zadane vrijednosti za p i α.

Jednadžba koju treba riješiti je dakle

$$\frac{q_p}{4.44*10^4} = 21 + \frac{25\left(q_p / 10^6\right)^{0.25}}{e^{14/6.28}}.$$

Kao rezultat se dobiva $q_p=1.06*10^6 W/m^2$.

Površinska temperatura gorivnog elementa kod koje počinje mjehuričasto ključanja je

$$T_p = T_s + \frac{25(1.06)^{0.25}}{e^{14/6.28}} = 609 + 2.73 = 611.73\ K\ .$$

Primjer 11.7.3

Voda tlaka 12MPa temperature 520K ulazi brzinom 2.5m/s u cijev unutarnjeg promjera 25mm. U cijevi se prenosi s stjenke na fluid linearna toplinska snaga 100kW/m. Na kojoj se udaljenosti duž cijevi počinje lokalno, a na kojoj integralno ključanje?

Usporediti koeficijente prijelaza topline prije početka ključanja i na početku integralnog ključanja.

Rješenje

Temperatura zasićenja kod tlaka 12MPa je 597.7K. Konstante vode prije početka ključanja ćemo računati na pretpostavljenoj prosječnoj temperaturi 558.8K.

Podaci za vodu su raspoloživi u priručnicima. Za dati primjer imamo:

$\rho=728 kg/m^3$, $c=5.442 kJ/kgK$, $\lambda=0.588 W/mK$, $v=0.133*10^{-6} m^2/s$.

Iz navedenih podataka slijedi: $Re=4.7*10^5$, $Pr=0.896$.

Korištenjem Dittus-Boelterove korelacije dobivamo Nusseltovu značajku i koeficijent prijelaza topline prije početka mjehuričastog ključanja:

$Nu=0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}=759.2$

$\alpha=Nu\lambda/d_{ek}=1.79*10^4 W/m^2K$.

Zadani toplinski tok $q_{1p}=100 kw/m$, dakle $q_p=1.27*10^6 W/m^2$.

Promjena temperature fluida u funkciji položaja z duž cijevi se može izraziti relacijom kao

$$T_f(z) = T_{ful} + \frac{q_p z}{v\rho c F} = 520 + 20.56z\ K\ .$$

Pothlađenje fluida kod početka mjehuričastog ključanja dobivamo iz izraza (11.7.3):

$$\Delta T_{podh} = \frac{\rho_p}{\alpha} - 25\frac{\left(q_p/10^6\right)^{0.25}}{e^{p/6.28}} = 67.1\ K\ .$$

Navedenom pothlađenju odgovara temperatura fluida od 530.6K koja se postiže na udaljenosti z=(530.6-520)/20.56=0.52m od ulaza u cijev.

Temperatura unutarnje površine cijevi će na istom mjestu približno biti

$T_p=T_f+q_p/\alpha=530.6+(1.27*10^6)/(1.79*10^4)=601.5K$.

Integralno ključanje počinje kada temperatura fluida dosegne temperaturu zasićenja (597.7K).

To se postiže kod z=(597.7-520)/20.56=3.8m.

Kada temperatura fluida dostigne temperaturu zasićenja vrijedi odnos:

$$T_p - T_s = \frac{q_p}{\alpha''} = 25\frac{\left(\rho_p/10^6\right)^{0.25}}{e^{p/6.28}} = 3.926\,K\,.$$

Koeficijent prijelaza topline α'' na početku integralnog ključanja je

$$\alpha'' = \frac{q_p}{T_p - T_s} = 3.23*10^5\ W/m^2K\,.$$

Dobivena vrijednost je 18 puta veća od koeficijenta prijelaza topline prije početka mjehuričastog ključanja, čime je potkrijepljena ranija tvrdnja o znatnom povećanju koeficijenta prijelaza topline kada fluid ključa.

Kritičan toplinski tok

Kritičan toplinski tok je bitan parametar za procjenu ekonomičnog i sigurnog rada nekog energetskog postrojenja. Od posebnog je značaja kada se radi o nuklearnom energetskom postrojenju jer je kritičan toplinski tok usko vezan uz nuklearnu sigurnost pogona takvog postrojenja.

Kritični toplinski tok je najviša vrijednost toplinskog toka za određene parametre fluida (tlak, brzina, sastav dvofazne smjese ...), uz koju se dobiva i najviši koeficijent prijelaza topline između grijane stjenke i rashladnog fluida. Bilo bi u načelu poželjno približiti se što više toj vrijednosti toplinskog toka, jer bismo tada mogli prenijeti određenu toplinsku snagu uz najmanju površinu prijelaza topline, dakle uz najmanji utrošak materijala i najniže troškove.

Međutim, približavanjem kritičnom toplinskom toku smanjujemo sigurnosnu granicu do pregorijevanja grijaćeg tijela, što može biti opasno kada se radi o nuklearnim reaktorima (pregorijevanje nuklearnih gorivih elemenata dovodi do ispuštanja fisijskih produkata u rashladno sredstvo).

Budući da je poznavanje veličine i parametarske ovisnosti kritičnog toplinskog toka bitno za projektiranje i pogon energetskih postrojenja, posebno nuklearnih, mnogi su laboratoriji u svijetu posvetili pažnju proučavanju tog fenomena i iznalaženju prikladnih korelacija za praktičnu primjenu.

Razlikujemo kritični toplinski tok pothlađenog fluida i kritični tok fluida u integralnom ključanju.

Kritični toplinski tok pothlađenog fluida nastaje kada imamo prisutan visoki toplinski tok i veliki protok fluida. U takvim slučajevima naime moguće je da centar struje ostane pothlađen iako je u graničnom sloju već počelo filmsko ključanje.

Kritični toplinski tok uz integralno ključanje nastaje kod manjih toplinskih tokova i protoka jer tada dvofazni fluid ima više vremena približiti se homogenoj mješavini. U takvom slučaju temperatura fluida je ravnomjernije raspoređena po presjeku rashladnog kanala i približno jednaka temperaturi zasićenja.

Kod nuklearnih postrojenja pothlađeno ključanje prisutno je kod reaktora koji su hlađeni sa vodom pod tlakom (PWR), a integralno kod ključajućih reaktora (BWR).

Empiričke korelacije za proračun kritičnog toplinskog toka

Publiciran je velik broj korelacija za proračun kritičnog toplinskog toka, koje su proračunate na temelju eksperimentalnih rezultata. Ovdje ćemo se osvrnuti samo na neke od značajnijih korelacija koje su primjenjive za određivanje kritičnog toplinskog toka u uvjetima pothlađenog i

integralnog ključanja. Treba naglasiti da su najsavršenije korelacije poslovna tajna proizvođača toplinskih aparata i nuklearne opreme.

Korelacije za kritični tok kod pothlađenog ključanja.

Korelacija Tonga, ili W-3 korelacija

Tong[27] je, za potrebe projektiranja jezgre reaktora hlađenih sa vodom pod tlakom, razvio, na primjeru snopa grijanih šipki sa jednolikom raspodjelom aksijalne snage, korelaciju koja, preračunata na SI sustav jedinica, ima oblik

$$0.317\left(q_{pk}/10^6\right)=\left[(2.002-0.0624p)+(0.1722-0.0143p)*e^{(18.177-0.599p)\chi}\right]* \\ *\left[(109.3-1175.8\chi+127.4\chi|\chi|)*\left(G/10^6\right)+1.037\right]* \\ *(1.157-0.869\chi)*\left[0.2664+0.8537e^{-124d_{ek}}\right]* \\ *\left[0.8258+0.000342(i_s-i_{ul})\right] \qquad \textbf{, (11.7.4)}$$

gdje je,

q_{pk}	kritični toplinski tok	W/m^2
p	tlak fluida	MPa
G	specifični protok	kg/m^2s
χ	težinski udio pare u smjesi	kg/kg
d_{ek}	ekvivalentni promjer kanala	m
i_s	entalpija fluida na temperaturi zasićenja	kJ/kg
i_{ul}	entalpija fluida na ulazu u rashladni kanal	kJ/kg.

Korelacija je primjenjiva u granicama parametara:

$6.9<p<15.8$MPa

$1357<G<6784 kg/m^2s$

$0.005<d_{ek}<0.0175$m

$-0.25<\chi<0.15$,

te uz odnos grijanog i oplakivanog opsega između 0.88 i 1.00.

Nadalje, korelacija je primjenjiva uz uvjet da je ulazna entalpija veća od 172J/kg, a rashladni kanal kraći od 3.7m.

Kod vodom hlađenih reaktora gorive šipke su učvršćene u gorivom elementu s elastičnim potpornim rešetkama koje na sebi nose i krilca za miješanje fluida. Potporne rešetke, a naročito krilca za miješanje fluida, doprinose povećanju kritičnog toplinskog toka.

Za gorive elemente reaktora koji su hlađeni s vodom pod tlakom, prema Tong-u, faktor povećanja može se odrediti faktorom F_s, koji se izračunava slijedećim empiričkim izrazom

$$F_s=(0.64p)^{0.5}(1.445-0.122L)\left(e^{(\chi+0.2)^2}-0.73\right)+736.7K_s\left(G/10^6\right)*(\varphi_T/0.019)^{0.35}$$

(11.7.5)

gdje je.

L dužina gorivog elementa m

φ_T koeficijent termičke difuzije

K_s koeficijent koji ovisi o visinskom razmaku potpornih rešetki:

Razmak m	**K_s**
0.81	**0.027**
0.66	**0.046**
0.51	**0.066**

Koeficijent termičke difuzije ovisi o intenzitetu poprečnog miješanja fluida u otvorenim gorivim elementima. Određuje se kompleksnim eksperimentalnim i teoretskim istraživanjima polja strujanja unutar snopova grijanih šipki. U numeričkom primjeru koristiti ćemo podatak φ_T=0.076, koji za takav slučaj strujanja navode Weisman i Rowe [31].

Faktor φ_T raste sa intenzitetom poprečnog miješanja (više potpornih rešetki sa krilcima za miješanje fluida).

Kod točnijih proračuna kritičnog toplinskog toka treba još uzeti u obzir i aksijalnu raspodjelu generirane snage u gorivoj šipki.

Jednadžba (11.7.5) se odnosi na aksijalno nepromjenjivu raspodjelu snage u gorivoj šipki. Ako to nije slučaj (kod nuklearnih reaktora aksijalna raspodjela snage približno slijedi kosinusnu funkciju), treba računati s korekcijama, koje su predmet specijalističke literature. Budući da je za kritični toplinski tok najopasniji kraj rashladnog kanala (tu je fluid na najvišoj temperaturi), povoljnije je ako generirana snaga pada prema kraju kanala.

Utjecaj hladnije stjenke u rashladnom kanalu

Kod gorivih elemenata reaktora koji se hlade s vodom pod tlakom postoje vodilice za regulacijske šipke. To su cijevi približno istog promjera kao i gorive šipke, ali se u njima ne proizvodi toplina. U takvom slučaju dolazi do stvaranja filma fluida uz hladniju stijenu (tj. uz negrijanu cijev), koji odvodi veću masu fluida mimo grijane šipke. Zbog toga su uvjeti hlađenja grijane šipke koja u rashladnom kanalu sadrži negrijanu cijev pogoršani, pa to treba iskazati korekcijom kojom se smanjuje kritični toplinski tok takve šipke.

Nadalje, od izvjesnog utjecaja na kritični toplinski tok ima i niz drugih parametara, kao što su, korak rešetke, kvaliteta površine, izvijanje gorivih šipki i sl.

Primjer 11.7.4

Potrebno je odrediti kritični toplinski tok gorive šipke nuklearnog reaktora s vodom pod tlakom, uzimajući u obzir slijedeće podatke:

-prosječna proizvodnja topline q_{1v}=26.3kW/m

-tlak rashladnog fluida 16MPa

-ulazna temperatura rashladnog fluida 560K

-ulazna brzina strujanja fluida 4.76m/s

-promjer gorive šipke 5.96mm

-korak kvadratne rešetke 15.24mm

-visina gorive šipke L=3.66m

Rješenje

Na temelju danih geometrijskih veličina dobivamo:

presjek rashladnog kanala $F_k=120.66*10^{-6}m^2$

ekvivalentni promjer rashladnog kanala $d_{ek}=12.88*10^{-3}m$

Entalpija vode kod tlaka 16MPa:

$i''=2585kJ/kg$, $i_s=1651kJ/kg$, $i_{ul}=1269kJ/kg$

Gustoća vode na ulazu u gorivi element, $\rho=757kg/m^3$

Specifični maseni protok $G=v\rho=3603kg/m^2s$

Maseni protok po kanalu $G_k=GF_k=0.435kg/s$

najveći težinski udio pare pojavljuje se na kraju kanala, pa možemo na osnovi bilanca topline pisati

$$\chi=\frac{\left(\frac{q_{lV}L}{G_k}\right)}{\left(i''-i_s\right)}-\left(i_s-i_{ul}\right).$$

Uvrštenjem numeričkih vrijednosti dobivamo $\chi=-0.1964$.

Rezultat pokazuje da je na izlazu iz kanala voda pothlađena.

Sada imamo sve potrebne vrijednosti za izračunavanje kritičnog toplinskog toka q_{pk} iz jednadžbe (11.7.4).

Nakon uvrštenja račun daje, $q_{pk}=3.89*10^6W/m^2$.

Primjer 11.7.5

Kolika je korekcija kritičnog toplinskog toka izračunatog u primjeru 11.7.4. zbog postojanja distantnih rešetki s krilcima za miješanje fluida s aksijalnim razmakom od 0.51m?

Rješenje

Pri zadanom razmaku distantnih rešetki koeficijent $K_s=0.066$.

Iz relacije 11.7.5, uz $\varphi_T=0.076$, proizlazi

$F_s=1.1484$.

Korigirana vrijednost kritičnog toplinskog toka q_{pkk} je

$q_{pkk}=F_sq_{pk}=4.47*10^6W/m^2$.

Treba podsjetiti da je relacija primjenjiva na konstantnu proizvodnju topline duž gorivog elementa i odstupanje od te pretpostavke traži dodatne korekcije.

Bernathova korelacija za kritični toplinski tok

Kao daljnji primjer razmotriti će se jednostavna korelacija za izračunavanje kritičnog toplinskog toka koju je predložio Bernath [32]. Korelacija se zasniva na homogenom modelu

strujanja dvofazne mješavine pothlađenog fluida. Model pretpostavlja dobro izmiješan fluid blizu grijane površine kod približavanja kritičnom toplinskom toku.

Kod tog se modela kritični toplinski tok može računati po izrazima sličnim onima kod konvektivnog prijelaza topline:

$$q_{pk} = \alpha_k \left(T_{pk} - T_f \right) \qquad W/m^2 \qquad \textbf{(11.7.6)}$$

gdje je

$$T_{pk} = 57 \ln(145p) - \frac{7830p}{145p + 15} - 0.8197v + 273 \qquad K$$

$$\alpha_k = 61613 \frac{D_e}{D_e + D_i} + 893.3 \frac{v}{(3.28 D_e)^{0.6}} \qquad W/m^2K$$

T_f temperatura fluida na mjestu kritičnog toka K

D_e ekvivalentni promjer rashladnog kanala m

D_i grijani opseg rashladnog kanala podijeljen s π (kod kružnih je presjeka D_i promjer cijevi) m

v brzina protoka fluida m/s

p tlak fluida MPa.

Područje primjene korelacije:

0.2<p<21MPa

1.2<v<16m/s

3.6<D_e<16.8mm.

Primjer 11.7.6

Voda temperature 436K tlaka 2MPa ulazi brzinom 2m/s u metalnu čeličnu cijev unutarnjeg promjera 30mm i dužine 3m. Cijev se grije provođenjem električne struje i njoj se oslobađa toplina od 150kW. Koliki je odnos toplinskog toka proizvedenog električnim grijanjem i kritičnog toplinskog toka na kraju cijevi? Gubitke topline zanemariti.

Rješenje

Ako pretpostavimo prosječnu temperaturu vode u cijevi 450K, odgovarajuće konstante su: ρ=887kg/m^3, c=4395J/kgK.

Temperatura vode na kraju cijevi biti će $t_{fL}=t_{fu}+Q/v\rho cF$, gdje je F površina unutarnjeg presjeka cijevi.

Uvrštenjem poznatih vrijednosti dobivamo t_{fL}=462K. Fluid je na kraju cijevi pothlađen (temperatura zasićenja na tlaku 2Mpa je 485K).

Ekvivalentni i grijani promjer su jednaki unutarnjem promjeru cijevi.

Toplinski tok u cijevi $q_p = \frac{150000}{0.03 * \pi * 3} = 5.31 * 10^5 \; W/m^2K$.

Primjenom relacije (11.7.6) slijedi

$$T_{pk} = 57\ln(145*2) - \frac{7830*2}{145*2+15} - 0.8197*2 + 273 = 543.2\ K$$

$$\alpha_k = 61613\frac{0.03}{0.03+0.03} + 893.3\frac{2}{(3.28*0.03)^{0.6}} = 37988.25\ W/m^2K$$

$$q_{pk} = 37988.25(543.2 - 462) = 3.08*10^6\ W/m^2K\ .$$

Odnos kritičnog i stvarnog toplinskog toka na kraju cijevi q_{pk}/q_p=5.8.

Korelacije za kritični toplinski tok kod integralnog ključanja

Poseban interes za korelacije kojima se određuje kritični toplinski tok u uvjetima integralnog ključanja je u nuklearnoj tehnici, i to kod projektiranja reaktora hlađenih sa vodom koja ključa. Kompanija General Electric iz SAD je razvila taj tip reaktora. Kao primjer, navesti će se jedna od korelacija za određivanje kritičnog toplinskog toka kod hlađenja vodom sa integralnim ključanjem, koja potječe od istraživačkih laboratorija te kompanije [29]:

$$\frac{q_{pk}}{10^6} = 2.22 + 550.74\left(\frac{G}{10^6}\right) \qquad \text{za } \chi<\chi_1$$

$$\frac{q_{pk}}{10^6} = 5.15 - 627.43\left(\frac{G}{10^6}\right) - 14.84\chi \qquad \text{za } \chi_1<\chi<\chi_2$$

$$\frac{q_{pk}}{10^6} = 1.91 - 381.11\left(\frac{G}{10^6}\right) - 2.06\chi \qquad \text{za } \chi>\chi_2 \qquad \textbf{(11.7.7)}$$

gdje je

$$\chi_1 = 0.197 - 79.6\left(\frac{G}{10^6}\right)$$

$$\chi_2 = 0.254 - 19.15\left(\frac{G}{10^6}\right).$$

Relacija (11.7.7) vrijedi za tlak 6.9MPa. Za druge vrijednosti tlaka p u MPa, treba pisati

$$q_{pk}(p) = q_{pk}(6.9\,MPa) + 1388(1000 - 145p) \quad W/m^2\ . \qquad \textbf{(11.7.8)}$$

Granice primjenjivosti korelacije jesu:

4<p<10MPa

543<G<8144kg/m^{2}s

χ<0.45

6.22<d_{ek}<31.7mm

0.73<L<2.73m

Primjer 11.7.7

Potrebno je odrediti kritični toplinski tok na izlazu iz reaktorskog kanala reaktora hlađenog s kipućom vodom. Tlak u reaktoru je 8MPa. Prosječna brzina smjese voda-para u jezgri je 6m/s, a odnos recirkulacije u jezgri je 8:1.

Rješenje

Primjena jednadžbe (11.7.8) je uvjetovana poznavanjem masenog protoka smjese para-voda kroz jezgru, a on je vezan uz poznavanje gustoće smjese. Gustoću smjese možemo odrediti na temelju poznatog volumnog udjela vode i pare u smjesi.

Odnos recirkulacije O_c pokazuje koliko je puta prorok mase smjese voda-para u jezgri reaktora veći od masenog protoka pare koja izlazi iz jezgre. Slijedom ove definicije možemo pisati

$$O_c = \frac{\rho_p x_p + \rho_v (1 - x_p)}{\rho_p x_p},$$

gdje je x_p volumni udio pare u smjesi, a ρ_p i ρ_v gustoća pare i vode.

Iz napisane relacije dobivamo $x_p = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\rho_p}{\rho_v}(O_c - 1)}$.

Gustoća vode i pare na temperaturi zasićenja kod tlaka 6.9MPa je:

ρ_v=742.6kg/m^3, ρ_p=35.94kg/m^3.

Uvrštenjem izlazi x_p=0.747.

Sada imamo dovoljno podataka za proračun gustoće smjese voda-para:

Gustoća smjese dobiti će se kao $\rho_s=\rho_p x_p+\rho_v(1-x_p)$=214.7kg/m^3.

Maseni protok dvofazne smjese $G=v\rho_s$=6*214.7=1288.2kg/m^{2}s.

Težinski udio pare u smjesi $\chi=1/O_c$=0.125.

Radi definiranja područja primjenjivosti korelacije General Electric-a (relacija 11.7.7.) odrediti ćemo parametre χ_1 i χ_2:

χ_1=0.197-79.6*10^{-6}*1288.2=0.0992

χ_2=0.254-19.15*10^{-6}*1228.2=0.230.

Iz dobivenih rezultata proizlazi

$\chi_1<\chi<\chi_2$,

pa ćemo kritični toplinski tok odrediti iz relacije

q_{pk}=(5.15-627.43*10^{-6}*1288.2-14.84*0.125)*10^6=2.48*10^{6}W/m^2.

Budući da nas interesira kritični toplinski tok na tlaku 8MPa, iz relacije (11.7.8) dobivamo

q_{pk}(8MPa)=2.48*10^6+1388(1000-145*8)=2.26*10^{6}W/m^2.

Kod reaktora koji s hlađeni i moderirani običnom vodom postiže se linearna snaga u gorivnoj šipki do 44kW/m. Gorive šipke imaju promjer od oko 14mm (promjer je nešto veći nego kod gorivih šipki reaktora hlađenih vodom pod tlakom). Maksimalni radni toplinski tok u toku pogona reaktora je

$$q_p = \frac{44000}{0.014\pi} = 10^6\ W/m^2.$$

U ovom je primjeru kritični toplinski tok 2.26 puta veći od radnog, što dovoljno čuva gorivih šipke od pregorijevanja.

Prostorni raspored kritičnog toplinskog toka

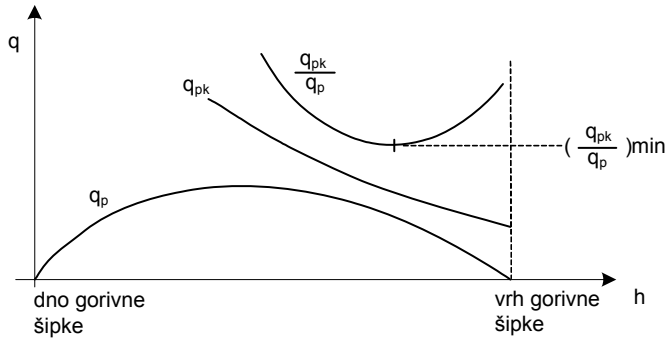
Kritični toplinski tok pada sa povećanjem temperature i sadržajem pare u fluidu. Prema tome, kada fluid protječe grijanom cijevi ili rashladnim kanalom nuklearnog reaktora najmanja vrijednost kritičnog toplinskog toka biti će na kraju te grijane cijevi ili kanala.

Od posebnog je interesira minimalni odnos radnog i kritičnog toplinskog toka. U literaturi (posebno onoj iz područja nuklearne energetike) taj se odnos označava kraticom DNBR (Departure from Nucleate Boiling Ratio ili odnos odstupanja od mjehuričastog ključanja).

Ako je radni toplinski tok konstantan duž rashladnog kanala, jasno je da se minimalni DNBR odnos pojavljuje na kraju rashladnog kanala.

Međutim, kod nuklearnih reaktora raspored toplinskog toka duž rashladnog kanala određen je kosinusnom funkcijom. U tom slučaju, minimalna vrijednost DNBR nastaje u gornjoj polovici rashladnog kanala.

Primjer takvog rasporeda prikazan je slikom 11.7.4.



Slika 11.7.4 Odnos kritičnog i radnog toplinskog toka duž gorivne šipke

11.8 Prijelaz topline kod hlađenja tekućim metalom

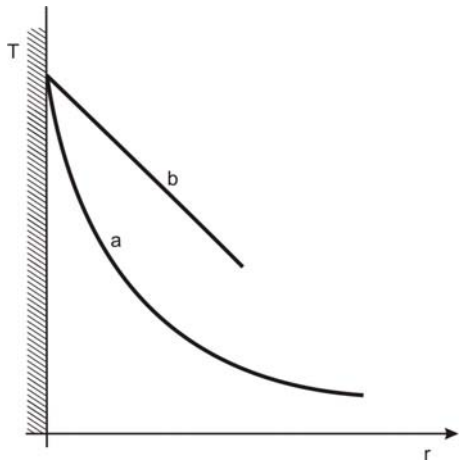
Hlađenje zagrijanih površina tekućim metalima se primjenjuje u slučajevima gdje se izborom takve vrste hlađenja osiguravaju prednosti koje nisu samo vezane uz poboljšanje prijelaza topline. Najznačajnija primjena hlađenja tekućim metalom je u nuklearnoj tehnologiji kod gradnje brzih oplodnih reaktora. Tu se primjenom ove vrsti hlađenja osiguravaju, povrh znatno poboljšanog prijelaza topline, i prednosti u pogledu visoke temperature ključanja i male termalizacije neutrona. Poteškoće koje prate takvu vrst hlađenja su erozija materijala cjevovoda , te mogućnost aktivacije i skrućivanja rashladnog fluida.

