

Višnja Henč-Bartolić
Petar Kulišić

VALOVI I OPTIKA



školska knjiga



prof. dr. sc. Višnja Henč-Bartolić
prof. dr. sc. Petar Kulišić

VALOVI I OPTIKA

udžbenik fizike za studente
Fakulteta elektrotehnike i računarstva

3. izdanje

 **školska knjiga**

Zagreb, 2004.

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik urađen je prema nastavnom planu i programu predmeta fizika II za studente prve godine Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu. Nastao je na temelju skripata i predavanja na Elektrotehničkom fakultetu, a njime se mogu služiti studenti tehničkih fakulteta.

U udžbeniku je obrađeno gradivo iz titranja, valova i optike. Također je ukratko prikazan uvod u atomsku fiziku i fiziku jezgre, onoliko koliko zahtijeva nastavni program.

Mnogi su sadržaji ilustrirani primjerima. Na kraju svakog poglavlja su pitanja i zadaci za uvježbavanje gradiva, kao i mnoga pitanja s usmenih ispita iz fizike. Međunarodni sustav jedinica (SI), odnosno zakonite mjerne jedinice, dosljedno se primjenjuju u cijelom udžbeniku. U pripremi je Zbirka riješenih zadataka prilagođena ovom udžbeniku, a bit će njegov sastavni dio.

Udžbenik je podijeljen na 11 poglavlja. P. Kulišić obradio je poglavlja od 1. do 4, 8. te poglavlja 10. i 11, a V. Henč-Bartolić obradila je poglavlja od 5. do 7, 9. i lasere u 10. poglavlju.

Na predavanjima iz fizike na Elektrotehničkom fakultetu studente se kroz eksperiment vodi do saznanja, što je razvio prof. dr. V. Lopašić. Mnogi od tih pokusa, kao i neki novi, prikazani su u ovom udžbeniku. Pri izradi udžbenika obilno smo se koristili skriptama »Predavanja iz fizike«, IV. dio. Toplo zahvaljujemo prof. dr. Lopašiću na dozvoli za njihovo korištenje. Osim toga, služili smo se i mnogim udžbenicima fizike. Na kraju knjige je popis literature koja može poslužiti čitateljstvu za bolje i detaljnije razumijevanje određenih sadržaja.

Suradnici Zavoda za fiziku pomogli su nam u izvođenju i usavršavanju nastave fizike u toku niza godina pa im najsrdačnije zahvaljujemo. Rukopis knjige pregledali su prof. dr. V. Lopac, prof. dr. Vladimir Šips i prof. dr. Jadranka Vuletin. Zahvaljujemo im na korisnim primjedbama i sugestijama. Svakome, a posebno kolegama studentima prve godine koji nas upozore na propuste i greške kojih će u ovom prvom izdanju sigurno biti, bit ćemo zahvalni.

U Zagrebu, u srpnju 1989.

Autori

SADRŽAJ

1. TITRANJE	1
1.1. Uvod	1
1.2. Elastičnost materijala	3
1.2.1. Hookeov zakon. Elastična sila	6
1.2.2. Smicanje i torzija	8
1.2.3. Moduli elastičnosti materijala	12
1.3. Jednostavno harmoničko titranje	13
1.3.1. Harmonički oscilator	13
1.3.2. Matematičko njihalo	25
1.3.3. Fizičko njihalo	29
1.3.4. Torziono njihalo	33
1.3.5. Prikaz harmoničkog titranja pomoću rotirajućeg vektora	34
1.3.6. Energija titranja	35
1.4. Prigušeno titranje	40
1.5. Prisilno titranje. Rezonancija	48
1.6. Vezani oscilatori	56
1.7. Zbrajanje harmoničkih titraja	61
1.7.1. Zbrajanje dvaju harmoničkih titraja na istom pravcu ..	61
1.7.2. Harmonička analiza. Fourierov red i spektri	64
1.7.3. Zbrajanje dvaju međusobno okomitih harmoničkih titraja. Lissajousove krivulje	70
<i>Pitanja i zadaci</i>	72
2. MEHANIČKI VALOVI	75
2.1. Uvod	75
2.2. Širenje valova u sredstvu	80
2.3. Matematički opis valnog gibanja	84
2.3.1. Jednadžba transverznog vala na žici	87
2.3.2. Superpozicija valova	90
2.3.3. Valni paket, grupna brzina	93
2.4. Refleksija valova	98
2.4.1. Stojni valovi	100
2.4.2. Transverzalni stojni valovi na napetoj žici	105
2.5. Longitudinalni valovi. Valovi zvuka	108
2.5.1. Longitudinalni val u štapu	108
2.5.2. Longitudinalni val u plinu	109
2.5.3. Brzina zvuka	112
2.5.4. Stojni longitudinalni valovi	115
2.6. Energija mehaničkih valova	118
2.6.1. Jakost i glasnoća zvuka	121
2.7. Ultrazvuk	124
2.8. Dopplerov efekt	126
<i>Pitanja i zadaci</i>	130

3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE	132
3.1. Gaussov zakon za električno polje	132
3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje	135
3.3. Faradayev zakon indukcije	137
3.4. Ampereov zakon; struja pomaka	143
3.5. Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku	147
3.6. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku	150
3.7. Energija elektromagnetskog polja	155
<i>Pitanja i zadaci</i>	158
4. ELEKTROMAGNETSKI TITRAJI I VALOVI	159
4.1. Titrajni LC-krug	159
4.2. Prigušeni elektromagnetski titraji	162
4.3. Prisilni elektromagnetski titraji	165
4.3.1. Naponska i strujna rezonancija	167
4.4. Analogija između električnih i mehaničkih titrajnih sistema	170
4.5. Nastajanje elektromagnetskih valova	173
4.6. Širenje elektromagnetskih valova kroz prostor	176
4.6.1. Valna jednadžba	179
4.6.2. Brzina elektromagnetskih valova	180
4.6.3. Harmonički elektromagnetski valovi kao rješenja valne jednadžbe	181
4.6.4. Omjer amplituda električnoga i magnetskog polja	182
4.7. Energija elektromagnetskog vala. Poyntingov vektor	185
4.8. Refleksija i lom elektromagnetskih valova	187
4.9. Disperzija i apsorpcija	189
4.10. Fresnelove jednadžbe	195
<i>Pitanja i zadaci</i>	197
5. GEOMETRIJSKA OPTIKA	198
5.1. Osnovni zakoni; optički put, Fermatov princip	198
5.2. Ravno i sferno zrcalo	204
5.3. Totalna refleksija i neke njezine primjene	210
5.4. Prolaz svjetlosti kroz planparalelnu ploču	214
5.5. Prolaz svjetlosti kroz optičku prizmu	215
5.6. Lom svjetlosti na sfernoj granici objašnjen Möbiusovim zakonom loma	220
5.7. Tanka leća; greške leće	226
5.8. Disperzija ili rasap svjetlosti	233
<i>Pitanja i zadaci</i>	243
6. FIZIKALNA OPTIKA	244
6.1. Uvod	244
6.2. Interferencija valova svjetlosti	246
6.2.1. Interferencija sinusnih valova svjetlosti	246
6.2.2. Youngov pokus i Fresnelova biprizma	249
6.2.3. Uvjeti koherencije	251
6.2.4. Pohllov pokus o interferenciji svjetlosti	253
6.2.5. Interferencija svjetlosti na tankim filmovima	256

6.2.6. Newtonova stakla	257
6.2.7. Michelsonov interferometar	259
6.3. Ogib ili difrakcija valova svjetlosti na pukotinama	260
6.3.1. Uvod	260
6.3.2. Fraunhoferov ogib na pukotini	261
6.3.3. Fraunhoferov ogib na dvije pukotine	265
6.3.4. Optička rešetka	267
6.3.5. Holografija	275
6.4. Brzina svjetlosti	280
6.4.1. Brzina svjetlosti u valnoj teoriji	280
6.4.2. Mjerenje brzine svjetlosti	282
6.5. Polarizacija valova svjetlosti	286
6.5.1. Polarizacija svjetlosti refleksijom	286
6.5.2. Polarizacija svjetlosti prolaskom kroz kristale	289
6.5.3. Polarizatori	292
6.5.4. Dvolomni kristali u polariziranoj svjetlosti	298
6.5.5. Vrtinja ravnine polarizacije u kristalu kvarca	302
6.5.6. Faradayev efekt	304
6.5.7. Kerrov efekt	306
6.6. Apsorpcija svjetlosti	308
6.7. Tyndallov efekt	311
6.8. Nelinearna optika	313
6.9. Spektar elektromagnetskih valova	317
<i>Pitanja i zadaci</i>	319
7. FOTOMETRIJA	321
7.1. Uvodne napomene o fotometrijskim mjerenjima	321
7.2. O fotometrijskim veličinama	325
7.2.1. Fotometrijske veličine za točkasti izvor svjetlosti	325
7.2.2. Fotometrijske veličine za plošni izvor svjetlosti	328
7.2.3. Mjerne jedinice u fotometriji	333
7.3. Svjetlosne boje	334
7.4. O kolorimetriji	339
7.4.1. Mjerne jedinice za neke energijske veličine zračenja ...	341
7.4.2. Veza fotometrijskih i energijskih veličina	342
<i>Pitanja i zadaci</i>	345
8. KVANTNA PRIRODA SVJETLOSTI	346
8.1. Toplinsko zračenje	346
8.2. Spektar zračenja crnog tijela	350
8.3. Ultraljubičasta katastrofa	353
8.4. Planckov zakon zračenja za crno tijelo. Kvanti svjetlosti	357
8.5. Fotoelektrični efekt	364
8.6. Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta. Fotoni ..	367
8.7. Comptonov efekt	369
<i>Pitanja i zadaci</i>	371
9. ELEKTRIČNA VODLJIVOST PLINOVA – ELEKTRONI I IONI	372
9.1. Vođenje elektriciteta kroz plinove	372

9.2. Električni izboj kroz razrijeđeni zrak	381
9.3. Katodne i kanalne zrake	384
9.4. Određivanje omjera e/m – specifični naboj elektrona	386
9.4.1. Mjerenja J. J. Thomsona	386
9.4.2. Mjerenje pomoću Wehneltove cijevi	392
9.5. Millikanov pokus	393
<i>Pitanja i zadaci</i>	395
 10. STRUKTURA ATOMA	397
10.1. Linijski spektri	397
10.2. Rutherfordov model atoma	400
10.3. Bohrov model atoma	408
10.4. Energijska stanja vodikova atoma	409
10.5. Linijski spektar vodika	411
10.6. Franck-Hertzov eksperiment	413
10.7. Princip korespondencije klasične i kvantne fizike	415
10.8. Rendgensko zračenje	416
10.9. Valna priroda čestica	423
10.10. Difrakcija elektrona	425
10.11. Bohrov model i valovi elektrona	430
10.12. Kvantni brojevi	431
10.13. Magnetski moment elektrona	435
10.14. Spin elektrona	437
10.15. Zeemanov efekt	444
10.16. Elektronski omotač atoma. Periodni sustav elemenata .	448
10.17. Fizikalne osnove lasera	450
<i>Pitanja i zadaci</i>	455
 11. ATOMSKA JEZGRA	457
11.1. Svojstva i struktura jezgre	457
11.2. Energija vezanja jezgre	458
11.3. Radioaktivnost	460
11.4. Zakon radioaktivnog raspada	462
11.5. Nuklearne reakcije	464
11.5.1. Fisija	465
11.5.2. Fuzija	466
11.6. Elementarne čestice	467
<i>Pitanja i zadaci</i>	470
 Važnije konstante	471
Literatura	473
Kazalo	475
Periodni sistem elemenata	485

VALOVI I OPTIKA

1. Titranje

1.1. Uvod

Proučavajući jednoliko kružno gibanje, upoznali smo jednu vrstu periodičnoga gibanja, tj. gibanja koje se ponavlja u jednakim vremenskim razmacima. Sada ćemo proučavati posebnu vrstu periodičnog gibanja, tzv. **titranje**.

Pri titranju se materijalna točka giba amo-tamo oko ravnotežnog položaja, tj. prijeđe istu trajektoriju najprije u jednome, a zatim u suprotnom smjeru; materijalna točka poslije određenoga vremenskog intervala, koje zovemo *period* T , ponavlja cijelo gibanje. Trajanje jednoga potpunog titraja je, dakle, T i za to vrijeme tijelo dvaput prođe kroz položaj ravnoteže. Broj titraja u jedinici vremena daje frekvenciju f , a ona je jednaka recipročnoj vrijednosti perioda:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.1)$$

Jedinica frekvencije je herc, (hertz), znak $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$.

Pri titranju materijalna točka nakon perioda T jednakom brzinom dolazi u isti položaj ili, kako se često kaže, u istu fazu.

Faza titranja je trenutno stanje određenog titranja, tj. položaj i brzina tijela u određenome vremenskom trenutku (npr. maksimum, minimum, prolaz kroz ravnotežni položaj i sl.).

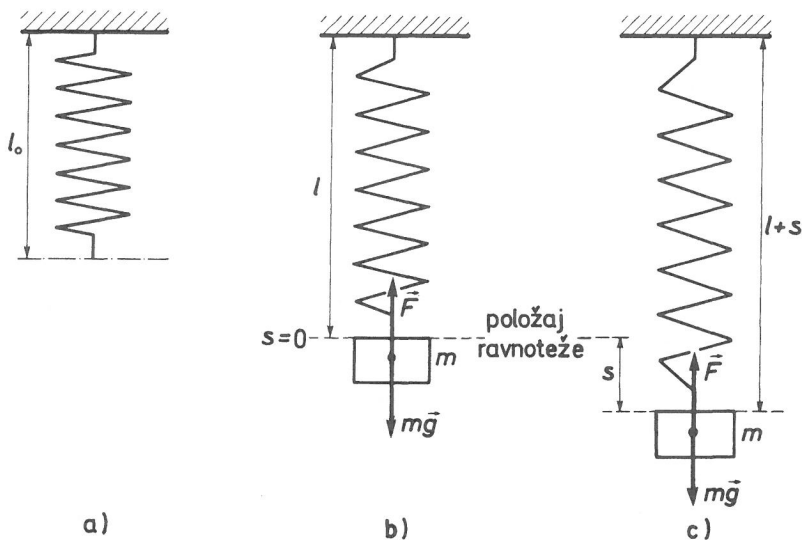
Period je, dakle, vremenski interval između dvije uzastopne jednake faze.

U prirodi nailazimo na mnogo primjera titranja: titraju atomi i molekule u čvrstim tijelima, žice muzičkih instrumenata, čestice zraka kad se kroza nj širi zvučni val, tijelo obješeno na oprugu, različite vrste njihala itd. U električnim krugovima električni naboji titraju po istim zakonima kao i materijalne točke u mehaničkim titrajnim sistemima. Električne titraje opisujemo istim matematičkim aparatom kao i mehaničke te razumijevanje mehaničkih titraja, koje je lakše zorno predočiti, može koristiti u proučavanju elektromagnetskih titraja i valova.

Svako titranje uzrokuje određena sila koja nastoji vratiti sistem u položaj ravnoteže. Najjednostavnije je titranje ono pri kojemu je sila *proporcionalna* iznosu pomaka iz položaja ravnoteže, a suprotna **njegovu smjeru i zove se jednostavno harmoničko titranje**.

Zakovitosti jednostavnoga harmoničnog titranja najbolje ćemo uočiti proučavajući gibanje utega obješenog na vertikalnu oprugu (sl. 1.1). Kada uteg izvučemo

iz ravnotežnog položaja i pustimo, on se giba gore-dolje, tj. titra. Pri takvom su titranju gubici dosta maleni, amplituda s vremenom dosta se sporo smanjuje te ga u manjim vremenskim intervalima možemo smatrati neprigušenim.



Slika 1.1. Uteg na opruzi

Kada sistem *opruga + masa* izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo, sistem titra. Rezultantna sila koja uzrokuje titranje sistema na sl. 1.1. vektorska je suma napetosti opruge i težine:

$$F = mg - k(s + l - l_0) = k(l - l_0) - k(l - l_0) - ks,$$

odnosno

$$\vec{F} = -k\vec{s} \quad (1.2)$$

gdje je s pomak iz položaja ravnoteže (elongacija), a k pozitivna konstanta koja se često zove elastična konstanta ili konstanta opruge.

To je poznata sila opruge, tzv. elastična ili harmonična sila. Proporcionalna je i po smjeru suprotna (predznak minus!) pomaku s iz položaja ravnoteže (tj. elongaciji). Konstanta proporcionalnosti zove se **konstanta opruge** ili **restituciona konstanta**.