Ako se zadržimo samo na aspektu prijelaza topline treba primijetiti da upotrebu tekućih metala karakterizira veoma visoka vrijednost koeficijenta prijelaza topline. Razlog ovoj pojavi je u činjenici što, za razliku od nemetalnih fluida, u prijelazu topline s krutih stjenki na tekući metal bitnu ulogu ima vođenje topline. Tekući metali veoma su dobri vodiči topline.

Kao primjer, koeficijent vođenja topline tekućeg natrija (to je tekući metal koji se naviše koristi za hlađenje brzih oplodnih reaktora) kod temperature 588K iznosi 74W/mK, a kod vode na istoj temperaturi 0.61W/mK, dakle 121 puta manje. Zbog toga se i mehanizam prijenosa topline s stjenke na fluid razlikuje kod hlađenja nemetalnim i metalnim fluidima. Osnovni mehanizam

prijenosa topline kod nemetalnih fluida je prenošenje topline turbulentnim gibanjem čestica u struji fluida, koje ovisi o brzini protoka. Kod tekućih metala najveći doprinos prijelazu topline daje vođenje topline kroz tekući metal, dok turbulentno strujanje ima manju ulogu.

Navedenu činjenicu možemo potvrditi i uvidom u profil temperature fluida u smjeru okomitom na stjenku u jednom i drugom slučaju, što je ilustrirano slikom 11.8.1.



Slika 11.8.1 Profili temperature u fluidu okomito na grijanu stijenku: (a) nemetalni fluid, (b) metalni fluid

Kod hlađenja stjenke turbulentnom strujom nemetalnog fluida nastaje veliki pad temperature u graničnom sloju neposredno uz stjenku, a nakon toga, prema sredini struje taj pad je mnogo manje izražen. Nasuprot tome, kod tekućeg metala promjena temperature gotovo se linearno mijenja po presjeku struje fluida.

Na temelju iznijetih primjedbi razumljivo je da korelacije za prijelaz topline s grijanih stjenki na tekuće metale imaju nešto drukčiju strukturu od one koju koje susrećemo kod hlađenja nemetalnim fluidima.

Osnovni tip korelacije kod hlađenja tekućim metalima je tipa

$$Nu = A + B(Re\,Pr)^n, \qquad \textbf{(11.8.1)}$$

gdje faktor A ne ovisi o brzini strujanja fluida (odnosno o Reynoldsovom broju), a uključuje utjecaj vođenja topline kroz tekući metal.

Drugi dio jednadžbe (11.8.1) sadrži utjecaj strujanja metala na prijelaz topline.

Budući da je danas osnovna primjena tekućih metala hlađenje gorivih elemenata brzih oplodnih reaktora, pozabaviti ćemo se samo s tom vrstom primjene.

Eksperimentirajući sa strujanjem natrija paralelno sa snopovima heksagonalno raspoređenih grijanih šipki promjera d i razmaka osi s, Dwyer [33] je za izračunavanje prijelaza topline predložio korelaciju slijedećeg oblika:

$$Nu = 6.66 + 3.1268(s/d) + 1.184(s/d)^2 + 0.0155(\psi Pe)^{0.86} \qquad \textbf{(11.8.2)}$$

gdje je

$$Pe = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$$

$$\psi = 1 - \frac{0.924(s/d)^{1.4}}{\mathrm{Pr}\left(\mathrm{Re}/10^3\right)^{1.281}}.$$

Korelacija je primjenjiva za s/d>1.35.

Prva tri člana u jednadžbi (11.8.2) ne ovise o brzini strujanja tekućeg metala (uključuju utjecaj vođenja topline kroz tekući metal). Samo je posljednji član ovisan o brzini strujanja. Jednadžba ima smisla uz $\psi>0$, jer je fizikalno besmisleno pretpostaviti da se kod gibanja fluida smanjuje koeficijent prijelaza topline.

Kao što je ranije napomenuto, za odvod topline iz brzih oplodnih reaktora se koristi tekući natrij. Fizikalne karakteristike tog materijala, prema Kirilovu [25], dane su u tablici 11.8.1.

Tablica 11.8.1 Fizikalne karakteristike tekućeg natrija

T [K]	ρ [kg/m^3]	c [J/kgK]	λ [W/mK]	$\nu*10^7$ [m^2/s]	$Pr*10^3$
573	880.5	1304	76.04	3.857	5.835
623	868.8	1290	73.62	3.525	5.382
673	857.0	1278	71.19	3.269	5.048
723	845.1	1269	68.77	3.068	4.800
773	833.1	1262	66.34	2.906	4.624
823	821.0	1257	63.91	2.775	4.497
873	808.9	1254	61.49	2.668	4.414
923	796.6	1254	59.06	2.578	4.369
973	784.3	1256	56.63	2.504	4.357
1023	771.9	1261	54.21	2.441	4.377
1073	759.4	1268	51.78	2.388	4.427
1123	746.8	1277	49.35	2.344	4.509
1173	734.1	1288	46.93	2.307	4.623

Primjer 11.8.1

Brzi oplodni reaktor hlađen tekućim natrijem sadrži u jezgri gorivne šipke raspoređene u heksagonalnoj rešetki sa odnosom s/d=1.4. Vanjski promjer gorivnih šipki je 6.5mm. Prosječna temperatura tekućeg natrija u reaktoru je 773K, a prosječna brzina strujanja tekućeg natrija kroz jezgru 8m/s.

Koliki je koeficijent prijelaza topline s gorivnog elementa na rashladni fluid?

Rješenje

Ekvivalentni se promjer rashladnog kanala s heksagonalnom (ili trokutastom) rešetkom, definiran u poglavlju 11.4, može se nakon malog preuređenja izračunati iz relacije,

$$d_{ek} = 2d\left[\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{s}{d}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 7.45*10^{-3}\ m.$$

Za tekući natrij temperature 773K možemo iz tablice 11.8.1. očitati:

$\nu=2.906*10^{-7}$m^2/s, λ=66.34W/mK, $Pr=4.624*10^{-3}$.

Reynoldsova značajka će biti

$$\mathrm{Re} = \frac{v d_{ek}}{\nu} = \frac{8 * 7.54 * 10^{-3}}{2.906 * 10^{-7}} = 2.07 * 10^{5}.$$

Pecletova značajka Pe=RePr=957.2.

Koeficijent ψ iz relacije (11.8.2) dobiti ćemo kao

$$\psi = 1 - \frac{0.924 * 1.4^{1.4}}{4.624 * 10^{-3} * 207^{1.281}} = 0.654.$$

Uvrštenjem dobivenih veličina u relaciju (11.8.2) dobiva se

Nu=17.296.

Koeficijent prijelaza topline $\alpha = \frac{Nu\lambda}{d_{ek}} = 1.52 * 10^{5}\ W/m^2K$.

Koeficijent prijelaza topline sa gorivog elementa na natrij je nekoliko puta veći nego kada je rashladni fluid voda. Analiza relacije (11.8.2) pokazuje da je u danom primjeru doprinos posljednjeg člana (koji uključuje utjecaj brzine cirkulacije natrija na koeficijent prijelaza topline), manji od 23%.

11.9 Termički proračun nuklearnog reaktora

Nuklearni reaktor, sa stanovišta energetičara, je uređaj za proizvodnju toplinske energije, koju možemo koristiti u energetskom procesu. Odvođenje topline iz nuklearnog reaktora je moguće samo uz postojanje temperaturnih razlika u materijalima reaktora. S porastom količine odvedene topline se, približno proporcionalno, povećavaju i temperaturne razlike.

Budući da integritet materijala reaktora ovisi o temperaturi, prisiljeni smo je ograničiti.

Kod termičkog proračuna nuklearnog reaktora prvenstveno nas interesiraju temperature unutar gorivih elemenata, pri čemu su od posebnog značaja temperatura materijala obloge gorivih elemenata i najviša temperatura nuklearnog goriva.

Obloge gorivnih šipki su cijevi tankih stjenki, najčešće izrađene od legure cirkonija. Temperatura obloge je mjerodavna za mehanički integritet obloge, a o njemu ovisi ispuštanje fisijskih proizvoda u rashladno sredstvo. Ne smijemo dozvoliti da, ni u uvjetima najintenzivnije proizvodnje termičke snage , temperatura obloge ili unutrašnjosti gorivne šipke premaši određenu graničnu vrijednost.

Mehanički integritet obloge je ugrožen i kod pojave kritičnog toplinskog toka. Kod analize te pojave bilo je napomenuto da nastanak filmskog ključanja na površini gorive šipke dovodi do velikog pregrijavanja, a time i do vjerojatnog oštećenja njezine obloge. Toplinskim proračunom moramo dakle provjeriti je li radni toplinski tok dovoljno niži od kritičnog.

Ranije je napomenuto da je maksimalna temperatura nuklearnog goriva također ograničavajući parametar. Ne možemo, naime, dozvoliti da materijal nuklearnog goriva u osi gorivih šipki (tu je temperatura najviša) dosegne temperaturu taljenja, jer se tada gube mehanička svojstva tableta UO_2, a time i mogućnost zadržavanja fisijskih produkata unutar materijala goriva.

Osnovni cilj termičkog proračuna nuklearnog reaktora je utvrditi količinu toplinske energije, koju možemo generirati i odvesti iz reaktora, bez da dovedemo u pitanje integritet gorivih elemenata zbog pregrijanja materijala.

Jasno je da gubitak integriteta gorivih elemenata ne ugrožava samo rad reaktora nego, zbog ispuštanja radioaktivnih tvari, i nuklearnu sigurnost okoline.

U nuklearnom reaktoru prostorna raspodjela proizvodnje topline odgovara prostornom rasporedu neutronskog toka, kao što je to diskutirano u poglavlju 10.3.

Tamo je pokazano (relacija 10.3.1) da se ta raspodjela u cilindričnom nereflektiranom homogenom reaktoru može definirati relacijom

$$q_v = q_{v0} J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad \left(W/m^3\right). \qquad \textbf{(11.9.1)}$$

Potrebno je napomenuti da je prostorna raspodjela generirane toplinske snage prema jednadžbi (11.9.1) samo teoretska. U stvarnim reaktorima raspodjela generirane toplinske snage odstupa u većoj ili manjoj mjeri od navedene, s tim što je kod njih u pravilu odnos prosječne i maksimalne snage veći.

Uobičajeno je generiranu toplinsku snagu u reaktora računati kao snagu proizvedenu po jedinici dužine gorivne šipke. Raspored tako definirane toplinske snage ostaje isti kao u relaciji (11.9.1). Snagu po jedinici dužine šipke, koju je uobičajeno naziv jedinična linearna snaga, obilježavati ćemo sa indeksom "1", te pisati q_{1v} . Indeks "v" podsjeća da se radi o toplinskoj snazi generiranoj unutar volumena šipke.

Kod toplinskog proračuna reaktora prvenstveno nas zanima najopterećenija gorivna šipka, jer će se gubitak integriteta materijala najprije manifestirati kod te šipke.

Raspored proizvedene toplinske snage duž takve šipke dan je relacijom

$$q_{1v} = q_{1v0}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \qquad \left(kW/m\right),$$

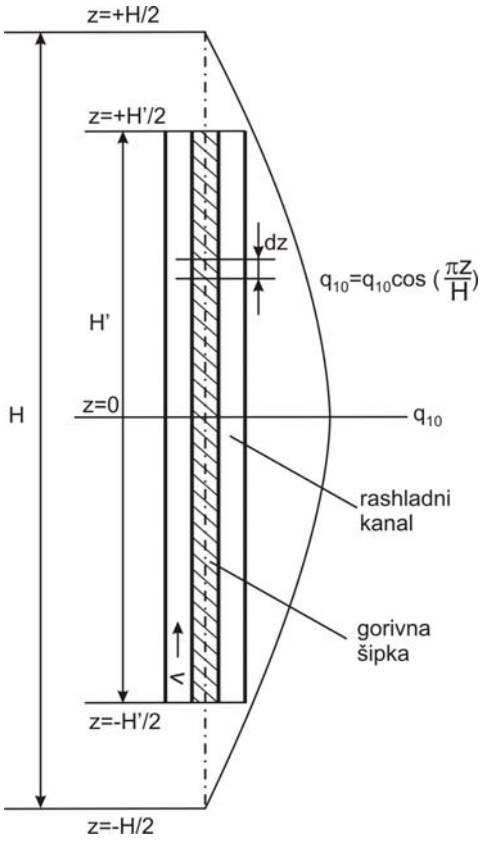
gdje je q_{1v0} generirana snaga po jedinici dužine šipke u sredini rashladnog kanala (tj. za z=0).

Pod rashladnim kanalom smatrat ćemo u pojednostavljenoj analizi koja slijedi samo gorivnu šipku i dio fluida koji pripada toj gorivnoj šipki (u smislu slike 11.4.1), zanemarujući miješanje fluida u susjednim kanalima.

Dužina kanala H u relaciji (11.9.2) je ekstrapolirana dužina rashladnog kanala, u smislu definicije u poglavlju 7.8. Stvarna dužina rashladnog kanala H' je manja od H. Time je uzeto u obzir da ni kod nereflektiranog reaktora neutronski tok i generirana snaga nisu na kraju kanala jednaki nuli. U realnom slučaju treba računati s dodatnim povećanjem generirane snage na kraju rashladnog kanala, jer svaki reaktor posjeduje neki bočni reflektor.

Zbog navedenih činjenica uobičajeno je raspodjelu generirane snage duž rashladnog kanala definirati kao "odrezani kosinus". Visinu snage na krajevima rashladnog kanala moguće je odrediti odnosom H'/H. Što je taj odnos manji to će snaga na krajevima biti veća i ravnomjernije raspoređena duž kanala. Vrijednosti varijable z u relaciji (11.9.2) su u granicama: -H/2<z<H/2.

Promjena generirane snage duž rashladnog kanala ilustrirana je slikom 11.9.1.



Slika 11.9.1 Promjena generirane snage duž rashladnog kanala

Kod proračuna temperature rashladnog fluida duž kanala u stacionarnom stanju izjednačuje se toplina koju proizvodi goriva šipka sa onom koja je apsorbirana u rashladnom fluidu. Pretpostaviti ćemo da fluid nije na temperaturi zasićenja (pothlađeni fluid), tako da mu temperatura raste proporcionalno s količinom apsorbirane topline. Ako, prema slici 11.9.1, razmotrimo element rashladnog kanala visine dz, te uzmemo u obzir da se fluid prolazom kroz taj element ugrijao za dT, možemo postaviti jednakost

$$c_f \rho_f v_f F_f dT_f = c_f m_f dT_f = q_{1v} dz = q_{1v0} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz \,. \qquad \textbf{(11.9.2)}$$

gdje je c_f, ρ_f, v_f, F_f, m_f specifična toplina, gustoća, brzina, presjek i maseni protok fluida.

Radi kasnije upotrebe, možemo isto tako izjednačiti proizvedenu toplinu u elementu gorive šipke visine dz, s količinom topline koja je s površine šipke prešla na rashladni fluid.

Ako je α koeficijent prijelaza topline s površine gorive šipke na rashladni fluid, možemo pisati

$$\alpha\left(T_p - T_f\right) O_p dz = q_{1v0} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz \,. \qquad \textbf{(11.9.3)}$$

S T_p smo označili površinsku temperaturu gorive šipke, a s O_p opseg (odnosno, površinu po jedinici dužine) na kojem se vrši prijelaz topline.

Temperaturu fluida na visini z dobiti ćemo integracijom od ulaza fluida u kanal (z=-H'/2) do te visine:

$$m_f c_f \int_{T_{fu}}^{T_f} dT_f = q_{1v0} \int_{-H'/2}^{z} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz = \frac{q_{1v0H}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right)\right],$$

gdje je s T_{fu} označena ulazna temperatura rashladnog fluida u reaktor.

Iz navedene relacije neposredno slijedi da ovisnost temperature rashladnog fluida T_f o položaju duž rashladnog kanala z određuje izraz

$$T_f = T_{fu} + \frac{q_{1v0} H}{\pi c_f m_f}\left[\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right)\right]. \qquad \textbf{(11.9.4)}$$

Temperatura rashladnog fluida se po visini rashladnog kanala mijenja po sinusnom zakonu. Najbrže se mijenja na sredini rashladnog kanala (z=0), a najsporije na krajevima. Ovo je logično, jer je promjena temperature fluida duž rashladnog kanala proporcionalna s količinom topline q_{1v} koja se unosi u rashladni fluid, a ta je najveća u sredini rashladnog kanala.

Temperatura rashladnog fluida na izlazu iz rashladnog kanala biti će na temelju relacije (11.9.4)

$$T_{fi} = T_{fu} + \frac{2q_{1v0} H}{\pi c_f m_f} \sin\left(\frac{\pi H'}{2H'}\right). \qquad \textbf{(11.9.5)}$$

Veoma je lako utvrditi da se aritmetička srednja vrijednost između ulazne i izlazne temperature rashladnog fluida nalazi upravo na sredini rashladnog kanala. Drugi član u relaciji (11.9.5) određuje porast temperature rashladnog fluida u kanalu ΔT_f, pa se temperatura rashladnog fluida u sredini rashladnog kanala (kod z=0), dobiva kao $T_{fs}=T_{fu}+\Delta T_f/2$.

Utvrđena temperatura rashladnog fluida unutar rashladnog kanala nam može poslužiti kao polazna osnova za proračun površinske temperature obloge gorivne šipke. Naime, na osnovi relacije (11.9.3)

$$T_p = T_f + \frac{q_{1v0}}{\alpha O_p} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(11.9.6)}$$

Površinsku temperaturu gorivnih šipki dobivamo ako temperaturi rashladnog fluida dodamo temperaturni pad sa površine obloge gorivog elementa na rashladni fluid, a koji određuje drugi član u jednadžbi (11.9.6).

Kombiniranjem relacija (11.9.4) i (11.9.6) dobivamo jednadžbu kojom je temperatura površine obloge gorive šipke izražena s tri člana, od kojih je jedan konstantan, drugi ovisi o kosinusnoj, a treći o sinusnoj funkciji. Dakle,

$$T_p = A + B\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right), \qquad \textbf{(11.9.7)}$$

gdje je

$$A = T_{fu} + \frac{q_{1v0} H}{\pi c_f m_f} \sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right) = T_{fs} = T_{fu} + \frac{\Delta T_f}{2}$$

$$B = \frac{q_{lv0}}{\alpha O_p}$$

$$C = \frac{q_{lv0} H}{\pi c_f m_f} = \frac{\Delta T_f}{2 \sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right)}.$$

Obično nas interesira maksimalna vrijednost površinske temperature. Tu ćemo vrijednost odrediti na temelju prethodnog izračunavanja položaja maksimuma te temperature u kanalu (koji ćemo označiti sa z). Taj položaj se određuje kao ekstrem funkcije T_p:

$$\frac{dT_p}{dz} = 0 = -\beta \sin\left(\frac{\pi z_m}{H}\right) + C \cos\left(\frac{\pi z_m}{H}\right).$$

Iz toga proizlazi

$$z_m = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{\alpha O_p H}{\pi c_f m_f}\right). \qquad \textbf{(11.9.8)}$$

Iz relacije (11.9.8) proizlazi da je položaj maksimalne površinske temperature neovisan o snazi koja se generira u rashladnom kanalu, i vrlo malo ovisan o brzini strujanja rashladnog fluida kroz kanal. Naime, ako je koeficijent prijelaza topline α, prema Dittus-Boelterovoj korelaciji proporcionalan s $Re^{0.8}$, odnos α/m_f biti će proporcionalan s $v_f^{-0.2}$.

Maksimalnu temperaturu površine obloge gorivog elementa dobivamo uvrštenjem $z=z_m$ u relaciju (11.9.7).

U literaturi je uobičajeno da se korištenjem elementarnih trigonometrijskih transformacija izrazi prikažu u kompaktnijoj formi. Pomoću poznatih odnosa trigonometrijskih funkcija dobivamo naime

$$\cos\left(\frac{\pi z_m}{H}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{C}{B}\right)^2}} \text{ i } \sin\left(\frac{\pi z_m}{H}\right) = \frac{\frac{C}{B}}{\sqrt{1 + \left(\frac{C}{B}\right)^2}}.$$

Uvrštenjem u relaciju (11.9.7) proizlazi

$$T_{p_{max}} = \frac{\frac{C^2}{B} + B}{\sqrt{1 + \left(\frac{C}{B}\right)^2}} + T_{fs}$$

i dalje

$$T_{p_{max}} = B\sqrt{1 + \left(\frac{C}{B}\right)^2} + T_{fu} + \frac{\Delta T_f}{2}, \text{ ili}$$

$$T_{p_{max}} = C\sqrt{1 + \left(\frac{B}{C}\right)^2} + T_{fu} + \frac{\Delta T_f}{2}.$$

Ako se prisjetimo da je $C=\Delta T_f/[2\sin(\pi H'/2H)]$, te da je $B/C=\pi c_f m_f/(\alpha O_p H)$, dobivamo nakon sređivanja

$$\frac{T_{p_{max}}-T_{fu}}{\Delta T_f}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right)}\sqrt{1+\left[\frac{\pi m_f c_f}{\alpha O_p H}\right]^2}\right]. \qquad \textbf{(11.9.9)}$$

Relacija (11.9.9), poznata kao Ginns-ova jednadžba, izvedena je još u prvim danima razvoja nuklearne energetike. Jednadžba pruža mogućnost da se uz poznate karakteristike fluida i uvjete strujanja u rashladnom kanalu (definirane izrazom pod korijenom), te uz zadanu maksimalnu površinsku temperaturu obloge gorive šipke i ulaznu temperaturu fluida, odredi dozvoljeni porast temperature fluida u rashladnom kanalu.

Porast temperature rashladnog fluida u rashladnom kanalu izravno je proporcionalan sa snagom koja se generira u tom kanalu.

Ta se tvrdnja može neposredno provjeriti iz relacije (11.9.5),

$$\Delta T_f=\frac{2q_{1v0}H}{\pi c_f m_f}\sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right).$$

Temperature unutar gorivog elementa dobiti ćemo dodavanjem odgovarajućih temperaturnih razlika površinskoj temperaturi obloge gorive šipke. Tim ćemo postupkom temperaturu na unutrašnjoj površini obloge dobiti korištenjem relacije koja određuje temperaturnu razliku na stjenkama cijevi polumjera r_p (vanjski polumjer gorive šipke) i r_g (vanjski polumjer goriva, koji je praktički istovjetan sa unutarnjim polumjerom obloge).

Temperaturnu razliku između unutarnje i vanjske površine obloge ΔT_{ob} možemo, prema relaciji (11.1.1.8), izraziti kao

$$\Delta T_{ob}=q_{1v}\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\left(\frac{r_p}{r_g}\right)=\frac{q_{1v0}}{2\pi\lambda}\ln\left(\frac{r_p}{r_g}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)=B_1\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(11.9.10)}$$

Između obloge i nuklearnog goriva (gorivo se sastoji iz tableta UO_2) postoji mali zazor ispunjen plinom. Učinak tog zazora na prijelaz topline možemo shvatiti kao učinak kontaktnog termičkog otpora. Taj se učinak može kvantificirati koeficijentom prijelaza topline kontakta obloga-gorivo α_z (vidi relaciju 11.1.1.43). Iz navedenog slijedi da temperaturnu razliku na zazoru možemo izraziti kao

$$\Delta T_z=\frac{q_{1v}}{2r_g\pi\alpha_z}=\frac{q_{1v0}}{2r_g\pi\alpha_z}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)=B_2\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(11.9.11)}$$

Primjedba: Širina zazora je zanemariva, pa se može uzeti da je unutarnji polumjer obloge isti kao polumjer materijala nuklearnog goriva r_g.

Površinsku temperaturu goriva i temperaturu goriva u osi gorive šipke označiti ćemo s T_{pg} i T_{og}.