Sistem koji titra zbog utjecaja takve sile zove se **harmonički oscilator**. O deformaciji čvrstih tijela i elastičnoj sili govoriti ćemo više u sljedećim odjeljcima.

Od svih titranja najlakše je matematički opisati jednostavno harmoničko titranje, a mnoga se titranja u prirodi mogu njime aproksimirati. Stoga ćemo ga vrlo pažljivo obraditi.

1.2. Elastičnost materijala

Djelovanje sile na neko tijelo može biti dvojako: sila može promijeniti stanje gibanja tijela ili pak oblik i veličinu tijela. Prvo smo djelovanje proučavali u dinamici, a drugo ćemo djelovanje, deformaciju tijela, promotriti u ovom odjeljku.

Razlikujemo dvije vrste vanjskih sila na tijelo: površinske i volumne. Sile koje su raspodijeljene po cijelom volumenu tijela, npr. gravitacijska sila, zovu se volumne, a sile raspodijeljene po površini tijela zovemo površinskim (plošnim) silama. Primjer površinskih sila je sila hidrostatskog tlaka u fluidima.

Deformacija čvrstog tijela je promjena njegovih dimenzija i volumena, obično praćena promjenom oblika tijela. Time se mijenjaju razmaci molekula u kristalnoj rešetki, pojavljuju dodatne sile koje se očituju kao unutrašnje elastične sile u deformiranom tijelu. To su zapravo elektromagnetske sile i suprotnog su smjera pomaku čestica (molekula) u deformiranom tijelu.

Povezivanje makroskopskih elastičnih svojstava materijala i međudjelovanja atoma i molekula predmet je posebne grane fizike.

Vanjske sile izazivaju unutrašnja naprezanja u tijelu na koje djeluju. U statičkoj ravnoteži te unutrašnje sile naprezanja jednake su vanjskim silama koje su ih izazvale i suprotnog su predznaka.

U dinamici smo tijela smatrali krutima, tj. pretpostavili smo da zbog utjecaja sila tijela ne mijenjaju oblik. Međutim, u stvarnosti ne postoje kruta tijela, to je samo idealizirani model. Svi se materijali pod utjecajem sile deformiraju. Zato razlikujemo pojmove kruto tijelo, kao fizikalni model, i čvrsto tijelo, kao realno fizikalno tijelo.

Jedna od važnih osobina materijala jest i njegova elastičnost. Nakon prestanka djelovanja vanjskih sila savršeno elastična tijela vraćaju se u početni oblik, savršeno plastična tijela potpuno zadržavaju svoj deformirani oblik, a djelomično elastična tijela su po promjeni oblika između ta dva ekstremna slučaja.

Detaljnije proučavanje elastičnosti nije predmet ovog udžbenika; obradit ćemo samo osnovne makroskopske zakone potrebne za proučavanje titranja i valova. Upoznat ćemo pojmove – naprezanje, tlak, vlak, deformacija, elastični moduli, Hookov zakon i torzija. Naizgled je to mnogo pojmova, međutim oni su međusobno ovisni i povezani.

Deformacija tijela ovisi o materijalu te o smjeru i iznosu sila koje na njih djeluju. Materijal može biti *izotropan*, tj. imati jednake osobine u svim smjerovima ili *anizotropan*, ako te osobine nisu jednake. Elastične osobine nekog tijela ovise o izotropnosti materijala, ali i o obliku tijela, načinu na koji je tijelo napravljeno te o prethodnim deformacijama kojima je tijelo bilo podvrgnuto.

Deformacija čvrstih tijela. Pri proučavanju deformacije tijela silama koje na nj djeluju **naprezanje** definiramo kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje.

Ako na kraju nekog štapa ili žice (sl. 1.2) djeluje sila $\vec{F}$ (čiji je iznos i smjer u svim točkama presjeka štapa jednak), tada je naprezanje ili napetost:

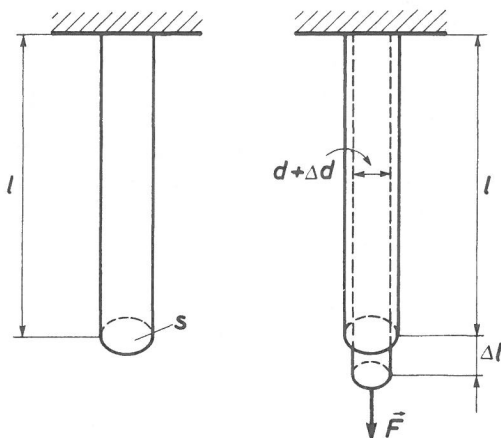
$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.3)$$

gdje je S površina presjeka štapa.

Jedinica napetosti σ je njutn po četvornom metru, N/m^2 .

Ako sila nije jednoliko raspoređena po presjeku, tada naprezanje u nekoj točki presjeka računamo pomoću izraza

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (1.3a)$$



Slika 1.2. Deformacija štapa

Sila ne mora djelovati okomito na presjek. Ako sila djeluje pod nekim kosim kutom φ između 0° i 90° , možemo je rastaviti na dvije komponente: okomito (normalno) i tangencijalno naprezanje. Okomito (normalno) naprezanje definira se izrazom

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F} \cdot \vec{n}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F \cos \varphi}{\Delta S} \quad (1.4)$$

a tangencijalno je naprezanje

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F} \cdot \vec{t}_0}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F \sin \varphi}{\Delta S} \quad (1.5)$$

gdje su $\vec{n}$ i $\vec{t}_0$ jedinični vektori, prvi ($\vec{n}$) u smjeru normale, a drugi ($\vec{t}_0$) okomit na smjer normale na element površine ΔS .

Naprezanje nije ni skalar ni vektor, već posebna matematička veličina – *tenzor*, za čije je definiranje potrebno 9 komponentata. Za određivanje naprezanja u pojedinoj točki potrebno je poznavati šest veličina (tri za normalno i tri za tangencijalno naprezanje) pomoću kojih možemo odrediti naprezanje u toj točki za bilo koju ravninu koja prolazi tom točkom. Međutim, u jednostavnim slučajevima (kakve ćemo uglavnom i razmatrati) sve te komponente, osim jedne, iščezavaju, te ćemo s naprezanjem raditi kao sa skalarnom veličinom i nećemo brinuti o njezinu tenzorskom karakteru*.

* Detaljnije npr. u: N. Cindro, *Fizika I* (Školska knjiga, Zagreb, 1986) i Timošenko, Guider, *Teorija elastičnosti* (Građevinska knjiga, Beograd, 1962), I. Alfrević, *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

Čestice elastičnog čvrstog tijela, koje su pomaknute pri deformaciji, nakon prestanka djelovanja vanjske sile vraćaju se u početni ravnotežni položaj i tijelo poprima početne dimenzije i oblik. Ako npr. stisnemo elastičnu oprugu, ona se deformira, skрати. Kada opterećenje prestane djelovati, opruga poprima prvotni oblik, dimenzije i volumen.

Napetosti uzrokuju promjenu oblika i veličine (volumena) tijela. Relativna deformacija koja nastaje kao posljedica napetosti definira se kao omjer promjene dimenzije nakon i dimenzije prije djelovanja sile:

$$\varepsilon = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x} \quad (1.6)$$

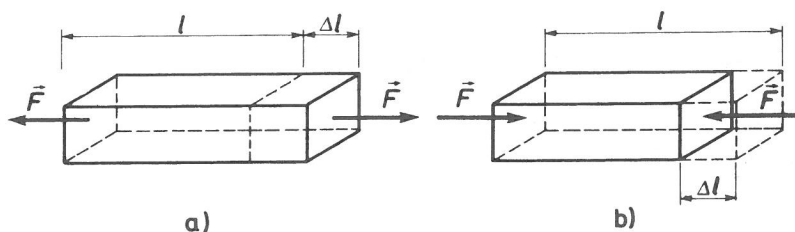
gdje je x veličina karakteristična za dimenzije i oblik tijela.

Najjednostavnija deformacija je *linearna*. Ona može biti vlačna ili tlačna, pri čemu se duljina tijela povećava odnosno smanjuje.

Kada na istom pravcu djeluju sile jednakog iznosa a suprotnog smjera i nastoje produžiti tijelo ($\varphi = 0$), pripadno naprezanje ($\sigma > 0$) zove se *vlačno naprezanje* ili *vlak* (sl. 1.3). Ako sile djeluju tako da nastoje smanjiti dimenzije tijela u smjeru djelovanja sile ($\varphi = 180^\circ$), pripadno se naprezanje ($\sigma < 0$) zove *tlačno naprezanje* ili *tlak* ($p = \sigma$).

U oba slučaja (sl. 1.3) deformacija je

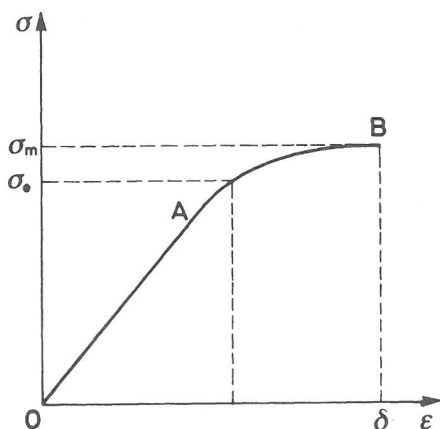
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.6a)$$



Slika 1.3. a) Vlačno, b) tlačno naprezanje

Mijenjaju li se sile F koje djeluju na presjeku štapa (sl. 1.1) može se odrediti ovisnost deformacije o naprezanju (dijagram rastezanja). Njegov je tipičan oblik prikazan na sl. 1.4. Mjerenje se npr. može izvesti tako da na jedan kraj homogene šipke ili žice, učvršćene na gornjem kraju (sl. 1.4) objesimo terete različitih težina i mjerimo ovisnost produženja o opterećenju (ili, što je isto, ovisnost deformacije o naprezanju).

Deformacija je do određene granice proporcionalna naprezanju (dio OA na sl. 1.4). Točku A, u kojoj prestaje linearnost, možemo nazvati *granicom linearnosti*. Približno, oko te točke tijelo prestaje biti elastično. Pri naprezanju većem od granice elastičnosti σ_e , tijelo nakon prestanka djelovanja sile više ne poprima svoj prvotni oblik već u njemu ostane neka rezidualna deformacija. Ako su naprezanja veća od one na granici elastičnosti σ_e kažemo da je deformacija *plastična*. Premaši li



naprezanje *granično naprezanje* σ_m (**na-prezanje kidanja** ili prekidna čvrstoća), kada se materijal.

Takva deformacija koja nastaje pri graničnom naprezanju naziva se **prekidno rastezanje** δ .

Slika 1.4. Ovisnost deformacije o naprezanju

Za neke je materijale naprezanje kidanja pri kraju elastičnog područja, a za druge je (npr. za olovo) deformacija uvijek plastična. Mnogi se materijali mogu rstezati i iznad granice elastičnosti, i to omogućuje npr. izvlačenje materijala u žice. U praksi se ne smije doseći granično naprezanje materijala, pa se faktor sigurnosti definira kao omjer graničnog naprezanja i najvećeg dopuštenog naprezanja za neki materijal, a obično iznosi 4 do 5.

Prekidno rastezanje δ određuje žilavost materijala. Tako za čelik iznosi oko 20% i ovisi o vrsti čelika.

1.2.1. Hookeov zakon. Elastična sila

U području linearne deformacije čvrstih elastičnih tijela (dio OA na slici 1.4) vrijedi **Hookeov zakon**

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{ili} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (1.7)$$

gdje je E *Youngov modul elastičnosti*, parametar karakterističan za određeni materijal. U tablici 1.1. navedene su elastične osobine nekih materijala: Youngov modul, granica elastičnosti i granično naprezanje (naprezanje kidanja).

Tablica 1.1. Elastične osobine nekih materijala

Materijal	Youngov modul elastičnosti $E/(\text{GN/m}^2)$	Granica elastičnosti $\sigma_e/(\text{MN/m}^2)$	Granično naprezanje $\sigma_m/(\text{MN/m}^2)$
aluminij	70	140	140
bakar	120	160	410
čelik	210	240	480
mesing	100	350	
olovo	15		
staklo	50		
volfram	360		
guma	0,01		

Pri produženju štapa (sl. 1.2) poprečne se dimenzije smanjuju. Relativna poprečna kontrakcija $\frac{\Delta d}{d}$ također je proporcionalna naprezanju

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (1.8)$$

gdje je μ konstanta, tzv. *Poissonov broj*:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} \quad (1.9)$$

Poissonov se broj kreće u granicama od 0,2 do 0,5 i za čelik npr. iznosi 0,35, za aluminij 0,35, a za olovo 0,45 itd.

Kada se zbog djelovanja vanjskih sila okomitih na cijelo oplošje tijela volumen tijela mijenja, Hookeov zakon pišemo u obliku

$$p = -\sigma = -B \frac{\Delta V}{V} \quad (1.10)$$

gdje je B volumni *modul elastičnosti* (modul kompresije). (U tablici 1.2. na str. 12) uz ostale je elastične osobine nekih materijala naveden i modul elastičnosti B). Recipročna vrijednost modula elastičnosti zove se *stlačivost* ili *kompresibilnost*

$$K = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (1.11)$$

Tekućine se teško stlačuju, što pokazuje i niska vrijednost stlačivosti koja npr. za vodu iznosi $5 \cdot 10^{-10} \text{ N/m}^2$, za živu $4 \cdot 10^{-11} \text{ N/m}^2$ itd.

Iz Hookeova zakona slijedi da je sila potrebna za produženje (skraćenje) Δl žice ili štapa:

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = \text{konst.} \Delta l \quad (1.12)$$

Produženje šipke proporcionalno je vanjskoj sili. Elastično se tijelo pritom opire deformaciji silom jednakog iznosa a suprotnog smjera,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{el}} &= -\vec{F} = -\text{konst.} \Delta \vec{l} \\ \vec{F}_{\text{el}} &= -k \Delta \vec{l} \end{aligned} \quad (1.13)$$

pri čemu smo konstantu označili sa k . Sila dana jednadžbom (1.13) naziva se *elastična* (harmonička) sila ili *sila opruge* jer je produženje (skraćenje) opruge zbog djelovanja vanjske sile upravo jedan od primjera djelovanja harmoničke sile.

Kada na oprugu duljine l_0 objesimo uteg mase m (v. sl. 1.1) opruga će se produžiti od l_0 do duljine l , i to je produženje proporcionalno težini utega $G = mg$:

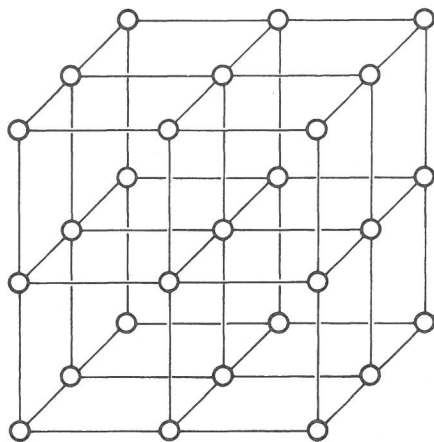
$$G = k(l - l_0) = k \Delta l \quad (1.14)$$

Težinu utega tj. gravitacijsku silu pritom uravnotežuje elastična sila opruge F :

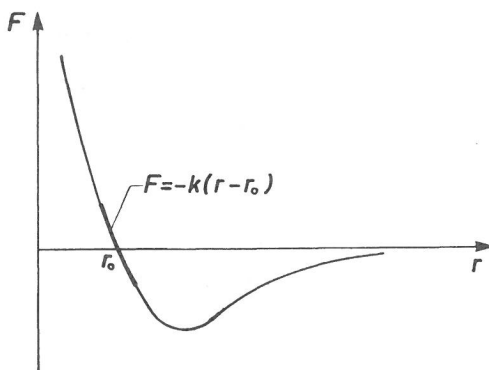
$$F = -k \Delta l \quad (1.15)$$

Konstanta proporcionalnosti k je konstanta opruge (restituciona konstanta).

Elastične deformacije i Hookeov zakon možemo objasniti promatrajući mikroskopsku strukturu, tj. kristalnu rešetku čvrstih tijela (sl. 1.5). Kada nema naprezanja, atomi su u svojim ravnotežnim položajima, među njima je ravnotežni razmak r_0 . Pri deformaciji razmak među atomima se mijenja, povećava se ili smanjuje, ovisno o tome kakva je deformacija. Stoga se javljaju privlačne odnosno odbojne sile koje se suprotstavljaju djelovanju vanjske sile.