Površinsku temperaturu goriva u funkciji visine kanala možemo dobiti uvrštenjem izraza (11.9.10) i (11.9.11) u relaciju (11.9.7):

$$T_{pg} = A + (B + B_1 + B_2)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right). \qquad \textbf{(11.9.12)}$$

Po analogiji s izrazom (11.9.8), položaj maksimalne površinske temperature goriva može se odrediti kao

$$z_m = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{C}{B + B_1 + B_2}\right). \qquad \textbf{(11.9.13)}$$

Usporedbom izraza (11.9.8) i (11.9.13) možemo zaključiti da je položaj maksimalne temperature goriva bliže centru rashladnog kanala od položaja maksimalne temperature površine obloge gorive šipke.

Općenito se može reći da sve temperaturne razlike sa istom prostornom raspodjelom kao generirana toplinska snaga u gorivnoj šipki pomiču maksimalnu temperaturu prema točki maksimalne snage (što kod simetrične prostorne raspodjele generirane snage odgovara sredini rashladnog kanala).

Maksimalnu temperaturu u osi gorive šipke odrediti ćemo iz poznate površinske temperature na temelju izraza (11.1.24)

$$\frac{q_{1v}}{4\pi} = \frac{q_{1v0}}{4\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) = \int_{T_{pg}}^{T_{og}} \lambda dT \,. \qquad \textbf{(11.9.14)}$$

Maksimalnu temperaturu u osi gorive šipke, kao i njezin položaj na temelju izraza (11.9.14) teže je izraziti eksplicitno. Znamo međutim da će položaj te maksimalne temperature, suglasno ranijem komentaru, biti bliže centru rashladnog kanala od položaja maksimalne površinske temperature goriva.

Proračun treba vršiti iterativno sa ciljem da se odredi maksimalna snaga koja se može proizvesti u rashladnom kanalu uz zadovoljenje svih zadanih ograničenja.

Faktori raspodjele generirane snage u reaktoru

U uvodnom dijelu ovog poglavlja napomenuto je da prostorna raspodjela snage u stvarnim reaktorima odstupa od one u homogenom nereflektiranom reaktoru. Stvarnu prostornu raspodjelu snage karakteriziraju faktori raspodjele snage. Ti faktori predstavljaju odnose maksimalne i prosječno proizvedene snage po volumenu reaktora, po određenoj prostornoj koordinati, te po rashladnim kanalima.

Kod vodom hlađenih reaktora računa se sa slijedećim faktorima snage:

Faktor neutronske snage F_Q^N

Faktor F_Q^N definiran je kao odnos maksimalnog i prosječnog iznosa linearne snage (kW/m) u gorivnim šipkama jezgre reaktora.

Ovaj nam faktor dozvoljava da uz poznatu vrijednost maksimalno dozvoljene specifične termičke snage gorivne šipke (koju ograničava pregrijanje te gorivne šipke) odredimo vrijednost najviše prosječne snage svih gorivnih šipki, odnosno najvišu vrijednost termičke snage reaktora. Faktor F_Q^N sadrži utjecaj prostorne raspodjele generirane snage na ukupnu snagu reaktora, te je stoga veoma značajan parametar, kako sa sigurnosnog tako i s energetskog aspekta.

Faktor porasta entalpije u rashladnim kanalima $F_{\Delta H}^{N}$

Porast entalpije fluida u rashladnom kanalu reaktora je proporcionalan s integralom generirane snage duž kanala (tj. sa $\int q_{1v} dz$). Porast entalpije direktno utječe na termodinamičko stanje rashladnog fluida na izlazu iz rashladnog kanala (najbitniji pokazatelji tog stanja su pothlađenje fluida ili sadržaj pare). Ti su parametri direktno vezani uz veličinu kritičnog toplinskog toka u rashladnom kanalu.

Faktor $F_{\Delta H}^{N}$ određuje odnos najveće vrijednost integrala $\int q_{1v} dz$ i prosječne vrijednosti tog integrala u svim rashladnim kanalima.

Faktori F_{Q}^{N} i $F_{\Delta H}^{N}$ se zbog bitnog značaja za siguran pogon nuklearnog reaktora redovito propisuju u pogonskom pravilnicima.

Faktori neravnomjernosti specifične proizvodnje snage u aksijalnom i radijalnom smjeru F_{Z}^{N} i F_{R}^{N}.

Faktor F_{Q}^{N} je ovisan o volumnoj neravnomjernosti specifične proizvodnje snage u jezgri reaktora. Često nas, radi bolje definicije te neravnomjernosti, interesira i neravnomjernost specifične proizvodnje snage po pojedinim prostornim koordinatama. Kod cilindričnog reaktora to se odnosi na raspodjelu proizvedene snage u aksijalnom smjeru (definiranu faktorom F_{Z}^{N}) i na raspodjelu proizvedene snage u radijalnom smjeru (koju određuje faktor F_{R}^{N}).

Definicija tih faktora je:

-Faktor F_{Z}^{N} je određen odnosom proizvedene snage po jedinici visine reaktorske jezgre u horizontalnom presjeku gdje se pojavljuje maksimum lokalne specifične linearne snage (kW/m) u gorivoj šipki i prosječno proizvedene snage po jedinici visine jezgre.

-Faktor F_{R}^{N} je također vezan uz horizontalni presjek jezgre u kojemu se javlja maksimum specifične linearne snage. Taj faktor je definiran kao odnos maksimalne i prosječno proizvedene linearne snage u tom presjeku.

Inženjerski faktori nesigurnosti u procjeni specifične snage

Kod projektiranja reaktorske jezgre treba računati i s tzv. inženjerskim faktorima nesigurnosti. Ti se faktori odnose na mogućnost greške u dimenzijama, svojstvima materijala, protoci rashladnog fluida, i sl. Inženjerski se faktor nesigurnosti obilježava sa F_{E}^{N}, a utječe na povišenje faktora raspodjele generirane snage za nekoliko postotaka.

Primjer 11.9.1

Potrebno je izračunati dimenzije reaktora hlađenog i moderiranog vodom pod tlakom (PWR), koji omogućuje generaciju termičke snage od 2000MW uz sljedeća ograničenja:

-temperatura obloge gorivih elemenata $(T_p)_{max} \leq 645K$

-temperatura nuklearnog goriva $(T_0)_{max} \leq 2348K$

-odnos kritičnog i radnog toplinskog toka $(q_{pk}/q_p)_{min} \geq 2$

-faktor raspodjele snage $F_{Q}^{N} \geq 2.34$

-rashladni fluid na izlazu iz vrućeg kanala mora ostati pothlađen.

Odnos stvarne i ekstrapolirane visine reaktorske jezgre $H'/H=0.8$.

Reaktor ima gorivne šipke u kvadratnom rasporedu s korakom rešetke a=12.6mm.

Podaci za gorivnu šipku reaktora:

-vanjski promjer $2r_v$=9.5mm

-debljina obloge δ=0.57mm

-visina rashladnog kanala H'=3650mm

-materijal goriva, UO_2 (95% teorijske gustoće)

-materijal obloge, legura cirkonija (Zircalloy 2)

-razmak distantnih rešetki 0.51m

-koeficijent termičke vodljivosti materijala obloge λ=22W/mK

-koeficijent prijelaza topline kontakta gorivo-obloga $\alpha_z=4.87*10^5 W/m^2K$.

Rashladni fluid:

-tlak P=16MPa

-ulazna temperatura T_{fu}=550K

-prosječna brzina u jezgri v_f=4.92m/s.

Rješenje

Kod reaktora hlađenog vodom pod tlakom prosječno povišenje temperature rashladnog fluida u jezgri je oko 40K, a u najopterećenijem kanalu oko 60K. Te ćemo vrijednosti prije početka proračuna pretpostaviti, što je neophodno radi procjene prosječne temperature kod koje će se odrediti fizikalni parametri rashladnog fluida. U koliko kasniji proračun pokaže znatnije odstupanje od pretpostavljenih vrijednosti, treba ga ponoviti.

Fizikalni parametri vode za 16MPa i 580K (pretpostavljena prosječna temperatura fluida u vrućem kanalu):

$\rho_f=700 kg/m^3$, $c_f=5693 J/kgK$, $\nu_f=1.31*10^{-7} m^2/s$, $\lambda_f=0.564 W/mK$, Pr=0.925.

Promjer tablete UO_2 $2r_g$=8.36mm.

Ekvivalentni promjer rashladnog kanala $d_{ek}=4(a^2-r_v^2\pi)/(2r_v\pi)=11.78*10^{-3}$m.

Protočni presjek rashladnog kanala $F_k=8.79*10^{-5} m^2$.

Reynoldsova značajka $\mathrm{Re}=\frac{v d_{ek}}{\nu}=4.42*10^5$.

Koeficijent prijelaza topline s površine gorivne šipke na rashladni fluid u turbulentnoj struji, bez ključanja, odrediti ćemo upotrebom izraza (11.5.18):

$Nu=(0.0333E+0.0127)Re^{0.8}Pr^{0.4}$.

Udio presjeka ćelije koji zauzima voda E, u razmatranom slučaju iznosi, $(a^2-r_v^2\pi)/a^2=0.553$.

Uvrštenjem odgovarajućih veličina izlazi Nu=967 i $\alpha=4.63*10^4 W/m^2K$.

Koeficijent $C=\frac{q_{1v0}H}{\pi c_f m_f}$, definiran jednadžbom (11.9.7), nakon uvrštenja odgovarajućih veličina postaje, $C=8.42*10^{-4}q_{1v0}$.

Promjena temperature rashladnog fluida duž rashladnog kanala u funkciji položaja z duž kanala, prema relaciji (11.9.4), jest

$T_f=550+8.42*10^{-4}q_{1v0}[\sin(0.689z)+0.95]$ K.

Temperatura rashladnog fluida na izlazu iz rashladnog kanala ($z=H'/2$) biti će

$T_{fiz}=550+1.6*10^{-3}q_{1v0}$.

Temperatura zasićenja vode kod tlaka 16MPa je 620.3K.

Postavljeni zahtjev da temperatura rashladnog fluida na izlazu iz vrućeg kanala ne bude viša od temperature zasićenja (granica pothlađenja) uvjetuje ograničenje maksimalne linearne snage u gorivnoj šipci na 43937W/m.

U nastavku je potrebno provjeriti da li izračunata snaga udovoljava drugim zadanim ograničenjima.

Koeficijenti B, B_1 i B_2, izračunavaju se prema izrazima (11.9.7), (11.9.10) i (11.9.11) redom,

$B=7.24*10^{-4}q_{1v0}$, $B_1=9.25*10^{-4}q_{1v0}$, $B_2=7.82*10^{-5}q_{1v0}$.

Raspodjele karakterističnih temperatura u gorivnoj šipci, kao i odgovarajući položaji maksimuma tih temperatura dobivaju se iz relacija (11.9.7), (11.9.8), (11.9.12) i (11.9.13):

-na vanjskoj površini obloge: $T_p=T_f+B\cos(\pi z/H)$, ili,

$T_p=T_f+7.24*10^{-4}q_{1v0}\cos(0.689z)$.

$$z_m = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{C}{B}\right) = 1.25\ m\ .$$

-na unutrašnjoj površini obloge: $T_{ob}=T_f+(B+B_1)\cos(\pi z/H)$,

$T_{ob}=T_f+16.49*10^{-4}q_{1v0}\cos(0.689z)$

$$z_m = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{C}{B+B_1}\right) = 0.685\ m\ .$$

-na površini nuklearnog goriva: $T_{pg}=T_f+(B+B_1+B_2)\cos(\pi z/H)$,

$T_{pg}=T_f+17.27*10^{-4}q_{1v0}\cos(0.689z)$

$$z_m = \frac{H}{\pi} arctg\left(\frac{C}{B+B_1+B_2}\right) = 0.659\ m\ .$$

Jedno od ograničenja snage reaktora vezano je uz zadanu maksimalnu temperaturu površine obloge gorivne šipke. Porast temperature rashladnog fluida u kanalu (koji je proporcionalan generiranoj snazi), koji ne smijemo premašiti, da bi površinska temperatura ostala na dopuštenoj razini (645K), određujemo iz relacije (11.9.9).

Nakon uvrštenja zadanih i izračunatih veličina slijedi

$$\frac{645-550}{\Delta T_f} = 1.194\ .$$

Dopušteni porast temperature fluida u rashladnom kanalu $(\Delta T_f)_{max}=79.6$K. Iz relacije (11.9.5) i dobivenog porasta temperature rashladnog fluida, možemo zaključiti da zadano ograničenje površinske temperature obloge gorive šipke od 645K dopušta maksimalnu linearnu snagu q_{1v0} u najopterećenijem rashladnom kanalu reaktorske jezgre od 49756W/m. Ta je snaga, međutim viša od one koju ograničava pothlađenje fluida (43937W/m), pa se maksimalno dopuštena temperatura obloge gorivne šipke neće dostići (za navedenu snagu ta temperatura iznosi oko 634K). Stvarna temperatura površine obloge biti će još niža jer nismo uzeli u račun povećanje koeficijenta prijelaza topline (odnosno manji faktor B) zbog mjehuričastog ključanja u vrućem kanalu (primjerice, udvostručenje koeficijenta prijelaza topline smanjuje maksimalnu temperaturu obloge gorivne šipke na 625K).

Uz dobivenu linearnu snagu, ovisnost temperature na površini tablete nuklearnog goriva o aksijalnom položaju z, na temelju već izračunatih veličina, biti će određena relacijom

T_{pg}=585+37sin(0.689z)+76cos(0.689z).

Ranije je navedeno da ta funkcija postiže maksimalnu vrijednost kod z=0.659m.

Maksimalnu temperaturu nuklearnog goriva (UO_2), T_{og}, odrediti ćemo metodom koja je razmatrana u poglavlju 11.1 (relacije 11.1.10,11.1.11,11.1.12 i primjer 11.1.14)),

$$\frac{q_{1v0}}{4\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)=\int_{T_{pg}}^{T_{og}}\lambda dT=\int_{0}^{T_{og}}\lambda dT-\int_{0}^{T_{pg}}\lambda dT\,.$$

Pri numeričkoj analizi moramo uzeti u obzir da rješenje treba tražiti kod vrijednosti z između 0 i 0.659m. Naime, u ranije provedenoj diskusiji je pokazano da svaka temperaturna razlika unutar gorive šipke, čija raspodjela duž šipke odgovara raspodjeli generirane snage pomiče maksimum temperature prema maksimumu generirane snage (tj. prema sredini rashladnog kanala).

Maksimalna linearna snaga q_{1v0} u proračunu je 43937W/m, to je naime najveća snaga koju dopušta zadano ograničenje pothlađenja rashladnog fluida u vrućem kanalu.

Provedena numerička analiza (način analize je sličan kao u primjeru 11.1.6), pokazuje da je uz tu linearnu snagu izraz zadovoljen kod maksimalne temperature u osi gorive šipke od približno 1802K, koja se postiže kod aksijalnog položaja z od oko 0.1m. Dobivena maksimalna temperatura nuklearnog goriva je znatno ispod zadanog ograničenja (2348K).

Maksimalna temperatura goriva, u danom primjeru, ne ograničava dakle linearnu snagu na iznos niži od onog koji nameće uvjet pothlađenja fluida.

Potrebno je, nadalje provjeriti još i kritični toplinski tok, odnosno, ispunjenje zadanog odnosa kritičnog i radnog toplinskog toka u najopterećenijoj gorivnoj šipci.

Proračun kritičnog toplinskog toka bi trebalo izračunati za niz točaka na pozitivnoj strani osi z korištenjem relacija (11.7.4) i (11.7.5). Ovo je potrebno da bi se utvrdio minimalni odnos q_{pk}/q_p u rashladnom kanalu i položaj tog minimuma (vidi sliku 11.7.4).

Budući da ovaj primjer ima cilj samo ilustraciju termičkog proračuna reaktora, unaprijed ćemo pretpostaviti da se minimalni odnos kritičnog i radnog toplinskog toka pojavljuje kod $H'/4$ (odnosno na 3/4 visine rashladnog kanala). Težinski udio pare u smjesi χ unutar rashladnog kanala na mjestu minimuma će se dobiti iz bilance topline

$$q_{1v0}\int_{-H'/2}^{-H'/4}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)dz=\frac{q_{1v0}H}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi H'}{4H}\right)+\sin\left(\frac{\pi H'}{2H}\right)\right]=m_f\left[\left(i_s-i_{ul}\right)+\chi\left(i''-i_s\right)\right]$$

U razmatranom je slučaju,

-m_f (masa fluida koja protječe kroz rashladni kanal)=0.303kg/s

-i_s (entalpija tekućine na temperaturi zasićenja)=1651kJ/kg

-i_{ul} (entalpija tekućine na ulazu u rashladni kanal)=1218kJ/kg

-i'' (entalpija pare na liniji zasićenja)=2585kJ/kg.

Uvrštenjem izlazi χ=-0.117.

Primjena W-3 korelacije, koju definiraju relacije (11.7.4) i (11.7.5), daje, $q_{pk}=3.297*10^6 W/m^2$, čemu odgovara linearna kritična snaga gorive šipke od q_{1v0}=98399W/m.

Ranije određena maksimalna linearna snaga, ograničena pothlađenjem fluida u rashladnom kanalu, iznosi q_{10}=43937W/m. Ta će snaga na pretpostavljenom mjestu minimalnog odnosa q_{pk}/q_p biti,

$$q_{1v0}\cos\left(\frac{\pi H'}{4H}\right)=35545\,W/m\,.$$

Odnos kritičnog i radnog toplinskog toka, odnosno odgovarajućih linearnih snaga je 2.77, što udovoljava postavljenom ograničenju $q_{pk}/q_p \geq 2$.

Ovim je dokazano da izračunata maksimalna linearna snaga gorive šipke q_{1v0}=43937W/m, udovoljava svim zadanim ograničenjima.

Izračunata prosječna temperatura fluida u vrućem kanalu je približno 585K (porast temperature fluida u kanalu je oko 70K), što je za 5K više od pretpostavljene vrijednosti. Budući da se radi o približnom proračunu, nećemo ga zbog toga ponavljati.

Sada možemo prići proračunu potrebnog broja gorivih šipki (ili potrebnog broja rashladnih kanala), uzimajući u obzir da je faktor raspodjele snage u reaktoru F_Q^N ograničen na 2.34.

Prosječna linearna snaga šipke u reaktoru iznosi,

$$\bar{q}_{1v}=q_{1v0}/F_Q^N=18776\,W/m\,.$$

Prosječna termička snaga proizvedena u gorivnoj šipci reaktora je

$$\bar{Q}_v=\bar{q}_{1v}H'=68532\,W\,.$$

Iz proračuna slijedi da reaktorska jezgra u kojoj se proizvodi termička snaga

2000 MW mora sadržati 29183 gorivnih šipki (radi usporedbe, reaktor nuklearne elektrane Krško snage 1860MW sadrži 28435 gorivnih šipki). Površina presjeka svih rashladnih kanala jezgre je oko 2.55m. Promjer jezgre koja bi sadržala samo rashladne kanale iznosio bi 1.8m. Stvarni presjek bit će veći zbog potrebe smještaja regulacijskih šipki, sagorljivih apsorbera neutronskih izvora, vodilica i sl.

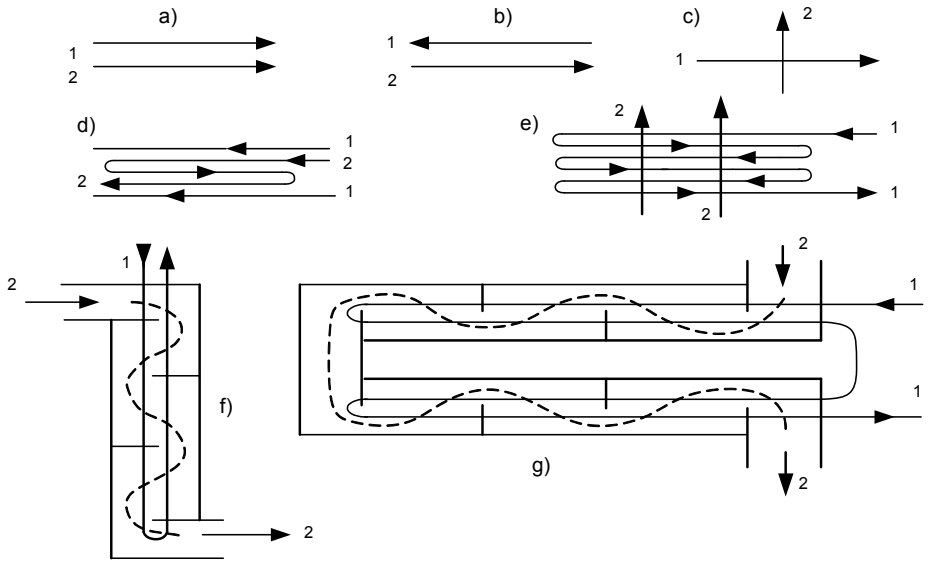
Treba napomenuti da je izvedeni proračun samo prva aproksimacija. Osnovna korekcija koju bi trebalo napraviti odnosi se na korekciju (povećanje) koeficijenta prijelaza topline u najopterećenijem kanalu jezgre zbog mjehuričastog ključanja. Povećanje koeficijenta prijelaza topline smanjuje temperaturu površine gorivne šipke. To, naravno, ne znači da bi snaga najopterećenije šipke mogla biti veća, jer je ograničenje zbog pothlađenja fluida dominantno. Kod točnijih proračuna trebalo bi korigirati i proračun kritičnog toplinskog toka zbog nejednolike proizvodnje topline duž gorivne šipke, te uzeti u račun radijalno miješanje fluida između rashladnih kanala u jezgri.

11.10 Izmjenjivači topline

Izmjenjivači topline su aparati u kojima se toplinska energija sadržana u struji jednog fluida predaje struji drugog fluida. Fluide najčešće dijeli metalna stjenka čiji je zadatak da fizički odvoji fluide, ali i da među njima osigura što bolji prijelaz topline. Fluidi (obično se radi o vodi, vodenoj pari ili plinu) u izmjenjivačima topline zadržavaju samo jednu fazu, ili mogu u njima mijenjati fazu (u tom se slučaju u izmjenjivaču događa isparivanje ili kondenzacija). U energetskim se postrojenjima, ovisno o namjeni i fizikalnom procesu, izmjenjivači topline pojavljuju kao zagrijači, hladionici, isparivači, kondenzatori, parogeneratori...

Osnovni prostorni raspored struja dvaju fluida u izmjenjivačima topline svodi se na istosmjerno strujanje, protusmjerno strujanje i poprečno (ili unakrsno) strujanje, te na kombinacije

tih strujanja. Neki prostorni rasporedi strujanja fluida (fluidi su označeni sa 1 i 2), prikazani su na slici 11.10.1.



Slika 11.10.1 Tipični prostorni rasporedi fluida u izmjenjivačima topline

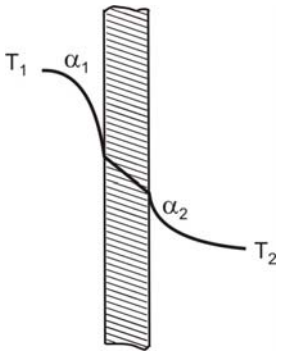
Proračuni izmjenjivača topline s paralelnim i protusmjernim strujanjem fluida su jednostavniji od proračuna izmjenjivača sa poprečnim strujanjem (problem se može svesti na jednu dimenziju), pa ćemo se u ovom poglavlju pretežno baviti s tim tipovima izmjenjivača topline.

Problem koje rješavamo toplinskim proračunom izmjenjivača topline sastoji u slijedećem:

Kolika treba biti površina prijelaza topline u izmjenjivaču da bismo u njemu temperature određenih fluida, čije su ulazne temperature i protočne mase poznate, promijenili za određeni iznos, ili obrnuto, kolika je promjena temperatura fluida u izmjenjivaču topline poznate površine.

Ukupni koeficijent prijelaza topline između fluida

Toplinski otpor između dvaju fluida u izmjenjivaču topline sastoji se iz tri komponente. To su, prema slici 11.10.2, toplinski otpori na graničnoj plohi između jednoj i drugog fluida i stjenke te toplinski otpor same stjenke.



Slika 11.10.2 Temperaturna razlika između fluida u izmjenjivačima topline

Ukupni se toplinski otpor R_T dobiva kao zbroj ta tri toplinska otpora:

$$R_T = R_{T1} + R_{T2} + R_{T3} = \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{\delta}{\lambda F} + \frac{1}{\alpha_2 F},$$

gdje je,

α_1, α_2 koeficijent prijelaza topline između jednog i drugog fluida i stjenke

δ debljina stjenke

λ koeficijent vođenja topline materijala stjenke

F površina prijelaza topline izmjenjivača topline

Prenesenu toplinu između jednog i drugog fluida u izmjenjivaču topline možemo izraziti sa

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_T} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{F}\left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right]} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{Fk}}.$$

T_1-T_2 je srednja temperaturna razlika između fluida. Tu temperaturnu razliku definirati ćemo kasnije.