Slika 1.5. Shematski prikaz malog dijela kristalne rešetke



Slika 1.6. Ovisnost sile o razmaku atoma u kristalnoj rešetki

Na slici 1.6. prikazana je kvalitativna ovisnost sile o razmaku atoma u kristalnoj rešetki čvrstog tijela. Kada su atomi na udaljenosti r_0 , sila je jednaka nuli, rešetka je u ravnotežnom položaju. Smanji li se udaljenost među atomima, pojavljuje se odbojna sila, a ako se udaljenost poveća, javlja se privlačna sila. Za male je deformacije ovisnost sile o promjeni $r - r_0$ linearna (linearni dio krivulje oko točke r_0 na sl. 1.6). Ta linearna ovisnost sile među atomima o pomaku manifestira se, gledano makroskopski, u linearnoj ovisnosti elastične sile o deformaciji (Hookeovu zakonu).

1.2.2. Smicanje i torzija

Pri razmatranju vlačnih i tlačnih sila koje djeluju na čvrsto tijelo definirali smo normalno naprezanje i deformaciju. Sada ćemo razmatrati naprezanja koja nastaju kada na čvrsta tijela djeluje sila paralelna s njihovom površinom.

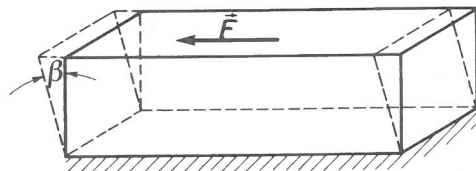
Promatrajmo prizmatični komad materijala (štap) sa slike 1.7, čija je donja baza učvršćena, a na gornju djeluje tangencijalna sila $\vec{F}$. Sila F proizvodi naprezanje ili napetost *smicanja*:

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (1.16)$$

gdje je S površina na koju djeluje sila.

Tijelo se pritom deformira tako da mu se stranica zaokrene, odnosno pravi kut između dvije stranice promijeni za kut β , te je kutna deformacija:

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \beta \quad (1.17)$$



Slika 1.7. Tangencijalno naprezanje i deformacija smicanjem

Za male je kutove $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, te je deformacija $\varepsilon \approx \beta$.

I tada vrijedi Hookeov zakon jer je deformacija proporcionalna naprezanju

$$\operatorname{tg} \beta \approx \beta = \frac{1}{G} \tau \quad (1.18)$$

Pritom je G *modul smicanja* (Coulombov modul), tj. konstanta određena elastičnim svojstvima materijala od kojega je napravljen štap.

Modul smicanja G iskazuje se njutnima po četvornom metru, N/m^2 . S Youngovim je modulom povezan relacijom

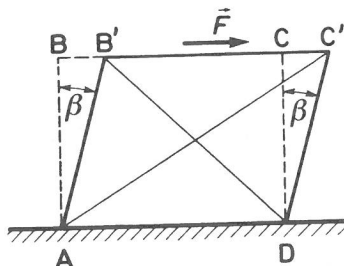
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.19)$$

gdje je μ Poissonov broj. Naprimjer, za čelik je modul smicanja $G = 7,92 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, a Youngov modul $E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, te Poissonov broj možemo izračunati:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = 0,3.$$

Primjer

Promatrajte deformaciju kocke smicanjem i nadite vezu između Youngova modula i modula smicanja.



Slika 1.8. Deformacija kocke smicanjem

Neka sila F djeluje paralelno s gornjom stranicom kocke (sl. 1.8) dok je donja baza učvršćena. Gornja se površina pritom posmakne za kut β koji je mjera deformacije tijela (Deformacija ustvari je $\tan\beta$, koji je za male vrijednosti jednak samom kutu β .) Budući da su deformacije malene, možemo smatrati da se duljina stranice kocke a pritom ne mijenja, dijagonale AC povećavaju se, a BD smanjuju. Iz slike 1.8. vidimo:

$$\overline{AC'}^2 = a^2 + \overline{BC'}^2 = a^2 + (a + a \tan\beta)^2$$

Za male kutove β dobivamo

$$\overline{AC'} = \sqrt{a^2 + (a + a\beta)^2} = a\sqrt{2} \sqrt{1 + \beta}.$$

Promjena dužine dijagonale je

$$\Delta l = a\sqrt{2} (\sqrt{1 + \beta} - 1) = a\sqrt{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \beta,$$

jer je

$$\sqrt{1 + \beta} = 1 + \frac{\beta}{2} + \dots \approx 1 + \frac{\beta}{2}.$$

Omjer naprezanja $\tau = F/S$ i pripadne deformacije β po definiciji je *modul smicanja* (torzije) $G = \tau/\beta$, te je

$$\Delta l = l \frac{\tau}{2G} \quad (1.20)$$

Promjenu dimenzija Δl možemo izračunati i Hookeovim zakonom $\Delta l/l = \sigma/E$, tako da shvatimo da na jednom dijagonalnom presjeku djeluje vlačno naprezanje a na drugome jednako veliko tlačno naprezanje. Zbog vlačnih sila duljina dijagonala $\overline{AC}$ produži se za $\Delta l'$:

$$\Delta l' = \frac{l}{E} \tau.$$

Zbog poprečnog tlaka smanji se druga dijagonala za $\Delta l'$, a zbog toga se dijagonala AC poveća za $\mu \Delta l'$, pri čemu je μ Poissonov broj.

Ukupna promjena dimenzija dijagonale je

$$\Delta l = \Delta l' + \mu \Delta l' = \frac{l}{E} \tau (1 + \mu) \quad (1.21)$$

Uspoređujući (1.20) i (1.21) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{l}{E} \tau (1 + \mu) &= l \frac{\tau}{2G} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Torzija štapa. Posebni primjer smicanja je *torzija štapa*. Promatrajmo ravni okrugli štap (žicu) duljine l i promjera $2r$ učvršćen na jednom kraju (sl. 1.9). Kada na drugom, slobodnom kraju djeluje par sila, štap će se deformirati, uviti, tordirati. Dok gornjom bazom štap ostaje učvršćen za podlogu, ostali se presjeci zakrenu to više što su dalje od učvršćene baze. Pritom pretpostavljamo da

poprečni presjeci štapa ostaju ravni krugovi koji su okomiti na os štapa. Izvodnica valjka, linija koja na plaštu spaja gornju i donju bazu valjka i koja je prije deformacije bila pravac, nakon deformacije postaje spirala. Torzionu deformaciju pokazuje kut ϑ za koji se uvije slobodni kraj štapa.

Uzevši u obzir da za smicanje vrijedi Hookeov zakon u obliku (1.18), može se pokazati da je kut torzije ϑ proporcionalan momentu vanjskog para sila M :

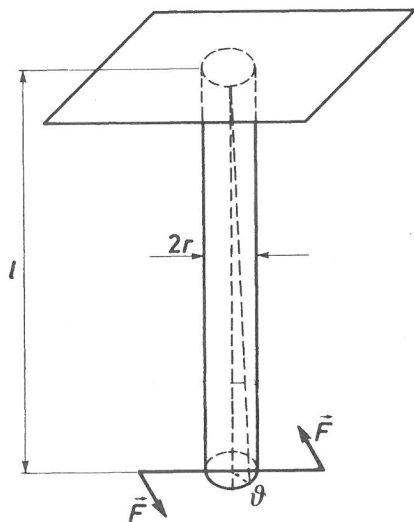
$$\vartheta = \frac{1}{G} \frac{2l}{\pi r^4} M \quad (1.22)$$

gdje je G modul smicanja materijala, l duljina štapa, r polumjer poprečnoga (kružnog) presjeka. Uvedemo li torzionu konstantu D ,

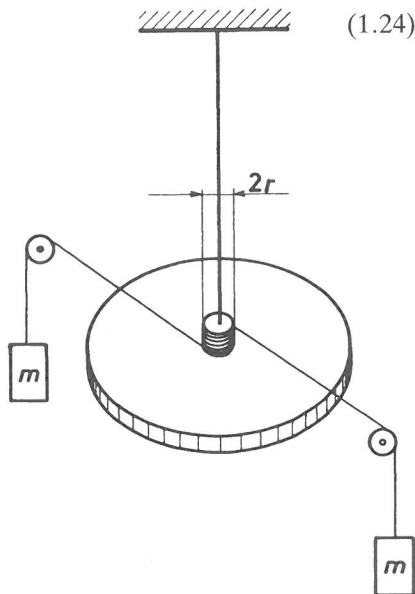
$$D = \frac{\pi r^4}{2l} G \quad (1.23)$$

to je

$$M = D\vartheta \quad (1.24)$$



Slika 1.9. Torzija okruglog štapa



Slika 1.10. Uređaj za mjerenje ovisnosti kuta torzije o momentu koji djeluje na žicu

Ovisnost kuta torzije o momentu koji pritom djeluje na žicu možemo ispitati mjerenjem. Na žici učvršćenoj na gornjem kraju visi disk na koji djelujemo parom sila tako da na valjak polumjera r u centru diska (sl. 1.10) omotamo konac, i prebacimo ga preko koloture, te na njegove krajeve objesimo utege mase m . Moment para sila je

$$M = m \cdot g \cdot 2r \quad (1.25)$$

i njega uravnotežuje moment torzije žice koji je jednak po iznosu ali je suprotnog smjera. Put za koji se pritom spuste utezi proporcionalan je kutu torzije.

1.2.3. Moduli elastičnosti materijala

Parametri koji opisuju elastična svojstva materijala jesu
Youngov modul elastičnosti

$$E = \sigma \frac{l}{\Delta l} = -p \frac{l}{\Delta l} \quad (1.7a)$$

volumni modul elastičnosti

$$B = -p \frac{V}{\Delta V} \quad (1.10a)$$

modul torzije

$$G = \frac{\tau}{\beta} \quad (1.18a)$$

i Poissonov broj (koeficijent)

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \quad (1.9a)$$

Sve su četiri konstante pozitivne veličine. Samo su dvije od te četiri konstante neovisne pa postoje dvije jednačbe koje povezuju te veličine. Prva od njih je veza volumnog modula elastičnosti B , Youngova modula E i koeficijenta μ :

$$B = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (1.26)$$

Budući da je $E > 0$ i $B > 0$, mora biti $1 - 2\mu > 0$, $\mu < 1/2$, pa je Poissonov broj uvijek između 0 i 0,5.

Druga je veza ona između modula torzije G i Youngova modula E :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.19)$$

Te veze vrijede samo za homogene i izotropne materije. Tako za čelik $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $B = 1,6 \cdot 10^{11}$ Pa, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Pa, $\mu = 0,3$.

$$\text{Zaista je } B = \frac{2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}}{1,2} = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Pa,}$$

$$G = \frac{2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}}{2,6} = 7,7 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa.}$$

Tablica 1.2. Moduli elastičnosti nekih materijala

Materijal	Youngov modul elastičnosti $E/(\text{GNm}^{-2})$	Volumni modul $B/(\text{GNm}^{-2})$	Modul torzije $G(\text{GNm}^{-2})$
aluminij	70	70	24
mjed	90	60	35
bakar	120	120	42
željezo (meko)	90	96	
čelik	200	160	80
volfram			150
živa		29	
voda		2	
alkohol		1,1	

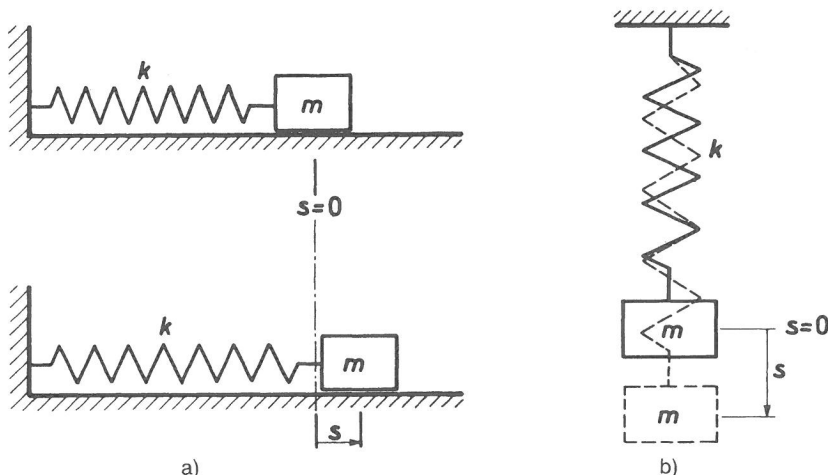
U tablici 1.2. navedene su približne vrijednosti modula elastičnosti za neke materijale. Osim o materijalu, moduli elastičnosti istog materijala mogu varirati ako mu je fizikalna struktura različita; oni ovise i o temperaturi.

Osim navedenih osobina materijala, u praksi je potrebno poznavati i druge osobine, npr. *tvrdocu*, *rastezljivost* i sl. Spomenimo da je tvrdoća materijala otpor kojim se tijelo suprotstavlja prodiranju drugih tijela u njegovu površinu. Tako se često stupanj tvrdoće mjeri utiskivanjem čelične kuglice promjera 10 mm u površinu materijala čija se tvrdoća želi ispitati. Pritom se djeluje silom od 29,4 kN i mjeri promjer dobivene udubine. Dijeljenjem sile od 29,4 kN presjekom nastale udubine (mm²) i akceleracijom sile teže, dobijemo tzv. *Brinellov broj*. Tako je Brinellov broj za aluminij oko 16, za olovo 4, za čelik 460 itd.

1.3. Jednostavno harmoničko titranje

1.3.1. Harmonički oscilator

Zakone harmoničkog titranja najbolje ćemo uočiti proučavajući gibanje tijela mase m učvršćenog na kraju horizontalne opruge (sl. 1.11a). Kada tijelo izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo, ono titra zbog utjecaja elastične sile opruge $F = -ks$. Pri takvom pravocrtnom titranju, uz pretpostavku da je trenje vrlo maleno, smanjenje amplitude (tj. maksimalne elongacije) s vremenom dosta je sporo te, u manjim vremenskim intervalima, titranje možemo smatrati neprigušenim.



Slika 1.11. Titranje tijela na opruzi

Sličan titrajni sistem prikazan je na slici 1.11b.

Ako na oprugu objesimo uteg mase m , produženje opruge proporcionalno je težini G :

$$G = m g = k (l - l_0) \quad (1.14)$$

Kada sistem opruga + tijelo izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo, sistem će titrati. Rezultantna sila koja uzrokuje titranje je suma napetosti opruge i težine tijela:

$$\begin{aligned} F &= mg - k(s + l - l_0) \\ F &= k(l - l_0) - k(l - l_0) - ks \end{aligned}$$

odnosno

$$F = -ks \quad (1.2)$$

To je sila opruge, tzv. elastična ili harmonička sila. Ona je proporcionalna i po smjeru suprotna *pomaku* s iz položaja ravnoteže ili *elongaciji*. Konstanta proporcionalnosti je konstanta opruge. Sistem koji titra zbog utjecaja harmoničke sile zove se **harmonički oscilator**.

Da bismo utvrdili kako titra harmonički oscilator, moramo riješiti jednadžbu gibanja (2. Newtonov zakon) za takvo titranje:

$$F = ma$$

$$F = m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks$$

odnosno

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0 \quad (1.27)$$

To je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Iz nje možemo doznati elongaciju $s(t)$, brzinu $v(t)$ i akceleraciju $a(t)$.

Prema teoriji diferencijalnih jednadžbi postoje dva linearno neovisna rješenja jednadžbe (1.27), npr. funkcije $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$, a opće je rješenje linearna kombinacija tih dvaju neovisnih rješenja:

$$s(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (1.28)$$

Zamijenimo li $a = A \cos \varphi_0$ i $b = A \sin \varphi_0$, izraz poprima oblik

$$s(t) = A \cos \varphi_0 \sin \omega t + A \sin \varphi_0 \cos \omega t,$$

odnosno

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.28a)$$

gdje su A i φ_0 konstante koje ćemo odrediti kasnije.

Uvrstimo li izraz (1.28a) u diferencijalnu jednadžbu (1.27), dobivamo:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \varphi_0) = 0, \quad (1.29)$$

odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.30)$$

jer jednađba (1.29) mora biti zadovoljena u svakom trenutku t .

Jednađba (1.27) ima, dakle, rješenje u obliku sinusne (harmoničke) funkcije:

$$s(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad (1.28b)$$

Rješenje $s(t)$ periodička je funkcija, a period T je vrijeme u kojemu se argument sinusa poveća za 2π :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{m}} (t + T) &= \sqrt{\frac{k}{m}} t + 2\pi \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Period ne ovisi o amplitudi titranja, što je karakteristika svakoga harmoničkog titranja. Frekvencija titranja je

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.32)$$

Veličina

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.32a)$$

zove se **kružna frekvencija** i izražava se jedinicom recipročna sekunda, s^{-1} . (Ponekad se i ω radi kratkoće jednostavno zove frekvencija.)