Ukupni koeficijent prijelaza topline k, na temelju gornje relacije, dobiva se kao

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \qquad \textbf{(11.10.1)}$$

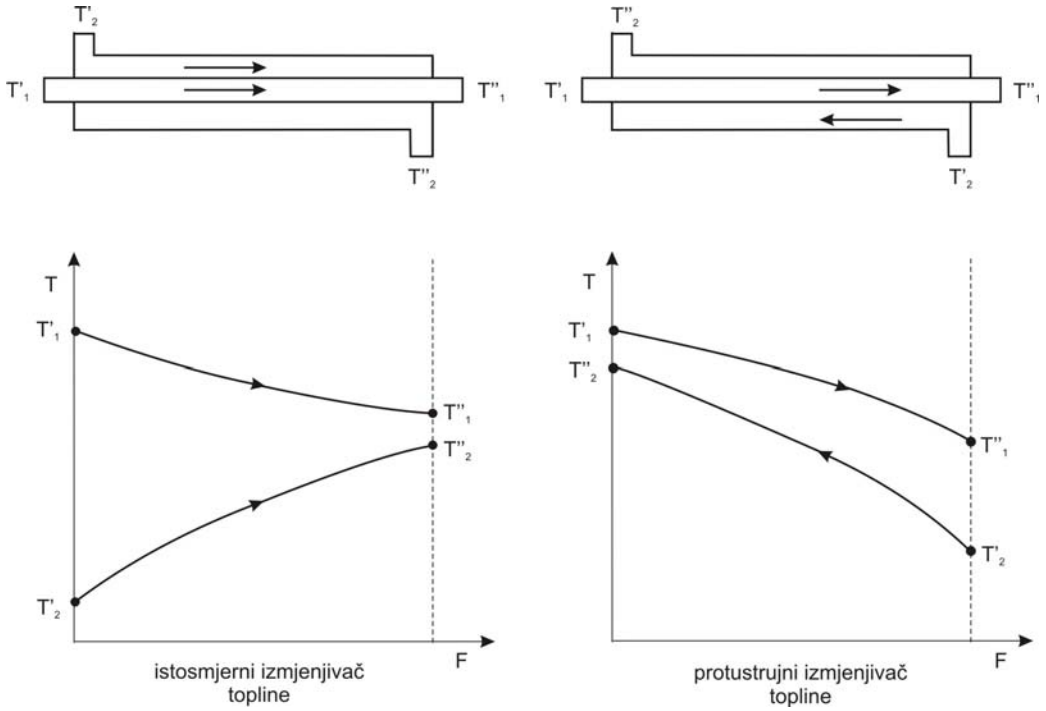
Na osnovi tako definiranog ukupnog koeficijenta prijelaza topline, količina topline koja prelazi s jednog fluida na drugi, u izmjenjivaču površine F biti će

$$Q = kF(T_1 - T_2). \qquad \textbf{(11.10.2)}$$

Površinu F treba shvatiti kao srednju površinu prijelaza topline. Ako se površine prijelaza topline na strani jednog i drugog fluida bitno razlikuju (primjerice,jedna strana je orebrena), treba pri proračunu koeficijenta k razliku površina uzeti u obzir

Proračun izmjenjivača topline

Zamislimo, suglasno slici 11.10.3, jedan jednostavni izmjenjivač topline, koji se sastoji iz dvije koncentrične cijevi.



Slika 11.10.3 Profili temperature u istosmjernom i protusmjernom izmjenjivaču topline

Ako je ulazna temperatura fluida 1 viša od ulazne temperature fluida 2, logično je da će se unutar izmjenjivača temperatura fluida 1 smanjivati, a temperatura fluida 2 rasti. Koordinatni sustav postaviti ćemo tako da je apscisa površina prijelaza topline F, a ordinata temperatura fluida. Neka početak tog koordinatnog sustava odgovara ulazu toplijeg fluida u izmjenjivač.

Ovisno o tome da li fluidi struje u paralelnoj struji ili u protustruji, profili temperatura jednog i drugog fluida u izmjenjivaču, u tom koordinatnom sustavu, slijede tok prikazan na slici 11.10.3.

Proračun izmjenjivača topline zasniva se na jednostavnim bilancama topline. Jedna od njih ukazuje da količina topline dQ koja je prešla sa jednog na drugi fluid na površini dF iznosi

$$dQ=k(T_1-T_2)dF,$$

gdje je k ukupni koeficijent prijelaza topline, a T_1 i T_2 temperature jednog i drugog fluida.

Druga bilanca je također očigledna: Količina topline koju gubi jedan fluid mora biti predana drugom fluidu. Uzmimo da se u elementu površine dF temperatura jednog fluida promjeni za dT_1, a drugog za dT_2. Bilanca topline je

$$dQ=-v_1\rho_1 f_1 c_1 dT_1=v_2\rho_2 f_2 c_2 dT_2$$

gdje su v, ρ, f i c, brzina, gustoća, protočni presjek i specifična toplina fluida.

Faktor vρfc ima u proračunu izmjenjivača topline poseban značaj. Taj je faktor poznat kao vodena vrijednost. U literaturi se obično označava s W. Vodena vrijednost je u stvari toplinski kapacitet struje fluida s dimenzijom (W/K).

Iz bilance topline slijedi, $W_1 dT_1=-W_2 dT_2$.

Ako obratimo pažnju na profile temperatura u istosmjernim i protustrujnim izmjenjivačima topline prema slici 11.10.3, možemo uočiti da s porastom površine F temperatura toplijeg fluida (koji smo označili sa 1) uvijek pada (dT_1/dF je negativan kod istosmjernog i protusmjernog izmjenjivača topline). Temperatura hladnijeg fluida (koji je označen sa 2) raste s porastom F kod istosmjernog, ali opada kod protusmjernog izmjenjivača (zapravo raste u smjeru smanjenja površine). Iz navedenog razloga moramo bilancu topline pisati:

$dQ=W_1 dT_1=-W_2 dT_2$ za istosmjerni izmjenjivač topline

$dQ=W_1dT_1=W_2dT_2$ za protustrujni izmjenjivač topline

Razmotriti ćemo najprije istosmjerni izmjenjivač topline.

Za tu se vrstu izmjenjivača topline temperaturna razlika između jednog i drugog fluida mijenja se duž izmjenjivača po zakonu

$$d(T_1-T_2)=dT_1-dT_2=-\frac{dQ}{W_1}-\frac{dQ}{W_2}=-\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)dQ=-mdQ\,, \qquad \textbf{(11.10.3)}$$

gdje je $m=\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}$.

S druge strane, na temelju relacije (11.10.2), količina topline koja je u izmjenjivaču topline prešla s fluida 1 na fluid 2 na površini dF iznosi

$$dQ=k(T_1-T_2)dF\,. \qquad \textbf{(11.10.4)}$$

Usporedbom relacija (11.10.3) i (11.10.4) proizlazi

$d(T_1-T_2)=-mk(T_1-T_2)dF$.

Ako temperaturnu razliku jednog i drugog fluida označimo sa θ, možemo pisati

$$\frac{d\theta}{\theta}=-mkdF\,.$$

Dobiveni izraz jednostavno je integrirati od F=0, gdje je $\theta=\theta'$ (razlika temperatura fluida na ulazu u izmjenjivač topline) do površine F, odnosno do odgovarajuće temperaturne razlike θ. Time dobivamo

$$\theta=\theta' e^{-mkF}\,. \qquad \textbf{(11.10.5)}$$

Očigledno je da se temperaturna razlika na kraju izmjenjivača, koju ćemo označiti sa θ'', dobiva uvrštenjem $F=F_{uk}$ u relaciju (11.10.5), gdje smo s F_{uk} označili ukupnu površinu izmjenjivača. Temperaturna razlika fluida na izlazu iz izmjenjivača topline može se prikazati u funkciji temperaturne razlike na ulazu u izmjenjivač θ' relacijom

$$\theta''=\theta' e^{-mkF_{uk}}\,. \qquad \textbf{(11.10.6)}$$

Za protusmjerni izmjenjivač topline temperaturne razlike izračunavaju se identičnim postupkom, te relacija (11.10.6) vrijedi i za taj tip izmjenjivača. Razlika je jedino u definiciji parametra m. Taj parametar, definiran relacijom (11.10.3), kod protusmjernog izmjenjivača topline iznosi

$$m=\frac{1}{W_1}-\frac{1}{W_2}\,.$$

Prosječna logaritamska temperaturna razlika

Prosječna logaritamska temperaturna razlika važan je parametar za praktični proračun izmjenjivača topline.

Prosječnu temperaturnu razliku u izmjenjivaču topline možemo dobiti iz postavke

$$\Delta T_{sr} F_{uk} = \int_{F=0}^{F_{uk}} \theta dF = \int_{F=0}^{F_{uk}} \theta' e^{-mkF} dF \,. \qquad \textbf{(11.10.7)}$$

ΔT_{sr} je dakle ona prosječna temperaturna razlika između dvaju fluida u izmjenjivaču topline uz koju bismo dobili istu količinu prenesene topline s jednog fluida na drugi kao uz stvarnu, prostorno promjenjivu, temperaturnu razliku.

Integracijom dobivamo

$$\Delta T_{sr} = \frac{\theta'}{mkF_{uk}} \left(1 - e^{-mkF_{uk}}\right). \qquad \textbf{(11.10.8)}$$

Budući da je $mkF_{uk}=-\ln(\theta''/\theta')$, a $e^{-mkF_{uk}} = \theta''/\theta'$, dobivamo nakon sređivanja

$$\Delta T_{sr} = \frac{\theta' - \theta''}{\ln\left(\frac{\theta'}{\theta''}\right)}. \qquad \textbf{(11.10.9)}$$

Ako uzmemo u obzir da su temperature fluida na ulazu u izmjenjivač topline označene s T_1' i T_2', a na izlazu iz izmjenjivača s T_1'' i T_2'', možemo izraz (11.10.9) pisati u obliku

-za istosmjerni izmjenjivač topline

$$\Delta T_{sr} = \frac{\left(T_1' - T_2'\right) - \left(T_1'' - T_2''\right)}{\ln\left[\frac{\left(T_1' - T_2'\right)}{\left(T_1'' - T_2''\right)}\right]} \qquad \textbf{(11.10.10)}$$

-za protusmjerni izmjenjivač topline

$$\Delta T_{sr} = \frac{\left(T_1' - T_2''\right) - \left(T_1'' - T_2'\right)}{\ln\left[\frac{\left(T_1' - T_2''\right)}{\left(T_1'' - T_2'\right)}\right]}. \qquad \textbf{(11.10.11)}$$

Ako su kod protusmjernog izmjenjivača topline vodene vrijednosti fluida jednake ($W_1=W_2$), odnosno ako je m=0, iz relacije (11.10.5) proizlazi da je $\theta=\theta'$=const. U tom je dakle slučaju temperaturna razlika između fluida u izmjenjivaču topline konstantna i jednaka razlici njihovih ulaznih temperatura, pa naravno i srednja logaritamska temperaturna razlika ima istu tu vrijednost (što je moguće neposredno provjeriti iz relacije 11.10.8).

Potrebno je primijetiti da su izrazi navedeni u ovom poglavlju približni, jer ne uzimaju u obzir temperaturnu ovisnost fizikalnih parametara materijala. Točniji proračuni mogući su primjenom numeričkih metoda.

Primjer 11.10.1

Hladnjak je predviđen da ohladi na sat 5 tona kondenzata s temperature 393K na temperaturu 323K. Za hlađenje stoji na raspolaganju $10m^3/h$ vode temperature 283K. Kolika je potrebna površina hladnjaka ako se radi o izmjenjivaču topline s paralelnim strujanjem fluida, a kolika kada bi to bio protusmjerni izmjenjivač?

Rezultantni koeficijent prijelaza topline između fluida je 1200W/m^{2}K.

Rješenje

Specifične topline i gustoće vode su približno,

-za topliji fluid (kondenzat) c=4.2kJ/kgK, ρ=970kg/m^3

-za rashladnu vodu c=4.18kJ/kgK, ρ=995kg/m^3.

Vodene vrijednosti fluida iznose

W_1=5000*4200/3600=5833 W/K

W_2=10*995*4180/3600=11553 W/K

Bilanca topline fluida je

$W_1(T_1'-T_1'')=W_2(T_2''-T_2')$.

Izlazna temperatura rashladne vode iz hladnjaka biti će,

$$T_2'' = T_2' + \frac{W_1}{W_2}\left(T_1' - T_1''\right) = 318\ K\ .$$

Srednja logaritamska temperaturna razlika:

-za istosmjerni izmjenjivač $\Delta T_{sr} = \frac{110-5}{\ln(22)} = 34\ K$.

-za protusmjerni izmjenjivač $\Delta T_{sr} = \frac{75-40}{\ln(1.875)} = 55.68\ K$.

Količina prenesene topline s jednog fluida na drugi iznosi

$Q=W_1(T_1'-T_1'')=kF\Delta T_{sr}$.

Tražena površina izmjenjivača dakle biti će

$$F = \frac{W_1\left(T_1' - T_1''\right)}{k\Delta T_{sr}}\ .$$

Uvrštenjem poznatih vrijednosti dobivamo,

-za istosmjerni izmjenjivač F=10m^2

-za protusmjerni izmjenjivač F=6.1m^2.

Primjer 11.10.1. je pokazao da srednje logaritamske temperaturne razlike unutar izmjenjivača topline možemo iskoristiti za jednostavno određivanje površine izmjenjivača u kojemu su zadane temperature fluida i ostale karakteristike potrebne za proračun.

Proračun temperatura fluida u izmjenjivačima poznate površine

Problem proračuna izmjenjivača topline možemo postaviti i na obrnuti način od ranije navedenog: Kod izmjenjivača topline poznate površine te poznatih ulaznih temperatura i karakteristika fluida potrebno je odrediti njihove izlazne temperature.

Za rješenje postavljenog problema iskoristiti ćemo relaciju (11.10.6)

$$\theta'' = \theta' e^{-mkF_{uk}}\ .$$

Najprije ćemo razmotriti istosmjerni izmjenjivač topline.

Iz relacije (11.10.6) slijedi,

$$\frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = e^{-mkF_{uk}} \text{ i dalje}$$

$$1 - \frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = 1 - e^{-mkF_{uk}} \text{, odnosno}$$

$$\left(T_1' - T_1''\right) + \left(T_2'' - T_2'\right) = \left(T_1' - T_2'\right)\left(1 - e^{-mkF_{uk}}\right).$$

Vezu između temperatura možemo odrediti i bilancom topline

$$T_2'' - T_2' = \frac{W_1}{W_2}\left(T_1' - T_1''\right).$$

Kombinacijom gornjih izraza dobivamo promjenu temperature fluida 1 u istosmjernom izmjenjivaču topline

$$T_1' - T_1'' = \delta T_1 = \left(T_1' - T_2'\right)\frac{1 - e^{-mkF_{uk}}}{1 + \frac{W_1}{W_2}}. \qquad \textbf{(11.10.12)}$$

Treba se prisjetiti da je kod tog izmjenjivača topline

$$m = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}.$$

Ako sada obratimo pažnju na protusmjerni izmjenjivač topline, relacija (11.10.6), suglasno slici 11.10.3, postaje

$$\frac{T_1'' - T_2'}{T_1' - T_2''} = e^{-mkF_{uk}}, \qquad \textbf{(11.10.13)}$$

s tim što je kod protusmjernog izmjenjivača topline,

$$m = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}.$$

Temperaturne razlike fluida u izmjenjivaču, kod kojeg se fluid 1 hladi, moraju, nadalje, udovoljiti bilanci topline

$$T_2'' - T_2' = \frac{W_1}{W_2}\left(T_1' - T_1''\right). \qquad \textbf{(11.10.14)}$$

Ako sada T_2'' iz relacije (11.10.14) uvrstimo u relaciju (11.10.13), u kojoj smo brojnik proširili s T_1', te ako promjenu temperature primarnog fluida T_1'-T_1'' označimo s δT_1, dobivamo izraz

$$\frac{-\delta T_1 + \left(T_1' - T_2'\right)}{\left(T_1' - T_2'\right) - \delta T_1 \frac{W_1}{W_2}} = e^{-mkF_{uk}}.$$

Nakon sređivanja dobivamo izraz koji povezuje promjenu temperature prvog fluida unutar izmjenjivača topline s razlikom ulaznih temperatura fluida i ostalim karakteristikama izmjenjivača:

$$\delta T_1 = \left(T_1^{'} - T_2^{'}\right)\frac{1 - e^{-mkF_{uk}}}{1 - \frac{W_1}{W_2}e^{-mkF_{uk}}}. \qquad \textbf{(11.10.15)}$$

Uz poznatu vrijednost δT_1, temperaturnu razliku δT_2, neposredno dobivamo iz relacije (11.10.14).

Primjer 11.10.2

Na raspolaganju je izmjenjivač topline površine 12m. Kroz taj izmjenjivač protječe 5t/h transformatorskog ulja, čija je ulazna temperatura 363K, a prosječna specifična toplina 2.2kJ/kgK i 8t/h rashladne vode ulazne temperature 295K. Kolike su temperature ulja i vode na izlazu iz izmjenjivača topline uz uvjet da je rezultantni koeficijent prijelaza topline 1000W/m^{2}K, i da izmjenjivač jednom koristimo kao istosmjerni, a drugi put kao protusmjerni?

Rješenje

Prosječna specifična toplina rashladne vode je oko 4.18kJ/kg.

Vodene vrijednosti izmjenjivača topline jesu:

W_1=3056W/K, W_2=9289W/K.

Za slučaj istosmjernog izmjenjivača topline

mkF_{uk}=5.22 $T_1^{'}$-$T_2^{'}$=68K.

Na temelju relacije (11.10.12) izlazi,

δT_1=50.9K i $\delta T_2=W_1/W_2\delta T_1$=16.7K.

Ako izmjenjivač upotrijebimo kao protusmjerni

mkF_{uk}=2.63, pa primjena relacije (11.10.15) daje, δT_1=64.6K, iz čega proizlazi δT_2=21.3K

Temperature ulja i rashladne vode na izlazu iz izmjenjivača topline jesu:

-kod istosmjernog izmjenjivača 312.1K i 311.7K

-kod protusmjernog izmjenjivača 298.4K i 316.3K

Iz ovog, kao i prethodnog primjera, možemo zaključiti da je izmjena topline između fluida iste ulazne temperature intenzivnija kod protusmjernog izmjenjivača topline (uz istu površinu izmjenjivača postižemo veće hlađenje, odnosno grijanje, fluida), pa je iz tog razloga taj tip izmjenjivača učinkovitiji.

Ako je jedan od fluida na temperaturi zasićenja, njegova temperatura u izmjenjivaču približno je konstantna, pa možemo smatrati da je vodena vrijednost W tog fluida neizmjerna. Uvrštenjem neizmjerne vrijednosti za W_1 ili za W_2 u relacije (11.10.12) i (11.10.15) izrazi se znatno pojednostavljuju, i nestaje razlika između istosmjernog i protusmjernog izmjenjivača.

Ako se, recimo, radi o isparivaču kod kojega fluid na primarnoj strani (fluid 1) isparava, možemo uzeti $W_1=\infty$. Temperatura će na primarnoj strani izmjenjivača topline biti konstantna, dakle, $T_1^{'}=T_1^{''}=T_1$, pa iz relacije (11.10.6) možemo neposredno odrediti izlaznu temperaturu sekundarnog fluida (smatrajući da taj fluid ulazi u izmjenjivač kod F=0)

$$T_2^{''} = T_1 - \left(T_1 - T_2^{'}\right)e^{-\frac{kF_{ul}}{W_2}} \qquad \textbf{(11.10.16)}$$

Kao drugi specijalni slučaj možemo navesti protusmjerni izmjenjivač topline kod kojeg su vodene vrijednosti fluida iste ($W_1=W_2=W$). U tom se slučaju relacija (11.10.15) svodi na funkciji tipa $\frac{0}{0}$, pa rješenje moramo tražiti u deriviranju brojnika i nazivnika te funkcije po W_1 ili W_2, i nakon toga u postavljanju graničnog prijelaza $W_1 \to W_2$.

Rješenje je

$$\delta T_1 = \left(T_1' - T_2'\right)\frac{1}{1+\frac{W}{kF_{uk}}}. \qquad \textbf{(11.10.17)}$$

Izmjenjivači topline s kombiniranim strujanjem fluida

U praksi se izmjenjivači topline grade s prostornim rasporedom struja primarnog i sekundarnog fluida koji odgovara kombinaciji istosmjernog, protusmjernog i poprečnog (unakrsnog) rasporeda. Na slici 11.10.1 ti su rasporedi shematski prikazani pod (d), (e), (f) i (g).

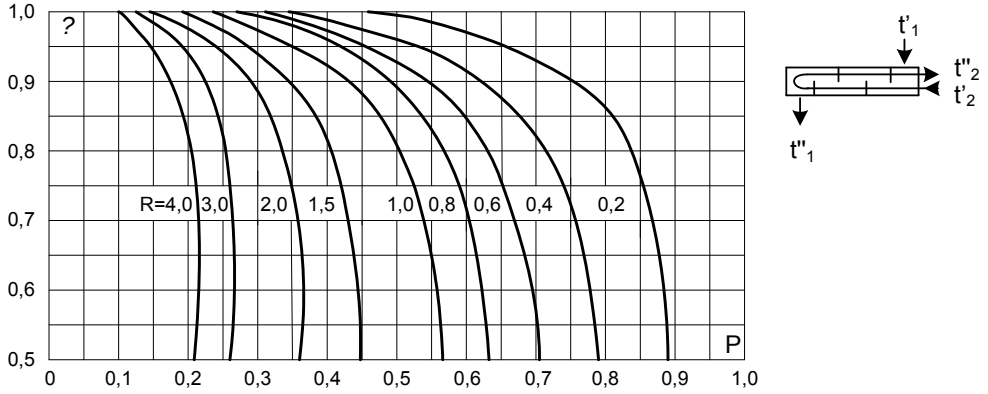
Točna matematička analiza izmjenjivača s takvim prostornim rasporedima struja fluida bila bi veoma kompleksna, i zbog toga nepraktična. Za praktičnu upotrebu izrađeni su dijagrami koji definiraju korekcijski faktor ε kojim treba pomnožiti prosječnu temperaturnu razliku protusmjernog izmjenjivača (koju daje relacija 11.10.11), da bi se dobila prosječna temperaturna razlika za razmatrani tip izmjenjivača.

Korekcijski faktor definiran je kao funkcija dvaju parametara:

$$P = \frac{T_2'' - T_2'}{T_1' - T_2'} \qquad \textbf{(11.10.18)}$$

Korekcijski faktor uvijek je manji od jedinice, što ukazuje da se toplina najefikasnije prenosi s jednog fluida na drugi u protusmjernom izmjenjivaču topline.

Korekcijske faktore za razne tipove izmjenjivača možemo naći u svim priručnicima koji se bave proračunom tih aparata. Kao primjer navest ćemo, koristeći se podatcima Mihejeva i Holmana [21], [13], na slici 11.10.4. podatke za korekcijske faktore izmjenjivača naznačenog na slici 11.10.1. pod (f).



Slika 11.10.4 Korekcijski faktor ε u ovisnosti o parametrima R i P

Primjer 11.10.3

Kolika bi bila potrebna površina izmjenjivača topline iz primjera 11.10.1. kada bi se, uz iste temperature fluida na ulazu i izlazu, radilo o izmjenjivaču topline prema slici 11.10.4?

Rješenje

Faktori P i R, prema relaciji (11.10.18) iznose:

$$P = \frac{318-283}{393-283} = 0.318 \qquad R = \frac{393-323}{318-283} = 2.0\,.$$

Iz slike 11.10.4. možemo za te vrijednosti P i R, očitati $\varepsilon \approx 0.85$.

Srednja logaritamska temperaturna razlika protusmjernog izmjenjivača topline u primjeru 11.10.1. je $\Delta T_{sr}=55.68K$.

U razmatranom primjeru korigirana prosječna temperaturna razlika biti će $\varepsilon\Delta T_{sr}=47.33K$.

U primjeru 11.10.1. izračunali smo potrebnu površinu protusmjernog izmjenjivača $F_{uk}=6.1m^2$.

Potrebna površina izmjenjivača topline koji je predmet razmatranja u ovom primjeru, uz nepromijenjene ulazne i izlazne temperature fluida, bila bi $6.1/\varepsilon=7.2m^2$.

Treba primijetiti da se kod proračuna pretpostavlja isti ukupni koeficijent prijelaza kao u protusmjernom izmjenjivaču topline.

Učinkovitost izmjenjivača topline

Kod idealnog izmjenjivača topline izlazna temperatura toplijeg fluida bila bi izjednačena s ulaznom strujom hladnijeg fluida. U tom bi slučaju prenesena toplina bila maksimalna i dana relacijom

$Q_{max}=W_1(T_1'-T_2')$.