U izrazu (1.28b) konstanta A je amplituda, tj. pomak u času kad se čestica zaustavi i promijeni smjer titranja. Veličina $\omega t + \varphi_0$ je faza titranja, a φ_0 je početna faza u trenutku $t = 0$.

Derivirajući po vremenu, iz elongacije dobivamo brzinu i akceleraciju. Prva derivacija elongacije po vremenu je brzina tijela koje titra:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = A \omega \cos (\omega t + \varphi_0) \quad (1.33)$$

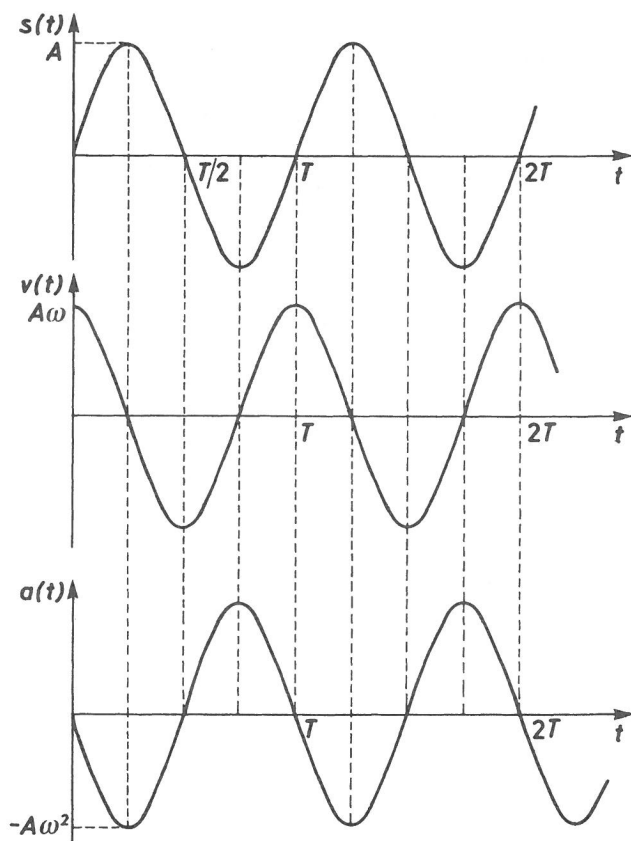
Druga derivacija elongacije je akceleracija:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = -A \omega^2 \sin (\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 s(t) \quad (1.34)$$

Slika 1.12. prikazuje vremensku ovisnost elongacije, brzine i akceleracije materijalne točke koja harmonički titra. (Početna faza za titranje prikazano na sl. 1.12. jest $\varphi_0 = 0$.)

Jednađba (1.27), čije rješenje daje elongaciju (1.28) diferencijalna je jednađba drugog reda. Njezino je rješenje točno određeno ako poznajemo dva početna uvjeta, npr. elongaciju i brzinu u vremenu $t = 0$:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad s(t = 0) &= A \sin \varphi_0, \\ v(t = 0) = \dot{s}(0) &= A \omega \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (1.35)$$



Slika 1.12. Vremenska ovisnost elongacije, brzine i akceleracije pri jednostavnom harmoničkom titranju

Amplitudu A i početnu fazu φ_0 možemo izraziti pomoću početnih uvjeta (1.35):

$$A^2 = s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2} \quad \text{i} \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{\omega s(0)}{v(0)} \quad (1.36)$$

Ako je npr. $s(0) = 0$, tj. ako je tijelo u početku u ravnotežnom položaju, onda je $\varphi_0 = 0$ i $A = \frac{v(0)}{\omega}$.

Ako je $v(0) = 0$, tj. ako je tijelo u početnom trenutku maksimalno udaljeno od ravnotežnog položaja, onda je $A = s(0)$, a početna je faza $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

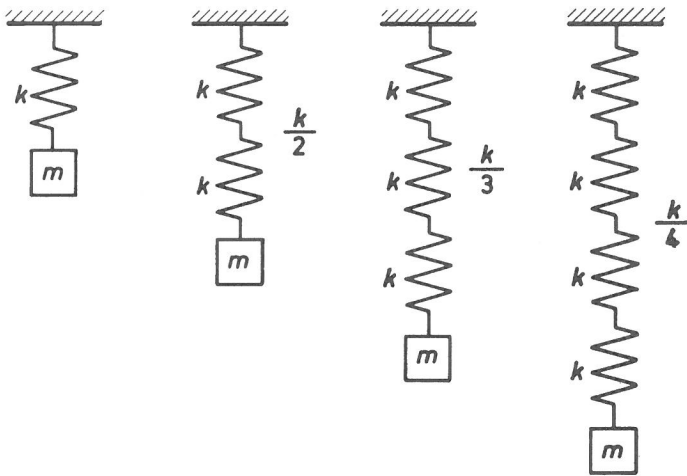
U prvom se slučaju elongacija mijenja po zakonu $s(t) = \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t$, a u drugome po zakonu $s(t) = s(0) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = s(0) \cos \omega t$.

Mjerenjem se može pokazati da period utega koji titra na opruzi ovisi o masi utega i konstanti opruge, a ne ovisi o amplitudi titranja.

Da bismo ispitali ovisnost perioda T o konstanti opruge, najbolje je mijenjati konstantu opruge serijski spajajući dvije ili više jednakih opruga zajedno (sl. 1.13). Može se pokazati da je za serijski spoj više jednakih opruga rezultatna konstanta k dana izrazom:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots \quad (1.37)$$

Tako je konstanta dviju jednakih, serijski spojenih opruga jednaka $\frac{k_1}{2}$, triju opruga $\frac{k_1}{3}$ itd.



Slika 1.13. Mjerenje perioda titranja utega na opruzi

Rezultati jednoga takvog mjerenja ovisnosti perioda o masi utega i konstanti opruge dani su u tablici 1.3. Vidimo da period harmoničnog oscilatora ovisi o kvadratnom korijenu iz omjera mase utega i konstante opruge, što je u skladu s izrazom (1.31)

Tablica 1.3. Rezultati mjerenja perioda titranja utega na opruzi

Masa utega	Konstanta opruge k			
	$k = k_1$	$k = k_1/2$	$k = k_1/3$	$k = k_1/4$
m/kg	T/s	T/s	T/s	T/s
2	0,245	0,356	0,425	0,515
4	0,362	0,509	0,605	0,736
6	0,430	0,618	0,735	0,885
8	0,513	0,725	0,884	1,016

Rješenje jednadžbe harmoničkog oscilatora i sličnih diferencijalnih jednadžbi još jednostavnije možemo odrediti služeći se kompleksnim brojevima umjesto funkcijama sinus odnosno kosinus. Poznato je da se svaki kompleksni broj $z = x + iy$ može prikazati u polarnim koordinatama

$$z = |z| e^{i\varphi}, \text{ gdje je } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ i } \varphi = \arctg y/x.$$

Uzimajući u obzir Eulerovu relaciju

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.38)$$

umjesto s trigonometrijskim funkcijama možemo računati s eksponencijalnom funkcijom, a to je obično jednostavnije.

Jednadžba jednostavnog harmoničnog oscilatora glasi:

$$m\ddot{s} + ks = 0 \quad (1.27)$$

Pretpostavimo da rješenje te jednadžbe ima oblik

$$s(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} = A [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] \quad (1.39)$$

Nakon deriviranja i uvrštavanja

$$\dot{s}(t) = i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad \ddot{s}(t) = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1.40)$$

u (1.27) dobivamo

$$-m A \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} + k A e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \quad (1.41)$$

odnosno

$$(-m\omega^2 + k) e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \quad (1.42)$$

Jednadžba 1.42. moguća je jedino ako je $-m\omega^2 + k = 0$, odnosno

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (1.30)$$

Možemo, dakle, zaključiti da je rješenje jednadžbe (1.27) funkcija (1.39) uz uvjet da je kružna frekvencija ω u toj funkciji jednaka $\sqrt{k/m}$. Budući da je funkcija (1.39) kompleksna funkcija, a rješenje jednadžbe, tj. funkcija koja opisuje titranje realna funkcija, možemo, služeći se Eulerovom relacijom, rješenjem smatrati realni dio funkcije (1.39).

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.28c)$$

odnosno njezin imaginarni dio

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.28a)$$

gdje se A i φ određuju iz početnih uvjeta. Budući da su rješenja (1.28c) i (1.28a) ekvivalentna, izabrat ćemo jedan od njih, npr. oblik (1.28c).

Primjer

Ako uteg mase 5 kg objesimo na oprugu, ona se produži za 49 cm.

- a) Kolika je konstanta opruge?
- b) Uteg izvučemo iz ravnotežnog položaja za 10 cm i pustimo da titra. Koliki je period, kružna frekvencija i frekvencija sistema?
- c) Gdje se nalazi uteg i kolika mu je brzina i akceleracija 0,35 s nakon početka titranja? Kolikom silom opruga djeluje na uteg u tom trenutku? Nacrtajte vremensku ovisnost elongacije, brzine i akceleracije utega za $0 \leq t \leq 2T$.

a) Kada uteg objesimo na oprugu duljine l_0 , opruga se produži za Δl (sl. 1.1). Pritom težinu opruge uravnotežuje sila opruge

$$mg = k \Delta l.$$

Odatle je konstanta opruge:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = 100 \text{ N/m}.$$

b) Jednadžba gibanja sistema je

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks.$$

Rješenje te jednadžbe je

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

gdje je

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4,472 \text{ s}^{-1}.$$

Dakle,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,4 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = 0,71 \text{ s}^{-1}, \quad \omega = 2\pi f = 4,5 \text{ s}^{-1}$$

(Na uteg ustvari djeluje sila teža mg i sila opruge $-kx$, pri čemu je x produženje opruge, $x = l - l_0$. Jednadžba gibanja je:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx.$$

Budući da je $mg = k \Delta l$ i $s = l - l_0 - \Delta l = x - \Delta l$, jednadžba gibanja je

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - k(s + \Delta l) = mg - k \Delta l - ks = -ks,$$

dakle, jednadžba gibanja jednaka je bez obzira na to djeluje li na tijelo sila teža ili ne.)

c) Početni uvjeti su $t = 0, s = s_0 = 0,1 \text{ m}, v = v_0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = 0$,

te je elongacija

$$s = 0,1 \text{ m} \cos(4,5 \text{ s}^{-1} t).$$

U trenutku $t = 0,35$ s elongacija je:

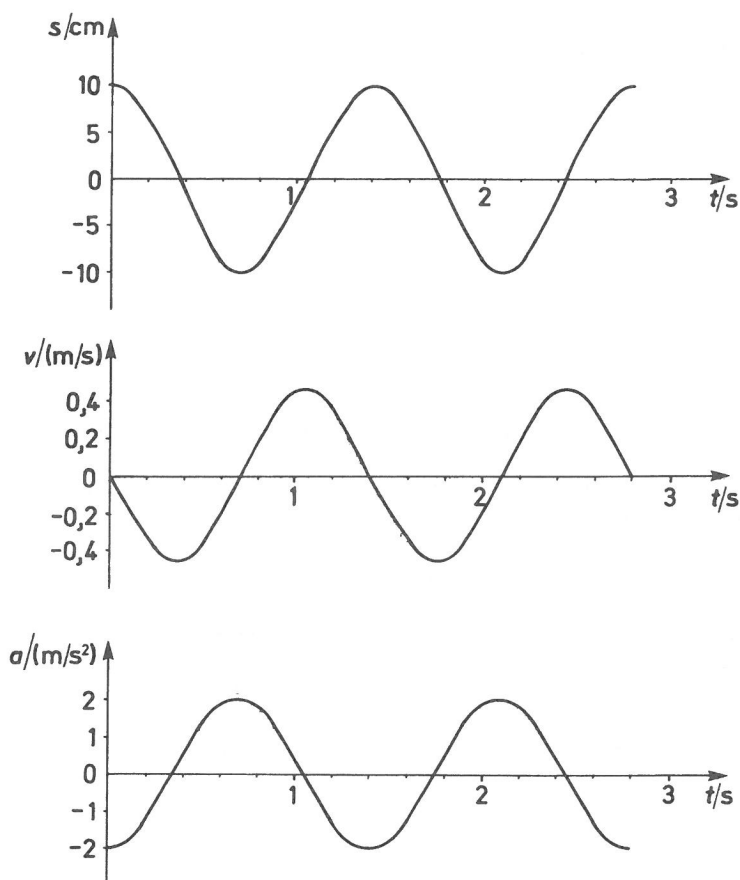
$$s(0,35 \text{ s}) = 0,1 \text{ m} \cos(4,5 \text{ s}^{-1} \cdot 0,35 \text{ s}) = 0.$$

Brzina i akceleracija jesu

$$v = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin \omega t = -0,45 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t = 0$$

U $t = 0,35$ s, sila opruge je $F = -ks = 0$. To se vidi i iz $F = ma = 0$. Vremenska ovisnost elongacije, brzine i akceleracije utega pokazana je na slici 1.14. Tu sliku usporedite sa slikom 1.12.



Slika 1.14. Elongacija, brzina i akceleracija utega

Primjer

Uteg mase 5 kg koji visi na opruzi konstante 100 N/kg izvučemo iz ravnotežnog položaja za $A = 0,1$ m i pustimo da titra tako da je početna brzina nula.

Izračunajte pomak tako da iz jednadžbe gibanja numeričkom metodom odredite akceleraciju, brzinu i pomak podijelivši vremenski interval $0 < t < 3$ s u 30 vremenskih intervala od $\Delta t = 0,1$ s i pretpostavite da je u tako kratkom vremenskom intervalu Δt akceleracija konstantna.

Početni uvjeti su $t = 0$, $v = 0$, $s = A = 0,1$ m. Jednadžba gibanja je

$$ma = -ks$$

$$a = -\frac{k}{m}s.$$

U prvom vremenskom razdoblju Δt , tj. u $0 < t < 0,1$ s, akceleraciju možemo smatrati konstantnom (ako rezultat pokaže da ta aproksimacija nije opravdana, za Δt uzet ćemo još kraće vrijeme):

$$a_1 = -\frac{k}{m}s_0 = -2 \text{ m/s}^2.$$

Srednja brzina u tom intervalu iznosi

$$\bar{v}_1 = v_0 + a_1 \Delta t/2 = -0,15 \text{ m/s}.$$

Pomak je

$$s_1 = s_0 + \bar{v}_1 \Delta t = 0,09 \text{ m}.$$

U sljedećem vremenskom intervalu Δt (tj. u $0,1 \text{ s} < t < 0,2$ s) akceleracija će biti

$$a_2 = -\frac{k}{m}s_1 = -1,8 \text{ m/s}^2.$$

Srednja brzina je

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2 \Delta t = -0,28 \text{ m/s},$$

a pomak

$$s_2 = s_1 + \bar{v}_2 \Delta t = 0,062 \text{ m}.$$

Računanje nastavljamo do zadnjega vremenskog intervala Δt , tj. do $2,9 \text{ s} < t < 3$ s. Pritom dobivamo 30 točaka funkcije $s(t)$. (Računanje je osobito jednostavno izvesti računarom.) Rezultati su dani u tablici 1.4. Nacrtamo li dobivene rezultate, vidimo da je krivulja funkcija kosinus s periodom 1,4 s. Egzaktno rješenje dobiveno integriranjem jednadžbe gibanja glasi

$$s = A \cos \omega t = 0,2 \text{ m} \cos 4,47 \text{ s}^{-1}t,$$

a približno se slaže s aproksimativnim rješenjem dobivenim numeričkom metodom što se vidi usporedbom zadnjih dvaju stupaca u tablici.

Numerička metoda rješavanja jednadžbi gibanja osobito dobro pomaže kad ne znamo egzaktno riješiti diferencijalnu jednadžbu gibanja. Ovdje je to, naravno, samo ilustracija te metode jer smo jednadžbu gibanja riješili egzaktno.

Uz drukčije početne uvjete, npr. $t = 0$, $s = 0$, $v_0 = 0,447$ m/s, dobivamo drukčije posebno rješenje jednadžbe gibanja. Rezultati kompjuterskog proračuna numeričkom metodom dani su u tablici 1.5. Tada je rješenje $s = 0,2 \text{ m} \sin 4,47 \text{ s}^{-1}t$.

Tablica 1.4. Rezultati numeričkog rješavanja diferencijalne jednadžbe titranja uz početne uvjete $s_0 = 0,1 \text{ m}$ i $v_0 = 0$

t/s	$a/(\text{ms}^{-2})$	$v/(\text{ms}^{-1})$	s/m	$A \cos \omega t$
0,10	- 2,0000	- 0,1000	0,0900	0,0902
0,20	- 1,8000	- 0,2800	0,0620	0,0626
0,30	- 1,2400	- 0,4040	0,0216	0,0227
0,40	- 0,4320	- 0,4472	- 0,0231	- 0,0216
0,50	0,4624	- 0,4010	- 0,0632	- 0,0617
0,60	1,2643	- 0,2745	- 0,0907	- 0,0897
0,70	1,8134	- 0,0932	- 0,1000	- 0,1000
0,80	1,9998	0,1068	- 0,0893	- 0,0906
0,90	1,7862	0,2854	- 0,0608	- 0,0635
1,00	1,2154	0,4069	- 0,0201	- 0,0238
1,10	0,4015	0,4471	0,0246	0,0205
1,20	- 0,4927	0,3978	0,0644	0,0609
1,30	- 1,2883	0,2690	0,0913	0,0892
1,40	- 1,8263	0,0864	0,1000	0,1000
1,50	- 1,9990	- 0,1135	0,0886	0,0911
1,60	- 1,7719	- 0,2907	0,0595	0,0643
1,70	- 1,1905	- 0,4098	0,0185	0,0249
1,80	- 0,3709	- 0,4469	- 0,0261	- 0,0195
1,90	0,5229	- 0,3946	- 0,0656	- 0,0600
2,00	1,3120	- 0,2634	- 0,0919	- 0,0887
2,10	1,8388	- 0,0795	- 0,0999	- 0,0999
2,20	1,9978	0,1203	- 0,0879	- 0,0916
2,30	1,7573	0,2960	- 0,0583	- 0,0652
2,40	1,1653	0,4125	- 0,0170	- 0,0259
2,50	0,3402	0,4465	0,0276	0,0184
2,60	- 0,5529	0,3913	0,0668	0,0591
2,70	- 1,3354	0,2577	0,0925	0,0882
2,80	- 1,8508	0,0726	0,0998	0,0999
2,90	- 1,9961	- 0,1270	0,0871	0,0920
3,00	- 1,7422	- 0,3012	0,0570	0,0660

Primjer

Uteg mase 0,1 kg visi na opruzi konstante 1,6 N/m (i zanemarive mase). Ako uteg izvučete 10 cm izvan položaja ravnoteže i pustite da titra (bez početne brzine), odredite:

- jednadžbu gibanja utega,
- period i frekvenciju titranja,
- elongaciju utega kao funkciju vremena,
- položaj, brzinu i akceleraciju utega u $t = 1$ s nakon početka titranja;
- riješite isti zadatak, ali uz drukčije početne uvjete, tj. neka je $t = 0$, $s = A = 0$ m, i $v = 0,4$ m/s te za $t = 0$, $s = A = 0,1$ m i $v = 0,2$ m/s.

a) Jednadžba gibanja (2. Newtonov zakon) harmoničkog oscilatora (utega na opruzi) glasi

$$ma = m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks,$$

Tablica 1.5. Rezultati numeričkog rješavanja diferencijalne jednačbe titranja uz početne uvjete $s_0 = 0$ i $v_0 = 0,447$ m/s

t/s	$a/(ms^{-2})$	$v/(ms^{-1})$	s/m	$A \cos \omega t$
0,10	0,0000	0,4472	0,0447	0,0432
0,20	-0,8944	0,3578	0,0805	0,0780
0,30	-1,6099	0,1968	0,1002	0,0974
0,40	-2,0035	-0,0036	0,0998	0,0976
0,50	-1,9963	-0,2032	0,0795	0,0787
0,60	-1,5899	-0,3622	0,0433	0,0442
0,70	-0,8655	-0,4487	-0,0016	0,0011
0,80	0,0320	-0,4455	-0,0462	-0,0422
0,90	0,9231	-0,3532	-0,0815	-0,0773
1,00	1,6296	-0,1903	-0,1005	-0,0971
1,10	2,0101	0,0107	-0,0994	-0,0979
1,20	1,9887	0,2096	-0,0785	-0,0794
1,30	1,5695	0,3665	-0,0418	-0,0452
1,40	0,8364	0,4502	0,0032	-0,0022
1,50	-0,0640	0,4438	0,0476	0,0412
1,60	-0,9516	0,3486	0,0824	0,0766
1,70	-1,6488	0,1837	0,1008	0,0969
1,80	-2,0163	-0,0179	0,0990	0,0981
1,90	-1,9805	-0,2159	0,0774	0,0800
2,00	-1,5487	-0,3708	0,0404	0,0462
2,10	-0,8071	-0,4515	-0,0048	0,0033
2,20	0,0960	-0,4419	-0,0490	-0,0402
2,30	0,9798	-0,3439	-0,0834	-0,0759
2,40	1,6677	-0,1772	-0,1011	-0,0966
2,50	2,0220	0,0250	-0,0986	-0,0983
2,60	1,9719	0,2222	-0,0764	-0,0807
2,70	1,5275	0,3750	-0,0389	-0,0472
2,80	0,7775	0,4527	0,0064	-0,0044
2,90	-0,1279	0,4399	0,0504	0,0392
3,00	-1,0078	0,3392	0,0843	0,0751

odnosno

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0,$$

pri čemu je $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ kružna frekvencija titranja.

Uvrštavanjem podataka, dobivamo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4 \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 16 s = 0$$

To je homogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda, jednačba neprigušenoga harmoničkog oscilatora.

b) Period titranja je

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4 \text{ s}^{-1}} = \frac{\pi}{2} \text{ s} = 1,57 \text{ s},$$

a frekvencija

$$f = \frac{1}{T} = 0,637 \text{ Hz.}$$

c) Elongacija utega $s(t)$ je rješenje diferencijalne jednačbe. Opće je rješenje

$$s(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t,$$

što se može dokazati uvrštavanjem. Nepoznate konstante A_1 i B_1 određujemo iz početnih uvjeta,

$$t = 0, \quad s = 10 \text{ cm}, \quad B_1 = 10 \text{ cm}$$

$$t = 0, \quad v = 0, \quad A_1 = 0$$

$$s(t) = B_1 \cos \omega_0 t = 10 \text{ cm} \cos (4 \text{ s}^{-1} t).$$

d) Iz

$$s(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -A \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A \omega_0^2 \cos \omega_0 t$$

uvrštavanjem $t = 1 \text{ s}$, $A = 10 \text{ cm}$, $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ dobivamo:

$$s(t = 1 \text{ s}) = -6,5 \text{ cm}$$

$$v(t = 1 \text{ s}) = 30,3 \text{ cm/s}$$

$$a(t = 1 \text{ s}) = 105 \text{ cm/s}^2$$

U $t = 1 \text{ s}$ uteg se nalazi 6,5 cm iznad ravnotežnog položaja, brzina mu je 30,3 cm/s prema dolje, a akceleracija 105 cm/s prema dolje.

e) Ako su početni uvjeti $t = 0$, $s = A = 0$, $v = 40 \text{ cm/s}$, tada je

$$s(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = A_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - B_1 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$t = 0 \quad v = \frac{ds}{dt} = 40 \text{ cm/s} \Rightarrow A_1 = 10 \text{ cm}$$

$$s(t) = A_1 \sin \omega_0 t = 10 \text{ cm} \sin (4 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

$$s(t = 1 \text{ s}) = 10 \text{ cm} \sin 4 = -7,6 \text{ cm}$$

$$v(t = 1 \text{ s}) = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cos 4 = -26,1 \text{ cm/s}^2.$$

$$a(t = 1 \text{ s}) = -160 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \sin 4 = 121,1 \text{ cm/s}^2.$$

Ako su početni uvjeti $t = 0$, $s = A = 0,1$ m, $v = 0,2$ m/s, dobivamo

$$s = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t$$

$$t = 0, \quad s = 0,1 \text{ m}, \quad B_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\frac{ds}{dt} = A_1 \omega_0 \cos \omega_0 t + B_1 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$t = 0, \quad v = 0,2 \text{ m/s} \Rightarrow A_1 = 0,05 \text{ m}$$

$$s(t) = 10 \text{ cm} \sin(4 \text{ s}^{-1} \cdot t) + 5 \text{ cm} \cos(4 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$

Uočiti ćemo da opće rješenje jednadžbe gibanja možemo pisati u dva različita ali ekvivalentna oblika:

$$s(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t,$$

ili:

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Iz $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \sin \omega_0 t \cos \varphi_0 + A \sin \varphi_0 \cos \omega_0 t$, uvrštavanjem $A \cos \varphi_0 = A_1$ i $A \sin \varphi_0 = B_1$, dobivamo prvi oblik, $s(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t$. Veza među konstantama je

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{A_1}{A}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{B_1}{A}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{B_1}{A_1}.$$

Taj smo zadatak mogli riješiti i pomoću $s(t) = A \sin(\omega_0 + \varphi_0)$. Uvrštavanjem početnih uvjeta, dobili bismo:

$$A = 11,2 \text{ cm} \quad \varphi_0 = 63,43^\circ = 1,107 \text{ rad}$$

$$s(t) = 11,2 \text{ cm} \cdot \sin(4 \text{ s}^{-1} t + 63,43^\circ) = 11,2 \text{ cm} \cdot \sin(4 \text{ s}^{-1} t + 1,107)$$

Zaista je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{100 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2} = 11,2 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{10}{5} = 2, \quad \varphi_0 = 63,43^\circ \\ \varphi_0 = 1,107 \text{ rad}.$$

1.3.2. Matematičko njihalo

Sitno tijelo, materijalna točka mase m koja se njiše obješena na nerastežljivu laganu nit dužine l čiju masu zanemarujemo, zove se **matematičko njihalo**. Kada njihalo miruje u ravnotežnom položaju, napetost niti N uravnotežuje silu težu G na materijalnu točku. Kada je njihalo za neki kut ϑ izvan položaja ravnoteže (sl. 1.15), normalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti,

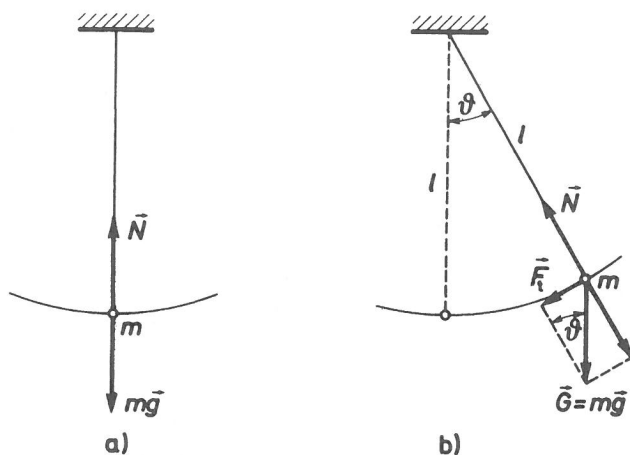
$$N = mg \cos \vartheta,$$

a tangencijalna je komponenta sile teže usmjerena prema ravnotežnom položaju.

Zbroj svih sila na materijalnu točku jednak je tangencijalnoj komponenti sile teže

$$F_t = -mg \sin \vartheta,$$

gdje predznak minus znači da sila djeluje u smjeru suprotnom od smjera povećanja kuta ϑ .



Slika 1.15. Matematičko njihalo

Zbog djelovanja te sile materijalna će se točka njihati oko položaja ravnoteže, titrat će amo-tamo. Sila nije proporcionalna pomaku ϑ , već $\sin \vartheta$, nije dakle harmonička, pa ni gibanje njihala nije harmoničko. Međutim, za male je kutove, kut (izražen u radijanima) približno jednak sinusima kuta ($\sin \vartheta \approx \vartheta$), pa je u tom slučaju sila

$$F = -mg \vartheta$$

harmonička, a gibanje njihala analogno je gibanju harmoničkog oscilatora koje smo opisali u prethodnom odjeljku.

Matematičko njihalo, dakle, harmonički titra samo za male amplitude. **Za veće amplitude njihanje nije harmoničko.**

Za male amplitude period ne ovisi o amplitudi, a za veće je amplitude period funkcija amplitude.

Jednadžba gibanja matematičkog njihala glasi:

$$ma_t = F_t = -mg \sin \vartheta \quad (1.43)$$

odnosno, za male amplitude,

$$ml \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -mg \vartheta \quad (1.44)$$

gdje smo uzeli u obzir vezu između tangencijalne i kutne akceleracije:

$$a_t = l\alpha = l \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad (1.45)$$

Napišemo li jednadžbu u obliku

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \quad (1.46)$$

vidimo da je to jednadžba harmoničkog titranja analogna jednadžbi titranja opruge. Kao i u odjeljku 1.3. tako i sada možemo pokazati da je rješenje jednadžbe (1.46) oblika

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.47)$$

gdje je ϑ_0 amplituda titranja, φ_0 početna faza, a $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ kružna frekvencija. Kutni pomak ϑ periodična je frekvencija vremena s periodom $T = 2\pi/\omega$ odnosno

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.48)$$

Period matematičkog njihala, koje se niže malim amplitudama ne zavisi ni o masi, ni o amplitudi, već samo o duljini njihala l i akceleraciji sile teže g^* .

Međutim, za veće amplitude sinus kuta ne možemo aproksimirati kutom, pa se jednadžba gibanja ne može tako jednostavno riješiti. Period njihala u tom slučaju ovisi o amplitudi ϑ_0 i raste s njom. Može se pokazati da je tada period

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin^6 \frac{\vartheta_0}{2} + \dots \right) \quad (1.49)$$

Budući da se članovi reda brzo smanjuju, često je pri proračunu perioda dovoljno uzeti prva dva ili tri člana.

Označimo li $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, možemo pisati

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\vartheta_0}{2} + \dots \right) \quad (1.50)$$

U tablici su izneseni rezultati računa $\frac{T}{T_0}$ za razne kutove ϑ_0 , od 0° do 90° , uzimajući četiri člana reda u (1.50).

* Zanimljivo je napomenuti da je promatrajući njihanja teškoga i laganog svijećnjaka Galileo Galilei 1653. zaključio da period njihala ne zavisi o masi već samo o duljini niti.

Tablica 1.6. Ovisnost perioda matematičkog njihala o amplitudi

Kut $\vartheta_0/^\circ$	Kut ϑ_0/rad	$\sin \vartheta_0$	T/T_0
2	0,034907	0,034899	1,000076
6	0,10472	0,10453	1,000686
10	0,17453	0,17365	1,00191
20	0,3491	0,34202	1,00767
30	0,5236	0,5	1,01744
40	0,6981	0,6428	1,0313
50	0,87267	0,766	1,0497
60	1,0472	0,866	1,0728
80	1,3963	0,9848	1,134
90	1,5708	1	1,1702

Primjer

Koliki je period matematičkog njihala dužine 1 m za amplitudu: **a)** 6° , **b)** 15° , **c)** 60° ?

Kolika je greška ako u posljednja dva slučaja pretpostavimo da period ne ovisi o amplitudi? (Računati sa $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ i $\pi = 3,141593$.)

a) Ako je $\vartheta_0 = 6^\circ$ (odnosno $0,1047 \text{ rad}$), $\sin \vartheta_0 = 0,1045$, umjesto sinusa možemo uzeti kut i period računati izrazom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,00641 \text{ s.}$$

b) Za $\vartheta_0 = 15^\circ$ (odnosno $0,2618 \text{ rad}$), $\sin \vartheta_0 = 0,2588$ razlikuje se od kuta ϑ_0 te period računamo izrazom (1.49)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{15^\circ}{2} + \dots \right) = 2,0064 (1 + 0,004) \text{ s.}$$

$$T = 2,015 \text{ s.}$$

Kada bi računali izrazom $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, pogreška bi bila

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2,015 \text{ s} - 2,0064 \text{ s}}{2,0064 \text{ s}} = 0,4\%$$

c) Za $\vartheta_0 = 60^\circ$ (odnosno $1,047 \text{ rad}$), $\sin \vartheta_0 = 0,866$, te je period

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{60^\circ}{2} + \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 16} \sin^4 \frac{60^\circ}{2} + \dots \right)$$

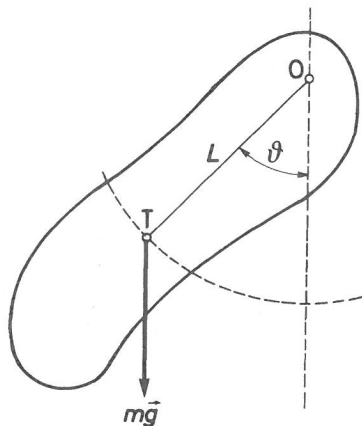
$$T = 2,0064 \text{ s} (1 + 0,0625 + 0,0088 + \dots) = 2,15 \text{ s.}$$

Pogreška je

$$\frac{\Delta T}{T} = 6,7\%.$$

1.3.3. Fizičko njihalo

Fizičko njihalo je kruto tijelo koje se zbog utjecaja sile teže njiše oko horizontalne osi što ne prolazi kroz težište (sl. 1.16).