Kod stvarnih izmjenjivača prenesena toplina Q manja je od maksimalne, pa možemo definirati stupanj učinkovitosti izmjenjivača topline s odnosom

$$\eta = \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{T_1' - T_1''}{T_1' - T_2'}\,. \qquad \textbf{(11.10.19)}$$

Usporedbu izmjenjivača topline sa stajališta njihove učinkovitosti ima smisla samo za izmjenjivače istih površina i istih vodenih vrijednosti fluida.

Primjer 11.10.4

Potrebno je usporediti istosmjerni i protusmjerni izmjenjivač topline iz primjera 11.10.2. s aspekta njihove učinkovitosti.

Rješenje

U primjeru 11.10.2. dobili smo uz ulazne temperature fluida 363K i 295K i izlazne temperature primarnog (toplijeg) fluida:

-kod istosmjernog izmjenjivača $T_1''=312.1K$

-kod protusmjernog izmjenjivača $T_1''=298.4K$.

Učinkovitost jednog i drugog izmjenjivača topline na temelju relacije (11.10.19) biti će

-za istosmjerni izmjenjivač $\eta = \frac{363-312.1}{363-295} = 0.749$

-za protusmjerni izmjenjivač $\eta = \frac{363 - 298.4}{363 - 295} = 0.95$.

Korištenjem pojma učinkovitosti izmjenjivača topline moguće je prednost protusmjernog izmjenjivača u odnosu na istosmjerni izmjenjivač (na koju je i ranije ukazivano) kvantificirati.

11.11 Prijelaz topline zračenjem (isijavanjem)

Kod energetskih postrojenja prijelaz topline se pretežno vrši vođenjem i konvekcijom. Te smo načine prijelaza topline upoznali u ranijim poglavljima.

Ponekad se javlja potreba za poznavanjem prijelaza topline zbog toplinskog zračenja tvari. Ovaj vid prijelaza topline češće se sreće kada su prisutne visoke temperatura, a toplina se vodi kroz medij male toplinske vodljivosti (vođenje topline kroz plin ili vakuum). S obzirom na manji značaj ovog načina prijelaza topline u nuklearnoj energetici, navesti ćemo samo neke njegove najbitnije značajke.

Sve zagrijane tvari emitiraju elektromagnetsko zračenje, čiji intenzitet ovisi o temperaturi. Valne dužine isijanog zračenja, koje se u ovom slučaju naziva toplinsko zračenje, odgovaraju vidljivom svjetlu (0.4μm do 0.8μm) i infracrvenom zračenju (0.8μm do 800μm).

Dio toplinskog toka E koji prima neko tijelo zračenjem može se u njemu apsorbirati, može se iz njega reflektirati i, ako se radi o transparetnoj tvari, može se i kroz njega transmitirati.

Ako apsorbirani, reflektirani i transmitirani dio toplinskog toka označimo redom s E_α, E_r i E_t, možemo pisati

$E= E_\alpha+E_r+E_t$.

Ako gornju relaciju podijelimo s E, dobivamo

$$A + R + T = 1 \qquad \textbf{(11.11.1)}$$

gdje je

$A=E_\alpha/E$ -apsorpcijski koeficijent

$R=E_r/E$ -refleksijski koeficijent

$T=E_t/E$ -transmisijski koeficijent

Tijelo kod kojeg bi apsorpcijski koeficijent bio jednak jedinici (dakle kod kojega su refleksijski i transmisijski koeficijenti jednaki nuli) nazivamo apsolutno crno tijelo. Takvo tijelo apsorbira cijelu energiju primljenu toplinskom zračenjem. Nasuprot tome, mogli bismo definirati i apsolutno bijelo tijelo, koje reflektira svu primljenu energiju. U stvarnosti sva su tijela "siva", jer se nalaze između ova dva ekstrema.

Toplinsko zračenje koje emitira neko tijelo bez da prima toplinsku energiju iz okoline zove se inherentno zračenje. Stefan i Bolzmann su postavili zakon koji izražava ovisnost inherentnog zračenja apsolutno crnog tijela E_0 o temperaturi u obliku,

$$E_0 = c_0\left(\frac{T}{100}\right)^4 \qquad W/m^2, \qquad \textbf{(11.11.2)}$$

gdje c_0 konstanta jednaka $5.67 W/(m^2K^4)$.

Raspodjela emitirane energije iz crnog tijela odgovara spektru koji karakterizira ovisnost emitirane energije i valne dužine zračenja o temperaturi. Što je temperatura tijela viša to se maksimum energije u spektru pomiče prema manjim valnim dužinama.

Inherentno zračenje, E_{inh}, sivih tijela dobiva se množenjem jednadžbe (11.11.2) s koeficijentom emisije ε, koji je kod sivih tijela manji od jedinice. Po toj definiciji ε je jednak odnosu inherentnog zračenja sivog i crnog tijela.

Ako tijelo prima energiju zračenja iz okoline emitirana je energija tijela zbroj inherentne i reflektirane energije. Tu ćemo emitiranu energiju označiti s E_{ef}, pa za neprozirno tijelo možemo pisati

$$E_{ef} = E_{inh} + E_r = E_{inh} + (1 - A)E\,, \qquad \textbf{(11.11.3)}$$

gdje je E energija zračenja koju tijelo prima iz okoline.

Zamislimo sada dvije paralelne neprozirne stjenke koje izmjenjuju toplinsku energiju isijavanjem. Svaka stjenka dakle istovremeno prima i emitira toplinsku energiju.

Odnos primljene i emitirane energije svake stjenke određen je Kirhoffovim zakonom koji glasi:

"Odnos inherentnog zračenja i apsorpcijskog koeficijenta je kod iste temperature jednak za sva tijela".

Taj je odnos dakle jednak inherentnom zračenju apsolutno crnog tijela kod te temperature (jer je za apsolutno crno tijelo A=1).

Iz Kirhoffovog zakona slijedi da za neko tijelo koje pri danoj temperaturi ima apsorpcijski koeficijent A_1 vrijedi, $A_1=E_{inh1}/E_0$, a to je identično koeficijentu ε. Ta postavka može se jednostavno interpretirati i zakonom održanja energije u stacionarnom stanju, iz kojeg slijedi da pri konstantnoj temperaturi tijelo mora emitirati apsorbiranu energiju.

U razmatranom primjeru dviju neograničenih ploha između kojih se topline prenosi zračenjem, možemo, na temelju jednadžbe (11.11.3), odrediti izmijenjenu energiju kao razliku efektivnih energija koje emitiraju jedna i druga ploha, dakle

$$q_p = E_{1ef} - E_{2ef}$$

gdje je

$$E_{1ef} = E_{1inh} - (1 - A_1)E_{2ef}$$

$$E_{2ef} = E_{2inh} - (1 - A_2)E_{1ef} \qquad \textbf{(11.11.4)}$$

Ako se sada prisjetimo da su, prema Kirhoffovom zakonu, koeficijenti A_1 i A_2 identični s ε_1 i ε_2, te da se prema Stefan-Boltzmannovom zakonu inherentne energije mogu izraziti pomoću temperatura i odgovarajućih koeficijenata emisije, možemo iz sustava jednadžbi (11.11.4), nakon eliminacije E_{1ef} i E_{2ef} dobiti

$$q_p = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \quad W/m^2 \qquad \textbf{(11.11.5)}$$

Ako sada uzmemo drugi slučaj izmjene topline zračenjem kod kojega se tijelo 1 površine F_1 i temperature T_1 nalazi unutar tijela 2 čija je površina F_2 i temperatura T_2, dobivano sličnim postupkom relaciju koja daje količinu izmjenjene topline:

$$Q = \frac{c_0 F_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \quad W. \qquad \textbf{(11.11.6)}$$

Numeričke podatke o koeficijentima emisije tvari možemo naći u priručnicima. Radi primjera, u tablici 11.11.1. dane su, koristeći podatke Mihejeva [21] vrijednosti koeficijenta ε za neke materijale.

Tablica 11.11.1 Koeficjenti emisije ε za površinsko zračenje

Površina	Temperatura K	ε
aluminij poliran	500-850	0.039-0.057
aluminij oksidiran	470-870	0.11-0.19
bakar poliran	293	0.03
bakar oksidiran	470-870	0.57-0.87
željezo sjajno	700-1300	0.144-0.377
željezo oksidirano	470-870	0.64-0.78
opeka	293	0.93
krovna ljepenka	293	0.93
tvrda crna guma	293	0.945
porculan	293	0.92
šamot	1500	0.60

Primjer 11.11.1

Dvije neograničeno velike paralelne plohe su na temperaturama 900K i 300K. Toplija ploha je iz željeza korodirane površine, a druga iz opeke. Kolika količina topline prelazi zračenjem između tih ploha?

Rješenje

Koeficijenti emisije željeza (ε_1)i opeke(ε_2), prema tablici 11.11.1. su, 0.78 i 0.93. Iz relacije (11.11.5) nakon uvrštenja danih vrijednosti proizlazi,

q_p=27069W/m^2.

Primjer 11.11.2

Potrebno je odrediti gubitak topline isijavanjem iz čelične cijevi promjera 70mm dužine 3m na temperaturi 500K. Cijev je smještena:

a)u velikoj prostoriji sa zidovima iz cigle na temperaturi 300K,

b)u kanalu iz cigle presjeka 0.3*0.3m i površinskom temperaturom 300K.

Rješenje

Prema tablici 11.11.1. koeficijenti emisije jesu:

-za oksidirani čelik $\varepsilon=0.79$

-za ciglu $\varepsilon=0.93$.

Površina cijevi $F_1=0.66m^2$.

U slučaju a) površina cijevi je zanemariva prema površini prostorije ($F_1<<F_2$), pa se relacija (11.11.6) svodi na

$$Q = c_0 F_1 \varepsilon_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Uvrštenjem proizlazi,

$Q=5.67*0.66*0.79*(5^4-3^4)=1608W$.

U slučaju b) je odnos površina cijevi i kanala $F_1/F_2=0.66/3.6=0.183$, pa relacija (11.11.6) daje

$Q=1591W$.

Zadaci uz poglavlje 11.

1) Temperatura unutrašnjih površina betonskog zida neke prostorije održava se grijanjem na 291K. Temperatura vanjskih površina zida je približno na temperaturi okoline, te iznosi 278K. Debljina zida je 35cm, a ukupna površina zida u dodiru s okolinom 40m. Koliko se kWh dnevno može uštedjeti na grijanju ove prostorije ako vanjska strana zida obloži slojem šljakaste vune debljine 6cm? Kolika je u tom slučaju temperatura vanjskih površina betonskog zida?

2) Neki parovod izveden je iz čelične cijevi unutarnjeg promjera 150mm s debljinom stjenke 5mm koja je obložena slojem staklene vune. Temperatura unutarnje površine cijevi je 423K. Parovod prolazi kroz prostoriju temperature 305K. Kod projektiranja parovoda traženo je da temperatura na površini izolacije ne bude viša od 330K. Kolika mora biti debljina izolacije parovoda da udovolji tom zahtjevu, ako je koeficijent prijelaza topline s površine izolacije na okolni zrak $8W/m^2K$? Kolika je temperatura na unutarnjoj strani izolacije i koliko iznose gubici topline po metru dužine parovoda?

3) Kolikom se strujom može opteretiti goli nadzemni bakreni vodič nazivnog presjeka 300mm i specifičnog otpora $0.06\Omega/km$, ako je koeficijent prijelaza topline s površine vodiča na zrak $10W/m^2K$, temperatura zraka 310K, a temperatura materijala vodiča ograničeno na 370K?

4) Temperatura površine obloge gorivog elementa nuklearnog reaktora održava se na 650K. Materijal goriva je UO_2, a materijal obloge legura cirkonija (Zircalloy 2, $\lambda=22W/mK$). Promjer gorivne šipke je 5mm, debljina obloge 0.6mm, a širina zazora između gorive šipke i obloge

0.055mm. Maksimalna temperatura goriva ograničena na je 2348K. Kolika je dozvoljena proizvodnja toplinske snage po jedinici dužine gorive šipke? Za koliko bi trebalo smanjiti specifičnu proizvodnju snage ako u toku pogona dođe do povećanja zazora na 0.1mm?

5) Cijev od nehrđajućeg čelika vanjskog promjera 10mm i unutarnjeg promjera 7mm provodi struju od 1000A. Kolika je razlika temperature između unutarnje i vanjske površine cijevi uz uvjet da se toplina odvodi samo kroz vanjsku površinu?

6) Spremnik s ravnim paralelnim stjenkama razmaknutim 50cm ispunjen je vodom i služi kao dio zaštite okoline od γ-zračenja. Obje stjenke spremnika su na približno istoj temperaturi. Ako kroz bočnu stranu spremnika propustimo snop γ-zraka energije 3MeV i intenziteta 10^{12}fotona/cm^{2}s, koliko će biti prosječno povišenje temperature vode u spremniku nakon jednog sata?

7) Bakrena sabirnica presjeka 120*10mm, položena u zraku provodi struju od 2000A. Koeficijent prijelaza topline s sabirnice na zrak je 7W/m^{2}s. Odrediti raspodjelu temperature unutar sabirnice i iznos maksimalne temperature bakra.

8) Neka je Venturijeva sapnica s odnosom presjeka 0.65 priključena na cjevovod unutarnjeg promjera 150mm. Kroz cjevovod protječe voda temperature 302K. Na sapnici je izmjerena razlika tlaka od 2kPa. Koliki je volumni i maseni protok vode kroz sapnicu? Kakva se promjena u izmjerenom protoku javlja ako se temperatura vode, uz isti volumni protok, promjeni na 325K?

9) U posudi nuklearnog reaktora nalazi se rashladna voda pod tlakom 15.7MPa i na temperaturi koja je 20K niža od temperature zasićenja. Uslijed loma cijevi za instrumentaciju unutarnjeg promjera 8mm dolazi do istjecanja rashladnog fluida u reaktorsku zgradu. Koliko bi se kilograma fluida maksimalno moglo izgubiti iz rashladnog sustava reaktora u toku 15 minuta nakon nastanka kvara?

10) U nekom izmjenjivaču topline voda temperature 350K i tlaka 5MPa protječe brzinom 3.5m/s u prstenastom zazoru dužine 5m između koncentričnih cijevi. Promjeri prstenastog zazora su 18mm i 12mm. Koliki pad tlaka nastaje uslijed protoka vode?

11) U nekom se rashladnom krugu s cjevovodom promjera 150mm pumpom održava maseni protok vode od 1300kg/m^{2}s. Tlak vode je 12MPa, a njezina temperatura 580K. Uslijed pada tlaka u rashladnom krugu na 8MPa došlo je do djelomičnog isparavanja vode i nastanka smjese voda-vodena pare s kvalitetom χ=8%. Voda je na temperaturi zasićenja.

Uz pretpostavku da je nastala smjesa vode i pare homogena ocijeniti postotnu promjenu potrebne snage za održanje istog masenog protoka fluida.

12) Voda temperature 350K protječe brzinom 2.5m/s neizoliranim čeličnim cjevovodom unutarnjeg promjera 250mm i debljinom stjenke 5mm. Cjevovod se s vanjske strani hladi prirodnom cirkulacijom zraka temperature 288K. Koliki je gubitak topline po metru dužine cjevovoda?

13) Cjevovod centralnog grijanja koji provodi toplu vodu temperature 360K prolazi kroz prostoriju u kojoj je temperatura zraka 290K. Brzina strujanja vode u cjevovodu je 1.5m/s. Cjevovod je izveden iz čelične cijevi unutarnjeg promjera 60mm i debljine stjenke 3mm, koja je izolirana 3cm debelim slojem staklene vune. Koliki je koeficijent prijelaza topline s površine cjevovoda na zrak i koliko se topline gubi po metru dužine cjevovoda?

14) Veliki cilindrični spremnik promjera 5m i visine 8m sadrži kondenzat temperature 335K. Prosječna temperatura okolnog zraka, koji hladi spremnik prirodnom cirkulacijom, je 290K. Koliko se topline gubi kroz cilindrični plašt spremnika?

15) Horizontalno položena električki grijana cijev promjera 12mm služi za zagrijavanje vode u bazenu na približno atmosferskom tlaku. Kolika mora biti dužina grijaće cijevi ako, uz zanemarivi gubitak topline, želimo u uvjetima prirodne cirkulacije zagrijati 50l/h vode od 285k na 340K, a temperaturu površine grijaće cijevi ograničimo na 365K?

Koliki je prosječni koeficijent prijelaza topline s grijače cijevi na vodu?

16) Kolika bi trebala biti površina grijača iz zadatka 15, ako dopustimo da je temperatura grijača 10K viša od temperature zasićenja, tj. ako se grijanje vrši u uvjetima bazenskog ključanja?

17) U nekom eksperimentalnom uređaju za proučavanje prijelaza topline u reaktoru grije se električnim putem čelična šipka promjera 10mm koncentrično smještena u cijevi unutarnjeg promjera 15mm. U zazoru između cijevi i grijaće šipke struji voda brzinom 3m/s. Parametri vode : tlak 5MPa, pothlađenje na ulazu u rashladni kanal 30K. Snaga grijaće šipke je 25kW/m.

Koliki je koeficijent prijelaza topline u kanalu u zoni prije i nakon početka mjehuričastog ključanja? Na kojoj visini u rashladnom kanalu počinje ključanje fluida? Kako se nakon toga mijenja volumni i težinski sadržaj pare duž kanala?

Skicirati promjenu površinske temperature grijača duž rashladnog kanala, u zoni konvektivnog prijelaza topline i u zoni mjehuričastog ključanja!

18) Kako se mijenja kritični toplinski tok u eksperimentalnom uređaju opisanom u zadatku 17 u ovisnosti o položaju duž rashladnog kanala? Kolika bi trebala biti snaga grijača da se radni toplinski tok izjednači s kritičnim na visini 80cm od ulaza u rashladni kanal?

19) Do kakve bi promjene generirane snage reaktora koji je obrađen u primjeru 11.9.1, moralo doći ako se u njemu, zadržavajući specificirana ograničenja, tlak rashladnog fluida smanji s 15MPa na 12MPa?

20) Isparivač, predviđen da proizvodi zasićenu paru tlaka 1MPa izveden je kao izmjenjivač topline u kojem voda isparava u plaštu, a topliji fluid cirkulira unutar cijevnog snopa ogrjevne površine $12m^2$. Ulazna temperatura toplijeg fluida je 420K, a protok $15m^3/h$. Temperatura vode u plaštu izmjenjivača je konstantna i jednaka temperaturi zasićenja.

Kolika je proizvodnja pare u tom isparivaču i kolika izlazna temperatura zagrijanog fluida?

Ukupni koeficijent prijelaza topline u isparivaču je $3400W/m^2K$.

21) Parogenerator u nekom nuklearnom energetskom postrojenju ćemo pojednostavljeno zamisliti kao isparivač u kojemu 4500t/h vode ulazne temperature 590K prolazi unutar cijevnog snopa površine prijelaza topline 4100m^2. U sekundarnu stranu parogeneratora ulazi kondenzat s tlakom 5.6MPa na temperaturi zasićenja. Ukupni koeficijent prijelaza topline u parogeneratoru je 5100W/m^{2}K. Kolika je izlazna temperatura primarnog fluida i proizvodnja pare u takvom parogeneratoru?

22) Električni grijač izrađen iz sjajnog čelika promjera 15mm smješten koncentrično unutar cijevi od poliranog aluminija unutarnjeg promjera 45mm. Temperatura grijača je 520K, a temperatura aluminijske cijevi se održava na 350K. Koliki je prijelaz topline s grijača na aluminijsku cijev po metru dužine?

Reference uz poglavlje 11.

[1] C. H. Bonilla, Voprosi teploperedači v jadernoj tehnike (prijevod s engleskog), Gosizdat, Moskva, 1961.

[2] F. Bošnjaković, Nauka o toplini I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1950.

[3] G. N. Duljnjev, Teplo i massoobmen v radioelektronnoi apparature, Višaja škola, Moskva, 1984.

[4] V. P. Isachenko i dr., Heat transfer (prijevod s ruskog), Mir Publishers, Moscow, 1977.

[5] A. Alujevič i dr., Toplotni procesi v jedrskih reaktorjih, Inštitut J. Štefan, Ljubljana, 1976.

[6] S. N. Šorin, Teploperedača, Višaja škola, Moskva, 1964.

[7] M. A. Stirikovič i dr., Teplomassoobmen i gidrodinamika v dvuhfaznih potokah atomnih električeskih stancij, Izdavateljstvo nauk, Moskva, 1982.

[8] H. Hausen, Teploperedača pri protivotoke, prjamotoke i perekresnom toke (prijevod s njemačkog), Energoizdat, Moskva, 1981.

[9] N. N. Ponomarev-Stepnoj i dr., Teplovidelenie v jadernom reaktore, Energoatomizdat, Moskva, 1985.

[10] M. Fishenden, O. A. Saunders, An Introduction to Heat Transfer, Oxford Press, London, 1957.

[11] V. Okhotin i dr., Fundamentals of Heat Transfer (prijevod s ruskog), Mir Publishers, Moscow, 1987.

[12] H. Grober, S. Erk, Osnovi učenija o teploobmene (prijevod s njemačkog), Izdavateljstvo inostrannoj literaturi, Moskva, 1958.

[13] J. P. Holman, Heat Transfer, McGraw Hill, Int Student Edition, Tokyo, 1976.

[14] L. S. Tong, Boiling Heat Transfer and Two Phase Flow, Robert E. Krieger Publ. Co. Huntigton, New York, 1975.

[15] M. A. Mihejev, I. M. Mihejeva, Kratkij kurs teploperedači, Gosenergoizdat, Moskva, 1960.

[16] D. Feretić, Toplinski procesi u nuklearnom reaktoru, Liber, Zagreb, 1981.

[17] L. S. Tong, Boiling Crisis and Critical Heat Flux, TID 25887, USAEC, 1972.

[18] Thermal Conductivity of Uranium Dioxide, IAEA Tech. Rep. Series 59, 1966.

[19] S. Glasstone, A. Sesonke, Nuclear Reacton Engineering, Chapter 6, Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1967.

[20] B. S. Petuhov i dr., Teploobmen v jadernih energetičeskih ustanovkah, Energoizdat, Moskva, 1986.

[21] M. Mikheyev, Fundamentals of Heat Transfer (prijevod s ruskog), Peace Publishers, Moscow, 1956.

[22] M. M. El-Wakil, Nuclear Heat Transport, Int. Textbook Co., Scranton PA, 1971.

[23] L. N. Poljanin i dr., Teploobmen v jadernih reaktorah, Energoizdat, Moskva, 1982.

[24] R. Alami, P. Ažeron, Otvod i preobrazovanie tepla v jadernih reaktorah (prijevod s francuskog), Gosatomizdat, Moskva, 1961.

[25] P. L. Kirillov i dr., Spravočnik po teplogidravličeskim rasčetam (jadernie reaktori, teploobmenniki, parogeneratori), Energoatomizdat, Moskva, 1984.

[26] J. N. Kuznjecov, Teploobmen v probleme bezopasnosti jadernih reaktorov, Energoatomizdat, Moskva, 1989.

[27] L. S. Tong, J. Weisman, Thermal Analysis of Pressurised Water Reactors, American Nuclear Society, Illinois, 1979.

[28] J. M. Kay, An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer, Cambridge University Press, 1963.

[29] J. R. Lamarsh, Introduction to Nuclear Engineering, Chapter 8, Addison Wesley Publ. Co., Reading PA, 1975.

[30] D. D. Lanning i dr., Statistical Analysis and Modeling of Gap Conductance Data for Reactor Fuel Rods Containing UO_2 Pellets, BNWL-1832, Battele Northwest Lab., 1974.

[31] D. S. Rowe, Cross Flow Mixing Between Parallel Flow Channel During Boiling, BNWL-371P71, 1967.

[32] L. Bernath, A Theory of Local Boiling Burnouts and Its Application to Existing Data, Chem. Eng. Prog. Symp. Ser. 56 (30), 1960.

[33] O. E. Dwyer i dr., Heat Transfer to Liquid Metals Flowing Turbulently and Longitudinally through Closely Spaced Fuel Bundles, Nucl. Eng. and Design 23, (1972).

[34] Tehnički priručnik, Rade Končar, Zagreb, 1963.

[35] R.C.Dorf,The Engineering Handbook,CRC/IEEE Press,1996

[36] R.Reid, The Properties of Gases&Liquids, MCGraw Hill,1989

[37] M.N.Ozisik,Heat Transfer,McGraw Hill, Singapore 1985

[38] D.Pitts,Heat Transfer,Shaum's Outline Series,Mc Graw Hills,USA 1998

[39] Thermal Conductivity of Uranium Oxide,IAEA Tech.Doc.Rep.Series 69,1966)

[40] R.Harshbarger,J.Reynolds, Finite Mathematics,Heath&Co.Lexington 1989

[41] Tehnička enciklopedija HAZU ,5. svezak,"Elektrotehnički materijali"

[42] C.L.Beuken i dr.,Elektrowarme,Union Internationale d`Electrothermie,Verlag W.Girardet, Essen,1974)

[43] Elektrotehnički priručnik "Rade Končar",peto izdanje 1991

[44] A.Metaxas,R.Meretith, Microwave Heating, Peter Pelegrinius Ltd (UK)1982

Dodatak 1.