Slika 1.16. Fizičko njihalo

Moment sile teže koji uzrokuje titranje je:

$$M = -mgL \sin \vartheta \quad (1.51)$$

gdje je L udaljenost osi rotacije O od težišta T tijela, a ϑ kut koji spojnica OT zatvara s vertikalom (sl. 1.16). Predznak minus pokazuje da moment sile nastoji smanjiti kut ϑ .

Kao za matematičko njihalo, i tu je za male amplitude

$$\sin \vartheta \approx \vartheta,$$

te je

$$M = -mgL \vartheta.$$

Jednadžba gibanja fizičkog njihala tj. jednadžba rotacije krutog tijela oko nepomične osi za male amplitude glasi:

$$M = I\alpha = -mgL \vartheta, \quad (1.52)$$

ili

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{mgL}{I} \vartheta = 0 \quad (1.53)$$

gdje je I moment tromosti tijela s obzirom na os rotacije.

To je *jednadžba harmoničkog titranja* slična jednadžbi (1.27) i njezina rješenja možemo pisati u obliku harmoničke funkcije:

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.47a)$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (1.54)$$

Period fizičkog njihala za male amplitude iznosi:

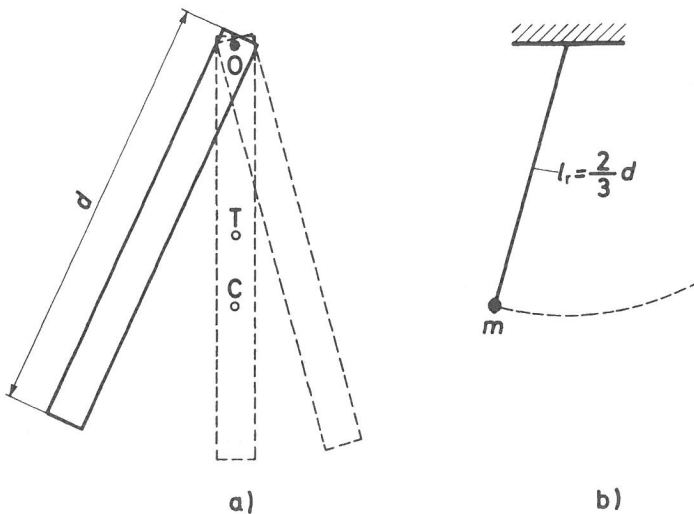
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad (1.55)$$

Koliku duljinu mora imati matematičko njihalo da bi imalo jednak period kao fizičko njihalo? Uspoređujući formule (1.48) i (1.55), vidimo da duljina matematičkog njihala treba da bude:

$$l_r = \frac{I}{mL} \quad (1.56)$$

Ta duljina l_r zove se *reducirana duljina* fizičkog njihala.

Promatramo fizičko njihalo u obliku štapa koji se njiše oko osi što proizlazi jednim njegovim krajem (sl. 1.17). Ako je duljina štapa d , tada je moment inercije $I = md^2/3$. Reducirana duljina takvog njihala je:



Slika 1.17. Reducirana duljina fizičkog njihala u obliku štapa

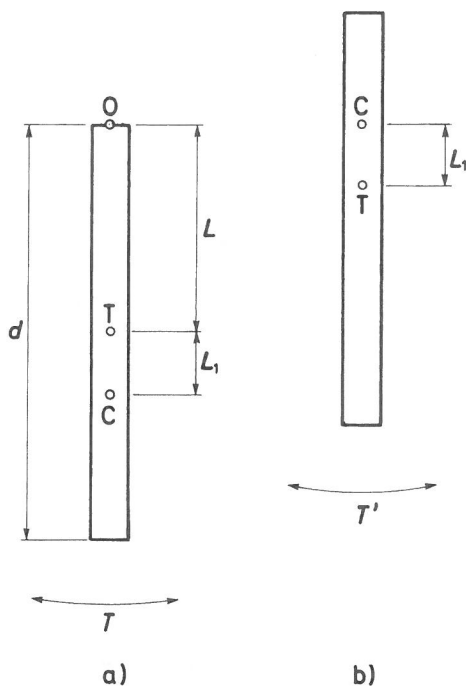
$$l_r = \frac{\frac{I}{md}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}d.$$

Matematičko njihalo duljine $l_r = \frac{2}{3}d$ imat će jednak period kao i štap duljine d (sl. 1.17).

Točka C na štapa koja je od osi udaljena za reduciranu duljinu l_r zove se **središte titranja** (sl. 1.17).

Primjer

Dokažite da fizičko njihalo obješeno u središtu titranja (u točki C) ima jednako vrijeme titranja kao i kad se njiše oko prvotne osi kroz točku O (sl. 1.18).



Slika 1.18. Fizičko njihalo obješeno u središtu titranja

Primjenom *Steinerova poučka* može se dokazati da je titrajno vrijeme (odnosno reducirana duljina) jednako kada se njihalo njiše oko točke O i oko točke C.

Ako se njihalo njiše oko osi kroz točku O (sl. 1.18a), period je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0/(mL)}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_t + mL^2}{mLg}},$$

jer je, prema Steinerovu poučku, $I_0 = I_t + mL^2$, gdje je I_t moment tromosti s obzirom na os kroz težište T .

Ako os prolazi kroz središte titranja C (sl. 1.18b), period je

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_c/(mL_1)}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_t + mL_1^2}{mL_1g}}.$$

Budući da je

$$L_1 = l_t - L = \frac{I_0}{mL} - L = \frac{I_0 - mL^2}{mL} = \frac{I_t}{mL},$$

period je

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_t + \frac{m l_t^2}{m^2 L^2}}{m \frac{I_t}{m L} g}}$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_t + m L^2}{m L g}} = T.$$

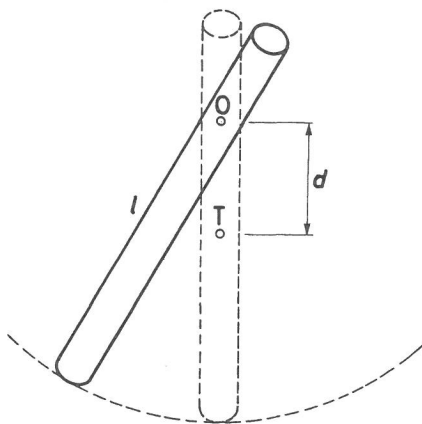
Njihalo koje se može objesiti tako da se njiše oko točke O i oko središta titranja C zove se **reverziono njihalo**. Budući da je za reverziono njihalo lako odrediti reduciranu duljinu (lakše nego izmjeriti duljinu za matematičko njihalo), mjerenjem perioda T reverzionog njihala može se izračunati akceleracija sile teže g .

Ako tijelo obješeno na horizontalnu os udarimo kroz središte titranja, ono će zarotirati oko te osovine i zbog tog udarca ležajevi se neće oštetiti. Ako ga, međutim, udarimo izvan te osi, pri udarcu nastaje translacija i rotacija. Ako je os nepomična, tijelo će se samo zarotirati. Međutim, sila nastala u ležajevima osovine, u tom slučaju može oštetiti ležajeve.

Primjer

Koliki je period fizičkog njihala u obliku homogenog štapa dužine $l = 1$ m ako se njiše oko osi koja prolazi

- jednim njegovim krajem,
- kroz točku udaljenu za $d = l/6$ od sredine štapa?
- kroz točku udaljenu za $d = l/4$ od sredine štapa?
- Kada je period minimalan, a kada maksimalan?



Slika 1.19

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_t + md^2}{mgd}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2/12 + md^2}{mgd}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + 12d^2}{12gd}}$$

$$\text{a) } d = \frac{l}{2} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{4l^2}{6gl}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1,64 \text{ s}$$

$$\text{b) } d = \frac{l}{6} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1,64 \text{ s}$$

$$\text{c) } d = \frac{l}{4} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{7l}{12g}} = 1,53 \text{ s}$$

d) Period je maksimalan, tj. beskonačan, kad je točka O u težištu (centru mase) štapa.

Period je minimalan kada derivacija T po d iščezava. To se događa kada je

$$d = \frac{l}{\sqrt{12}} \text{ tj. kada je } d = \frac{\sqrt{3}}{6} l.$$

1.3.4. Torziono njihalo

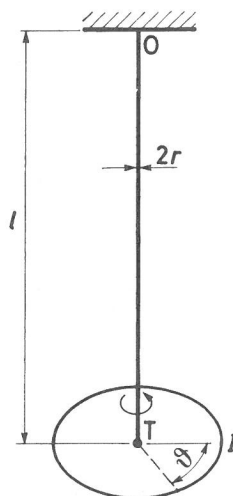
Torziono njihalo sastoji se od tijela obješenog o žicu tako da je objesište na vertikali koja prolazi kroz težište tijela (sl. 1.20).

Kada se tijelo iz ravnotežnog položaja zakrene za kut ϑ , žica se tordira i djeluje na tijelo momentom koji je proporcionalan kutnom pomaku ϑ , ali je suprotnog smjera:

$$M = -D\vartheta \quad (1.57)$$

Pritom je D torziona konstanta ovisna o materijalu i dimenzijama žice. Zbog utjecaja tog momenta tijelo će titrati oko ravnotežnog položaja. Jednadžba gibanja $M = I\alpha$ za torziono njihalo poprima oblik:

$$I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -D\vartheta,$$



Slika 1.20. Torziono njihalo

ili

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{D}{I} \vartheta = 0 \quad (1.58)$$

gdje je I moment tromosti s obzirom na os OT.

Jednadžba (1.58) istog je oblika kao jednadžba (1.27), (1.44) i (1.53) te zaključujemo da i torziono njihalo harmonički titra.

Suprotno matematičkome i fizičkom njihalu, titranje je harmoničko i za velike amplitude, te period torzionog njihala ne ovisi o amplitudi.

Rješenje diferencijalne jednadžbe (1.58) je

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.59)$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (1.60)$$

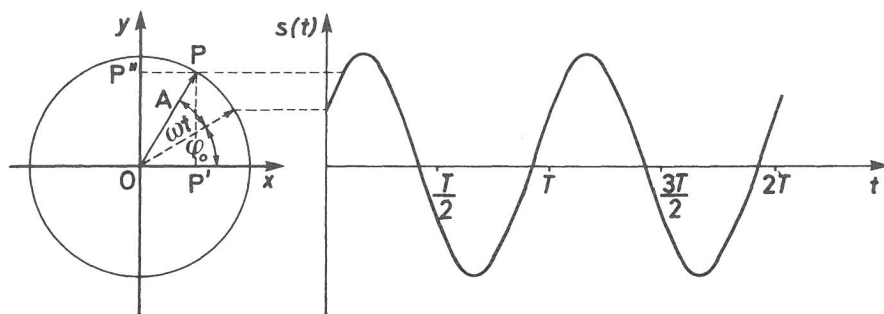
Period titranja je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (1.61)$$

Titrajno vrijeme ovisi o momentu tromosti tijela i elastičnim osobinama (torzionoj konstanti) žice. Mjereći period torzionog njihala, možemo, koristeći se formulom (1.61), i eksperimentalno odrediti moment tromosti tijela obješenog o žicu.

1.3.5. Prikaz harmoničkog titranja pomoću rotirajućeg vektora

Harmoničko titranje možemo povezati s jednolikim gibanjem po kružnici, što nam često može pomoći u proučavanju titrajnih sistema. Zamislimo da se točka P giba po kružnici polumjera A stalnom kutnom brzinom ω (sl. 1.21). Pritom se projekcija točke P na os x (odnosno os y) giba po toj osi. Ako je u $t = 0$ položaj



Slika 1.21. Prikaz harmoničkog titranja rotirajućim vektorom

točke P određen kutom φ_0 , tada će u trenutku t polumjer OP s osi x zatvoriti kut $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Pritom je gibanje projekcije P' i P'' opisano izrazima

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.62)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.63)$$

Iz toga zaključujemo: kada se neka točka giba jednoliko po kružnici, njezina projekcija na bilo koji promjer te kružnice harmonički titra. (Budući da smo titranje obično opisivali funkcijom sinus, titranje ćemo prikazivati gibanjem projekcije na os y .)

Kutna brzina točke jednaka je kružnoj frekvenciji, ophodno vrijeme gibanja po kružnici jednako je periodu titranja projekcije te točke, polumjer kružnice jednak je amplitudi titranja, a prijeđeni kut fazi titranja.

Vektor $\overrightarrow{OP}$ koji spaja ishodište i točku P zove se **rotirajući vektor** ili *fazor*. Dakle, dok rotirajući vektor rotira stalnom kutnom brzinom ω u ravnini xy , projekcija njegova vrha na os x odnosno y harmonički se giba kružnom frekvencijom ω .

Prikazom titranja pomoću rotirajućeg vektora koristit ćemo se npr. pri slaganju titranja te u optici, za proračunavanje interferencije svjetlosti. Metoda rotirajućeg vektora pomaže nam i pri rješavanju zadataka s izmjeničnim električnim strujama.

1.3.6. Energija titranja

Pri titranju materijalne točke kinetička energija stalno prelazi u potencijalnu, i obratno. Kada materijalna točka prolazi kroz ravnotežni položaj, potencijalna joj je energija jednaka nuli, a kinetička maksimalna. Zatim se kinetička energija smanjuje, a potencijalna raste, a u amplitudnom je položaju brzina materijalne točke (te i kinetička energija) jednaka nuli, a potencijalna je energija maksimalna.

Kinetička energija harmoničkog oscilatora jednaka je kinetičkoj energiji materijalne točke mase m i brzine $v(t)$ dane izrazom (1.33). Ako je elongacija materijalne točke koja harmonički titra

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

brzina je derivacija elongacije

$$v = \frac{ds}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

a kinetička energija:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_k = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_k = \frac{1}{2} k (A^2 - s^2). \quad (1.64)$$

Kad na materijalnu točku mase m djeluje elastična sila $F = -ks$, njezina je potencijalna energija jednaka radu te sile pri pomaku točke za elongaciju s iz ravnotežnog položaja

$$E_p = -W = - \int_0^s (-ks) ds = \frac{1}{2} ks^2.$$

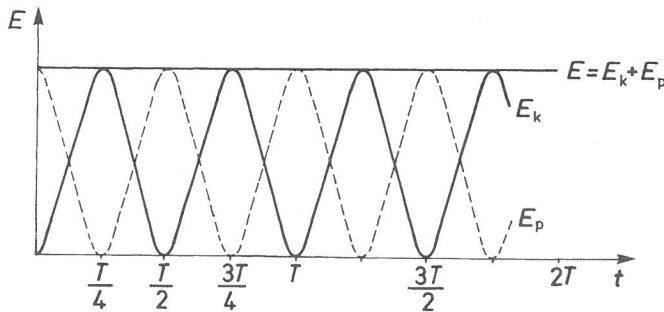
Budući da je $s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, to je

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (1.65)$$

Ukupna je energija zbroj potencijalne i kinetičke energije:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} k A^2. \quad (1.66)$$

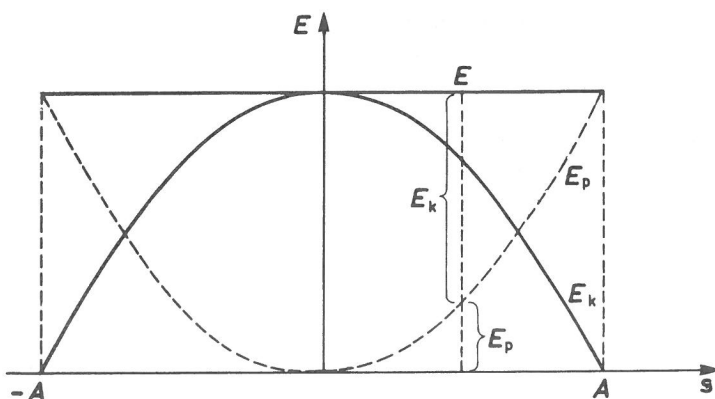
Ukupna energija proporcionalna je kvadratu amplitude i ne ovisi o vremenu – konstantna je, što smo mogli i očekivati zbog zakona održanja mehaničke energije. Naime, oscilator je zatvoreni sistem, a za zatvoreni sistem vrijedi zakon održanja energije.



Slika 1.22. Ovisnost energije harmoničkog titranja o vremenu

Na slici 1.22. prikazana je ovisnost kinetičke, potencijalne i ukupne energije o vremenu (za $\varphi_0 = 90^\circ$), a na slici 1.23 njihova ovisnost o elongaciji. Ovisnost potencijalne energije o elongaciji prikazana je dijelom parabole na slici 1.23, a ukupna energija pravcem paralelnim sa osi s . Iz crteža se jasno vidi da je u svakom trenutku (za svaku elongaciju)

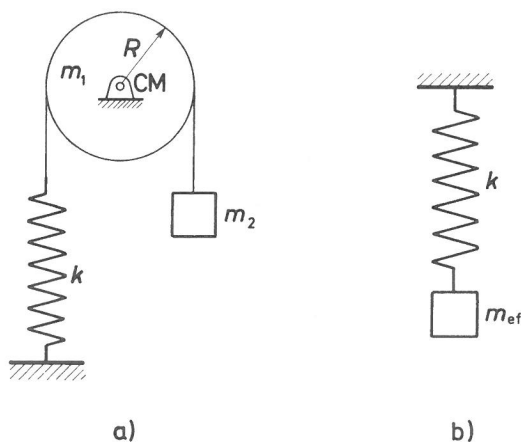
$$E = E_k + E_p = \text{konst.} \quad (1.67)$$



Slika 1.23. Ovisnost energije harmoničkog titranja o elongaciji

Primjer

Titrajni se sistem sastoji od homogenog diska mase $m_1 = 1 \text{ kg}$ i polumjera $R = 0,1 \text{ m}$ koji se može vrtjeti oko horizontalne osi (sl. 1.24). Preko diska je



Slika 1.24. a) Titrajni sistem, b) Ekvivalentni sistem

prebačeno uže čiji je jedan kraj vezan za oprugu konstante $k = 100 \text{ N/m}$, a na drugom je kraju teret mase $m_2 = 0,1 \text{ kg}$.

Odredite elongaciju i frekvenciju titrajnog sistema. Masu opruge i užeta zanemarite. Pretpostavite da je uže nerastežljivo te da nema trenja ni klizanja užeta.

Kolika je mehanička energija sistema?

Sile koje djeluju na disk jesu: težina diska $m_1 \vec{g}$ (sila teža), napetost užeta $\vec{N}$, sila opruge $\vec{F}_{op}$ i reakcijska sila u ležajevima.

Disk se vrti oko glavne osi inercije (koja prolazi kroz centar mase). Ta je os nepomična, pa je jednačba gibanja

$$M = I\alpha = (N - F_{\text{op}}) R \quad (1)$$

(Momenti reakcijske sile i sile teže s obzirom na centar mase jednaki su nuli).

Jednačba gibanja utega mase m_2 je

$$m_2 a = m_2 g - N \quad (2)$$

Uzevši u obzir da je $I = \frac{1}{2} m_1 R^2$,

$$\alpha = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{a}{R},$$

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{d^2 s}{dt^2},$$

dobivamo

$$\frac{1}{2} m_1 a = N - F_{\text{op}} = N - m_2 g - k s,$$

jer je $F_{\text{op}} = m_2 g$ u statičkom položaju ($s = 0$), inače $F_{\text{op}} = m_2 g + k s$. Uvrstivši (2) u (1), nakon sređivanja dobijemo:

$$\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) \frac{d^2 s}{dt^2} + k s = 0.$$

To je jednačba jednostavnoga harmoničkog titranja oscilatora efektivne mase $m_{\text{ef}} = \frac{1}{2} m_1 + m_2$ koja visi na opruzi konstante k (sl. 1.24.b). Rješenje te jednačbe je

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

gdje je kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{ef}}}} = \sqrt{\frac{k}{m_2 + m_1/2}} = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + 2m_2}} = 12,9 \text{ s}^{-1}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,1 \text{ Hz}.$$

Amplitudu A i početnu fazu φ_0 možemo odrediti iz početnih uvjeta. Ako je npr. u $t = 0$, $s = 0$, $v = v_0$ (vertikalno prema dolje), tada je $\varphi_0 = 0$, odnosno

$$s = A \sin \omega t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = A \omega \cos \omega t$$

$$v_0 = A \omega,$$

te je

$$s = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Mehanička energija sistema je zbroj kinetičke i potencijalne energije. Kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2.$$

Budući da je $s = R\vartheta$, $\frac{ds}{dt} = R \frac{d\vartheta}{dt} = R \dot{\vartheta}$, to je

$$E_k = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) R^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Potencijalna energija sistema je

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k R^2 \vartheta^2.$$

Ukupna mehanička energija je

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} k R^2 \vartheta^2,$$

i, s obzirom na to da nema gubitaka, ona je konstantna.

Kada čestica prolazi kroz ravnotežni položaj, potencijalna je energija jednaka nuli, a kinetička je maksimalna,

$$E_{km} = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) R^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Budući da je $s = R\vartheta$, $A = R\vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t$, $\dot{\vartheta} = \omega \vartheta_0 \cos \omega t$, $\vartheta_0 = \omega \vartheta_0$, to je

$$E_{km} = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) R^2 \omega^2 \vartheta_0^2 = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) A^2 \omega^2.$$

Maksimalna potencijalna energija u amplitudnom položaju iznosi:

$$E_{pm} = \frac{1}{2} k R^2 \vartheta_0^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Ukupna je energija jednaka maksimalnoj kinetičkoj odnosno maksimalnoj potencijalnoj energiji,

$$E = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{m_1}{2} \right) A^2 \omega^2,$$

odnosno

$$E = \frac{1}{2} k A^2.$$

Izjednačivši ta dva izraza, i iz tih energetske razmatranja možemo izračunati frekvenciju:

$$\frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{m_1}{2} \right) A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + 2m_2}}.$$

1.4. Prigušeno titranje

Pri proučavanju jednostavnog titranja pretpostavili smo da nema gubitaka zbog trenja i da je ukupna mehanička energija održana. Pri takvom je titranju amplituda konstantna, tj. ne mijenja se s vremenom (sl. 1.25.a). Ako, naprotiv, postoje gubici energije (trenje i sl.), amplituda će se s vremenom smanjivati i nakraju će titranje prestati. To je prigušeno titranje (sl. 1.25.b). Pri prigušenom titranju energija, dakle, nije konstantna nego se vremenom smanjuje ($dE/dt < 0$). Prigušeno titranje možemo opaziti kad npr. uteg koji titra na opruzi uronimo u neku viskoznu tekućinu (npr. u motorno ulje). Za uteg koji titra u zraku prigušenje je dosta slabo pa izgleda kao da je titranje neprigušeno.

Pretpostavimo li da je sila trenja proporcionalna brzini, možemo pisati

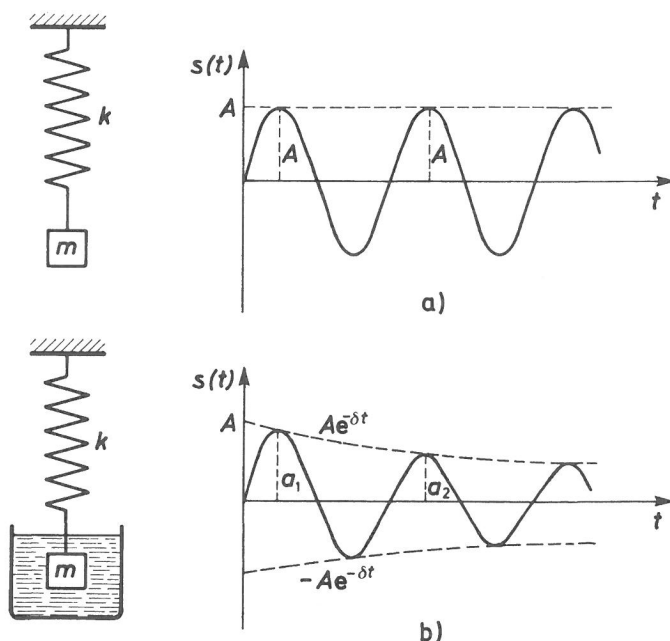
$$\vec{F}_{tr} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{s}}{dt}, \quad (1.68)$$

gdje je b konstanta trenja (pozitivna veličina), a predznak minus pokazuje da su sila trenja i brzina suprotnog smjera.

Jednadžba gibanja (2. Newtonov zakon) za prigušeno titranje, dakle, glasi

$$m\vec{a} = \vec{F}_{opr.} + \vec{F}_{tr.}, \quad (1.69)$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - b \frac{ds}{dt} \quad (1.70)$$



Slika 1.25. a) Neprigušeno, b) prigušeno titranje

odnosno

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{ds}{dt} + \frac{k}{m} s = 0 \quad (1.70a)$$

Označimo li $b/m = 2\delta$ i $k/m = \omega_0^2$, jednadžba (1.70) poprima oblik

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (1.71)$$

Tu je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ vlastita frekvencija neprigušenog oscilatora, a δ faktor prigušenja. (U tekstovima se ponekad za ω upotrebljava naziv frekvencija umjesto kružna frekvencija.)

Rješenje te homogene linearne diferencijalne jednadžbe glasi:

$$s(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi_0) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.72)$$

što ćemo dokazati uvrštavanjem. Gledajući elongaciju prigušenog titranja (sl. 1.25.b), opažamo da je $s(t)$ sinusoidalna funkcija čija se amplituda eksponencijalno smanjuje te je pretpostavka da je (1.72) rješenje jednadžbe titranja razumljiva i onome tko ne poznaje metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Deriviramo li $s(t)$ jedanput i dvaput, pa uvrstimo u (1.71), dobivamo

$$\begin{aligned} A \delta^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - 2A \delta \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - A \omega^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - \\ - 2A \delta^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + 2A \delta \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + A \omega_0^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0, \end{aligned}$$

ili, nakon sređivanja:

$$(A \delta^2 - A \omega^2 - 2A \delta^2 + A \omega_0^2) e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0 \quad (1.73)$$

Relacija (1.73) mora biti u svakom trenutku ispunjena, što zahtijeva da bude $A \delta^2 - A \omega^2 - 2A \delta^2 + A \omega_0^2 = 0$, odnosno

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1.74)$$

Frekvencija prigušenih titraja ω manja je od frekvencije ω_0 neprigušenih titraja; prigušenje to više smanjuje frekvenciju titranja što je trenje veće. Amplituda $a = A e^{-\delta t}$ smanjuje se eksponencijalno s vremenom; što je faktor prigušenja δ veći, to se i amplituda brže smanjuje.

Jednadžbu prigušenog titranja

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (1.71)$$

možemo riješiti i tako da pretpostavimo rješenje u obliku

$$s(t) = A e^{i(\omega_1 t + \varphi)} \quad (1.75)$$

Ako (1.75) deriviramo i uvrstimo u (1.71) možemo odrediti amplitudu A i frekvenciju ω_1 . Služeći se Eulerovom relacijom, kao rješenje uzimamo realni odnosno imaginarni dio funkcije (1.75)

Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \dot{s} = A i \omega_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi)}, \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= \ddot{s} = -A \omega_1^2 e^{i(\omega_1 t + \varphi)},\end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja u (1.71) dobivamo

$$(-\omega_1^2 A + 2 i \delta A \omega_1 + \omega_0^2 A) e^{i(\omega_1 t + \varphi)} = 0.$$

To je ispunjeno ako je

$$-\omega_1^2 + 2 i \delta \omega_1 + \omega_0^2 = 0.$$

Odatle je

$$\omega = \frac{-2 i \delta \pm \sqrt{4(i\delta)^2 + 4\omega_0^2}}{-2} = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1.76)$$

Pretpostavit ćemo također da je $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$.

Rješenje jednadžbe (1.75) možemo, dakle, pisati

$$s(t) = A e^{-\delta t} e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{-\delta t} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (1.77)$$

gdje je $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

Realni dio te funkcije

$$s(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.77a)$$

i imaginarni dio

$$s(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.77b)$$

rješenja su jednadžbe (1.71). Dovoljno je uzeti samo jedno od njih, npr:

$$s(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.77b)$$

Q-faktor. Omjer dviju susjednih amplituda koje se vremenski razlikuju za period T (npr. a_1 i a_2 na sl. 1.25) uvijek je konstantan i iznosi

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\delta T} \quad (1.78)$$

Logaritam tog omjera zove se *logaritamski dekrement titranja*

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \delta T \quad (1.79)$$

Budući da se logaritamski dekrement λ i period T mogu lako mjeriti, pomoću (1.79) može se odrediti faktor prigušenja δ odnosno konstanta trenja $b = 2 m \delta$.

Prigušenje možemo opisati i tzv. *Q-faktorom* (faktorom kvalitete ili »dobrote«) titrajnog sistema. Veza između logaritamskog dekrementa i faktora dobrote je

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (1.80)$$

Što je faktor dobrote veći, prigušenje je manje, odnosno manji je gubitak energije iz titrajnog sistema.

Obično se (pogotovo u električnim titrajnim sistemima) *Q*-faktor definira omjerom srednje ukupne energije titrajnog sistema između dvije susjedne pozitivne amplitude (npr. a_1 i a_2 na sl. 1.25) i gubitka energije u tom intervalu:

$$Q = 2\pi \frac{\bar{E}}{\Delta E} \quad (1.81)$$

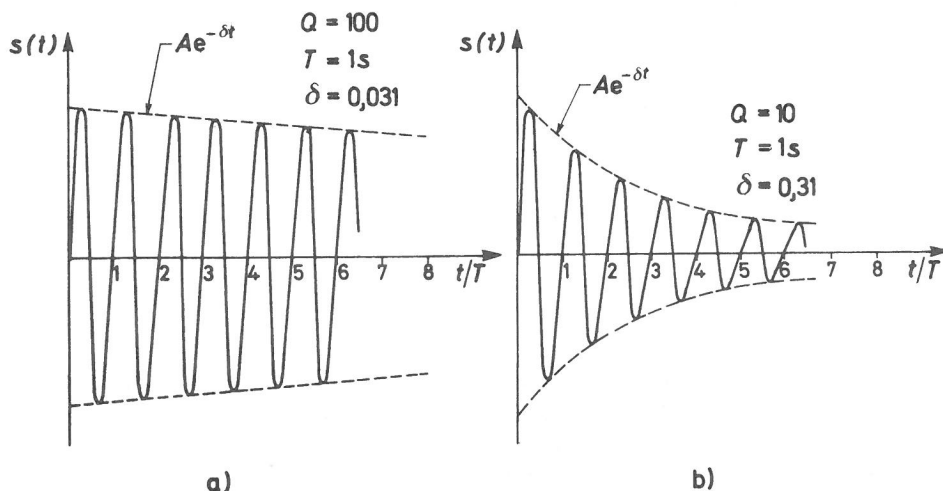
$$\text{Buduci da je to je } \bar{E} = \frac{1}{4} k(a_1^2 + a_2^2), \text{ a } \Delta E = \frac{1}{2} k(a_1^2 - a_2^2),$$

to je

$$Q = \pi \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}} = \frac{\pi}{\operatorname{tgh} \lambda} \approx \frac{\pi}{\lambda} \quad (1.82)$$

jer je za male λ možemo pisati $\operatorname{tgh} \lambda \approx \lambda$.

U dobrim titrajnim sistemima *Q*-faktor je reda veličine 1000 do 10 000. Na slici 1.26.a i 1.26.b nacrtana je elongacija za dva titrajna sistema s različitim prigušenjem odnosno *Q*-faktorom. Iz crteža je očito da veći *Q* znači manje prigušenje. Za neprigušeni harmonički oscilator $Q \rightarrow \infty$.



Slika 1.26. Dva titrajna sistema s različitim prigušenjem

Aperioidično titranje. Ako je trenje preveliko, sistem ne može titrati; prigušenje je tada tako veliko da se zatitrano tijelo, dosegaši određenu amplitudu, umjesto da titra, vraća u ravnotežni položaj. To je tzv. *aperioidično titranje*. U tom

je slučaju $\delta^2 > \omega_0^2$ te je izraz ispod korijena u (1.74) negativan, a frekvencija imaginarna.