Tablica D.1. Nuklearna svojstva kemijskih elemenata (*)

Kemijski element	Simbol	Redni broj	Atomska masa	Gustoća	Mikroskopski udarni presjeci	
					σ_a [$10^{-28}m^2$]	σ_s [$10^{-28}m^2$]
vodik	H	1	1.0079	plin	0.332	
helij	He	2	4.0026	plin	0.05	
litij	Li	3	6.939	530	70.7	
berilij	Be	4	9.0122	1850	0.0092	6.14
bor	B	5	10.811	2300	759	3.6
ugljik	C	6	12.0111	1600	0.0034	4.75
dušik	N	7	14.0067	plin	1.85	10.6
kisik	O	8	15.9994	plin	0.00027	3.76
flour	F	9	18.9984	plin	0.0095	4.0
neon	Ne	10	20.183	plin	0.038	2.42
natrij	Na	11	22.9898	970	0.530	3.2
magnezij	Mg	12	24.312	1740	0.063	3.42
aluminij	Al	13	26.9815	2699	0.230	1.49
silicij	Si	14	28.086	2330	0.160	2.2
fosfor	P	15	30.9738	1820	0.180	
sumpor	S	16	32.064	2070	0.520	0.975
klor	Cl	17	35.453	plin	33.2	
argon	Ar	18	39.948	plin	0.678	0.644
kalij	K	19	39.102	860	2.10	1.5
kalcij	Ca	20	40.08	1550	0.43	
skandij	Sc	21	44.956	2500	26.5	24.0
titan	Ti	22	47.90	4510	6.1	4.0
vandalij	Va	23	50.942	6100	5.04	4.93
krom	Cr	24	51.996	7190	3.10	3.80
mangan	Mn	25	54.938	7430	13.30	2.10
željezo	Fe	26	55.847	7870	2.55	10.90
kobalt	Co	27	58.9332	8800	37.20	6.70
nikal	Ni	28	58.710	8900	4.48	17.30
bakar	Cu	29	63.540	8960	3.79	7.90
cink	Zn	30	65.370	7133	1.10	4.20
galij	Ga	31	69.720	5910	2.90	6.50
germanij	Ge	32	72.590	5360	2.30	7.50
arsen	As	33	74.9216	5730	4.30	7.0
selen	Se	34	78.960	4810	11.70	9.70
brom	Br	35	70.909	3120	6.80	6.10
kripton	Kr	36	83.800	plin	25.0	7.50
rubidij	Rb	37	85.470	1530	0.37	6.20
stroncij	Sr	38	87.620	2600	1.21	10.0
itrij	Y	39	88.906	5510	1.28	7.60
cirkonij	Zr	40	91.220	6500	0.185	6.40

niobij	Nb	41	92.906	8570	1.15	
molibden	Mo	42	95.940	10200	2.65	5.80
tehnicij	Tc	43	99.0		19.0	
rutenij	Ru	44	101.07	12200	2.56	
rodij	Rh	45	102.905	12410	150.0	
paladij	Pa	46	106.400	12000	6.90	5.0
srebro	Ag	47	107.870	10490	63.60	
kadmij	Cd	48	112.400	8650	2450.0	5.6
indij	In	49	114.820	7310	193.50	
kositar	Sn	50	118.690	7298	0.63	
antimon	Sb	51	121.750	6620	5.40	4.2
telur	Te	52	127.600	6240	4.70	
jod	I	53	126.9044	4930	6.20	
ksenon	Xe	54	131.300	plin	24.50	4.3
cezij	Cs	55	132.905	1900	29.0	
barij	Ba	56	137.340	3500	1.20	
lantan	La	57	138.910	6190	9.0	9.3
cer	Ce	58	140.120	6780	0.63	4.7
praseodim	Pr	59	140.907	6780	11.50	3.3
neodim	Nd	60	144.240	6980	50.50	16.0
prometij	Pm	61	(145)			
samarij	Sm	62	150.350	6930	5800.0	
europij	Eu	63	151.960	5220	4600.0	8.0
gadolinij	Gd	64	157.250	7950	49000.0	
terbij	Tb	65	158.925	8330	25.5	20.0
disprozij	Dy	66	162.500	8560	930.0	100.0
holmij	Ho	67	164.930	8760	66.5	9.4
erbij	Er	68	167.260	9160	162.0	11.0
tulij	Tm	69	168.934	9350	103.0	12.0
iterbij	Yb	70	173.040	7010	36.6	25.0
lutecij	Lu	71	174.970	9740	77.0	8.0
hafnij	Hf	72	178.490	13360	102.0	8.0
tantal	Ta	73	180.948	16600	21.0	6.2
volfram	W	74	183.850	19200	18.5	
renij	Re	75	186.200	20000	88.0	11.3
osmij	Os	76	190.200	22500	15.3	
iridij	Ir	77	192.200	22500	426.0	14.0
platina	Pt	78	195.090	21450	10.0	11.2
zlato	Au	79	196.967	19320	98.8	
živa	Hg	80	200.590	13550	375.0	
talij	Tl	81	204.370	11850	3.4	9.7
olovo	Pb	82	207.190	11340	0.170	11.4
bizmut	Bi	83	208.980	9800	0.0033	
polonij	Po	84	210.09	9510		
astat	At	85	(210)			
radon	Rn	86	(222)			
francij	Fr	87	(223)			

radij	Ra	88	226.0254	5000	11.5	
aktanij	Ac	89	227.0			
torij	Th	90	232.380	11710	7.40	12.67
proktanij	Pa	91	231.0359		210.0	
uran	U	92	238.030	19100	σ_a=7.59 σ_f=4.19	8.90
neptunij	Np	93	(237)			
plutonij	Pu	94	239.0522	19600	σ_a=1011.3 σ_f=742.5	7.70

*Elementi su poredani po rastućim rednim brojevima.

2. Podaci se odnose na kemijske elemente s prirodnim sadržajem izotopa.

3. Mikroskopski udarni presjeci dani su za neutrone energije 0.025eV (odnosno brzine 2200m/s).

Tablica D.2. Podaci o nekim izotopima značajnim za nuklearnu energetiku (*)

Izotop	Sadržaj %	vrijeme poluraspada	Mikroskopski udarni presjeci	
			σ_a [$10^{-28}m^2$]	σ_s [$10^{-28}m^2$]
^{1}H	99.985		0.332	
^{2}H	0.015		0.00053	
^{3}H		12.33 god.		
^{6}Li	7.42		940.0	
^{7}Li	92.58		0.037	
^{10}B	19.60		3837.0	
^{11}B	80.40		0.0055	
^{12}C	98.89		0.0084	
^{13}C	1.11		0.0009	
^{14}C		5730 god.		
^{14}N	99.63		1.88	
^{15}N	0.37		0.000024	
^{16}O	99.759		0.000178	
^{17}O	0.037		0.235	
^{18}O	0.204		0.00016	
^{135}I		6.7 sati		
^{135}Xe		9.17 sati	2650000.0	
^{149}Pm		53.1 sati		
^{149}Sm	13.89		41000.0	
^{232}Th	100	$1.41*10^{10}$ god.	7.40	
^{233}Th		22.2 min.	1515.0	
^{233}U		$1.55*10^{5}$ god.	578.8	531.1
^{234}U	0.0057	$2.47*10^{5}$ god.	100.2	
^{235}U	0.72	$7.13*10^{8}$ god.	680.8	582.2
^{236}U		$2.34*10^{7}$ god.	5.2	
^{238}U	99.27	$4.51*10^{9}$ god.	2.7	
^{239}U		23.5 min.	36.0	14.0
^{239}Pu		$2.239*10^{4}$ god.	1011.3	742.5
^{240}Pu		6540	289.5	0.03
^{241}Pu		15 god.	1377.0	1009.0
^{242}Pu		$3.87*10^{5}$ god.	18.5	0.2

Napomene:

1. Sadržaj izotopa odnosi se na postotni sadržaj atoma stabilnih ili dugoživućih izotopa u kemijskom elementu

2. Mikroskopski udarni presjeci za apsorpciju i fisiju dani su za neutrone energije 0.025eV.

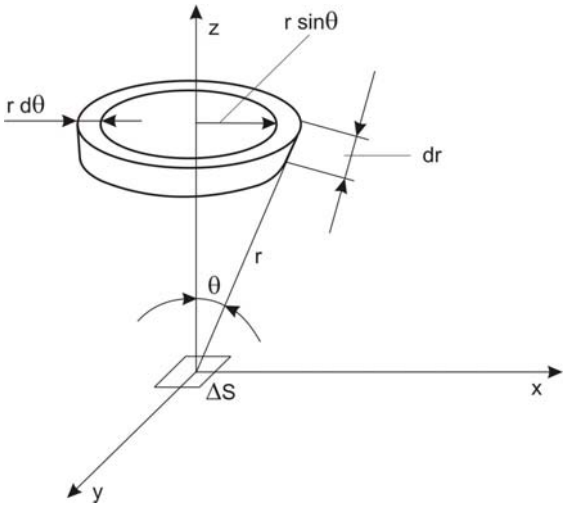
(*) Adaptirano prema BNL-325, 3rd. ed., 1973.

Dodatak 2.

Izvod Fickova zakona

Zamisliti ćemo neograničeni volumen moderatora kroz koji difundiraju neutroni i pretpostaviti da materijal moderatora udovoljava uvjetima definiranim u poglavlju 6.1. (uvjeti koji dozvoljavaju redukciju transportne jednadžbe neutrona u difuzijsku jednadžbu).

Neka se unutar materijala nalazi element volumena prikazan slikom D.2.1.



Slika D.2.1. Geometrijski model za izvod Fickova zakona

Odabrani element volumena dV ima oblik šupljeg stošca koji je koaksijalan s osi z, a zaprema prostor između polumjera r i r+dr te između kutova θ i θ+dθ.

U ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava, u ravnini x-y, nalazi se malena površina ΔS.

Potrebno je utvrditi broj neutrona dn koji nakon elastičnih sudara unutar volumena dV prolaze kroz površinu ΔS.

Element volumena dV se suglasno slici D.2.1. može izraziti kao

$dV=[2r\pi\sin(\theta)](rd\theta)dr=2r^2\pi\sin(\theta)drd\theta.$

Broj nuklearnih reakcija elastičnog sudara unutar volumena dV biti će

$\phi\Sigma_s[2r^2\pi\sin(\theta)drd\theta].$

Od toga će broja proći kroz površinu ΔS dio neutrona koji ovisi o faktorima: $\frac{\Delta S\cos(\theta)}{4r^2\pi}$ (odnos projekcije površine ΔS na površinu kugle polumjera r i površine kugle) i $e^{-\Sigma_s r}$.

Prvi faktor uzima u obzir pretpostavku o izotropnom raspršenju neutrona u laboratorijskom sustavu, a drugi vjerojatnost da će neutron na putu između volumena dV i površine ΔS biti podvrgnut dodatnom sudaru s jezgrama atoma moderatora.

Na temelju danih primjedbi moguće je odrediti traženi broj neutrona dn pomoću izraza

$$dn=(\phi\Sigma_s)\left[2r^2\pi\sin(\theta)drd\theta\right]\frac{\Delta S\cos(\theta)}{4r^2\pi}e^{-\Sigma_s r}. \qquad \textbf{(D.2.1)}$$

Neutronski tok ϕ ovisi o položaju u prostoru, tj. ϕ=ϕ(x, y, z). Prostorna funkcija neutronskog toka može se razviti u Taylorov red oko ishodišta koordinatnog sustava:

$$\phi = \phi_0 + x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 + \ldots$$

Jedna od pretpostavki za primjenjivost difuzijske jednadžbe je spora promjena neutronskog toka u prostoru. Na osnovi te pretpostavke dozvoljeno je zanemariti više članove u razvoju reda. Nadalje, smještaj plohe ΔS na ravninu x-y uvjetuje da jedino komponenta neutronskog toka u z smjeru utječe na prolaz neutrona kroz tu plohu. Zbog toga se funkcija koja određuje promjenu neutronskog toka svodi na

$$\phi = \phi_0 + z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 + = \phi_0 + r\cos(\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 . \qquad \textbf{(D.2.2)}$$

Sada možemo postaviti pitanje: Koliki je broj neutrona koji nakon elastičnog sudara unutar bilo kojeg elementa volumena na pozitivnoj strani osi z (tj. unutar pozitivnog poluprostora) prolaze kroz jediničnu plohu u ravnini x-y?

Rješenje dobivamo uvrštenjem izraza (D.2.2) u jednadžbu (D.2.1) te, nakon dijeljenja sa ΔS, integracijom u granicama od r=0 do r=∞ i od θ=0 do θ=π/2.

Dakle

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_+ = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\phi_0 + r\cos(\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0\right]\left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{-\Sigma_s r}\right)dr\,d\theta .$$

Proizvoljno malena površina ΔS zamijenjena je sa diferencijalnom površinom dS.

Korištenjem rješenja integrala,

$$\int_0^{\infty} e^{-\Sigma_s r}dr = \frac{1}{\Sigma_s},\ \int_0^{\infty} r e^{-\Sigma_s r}dr = \frac{1}{\Sigma_s^2},\ \int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta = \frac{1}{2},\ \int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{3}$$

slijedi,

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_+ = \frac{\phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 . \qquad \textbf{(D.2.3)}$$

Na isti način možemo odrediti i broj neutrona koji kroz jediničnu površinu prolaze nakon elastičnog sudara unutar negativnog poluprostora (tj. broj neutrona koji kroz tu površinu prolaze u smjeru +z).

U tom se slučaju kod integracije izraza (D.2.1) mijenjaju samo granice promjene kuta θ, od π do π/2. Zbog toga integral $\int\cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta$ mijenja predznak (iznosi -1/3).

Rezultat integracije je

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_- = \frac{\phi}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 . \qquad \textbf{(D.2.4)}$$

Sada možemo konačno odrediti rezultantni broj neutrona koji u procesu difuzije prolaze kroz jediničnu površinu u smjeru +z. Taj se broj dobiva kao

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)_- - \left(\frac{dn}{ds}\right)_+ = -\frac{1}{3\Sigma_s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 = -D\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 ,$$

gdje je parametar D, poznat kao difuzijska konstanta neutrona, određen izrazom

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s}. \qquad \textbf{(D.2.6)}$$

Očigledno je da će se istim postupkom u pravokutnom koordinatnom sustavu moći dobiti ekvivalentne izraze i za smjerove x i y. Ili općenitije, ako je jedinična površina postavljena proizvoljno o prostoru, rezultantni broj neutrona, koji u procesu difuzije prolaze kroz tu površinu, može biti određen iz izraza

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right) = \vec{I} = -D\,\mathrm{grad}\left(\vec{\phi}\right), \qquad \textbf{(D.2.5)}$$

gdje je $\vec{I}$ vektor neutronske struje u smjeru negativnog gradijenta neutronskog toka (neutronska struja definirana je u poglavlju 2.11.).

Izraz (D.2.5) poznat je kao Fickov zakon. Taj zakon daje temelj za formuliranje difuzijske jednadžbe neutrona, kao što je to pokazano u poglavlju 6.

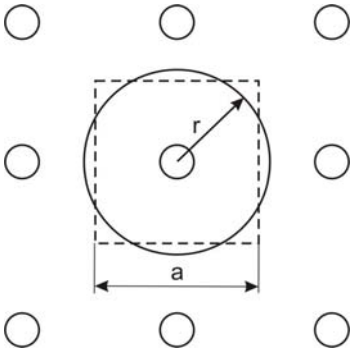
Dodatak 3.

Faktor iskorištenja termičkih neutrona kod heterogenih reaktora

U poglavlju 7.5. razmatrana je raspodjela neutronskog toka u jediničnim ćelijama heterogenih reaktora i objašnjeni razlozi zbog kojih se kod proračuna kritičnosti tih reaktora mora računati s depresijom neutronskog toka unutar gorivne šipke. Tok termičkih neutrona u unutrašnjosti gorivne šipke je mjerodavan za proračun faktora iskorištenja tih neutrona. Poteškoće nastaju zbog potrebe određivanja odnosa prosječnih vrijednosti neutronskog toka nuklearnom gorivu i moderatoru.

U analizi koja slijedi korištenjem jednadžbi difuzije neutrona, pokazati će se pojednostavljeni način proračuna faktora iskorištenja termičkih neutrona u heterogenom reaktoru.

Zamislimo gorivne šipke raspoređene u moderatoru u pravilnim kvadratnim ili trokutastim ćelijama. Na slici D.3.1. prikazan je primjer kvadratne ćelije.



Slika D.3.1. Raspored gorivnih šipku u kvadratičnoj ćeliji

Detaljnije studije rasporeda neutronskog toka kvadratnoj ćeliji pokazuju da se taj raspored može bez veće greške nadomjestiti onim unutar okrugle ćelije iste površine, tj. ćelije ekvivalentnog polumjera $r=a/\pi^{1/2}$. Tom se zamjenom problem svodi sa dvodimenzionalnog na jednodimenzionalni, jer se promjene neutronskog toka promatraju samo u radijalnom smjeru.

Primjena difuzijske teorije za proračun neutronskog toka unutar gorivne šipke je problematična budući da za to nisu ispunjeni uvjeti (uvjeti za primjenu difuzijske teorije navedeni su u poglavlju 6.1.). Međutim iskustvo pokazuje da su rezultati proračuna ipak upotrebljivi, pogotovo ako se konstante materijala korigiraju korištenjem transportne teorije neutrona (jednadžba 7.5.6).

U analizi koja slijedi sa r_g označavati ćemo polumjer gorivne šipke, a sa r_m polumjer ekvivalentne ćelije moderatora. Smatrati ćemo da jedino nuklearno gorivo i moderator utječu na raspodjelu neutrona u jediničnoj ćeliji, dok će se utjecaj ostalih materijala zanemariti.

Bilanca termičkih neutrona unutar goriva je

$$D_g \nabla^2 \phi_g - \Sigma_{ag} \phi_g = 0 . \qquad \textbf{(D.3.1)}$$

Jednadžba (D.3.1) ne sadrži član izvora neutrona. Možemo naime smatrati da u nuklearnom gorivu nema izvora termičkih neutrona, jer je sposobnost usporavanja materijala goriva veoma malena.

Jednadžba (D.3.1) alternativno se može napisati i na slijedeći način:

$$\nabla^2 \phi_g - K_g^2 \phi_g = 0 , \qquad \textbf{(D.3.2)}$$

gdje je

$$K_g^2 = \frac{\Sigma_{ag}}{D_g}.$$

K_g je inverzna vrijednost difuzijske dužine termičkih neutrona u nuklearnom gorivu.

S druge strane, bilanca termičkih neutrona u moderatoru može se definirati relacijom

$$\nabla^2 \phi_m - K_m^2 \phi_m + \frac{Q}{D_m} = 0, \qquad \textbf{(D.3.3)}$$

gdje je

-K_m inverzna vrijednost difuzijske dužine termičkih neutrona u moderatoru,

-Q izvor termičkih neutrona u moderatoru (broj termičkih neutrona koji nastaju u moderatoru po jedinici volumena i jedinici vremena).

Rješenjem jednadžbi (D.3.2) i (D.3.3) dobivamo traženu raspodjelu toka termičkih neutrona u nuklearnom gorivu i moderatoru.

Ako se Laplaceov operator u jednadžbi (D.3.2) izrazi u cilindričnom koordinatnom sustavu dobiva se diferencijalna jednadžba

$$\frac{d^2\phi_g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_g}{dr} - K_g^2 \phi_g = 0,$$

koja se uz supstituciju $x=rK_g$, svodi na

$$\frac{d^2\phi_g}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\phi_g}{dx} - \phi_g = 0. \qquad \textbf{(D.3.4)}$$

Jednadžba (D.3.4) je modificirana Besselova diferencijalna jednadžba nultog reda (vidi dodatak 8), čije je rješenje

$$\phi_g = AI_0(x) + A_1 K_0(x). \qquad \textbf{(D.3.5)}$$

Besselova funkcija $K_0(x)$ teži ka neizmjernosti kada x (odnosno kada r) teži nuli. Budući da u centru gorivne šipke neutronski tok ima konačnu vrijednost, integracijska konstanta A u jednadžbi (D.3.5) mora biti jednaka nuli.

Funkcija koja određuje promjenu toka termičkih neutrona unutar gorivne šipke je dakle

$$\phi_g = AI_0(x) = AI_0(K_g r). \qquad \textbf{(D.3.6)}$$

Pogledajmo sada jednadžbu (D.3.3) kojom je određena promjena toka neutrona u moderatoru.

Ta se jednadžba sastoji iz homogenog dijela (koji sačinjavaju prva dva člana jednadžbe, a koji je po obliku identičan sa jednadžbom (D.3.1)) i partikularnog dijela koji je vezan uz treći član jednadžbe. Rješenje se dobiva kao zbroj rješenja homogenog dijela jednadžbe (koje je identično sa (D.3.5)), i rješenja partikularnog dijela (koje se dobiva postavkom ϕ_g=const.).

Na temelju iznijetih napomena neposredno proizlazi da je tok termičkih neutrona unutar moderatora određen relacijom

$$\phi_m = CI_0(K_m r) + FK_0(K_m r) + \frac{Q}{\Sigma_{am}}. \qquad \textbf{(D.3.7)}$$

Raspodjela toka neutrona u jediničnoj ćeliji dobiva se iz jednadžbi (D.3.6) i (D.3.7) u kojima su konstante integracije A, C i F određene iz rubnih uvjeta. Ti uvjeti, opisani u poglavlju 6.4, se u razmatranom primjeru mogu formulirati kao:

$$\left(\phi_g\right)_{r=r_g} = \left(\phi_m\right)_{r=r_g} \qquad \textbf{(D.3.8)}$$

$$\left(D_g \frac{d\phi_g}{dr}\right)_{r=r_g} = \left(D_m \frac{d\phi_m}{dr}\right)_{r=r_g}$$

(D.3.9)

$$\left(D_m \frac{d\phi_m}{dr}\right)_{r=r_m} = 0\,. \qquad \textbf{(D.3.10)}$$

Pri diferenciranju Besselovih funkcija treba se posjetiti na pravila

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x),\ \frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x).$$

Korištenjem rubnog uvjeta (D.3.10) konstanta F može se izraziti pomoću konstante C:

$$F = C\frac{I_1(K_m r_m)}{K_1(K_m r_m)}.$$

Jednadžba (D.3.7) se uvrštenjem dobivenog izraza transformira u,

$$\phi_m = C_1\left[I_0(K_m r)K_1(K_m r_m) + K_0(K_m r_m)I_1(K_m r_m)\right] + \frac{Q}{\Sigma_{am}}, \qquad \textbf{(D.3.11)}$$

gdje je C_1 nova konstanta.

Sada preostaje da se konstante A i C_1 u jednadžbama (D.3.6) i (D.3.11) odrede na temelju rubnih uvjeta (D.3.8) i (D.3.9). Primjena rubnih uvjeta dovodi do slijedećih jednadžbi:

$$AI_0(K_g r_g) = C_1\left[I_0(K_m r_g)K_1(K_m r_m) + K_0(K_m r_g)I_1(K_m r_m)\right] + \frac{Q}{\Sigma_{am}}$$

$$AD_g K_g I_1(K_g r_g) = D_m C_1 K_m\left[I_1(K_m r_g)K_1(K_m r_m) - K_1(K_m r_g)I_1(K_m r_m)\right].$$

Jednadžbe omogućuju da se eliminacijom konstante C odredi konstanta A (odnosno 1/A) kao

$$\frac{1}{A} = \frac{\Sigma_{am}}{Q}\left[I_0(K_g r_g) - \frac{D_g K_g I_1(K_g r_g)\left[I_0(K_m r_g)K_1(K_m r_m) + K_0(K_m r_g)I_1(K_m r_m)\right]}{D_m K_m\left[I_1(K_m r_g)K_1(K_m r_m) - K_1(K_m r_g)I_1(K_m r_m)\right]}\right] \qquad \textbf{(D.3.12)}$$

Nakon definicije integracijske konstante A, jednadžbom (D.3.6) je u potpunosti određena raspodjela toka termičkih neutrona unutar gorivne šipke.

Sada je moguće odrediti i broj termičkih neutrona apsorbiranih unutar gorivne šipke. Rezultat dobivamo rješenjem integrala

$$\int_0^{r_g} \phi_g \Sigma_{ag} 2r\pi dr = 2A\pi\Sigma_{ag}\int_0^{r_g} I_0(K_g r)dr = \frac{2A\pi\Sigma_{ag} r_r}{K_r} I_1(K_g r_g).$$

(Integral Besselove funkcije: $\int xI_o(x)dx = xI_1(x)$)

Faktor iskorištenja termičkih neutrona je po definiciji odnos broja termičkih neutrona koji su apsorbirani u nuklearnom gorivu i broja termičkih neutrona koji su apsorbiranu u cijelom reaktoru (odnosno u razmatranoj jediničnoj ćeliji). Taj posljednji mora biti jednak broju termičkih neutrona koji su generirani u moderatoru, a koji iznosi, $2\pi(r_m^2 - r_g^2)Q$.

Iz navedenog neposredno proizlazi

$$\frac{1}{f}=\frac{Q\left(r_m^2-r_g^2\right)K_g\pi}{2\pi\Sigma_{am}r_g I_1\left(K_g r_g\right)}\frac{1}{A}. \qquad \textbf{(D.3.13)}$$

Ako u jednadžbu (D.3.13) uvrstimo izraz za konstantu A iz (D.3.12), nakon malih preinaka dobivamo

$$\frac{1}{f}=\frac{V_m\Sigma_{am}}{V_g\Sigma_{ag}}\left[\frac{K_g r_g}{2}\frac{I_0\left(K_g r_g\right)}{I_1\left(K_g r_g\right)}\right]+\frac{K_m V_m}{2\pi r_u}\left[\frac{I_0\left(K_m r_g\right)K_1\left(K_m r_m\right)+K_0\left(K_m r_g\right)I_1\left(K_m r_m\right)}{I_1\left(K_m r_m\right)K_1\left(K_m r_g\right)-K_1\left(K_m r_m\right)I_1\left(K_m r_g\right)}\right], \qquad \text{(D.3.14)}$$

gdje je

$V_m=\pi\left(r_m^2-r_g^2\right)$ -volumen moderatora po jedinici dužine

$V_g=\pi r_g^2$ -volumen goriva po jedinici dužine.

Izraz (D.3.14) skraćeno se može pisati u obliku

$$\frac{1}{f}=1+\frac{V_m\Sigma_{am}}{V_g\Sigma_{ag}}F+\left(E-1\right), \qquad \textbf{(D.3.15)}$$

gdje su F i E parametri definirani jednadžbom (D.3.14).

Ti se parametri mogu aproksimirati jednostavnijim izrazima:

$$F\approx 1+\frac{\left(K_g r_g\right)^2}{8}-\frac{\left(K_g r_g\right)^4}{192}... \qquad \textbf{(D.3.16)}$$

$$E-1\approx\frac{\left(K_m r_m\right)^2}{2}\left[\ln\left(\frac{r_m}{r_g}\right)-\frac{3}{4}\right]. \qquad \textbf{(D.3.17)}$$

Dodatak 4.

Faktor fisije s brzim neutronima (faktor ε)

Brzi fisijski neutroni s energijama višim od praga fisije ^{238}U (energije iznad 1.1.MeV) mogu izazvati fisije tog izotopa. Lakši izotop urana (^{235}U) podložan je fisijama s neutronima svih energija. Zbog toga će broj proizvedenih fisijskih neutrona u reaktoru biti nešto veći od broja tih neutrona koji bi rezultirali samo iz fisija izazvanih termičkim neutronima. Takvo povećanje broja fisijskih neutrona karakterizira faktor fisije s brzim neutronima ε.

Faktor ε može biti veći od jedinice kod gorivnih šipki (što će se ovdje razmotriti) i kod koncentriranih otopina urana u moderatoru. U poglavlju 7.5. navedeno je da povećanje faktora ε nastaje i kada je razmak gorivnih šipki manji od slobodnog puta brzih neutrona u moderatoru. Takav slučaj nastaje kod tvz. podmoderiranih sustava (kojima pripadaju i lakovodni reaktori).

U analizi koja slijedi promatrat će se nuklearne reakcije brzih neutrona u jednoj gorivnoj šipci uronjenoj u moderator. Pretpostavit će se djelotvorna moderacija neutrona, tako da svi brzi neutroni koji ulaze u moderator gube, zbog usporavanja, dalji utjecaj na faktor ε.

Moguće nuklearne reakcije brzih neutrona u gorivoj šipci jesu:

-elastičan sudar

-neelastičan sudar

-fisija

-uhvat neutrona.

Udarni presjeci tih nuklearnih reakcija obilježavaju se redom σ_e, σ_{ei}, σ_f, σ_c.

Ukupni udarni presjek biti će zbroj svih navedenih presjeka

$\sigma=\sigma_e+\sigma_{ie}+\sigma_f+\sigma_c$.

Neelastični sudari brzih neutrona s atomima urana znatno smanjuju energije neutrona, što dopušta pretpostavku da će neutron nakon takvog sudara imati energiju nižu od praga fisije ^{238}U.

Sa P ćemo označiti vjerojatnost da će se brzi neutron (koji potječe iz fisije izazvane interakcijom termičkog neutrona s nuklearnim gorivom) u gorivnoj šipci izazvati neku nuklearnu reakciju.Vjerojatnost da će neutron izaći iz šipke ne izazivajući nikakvu nuklearnu reakciju bit će naravno 1-P.

Na osnovi tako definirane vjerojatnosti mogu se kvantificirati nuklearne reakcije po neutronu u šipci prema sljedećem:

-broj elastičnih sudara $P\frac{\sigma_e}{\sigma}$

-broj neelastičnih sudara $P\frac{\sigma_{ie}}{\sigma}$

-broj dobivenih fisijskih neutrona $P\frac{\nu\sigma_f}{\sigma}$

-broj zarobljenih neutrona $P\frac{\sigma_c}{\sigma}$.

Elastičan sudar neutrona s atomima urana dovodi do malog gubitka energije neutrona, pa se može pretpostaviti da će nakon kolizije ti neutroni kao i neutroni koji potječu iz novonastalih fisija imati energije veće od praga fisije ^{238}U i biti raspoloživi za nastavak razmatranog procesa. Za drugu koliziju s atomima nuklearnog goriva u šipci raspoloživo je dakle

$$P\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} = PZ \text{ neutrona,}$$

gdje je $Z = \frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}$.

Promatrat ćemo sada uvjete za drugu (odnosno narednu) koliziju u gorivnoj šipci. Broj brzih neutrona raspoloživih za naredne nuklearne reakcije je PZ. Njihov prostorni raspored razlikuje se, međutim, od rasporeda što su ga imali neutroni prije prve kolizije. Fisijski neutroni koji su izazvali prvu koliziju potječu naime iz fisija atoma urana izazvanih termičkim neutronima, a te fisije imaju prostorni raspored koji odgovara rasporedu toka termičkih neutrona u gorivoj šipci. Prostorni raspored toka termičkih neutrona u gorivnoj šipci predmet je razmatranja u Dodatku 3.

Prostorni raspored brzih neutrona prije druge kolizije slabo ovisi o originalnom prostornom rasporedu termičkih neutrona pa će i vjerojatnost interakcije tih neutrona s jezgrama atoma urana biti različita od P. Zbog toga ćemo tu vjerojatnost označiti sa P'. Broj nuklearnih reakcija po jednom početnom fisijskom neutronu u gorivnoj šipci zbog druge kolizije biti će dakle $P'PZ$.

Broj neutrona koji izbjegavaju drugu koliziju iznosi

$$\left(1 - P'\right)PZ = \frac{1 - P'}{P'}P\left(P'Z\right).$$

Za drugu koliziju možemo, identično kao i za prvu, pisati:

-broj elastičnih sudara $P'PZ\frac{\sigma_e}{\sigma}$

-broj neelastičnih sudara $P'PZ\frac{\sigma_{ie}}{\sigma}$

-broj dobivenih fisijskih neutrona $P'PZ\frac{\nu\sigma_f}{\sigma}$

-broj zarobljenih neutrona $P'PZ\frac{\sigma_c}{\sigma}$.

Broj neutrona koji su raspoloživi za treću koliziju

$$P'PZ\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} = P'PZ^2.$$

Vjerojatnost treće kolizije i narednih kolizija pretpostavit ćemo istu kao za drugu koliziju, tj. jednaku P'. Na osnovi izložene analize možemo pretpostaviti opći uvjet za n+1 koliziju.

-broj neutrona koji su raspoloživi za n+1 koliziju $P\left(P'Z\right)^n$

-broj neutrona koji izbjegavaju n+1 koliziju $P\frac{1 - P'}{P'}\left(P'Z\right)^n$

-broj elastičnih sudara $P\left(P'Z\right)^n \frac{\sigma_e}{\sigma}$

-broj neelastičnih sudara $P\left(P'Z\right)^n \frac{\sigma_{ie}}{\sigma}$

-broj dobivenih fisijskih neutrona $P\left(P'Z\right)^n \frac{\nu\sigma_f}{\sigma}$

-broj zarobljenih neutrona $P\left(P'Z\right)^n \frac{\sigma_c}{\sigma}$.

Ukupan broj brzih neutrona koji, po jednom fisijskom neutronu, izlaze iz gorivne šipke dobiva se kao zbroj svih neutrona koji izbjegavaju koliziju i neutrona koji potječu iz neelastičnih sudara (jer se ti neutroni zbog reducirane energije ne mogu više umnožavati u špici). Taj je broj neutrona upravo jednak faktoru fisije s brzim neutronima ε.

Dakle,

$$\varepsilon = 1 - P + P\frac{\sigma_{ie}}{\sigma} + \left(1 - P'\right)PZ + P'PZ\frac{\sigma_{ie}}{\sigma} + \left(1 - P'\right)PP'Z^2 + P\left(P'Z\right)^2\frac{\sigma_{ie}}{\sigma} + \ldots$$

ili općenito

$$\varepsilon = 1 - P + P\frac{\sigma_{ie}}{\sigma} + \frac{P}{P'}\left[1 + P'\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma} - 1\right)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\left(P'Z\right)^n . \qquad \textbf{(D.4.1)}$$

Faktor $P'Z$ je manji od jedinice, pa se može pisati

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(P'Z\right)^n = \frac{P'Z}{1 - P'Z} .$$

Uvrštenjem dobivenog izraza u jednadžbu (D.4.1), te uzevši u obzir da je $\sigma_{ie}-\sigma=-(\sigma_f+\sigma_e+\sigma_c)$, nakon sređivanja proizlazi

$$\varepsilon = 1 + \frac{\left[\left(\nu - 1\right) - \frac{\sigma_c}{\sigma_f}\right]\frac{\sigma_f}{\sigma}P}{1 - P'\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}} . \qquad \textbf{(D.4.2)}$$

Radi ilustracije primjene jednadžbe (D.4.2) uzimamo podatke za prirodni metalni uran: $\nu=2.55$, $\sigma_f=0.29$, $\sigma_{ie}=2.47$, $\sigma_e=1.5$, $\sigma_c=0.04$.

Iz danih podataka proizlazi $\sigma=4.3$ (dimenzije svih udarnih presjeka su $10^{-28}m^2$).

Uvrštenjem brojčanih vrijednosti u jednadžbu (D.4.2) dobiva se

$$\varepsilon = 1 + \frac{0.0952P}{1 - 0.521P'} . \qquad \textbf{(D.4.3)}$$

S povećanjem polumjera gorivne šipke očigledno raste vjerojatnost interakcije neutrona s atomom, što se ogleda u porastu faktora P i P'. U graničnom slučaju neizmjerno velikog polumjera r_g ti faktori dostižu jedinicu, pa maksimalno moguća vrijednost ε, na temelju izraza (D.4.3), iznosi

$\varepsilon_{max} \approx 1.2$.

Vjerojatnost interakcije brzog neutrona s atomom urana ovisi o debljini gorivne šipke i o slobodnom putu neutrona kroz šipku λ.

Slobodni put neutrona recipročna je vrijednost ukupnog makroskopskog udarnog presjeka Σ.

Ako za prirodni uran uzmemo prije navedeni podatak $\sigma=4.3*10^{-28}m^2$ i pretpostavimo gustoću materijala $\rho=19000kg/m^3$, dobivamo $\Sigma=0.206cm^{-1}$, odnosno $\lambda=4.86cm$. Kod oksida urana je slobodni put neutrona duži (približno je obrnuto razmjeran gustoći urana u gorivnoj špici).

Točnije analize pokazuju da su za gorivne šipke, čiji je polumjer manji od polovice slobodnog puta neutrona, vjerojatnosti interakcije P i P' približno jednake.

Ovisnost P i r_g/λ dana je u tablici D.4.1.

Tablica D.4.1. Ovisnost vjerojatnosti interakcije neutrona P o odnosu r_g/λ

r_g/λ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P	0.0	0.116	0.220	0.284	0.348	0.400

Iz tablice je vidljivo da u razmatranom opsegu odnosa r_g/λ vjerojatnost interakcije brzog neutrona P nije bitno različita od r_g/λ.

Primjer D.4.1.

Kolika je vrijednost faktora fisije s brzim neutronima za šipke od metalnog prirodnog urana polumjera 1.5cm?

Rješenje

Odnos $r_g/\lambda=1.5/4.86=0.308$.

Interpolacijom iz tablice D.4.1. dobiva se P=0.289.

Primjenom jednadžbe (D.4.3) slijedi $\varepsilon=1.032$.

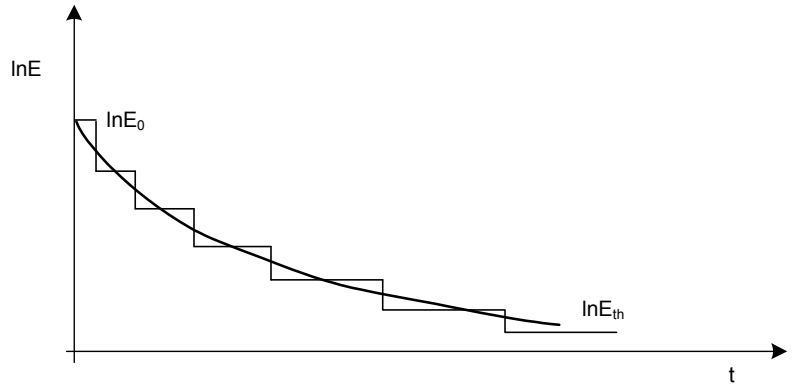
Dodatak 5.

Fermijeva teorija dobi neutrona

Iako je teorija dobi neutrona nastala još u pionirskim danima razvoja teorije reaktora, poglavito u vezi sa razvojem fizike grafitom moderiranih reaktora, mnogi se pojmovi vezani uz ovu teoriju i u novijoj literaturi dosta koriste. To se pogotovo odnosi na sam pojam dobi neutrona sa njegovim interpretacijama i primjenama.

Osnovna ideja teorije sastoji se u postavljanju korelacije između vremena usporavanja neutrona, njihove energije i njihovog prostornog širenja kroz moderatorsku sredinu. Kada promatramo neutrone oko nekog izvora brzih neutrona očigledno je da su neutroni niže energije ne samo "stariji" od neutrona više energije nego i rasprostranjeniji u širem prostoru oko izvora.

U poglavlju 5.2. razmatran je prosječni gubitak energije neutrona u sudaru sa jezgrom atoma moderatora. Ustanovljeno da u svakom sudaru nastaje prosječna promjena logaritma energije neutrona čiji je iznos jednak ξ. Promjena energije neutrona po sudaru je to manja što je moderator veće atomske težine. Između dva sudara neutroni imaju konstantnu energiju. Znači, vremenska promjena energije neutrona je diskontinuirana skokovita funkcija prikazana na slici D.5.1.



Slika D.5.1 Promjena logaritma energije neutrona s vremenom (stvarna karakteristika i aproksimacija kontinuiranom krivuljom)

Visina svake stepenice je u prosjeku jednaka ξ, a vrijeme između sudara se produžuje sa opadanjem brzine neutrona.

Postavljanje matematičke korelacije između vremena usporavanja i energije neutrona moguće je jedino uz pretpostavku da se energija neutrona degradira kontinuirano, a ne skokovito, tj. ako se skokovita karakteristika usporavanja neutrona prikazana na slici D.5.1 aproksimira sa kontinuiranom krivuljom. Aproksimacija je točnija za teže moderatore (grafit, teška voda) nego za običnu vodu jer su kod njih promjene energije neutrona po sudaru manje (manji ξ).

Matematička analiza koja slijedi nije posve rigorozna, ali ima prednost da najbrže vodi do rezultata.

U poglavlju 5.4. naglašeno je da kod usporavanja neutrona u neograničenoj sredini bez apsorpcije, broj neutrona koji u procesu usporavanja prelaze svaku energetsku razinu ostaje konstantan. Broj neutrona koji u jedinici vremena i jedinici volumena prelaze energetsku razinu E ćemo obilježiti sa q(E). Taj broj neutrona naziva se gustoća usporavanja i, kao što je prije rečeno, u neograničenoj sredini bez apsorpcije ostaje konstantan (nije funkcija energije ni položaja u prostoru).

Zamislimo sada da se dio neutrona, čije energije odgovaraju nekom energetskom intervalu dE, gubi iz razmatranog jediničnog volumena zbog njihovog rasprostiranja kroz moderator. Gubitak neutrona zbog istjecanja smanjuje broj neutrona dotične energije u jediničnom volumenu, a time i gustoću usporavanja (tj. broj neutrona koji će u jediničnom volumenu biti usporeni na nižu energetsku razinu). Ako je promjena energije kontinuirana (u smislu ranije objašnjene pretpostavke), možemo funkcijom $\frac{\partial q(E)}{\partial E}dE$ izraziti promjenu gustoće usporavanja neutrona u energetskom intervalu dE. Taj broj mora biti jednak broju neutrona koji će iz intervala dE biti izgubljen zbog prostornog istjecanja, i koji na osnovi teorije difuzije neutrona iznosi $-D(E)\nabla^2\phi(E)dE$. Možemo dakle pisati

$$\frac{\partial q(E)}{\partial E} = -D(E)\nabla^2\phi(E). \qquad \textbf{(D.5.1)}$$

U poglavlju 5.4. (jednadžba 5.4.9) određena je funkcionalna veza između toka neutrona koji se usporavaju i njihove energije:

$$\phi(E) = \frac{q(E)}{\Sigma_s(E)\xi E}. \qquad \textbf{(D.5.2)}$$

Uvrštenjem (D.5.2) u (D.5.1) dobiva se

$\frac{\partial q}{\partial E} = -\frac{D}{\xi\Sigma_s E}\nabla^2 q$, odnosno

$$\nabla^2 q = -\frac{\xi\Sigma_s E}{D}\frac{\partial q}{\partial E}. \qquad \textbf{(D.5.3)}$$

Budući da su sve varijable funkcije energije neutrona, u jednadžbi (D.5.3) je, radi jednostavnosti, izostavljeno pisanje oznake energetske ovisnosti.

Sada možemo u jednadžbu (D.5.3) uvesti novu varijablu definiranu kao

$$\tau = \int_E^{E_0} \frac{D}{\xi\Sigma_s E}dE. \qquad \textbf{(D.5.4)}$$

gdje se granice integracije protežu od energije fisijskih neutrona E_0 do energije E.

Ako se izraz (D.5.4) uvrsti u jednadžbu (D.5.3) dobivamo poznatu Fermijevu jednadžbu dobi neutrona

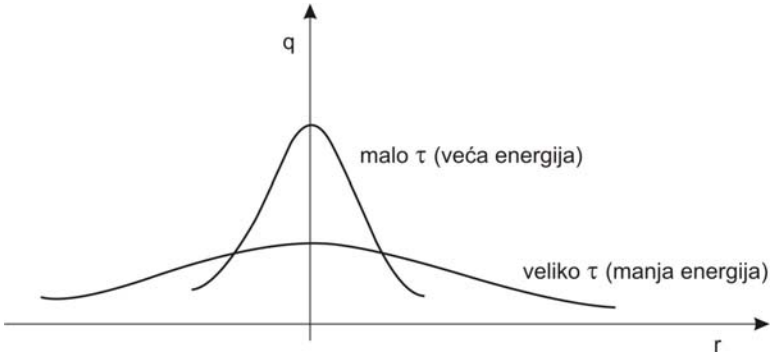
$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau}. \qquad \textbf{(D.5.5)}$$

Varijabla τ je poznata kao funkcija dobi neutrona. Dimenzija te varijable, kao što se može razabrati iz njezine definicije, nije vrijeme nego površina. Usprkos tome, dob neutrona ima fizikalnu vezu sa vremenom njihovog postojanja, jer je, u skladu sa uvodnim primjedbama, prostorna raspodjela neutrona ovisna o vremenu usporavanja. Budući da je donja granica integrala u jednadžbi (D.5.4) promjenjiva s energijom neutrona koji se usporavaju, neposredno se zaključuje da je dob je fisijskih neutrona ($E=E_0$) jednaka nuli, dok je dob termičkih neutrona($E=E_{th}$) najveća.

Radi fizikalne interpretacije pojma dobi neutrona od interesa je razmotriti rješenje jednadžbe (D.5.5) za slučaj točkastog izvora brzih neutrona u neograničenom moderatoru. Analiza dovodi do izraza

$$q(r,\tau) = \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \qquad \textbf{(D.5.6)}$$

Na temelju jednadžbe (D.5.6) može se ilustrirati ovisnost q, r i τ na način prikazan slikom D.5.2.



Slika D.5.2 Gustoća usporavanja neutrona u ovisnosti o njihovoj dobi i udaljenost od točkastog izvora

Od interesa je iskoristiti jednadžbu (D.5.6)i za fizikalnu interpretaciju značenja dobi neutrona τ.

Možemo naime postaviti pitanje: Koliki je prosječni kvadrat puta neutrona od točkastog izvora do mjesta kod kojeg postiže dob τ? Primjenom postupka sličnog onome koji je upotrijebljen za interpretaciju difuzijske dužine i dužine usporavanja neutrona (vidi poglavlje 6.6), možemo pisati

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2\left[4\pi r^2 q(r,\tau)\right]dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 q(r,\tau)dr} = \frac{\int_0^\infty r^4 e^{-r^2/4\tau}dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-r^2/4\tau}dr} = 6\tau\,. \qquad \textbf{(D.5.7)}$$

Iz dobivenog rezultata slijedi da dob neutrona možemo interpretirati kao šestinu srednjeg kvadrata puta neutrona od izvora do mjesta gdje neutron postiže u procesu usporavanja energiju E. Usporedbom sa interpretacijom dužine usporavanja neutrona L_s (poglavlje 7.7.), lako je utvrditi da je značenje dobi termičkih neutrona τ_{th} istovjetno sa L_s^2.

Izvor termičkih neutrona definiran na temelju modela kontinuiranog usporavanja, odnosno na temelju teorije dobi neutrona.

U poglavlju 7.6. smo, u okviru razmatranja raznih alternativa za rješenje bilance termičkih neutrona u reaktoru napomenuli da teorija dobi neutrona omogućuje definiciju izvora termičkih neutrona u reaktoru, koji se razlikuje od onog koji daje primjena dvogrupnog ili jednogrupnog postupka.

Jednadžba (D.5.5) upućuje na zaključak da je gustoća usporavanja neutrona q funkcija prostornog položaja i dobi neutrona. Varijable je moguće separirati i pisati

$$q(r,\tau) = T(\tau)R(r). \qquad \textbf{(D.5.8)}$$

Uvrštenjem u (D.5.5) izlazi

$$T(\tau)\nabla^2 R(r) = R(r)\frac{dT(\tau)}{d\tau}, \text{ ili}$$

$$\frac{\nabla^2 R(r)}{R(r)} = \frac{1}{T(\tau)}\frac{dT(\tau)}{d\tau}\,. \qquad \textbf{(D.5.9)}$$

Lijeva strana jednadžbe (D.5.9) određuje prostornu raspodjelu gustoće usporavanja neutrona. Ta raspodjela mora biti ekvivalentna s raspodjelom toka brzih neutrona u reaktoru, koju određuje faktor zakrivljenja neutronskog toka -B^2. Prema jednadžbi (9.5.8) istu vrijednost mora imati i desna strana jednadžbe, dakle,

$$\frac{1}{T(\tau)}\frac{dT(\tau)}{d\tau} = -B^2, \text{ ili}$$

$$T(\tau) = Ae^{-B^2\tau}. \qquad \textbf{(D.5.10)}$$

Uvrštenjem (D.5.10) u (D.5.8,) dobiva se

$$q(R,\tau) = AR(r)e^{-B^2\tau}. \qquad \textbf{(D.5.11)}$$

Izvor brzih neutrona dobiva se postavkom $\tau=0$, tj.

$q(r,0)=AR(r)$.

Ako s druge strane uzmemo da nuklearno gorivo apsorbira $f\Sigma_a\phi$ termičkih neutrona iz kojih se dobiva $\varepsilon\eta f\Sigma_a\phi=(k_\infty/p)\Sigma_a\phi$ brzih neutrona, možemo izvor brzih neutrona opisati izrazom

$$AR(r) = (k_\infty/p)\Sigma_a\phi. \qquad \textbf{(D.5.12)}$$

Uvrštenjem u (D.5.11) dobivamo funkcionalnu vezu gustoće usporavanja i dobi neutrona

$$q(r,\tau) = (k_\infty/p)\Sigma_a\phi e^{-B^2\tau}.$$

Sada možemo napisati izraz za izvor termičkih neutrona S_{th} kao $pq(r,\tau_{th})$, jer se faktorom p uzima u obzir gubitak neutrona u rezonantnom području neutronskih energija. Dakle,

$$S_{th} = k_\infty\Sigma_a\phi e^{-B^2\tau_{th}}. \qquad \textbf{(D.5.13)}$$

Izraz (D.5.13) upotrijebljen je u jednadžbi (7.6.14), prilikom razmatranja alternativnih rješenja bilance neutrona za proračun dimenzija kritičnog reaktora.

Dodatak 6.

Integralni oblik rješenja jednadžbi neutronske kinetike

Jednadžbe neutronske kinetike bile su izvedene u poglavlju 8.2. (jednadžbe 8.2.7 i 8.2.9) [2] gdje su formulirane kao

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n}{l_p} k_{ef}(\rho - \beta) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i \qquad \textbf{(D.6.1)}$$

$$\frac{dC_i}{dt} = k_{ef} \frac{n}{l_p} \beta_i - \lambda_i C_i \,. \qquad \textbf{(D.6.2)}$$

U jednadžbama (D.6.1) i (D.6.2) su varijable n, ρ, i C_i funkcije vremena, tj. n=n(t), ρ=ρ(t) i $C_i=C_i(t)$. Ako u prvim članovima na desnoj strani jednadžbi podijelimo brojnik i nazivnik sa βk_{ef} slijedi sustav jednadžbi:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{n(t)}{\Lambda}[K(t) - 1] + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \qquad \textbf{(D.6.3)}$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{n(t) a_i}{\Lambda} - \lambda_i C_i(t) \,. \qquad \textbf{(D.6.4)}$$

U jednadžbama su upotrijebljene slijedeće oznake:

$$\Lambda = \frac{l_p}{\beta k_{ef}}$$

$$K(t) = \frac{\rho(t)}{\beta}$$

$$a_i = \frac{\beta_i}{\beta} \,.$$

Jednadžbu (D.6.4) integrirati ćemo u granicama 0<τ<t. Rezultat integracije je

$$C_i(t) = \frac{a_i}{\Lambda} \int_0^t n(\tau) e^{-(t-\tau)\lambda_i} dt + C_i(0) e^{-\lambda_i t} \,.$$

Parcijalnom integracijom (primjenom pravila ∫udv=uv-∫vdu, uz postavku u=n(τ)) se dobiva,

$$\lambda_i C_i(t) = \frac{a_i}{\Lambda} \left[n(t) - n(0) e^{-\lambda_i t} - \int_0^t \frac{dn(\tau)}{d\tau} e^{-(t-\tau)\lambda_i} d\tau \right] + \lambda_i C_i(0) e^{-\lambda_i t} \,. \qquad \textbf{(D.6.5)}$$

Kombinacijom izraza (D.6.5) i (D.6.3) može se eliminirati varijabla $C_i(t)$. Pri tome treba uzeti u obzir da je

$\frac{dC_i(0)}{dt} = 0$, odnosno $\lambda_i C_i(0) - \frac{a_i}{\Lambda} n(0) = 0$.

Gornje jednakosti slijede iz uvjeta stacionarnog stanja primijenjenih na jednadžbu (D.6.4).

Evidentno je, nadalje, da mora biti ispunjeno

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{\Lambda}n(t)-\frac{n(t)}{\Lambda}=0\,.$$

Nakon uvrštenja i sređivanja dobiva se slijedeća integralno diferencijalna jednadžba:

$$\Lambda\frac{dn(t)}{dt}=n(t)K(t)-\int_0^t\frac{dn(\tau)}{d\tau}\sum_{i=1}^{6}a_i e^{-(t-\tau)\lambda_i}d\tau\,.$$

Funkcija $\sum_{i=1}^{6}a_i e^{-(t-\tau)\lambda_i}$ označit će se u daljnjim analizama kao f(t-τ), pa jednadžba poprima oblik

$$\Lambda\frac{dn(t)}{dt}=n(t)K(t)-\int_0^t\frac{dn(\tau)}{d\tau}f(t-\tau)d\tau\,. \qquad \textbf{(D.6.6)}$$

Jednadžbu (D.6.6) možemo jednostavno riješiti primjenom Laplaceove transformacije (jer jednadžba sadrži integral konvolucije):

$$\Lambda[sn(t)-n(0)]=L[n(t)K(t)]-f(s)[sn(s)-n(0)],$$

ili

$$n(s)=G(s)L[n(t)K(t)]+\frac{n(0)}{s}, \qquad \textbf{(D.6.7)}$$

gdje je

$$G(s)=\frac{1}{s(f(s)+\Lambda)},$$

$$f(s)=\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{s+\lambda_i}\,.$$

Izraz f(s) pokazuje da je G(s) polinom 7-og stupnja. G(s) je funkcija ovisna o karakteristikama grupa zakašnjelih neutrona i vremenu trajanja ciklusa promptnih neutrona u reaktoru.

Inverzna Laplaceova transformacija jednadžbe (D.6.7) je

$$n(t)=n(0)+\int_0^t G(t-\tau)n(\tau)K(\tau)d\tau\,. \qquad \textbf{(D.6.8)}$$

Jednadžba (D.6.8) je temeljna jednadžba reaktorske kinetike. Ona određuje vremensku ovisnost gustoće neutrona n(t) (odnosno monoenergetskog toka neutrona) o promjeni reaktivnosti $K(\tau)=\frac{q(\tau)}{\beta}$ za danu karakterističnu funkciju

G(t-τ).

Karakteristična funkcija G(s)

Funkcija G(s) u jednadžbi (D.6.7) može se prikazati pomoću parcijalne ekspanzije kao

$$G(s)=\sum_{m=0}^{6}\frac{A_m}{s+s_m}, \qquad \textbf{(D.6.9)}$$

gdje su vrijednosti s_m nultočke polinoma,

$$s\left[f(s)+\Lambda\right]=s\left[\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{s+\lambda_i}+\Lambda\right]. \qquad \textbf{(D.6.10)}$$

Očito je prva vrijednost $s_0=0$, preostalih se 6 vrijednosti s_1, ..., s_6 dobiva izjednačavanjem izraza u zagradi sa nulom. Iz oblika izraza (D.6.10) jasno proizlazi da parametri s_1, ..., s_6 moraju imati negativan predznak.

Inverzna Laplaceova transformacija funkcije G(s) određuje karakterističnu funkciju u vremenskoj domeni

$$G(s)=\sum_{m=0}^{6}A_m e^{-s_m t} \qquad \textbf{(D.6.11)}$$

Koeficijenti A mogu se odrediti množenjem funkcije G(s) sa $s-s_m$ i proračunom dobivenog produkta za slučaj kada razlika $s-s_m$ teži nuli, tj.

$$A_m=\left[G_s(s)(s-s_m)\right]_{s\to s_m}.$$

Primjena parcijalne frakcijske ekspanzije daje

$$A_m=\frac{1}{\frac{d}{ds}\left[sf(s)+s\Lambda\right]_{s\to s_m}}=\frac{1}{\left[s\frac{df(s)}{ds}+f(s)+\Lambda\right]_{s\to s_m}}. \qquad \textbf{(D.6.11)}$$

Relacija (D.6.11) upućuje da se na temelju poznatih nultočaka polinoma $f(s)+\Lambda$, s_0 do s_6, koeficijenti A_0 do A_6 mogu odrediti iz slijedećih relacija:

-za nultočku s=0

$$A_0=\frac{1}{\Lambda+\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{\lambda_i}} \qquad \textbf{(D.6.12)}$$

-za nultočku $s=s_m$

$$A_m=\frac{1}{-s_m\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{(s_m+\lambda_i)^2}}. \qquad \textbf{(D.6.13)}$$

Izračunavanjem koeficijenata A_0, ..., A_6 i eksponenata s_0, ..., s_6 karakteristična funkcija G(t) je potpuno definirana.

Funkcija G(t) ovisi samo o karakteristikama grupa zakašnjelih neutrona (vidi tablicu 4.5.1) i o parametru $\Lambda=l_p/\beta k_{ef}$.

Za reaktore s uranom kao nuklearnim gorivom je ovisnost eksponenata i koeficijenata funkcije G(t) o parametru $\Lambda\beta=l_p/k_{ef}\approx l_p$, za $\Lambda\beta=10^{-4}$, 10^{-5} i 10^{-6} dana u tabeli D.6.1. Vrijednosti A_m i s_m za bilo koju vrijednost parametara mogu se korištenjem danih relacija jednostavno odrediti pomoću elektroničkog računala.

Tablica D.6.1. Ovisnost koeficijenata i eksponenata karakteristične funkcije G(t) za uran o parametru βΛ

βΛ=	**10^{-4}s**		**10^{-5}s**		**10^{-6}s**	
i	**A_m**	**s_m**	**A_m**	**s_m**	**A_m**	**s_m**
0	**1.2049E-3**	**0**	**1.2062E-4**	**0**	**1.2063E-5**	**0**

1	**1.3330E-4**	**1.5050E-2**	**1.3347E-5**	**1.5052E-2**	**1.3348E-6**	**1.5052E-2**
2	**8.5544E-4**	**7.0939E-2**	**8.5533E-5**	**7.0993E-2**	**8.5532E-6**	**7.0999E-2**
3	**1.1408E-3**	**1.9829E-1**	**1.1402E-4**	**1.9850E-1**	**1.1402E-6**	**1.9852E-1**
4	**2.1953E-3**	**1.2377**	**2.1366E-4**	**1.2401**	**2.1308E-5**	**1.2404**
5	**1.3659E-3**	**3.7752**	**1.2431E-4**	**3.7796**	**1.2318E-5**	**3.7800**
6	**9.9310E-1**	**6.5443E+1**	**9.9932E-1**	**6.5043E+2**	**9.9993E-1**	**6.5004E+3**

Rješenje jednadžbe reaktorske kinetike

Na osnovi poznate karakteristične funkcije G(t) moguće je integralom (D.6.8) izračunati ovisnost gustoće neutrona n(τ) (odnosno toka termičkih neutrona i snage reaktora) o reaktivnosti K(τ). Vremenska ovisnost promjene reaktivnosti može biti proizvoljna. Rezultat se dobiva numeričkom integracijom.

U specijalno jednostavnom slučaju skokovite promjene reaktivnosti možemo integral (D.6.8) riješiti i analitički. U tom je naime slučaju K(τ)=K=const. pa se integral svodi na

$$n(t) = n(0) + K\int_0^t G(t-\tau)n(\tau)d\tau\,. \qquad \textbf{(D.6.14)}$$

Primjenom Laplaceove transformacije dobivamo

$$n(s) = \frac{n(0)}{s} + KG(s)n(s), \text{ ili}$$

$$n(s) = \frac{n(0)}{s[1-KG(s)]} = \frac{n(0)[f(s)+\Lambda]}{s[f(s)+\Lambda]-K}\,. \qquad \textbf{(D.6.15)}$$

Budući da se radi o polinomu i+1 stupnja, funkcija (D.6.15) može se parcijalnom ekspanzijom prikazati kao

$$n(s) = \sum^{6}\frac{A_n}{s-s_n}\,,$$

ili nakon inverzne transformacije

$$n(t) = \sum^{6} A_n e^{s_n t}\,. \qquad \textbf{(D.6.16)}$$

gdje su s_n nultočke nazivnika izraza (D.6.15).

Koeficijent A_n, može se slično kao kod funkcije G(s) dobiti iz izraza

$$A_n = \frac{n(0)[f(s_n)+\Lambda]}{\left[s\frac{df(s)}{ds} + f(s) + \Lambda\right]_{s=s_n}}\,.$$

Ako uzmemo u obzir da je

$$[f(s)+\Lambda]_{s=s_n} = \frac{K}{s_n}\,,$$

možemo nakon jednostavnih transformacija dobiti

$$A_n = \frac{n(0)}{1-\frac{s_n^2}{K}\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{(s_n+\lambda_i)^2}}\,. \qquad \textbf{(D.6.17)}$$

Primjer D.6.1.

Potrebno je odrediti vremensku funkciju promjene termičkog toplinskog toka u reaktoru kod kojega je došlo do skokovite promjene reaktivnosti za +0,25% odnosno -0,25%. Trajanje ciklusa termičkih neutrona $l_p=1.3*10^{-4}$s.

Rješenje

Nultočke nazivnika funkcije (D.6.15) s_0, ..., s_6 i odgovarajuće vrijednosti koeficijenata A_0, ..., A_6 uz $K=\pm\rho/\beta$, izračunate korištenjem izraza (D.6.17) su

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
0.074E-2	**-1.31E-2**	**-4.9E-2**	**-0.166**	**-0.934**	**-2.82**	**-31.43**
-1.08E-2	**-1.97E-2**	**-8.4E-2**	**-0.218**	**-1.02**	**-2.92**	**-69.5**
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2.2	**-3.65E-2**	**-0.286**	**-0.162**	**-8.31E-2**	**-3.44E-2**	**-0.6**
0.192	**0.281**	**0.133**	**9.04E-2**	**2.09E-2**	**7.68E-2**	**0.3**

Brojke u gornjem redu se odnose na $\rho=+0.25\%$, a brojke u donjem redu na $\rho=-0.25\%$.

Uvrštenjem dobivenih eksponenata i koeficijenata u jednadžbu (D.6.16) određene su vremenske promjene gustoće, odnosno toka termičkih neutrona i generirane snage u reaktoru, nakon skokovite promjene reaktivnosti za +0.25% i -0.25%.

Treba podsjetiti da smo sličan primjer rješavali i u poglavlju 8.3. (primjer 8.3.1) primjenom aproksimacije s jednom grupom zakašnjelih neutrona.

Dodatak 7.

TOPLINSKA SVOJSTVA TVARI

Tablica D.7.1. Toplinska svojstva vode u ovisnosti o temperaturi(*)

Temperatura K	Gustoća kg/m^3	Specifična toplina kJ/kgK	Koeficijent vodljivosti W/mK	Kinematička viskoznost mm^2/s
273	1000	4.219	0.555	1.79
293	998	4.182	0.598	1.01
313	992	4.178	0.627	0.658
333	983	4.190	0.651	0.478
353	972	4.199	0.669	0.364
373	958	4.215	0.681	0.295
393	944	4.232	0.685	0.249
413	926	4.257	0.684	0.217
433	908	4.282	0.680	0.189
453	887	4.395	0.673	0.172
473	863	4.500	0.665	0.162
523	794	4.855	0.644	0.137
573	700	5.693	0.564	0.131

Tablica D.7.2. Ovisnost tlaka i temperature zasićenja za običnu vodu

Tlak MPa	Temperatura zasićenja K	Tlak MPa	Temperatura zasićenja K
0.1	372.6	2.0	485.4
0.2	393.2	2.5	496.9
0.3	406.5	3.0	506.8
0.4	416.6	4.0	523.3
0.5	424.8	5.0	536.9
0.6	431.8	6.0	548.6
0.8	443.4	8.0	568.0
1.0	452.9	10.0	584.0
1.2	416.0	12.0	597.7
1.6	474.4	16.0	620.3
		20.0	638.7

Tablica D.7.3. Toplinska svojstva teške vode u ovisnosti o temperaturi(**)

Temperatura K	Tlak zasićenja MPa	Specifična toplina kJ/kgK	Koeficijent toplinske vodljivosti W/mK	Gustoća kg/m^3	Kinematička viskoznost mm^2/s
313	0.0065	4.190	0.602	1100.0	0.720
333	0.0182	4.190	0.619	1090.9	0.511
353	0.0442	4.190	0.631	1078.2	0.303

373	0.0963	4.190	0.637	1063.3	0.282
393	0.1910	4.190	0.636	1046.4	0.260
403	0.2620	4.200	0.634	1037.1	0.240
413	0.3520	4.210	0.632	1024.4	0.224
423	0.4660	4.210	0.628	1017.0	0.208
433	0.6070	4.230	0.623	1006.3	0.195
443	0.7810	4.250	0.616	994.3	0.185
453	0.9920	4.270	0.609	983.3	0.176
463	1.246	4.303	0.602	971.0	0.167
473	1.564	4.340	0.594	958.1	0.160
483	1.902	4.374	0.585	944.7	0.155
493	2.320	4.424	0.573	930.6	0.149
503	2.799	4.483	0.562	915.6	0.145
513	3.361	4.554	0.549	900.3	0.142
523	-	4.640	0.536	884.0	0.139
533	-	4.740	0.522	866.7	0.136
543	-	4.856	0.508	848.4	0.133
553	-	5.010	0.493	828.8	0.132
563	-	5.258	0.478	807.9	-
573	-	5.490	0.462	785.2	-

Tablica D.7.4. Toplinska svojstva zraka na atmosferskom tlaku(*)

Temperatura K	Gustoća kg/m^3	Specifična toplina kJ/kgK	Koeficijent toplinske vodljivosti W/mK	Kinematička viskoznost mm^2/s
223	1.534	1.004	0.0205	9.65
253	1.365	1.004	0.0226	12.0
273	1.252	1.009	0.0237	13.9
293	1.164	1.013	0.0251	15.7
313	1.092	1.013	0.0265	17.6
333	1.025	1.017	0.0279	19.4
353	0.968	1.021	0.0293	21.5
373	0.916	1.021	0.0307	23.6
393	0.870	1.026	0.0320	25.9
433	0.789	1.030	0.0344	30.6
473	0.723	1.034	0.0370	35.5
523	0.653	1.042	0.0400	42.2
573	0.596	1.047	0.0429	49.2
673	0.508	1.059	0.0485	64.6
873	0.391	1.088	0.0581	98.8
1073	0.318	1.113	0.0669	137.0
1273	0.268	1.139	0.0761	181.0
1473	0.232	1.164	0.0845	227.0
1673	0.204	1.189	0.0930	278.0
1873	0.182	1.218	0.1012	332.0

(*) B. Kraut, Strojarski priručnik, sedmo izdanje, 1981.

(**) I. V. Vargaftik, Spravočnik po teplofizičeskim svojstvam gazov i židkostej, Geoizdat, Moskva, 1963.

Dodatak 8.

Besselove funkcije

Besselove funkcije dobivaju se kao rješenja Besselove diferencijalne jednadžbe.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

Gdje su α i n konstante.

Ako je n cijeli broj ili nula ,što je slučaj kod većine praktičkih problema ,rješenja jednadžbe se mogu prikazati s dvije vrste Besselovih funkcija $J_n(\alpha x)$ i $Y_n(\alpha x)$ (poznate kao Besselove funkcije n-tog reda,prve i druge vrste) tako da rješenje ima oblik,

$$y = AJ_n(\alpha x) + CY_n(\alpha x)$$

A i C su konstante.

U koliko je α^2 negativan, Besselova diferencijalna jednadžba postaje

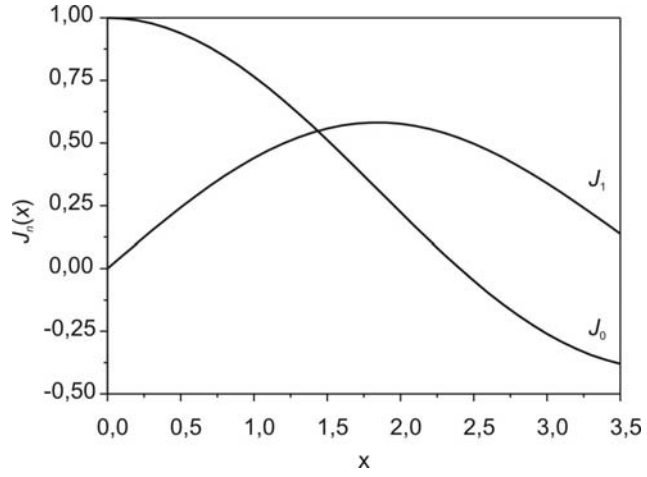
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(\alpha^2+\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

Čija je rješenje, ukoliko je n cijeli broj ili nula određeno funkcijama $I_n(\alpha x)$ i $K_n(\alpha x)$ (poznatim kao modificirane Besselove funkcije),te ima oblik,

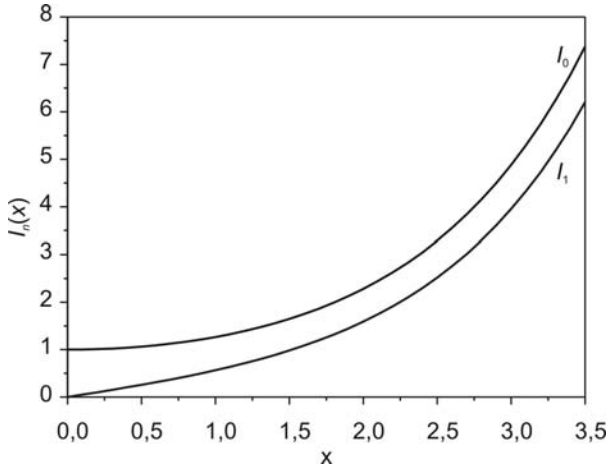
$$y = AI_n(\alpha x) + CK_n(\alpha x)$$

U teoriji nuklearnog reaktora najčešće se pojavljuju Besselove funkcije nultog i prvog reda (to su funkcije kod kojih je n=0 i n=1).

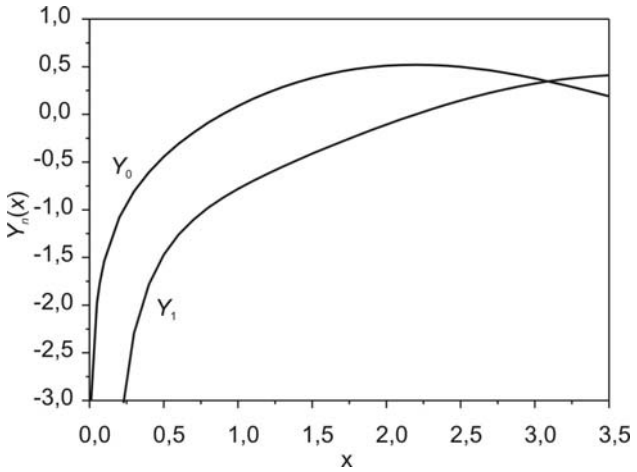
Grafički prikaz Besselovih funkcija nultog i prvog reda dan je na slikama D.8.1.1. do D.8.1.4.



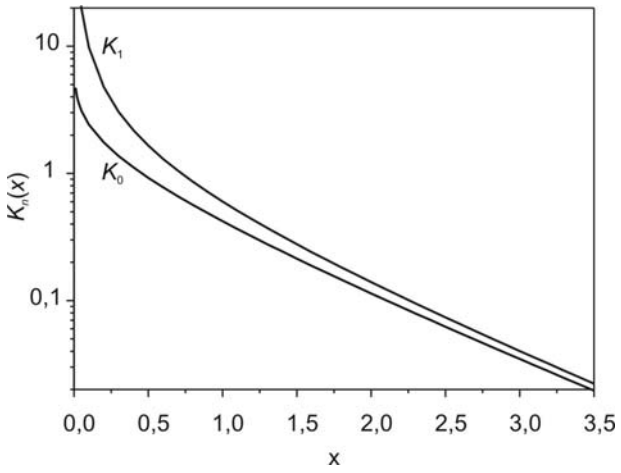
Slika D.8.1.1. Besselove funkcije nultog i prvog reda $J_o(x)$ i $J_1(x)$



Slika D.8.1.2. Besselove funkcije nultog i prvog reda $I_o(x)$ i $I_1(x)$



Slika D.8.1.3. Besselove funkcije nultog i prvog reda $Y_o(x)$ i $Y_1(x)$



Slika D.8.1.4. Besselove funkcije nultog i prvog reda $K_o(x)$ i $K_1(x)$

Neki važniji odnosi između Besselovih funkcija nultog i prvog reda su:

.

-Derivacije

$$J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx} \qquad Y_1(x) = -\frac{dY_0(x)}{dx}$$

$$I_1(x)=\frac{dI_0(x)}{dx} \qquad K_1(x)=-\frac{dK_0(x)}{dx}.$$

-Integrali

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x) \qquad \int xI_0(x)dx = xI_1(x)$$

$$\int xY_0(x)dx = xY_1(x) \qquad \int xK_0(x)dx = -xK_1(x)$$

Numeričke vrijednosti Besselovih funkcija mogu se očitati iz tabela u priručnicima matematike, ili se izračunati primjenom razvoja u red.

Razvoj u redove Besselovih funkcija daje:

$$J_0(x)=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7+\ldots$$

$$I_0(x)=1+\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

$$I_1(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5+\frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7+\ldots$$