Označimo li $\omega = i\omega'$, rješenje jednadžbe gibanja možemo pisati u obliku

$$s(t) = e^{-\delta t} (A \operatorname{sh} \omega' t + B \operatorname{ch} \omega' t)$$

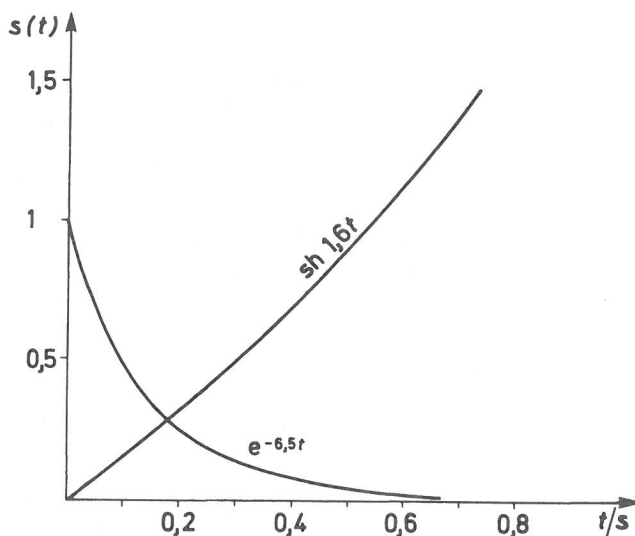
ili, ako je u $t = 0$, $s(t) = 0$

$$s(t) = A e^{-\delta t} \operatorname{sh} \omega' t \quad (1.83)$$

gdje je

$$\operatorname{sh} \omega' t = \frac{1}{2} (e^{\omega' t} - e^{-\omega' t}) \quad \text{ i } \quad \omega' = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad (1.84)$$

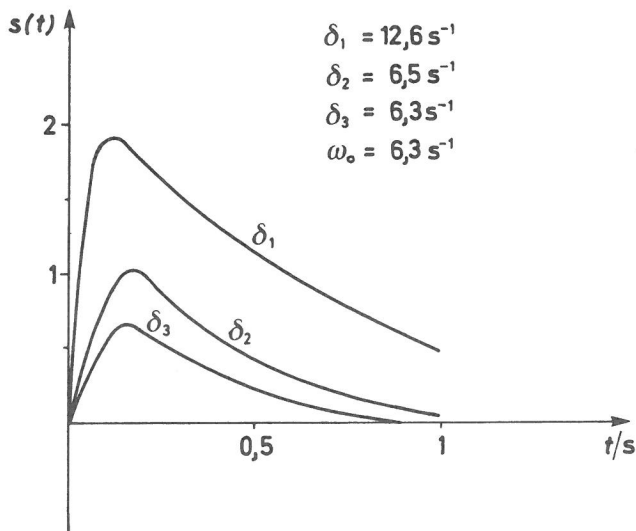
To se može provjeriti uvrštavanjem. Rješenje (1.83) produkt je dviju funkcija: eksponencijalne funkcije i sinusa hiperboličnog (sl. 1.27.a). Ovisno o



Slika 1.27. a) Aperiodično je titranje produkt eksponencijalne i hiperbolične funkcije,

omjeru δ/ω_0 , aperiodično titranje može imati različite oblike. Na slici 1.27.b prikazana su tri takva gibanja, jedno za $\delta = \omega_0$, a ostala dva za $\delta > \omega_0$. Što je δ/ω_0 veće, to se tijelo sporije vraća u ravnotežni položaj. U slučaju $\delta = \omega_0$, elongacija relativno brzo pada na nulu: to je upravo i granica između prigušenog titranja i aperiodičnoga gibanja i može se nazvati kritičnim gušenjem.

Prigušeno titranje ima široku primjenu; ponekad je prigušenje poželjno, a u nekim ga slučajevima nastojimo smanjiti. Tako prigušenjem nastojimo postići da gibanje kazaljki instrumenata bude kritički aperiodično, amortizerima se sprečava titranje vozila, u električnim titrajnim krugovima uglavnom želimo postići što veći Q -faktor i sl.



1.27. b) Aperiodično titranje za različita prigušenja

Primjer

Uteg mase 0,1 kg titra na opruzi konstante 1,6 N/m. Sila otpora proporcionalna je brzini i iznosi $0,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot v$.

a) Napišite jednadžbu gibanja i njezino opće rješenje. Riješite tu jednadžbu, tj. odredite $s(t)$ uz početne uvjete $t = 0$, $s = 0,1 \text{ m}$, $v = 0$.

b) Kolika treba biti konstanta prigušenja, a koliki faktor prigušenja da bi titranje bilo aperiodično odnosno kritički aperiodično.

c) Nacrtajte $s(t)$ za sve te primjere.

a) Jednadžba gibanja prigušenoga harmoničkog oscilatora je

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -b \frac{ds}{dt} - ks,$$

ili, nakon zamjene, $2\delta = b/m$ i $\omega_0^2 = k/m$,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Uvrštavanjem podataka $m = 0,1 \text{ kg}$, $b = 0,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ i $k = 1,6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ dobivamo

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 16 s = 0 \quad (1)$$

Opće rješenje te jednadžbe glasi:

$$s(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_p t + \varphi_0).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (1) dobivamo

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{15} \text{ s}^{-1},$$

te je

$$s(t) = A e^{-\delta t} \sin(\sqrt{15} s^{-1} t + \varphi_0).$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo

$$t = 0, \quad s = A \sin \varphi_0 = 0,1 \text{ m}$$

$$t = 0, \quad v = -\delta \sin \varphi_0 + \omega_p \cos \varphi_0 = 0$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \varphi_0 = 75,5^\circ \text{ ili } \varphi_0 = 1,315 \text{ rad}$$

$$A = \frac{0,1 \text{ m}}{\sin \varphi_0} = 10,3 \text{ cm}.$$

Posebno rješenje diferencijalne jednadžbe (koje udovoljava početnim uvjetima) je

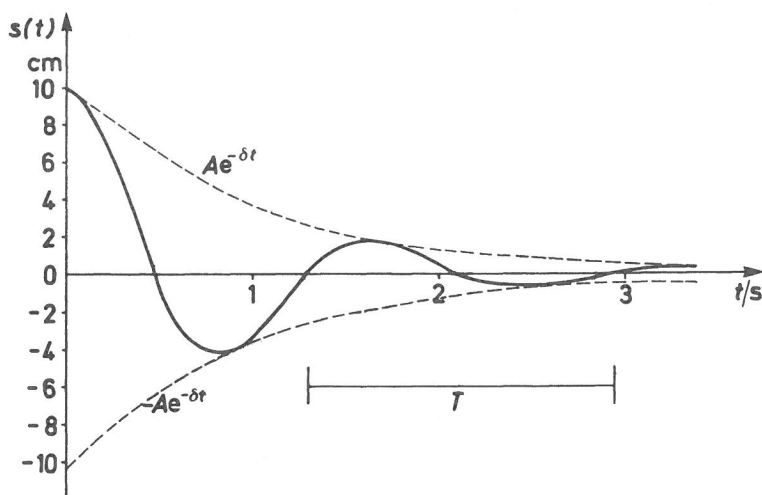
$$s(t) = 10,3 \text{ cm} \cdot e^{-t} \sin(3,87 s^{-1} t + 1,315).$$

Graf funkcije pokazuje slika 1.28. Vidi se da je omeđen funkcijama $s = A e^{-\delta t}$ i $s = -A e^{-\delta t}$. Također se vidi da je period funkcije (razmak na osi apscisa, npr. između dva susjedna minimuma) $T = 1,6 \text{ s}$.

b) Da bi titranje bilo aperioidično, frekvencija ω_p mora biti imaginarna, tj. $\omega_p^2 = \omega_0^2 - \delta^2 < 0$. To je ispunjeno za $\delta^2 > \omega_0^2$, npr. za $\delta = 5 s^{-1}$ odnosno $b = 1 \text{ kg/s}$.

U tom slučaju jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 10 \frac{ds}{dt} + 16 s = 0 \quad (2)$$



Slika 1.28. Ovisnost elongacije o vremenu za zadani primjer prigušenog titranja

Potražimo rješenje te jednadžbe u obliku

$$s(t) = A e^{\alpha t}.$$

Nakon deriviranja i uvrštavanja u jednadžbu (2) dobivamo jednadžbu za α :

$$\alpha^2 + 10 \alpha + 16 = 0 \quad (3)$$

To je tzv. pomoćna jednadžba, čija su rješenja: $\alpha_1 = -2$ i $\alpha_2 = -8$.

Rješenje jednadžbe (2) je:

$$s(t) = A e^{-2t} + B e^{-8t}.$$

Ako konstante A i B odredimo iz početnih uvjeta $t = 0$, $s = 0,1$ m, $v = 0$, dobivamo

$$s(t) = 13,3 \text{ cm } e^{-2t} - 3,3 \text{ cm } e^{-8t}.$$

Prigušenje je kritično ako je δ takav da pomoćna jednadžba (3) ima samo jedno rješenje. Izaberemo li $\delta = 4 \text{ s}^{-1}$ ($b = 0,8 \text{ kg/s}$), dobivamo

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 8 \frac{ds}{dt} + 16 = 0 \quad (4)$$

i pomoćnu jednadžbu

$$\alpha^2 + 8 \alpha + 16 = 0, \quad \alpha_{1/2} = -4,$$

te je rješenje jednadžbe (4) $s(t) = A e^{-4t}$.

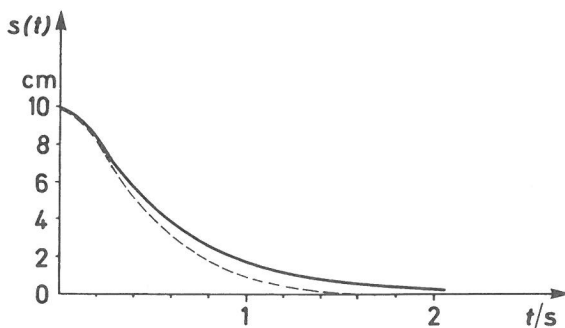
Da bismo dobili opće rješenje (koje ima dvije proizvoljne konstante), moramo odrediti još jedno posebno rješenje. Uvrštavanjem se može dokazati da je $s(t) = t e^{-4t}$ također rješenje jednadžbe (4), pa je opće rješenje

$$s(t) = A e^{-4t} + B t e^{-4t},$$

što se također može dokazati uvrštavanjem u jednadžbu (4). Ako iz početnih uvjeta odredimo konstante A i B dobivamo traženo rješenje naše jednadžbe,

$$s(t) = 10 \text{ cm} \cdot e^{-4t} + 0,4 \text{ cm} \cdot t e^{-4t}.$$

c) Graf funkcije $s(t)$ za aperioidično i kritično prigušenje za taj primjer pokazuje slika 1.29.

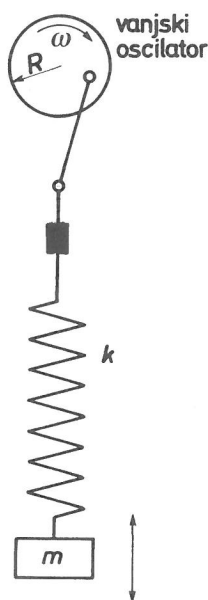


Slika 1.29. Aperioidično titranje i kritično prigušenje

1.5. Prisilno titranje. Rezonancija

Prisilno titranje nastaje kada vanjska sila djeluje na sistem koji titra te se pomoću nje nadoknađuje energija izgubljena zbog trenja. Slika 1. 30 prikazuje jedan takav prisilni oscilator. Okretanje ploče s ekscentrom pobuđuje sistem (opruga + tijelo neke mase) na titranje. Dok ploča miruje, sistem može titrati kao prigušeni oscilator, međutim, kada se ploča okreće kutnom brzinom ω , kraj poluge spojen s oscilatorom titra istom kružnom frekvencijom gore-dolje, pa na oscilator djeluje vanjska periodična sila sinusoidalnog oblika

$$F_v = F_0 \sin \omega t \quad (1.85)$$



Slika 1.30. Prisilno titranje

Kada je frekvencija ω vanjskog oscilatora manja od vlastite frekvencije sistema ($\omega < \omega_0 = \sqrt{k/m}$), sistem titra, ali su amplitude male. Budući da se ω približava ω_0 , amplitude postaju sve veće i konačno, kad se javi rezonancija, dosežu svoj maksimum. Daljnjim povećanjem frekvencije amplitude se ponovo počinju smanjivati.

Napišimo jednadžbu gibanja za takav prisilni harmonički oscilator. Na tijelo mase m djeluju tri sile: harmonička sila $F = -ks$, sila trenja koju, kao i dosad, možemo pisati u obliku $F_{tr} = -b\dot{s} = -b \frac{ds}{dt}$ i vanjska periodična sila $F_v = F_0 \sin \omega t$. Drugi Newtonov zakon primijenjen na gibanje prisilnog oscilatora glasi:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - b \frac{ds}{dt} + F_0 \sin \omega t$$

ili, nakon sređivanja,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = A_0 \sin \omega t \quad (1.86)$$

gdje je

$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{i} \quad A_0 = \frac{F_0}{m} \quad (1.87)$$

Pretpostavimo da je rješenje jednadžbe (1.86) oblika

$$s(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.88)$$

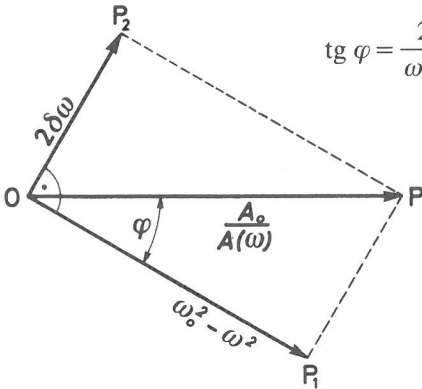
gdje je $A(\omega)$ amplituda, a φ kašnjenje u fazi iza titranja vanjskog oscilatora. Uvrstimo li (1.88) u (1.86), dobivamo

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \varphi) + 2\delta \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A_0}{A(\omega)} \sin \omega t \quad (1.89)$$

Ta jednadžba u svakom trenutku mora biti ispunjena. Da bismo iz nje odredili $A(\omega)$, poslužiti ćemo se fazorskim prikazom titranja (§ 1.3.5). Na lijevoj je strani relacije (1.89) zbroj dvaju međusobno okomitih titranja amplitude $\omega_0^2 - \omega^2$ i $2\delta\omega$, a na desnoj strani titranje amplitude $\frac{A_0}{A}$ dobiveno tim zbrojem. Nacrtamo li odgovarajuće rotirajuće vektore (sl. 1.31), iz pravokutnog trokuta OP_1P proizlazi:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{A_0}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \frac{\delta^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} \quad (1.90)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\delta\omega/\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (1.91)$$



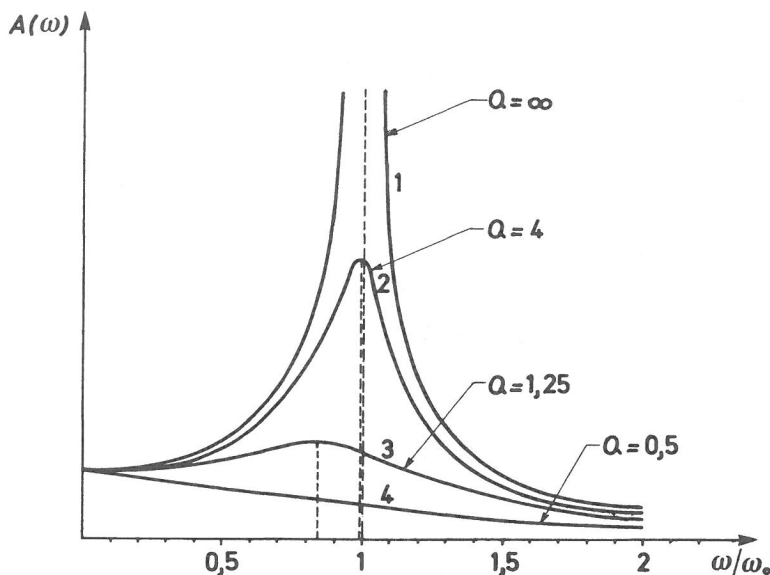
Slika 1.31. Uz izračunavanje amplitude prisilnog titranja

Amplituda $A(\omega)$ ovisi o omjeru ω/ω_0 i prigušenju δ . Ona doseže maksimum pri rezonantnoj frekvenciji ω_r , koju možemo odrediti izračunavanjem maksimuma funkcije $A(\omega)$. Izjednačimo li derivaciju nazivnika u (1.90) s nulom, dobivamo

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (1.92)$$

Rezonantna je frekvencija ω_r malo manja od vlastite frekvencije ω_0 , a razlika je to manja što je prigušenje manje. U graničnom slučaju (bez trenja) $\omega_r = \omega_0$.

Ovisnost amplitude o omjeru ω/ω_0 prikazana je na sl. 1.32. Uočite da prigušenje utječe na rezonanciju. U idealnom bi slučaju, kad ne bi bilo trenja, amplituda pri rezonanciji ($\omega = \omega_0$) bila beskonačno velika (krivulja 1 na sl. 1.30). Međutim, u prirodi nema titranja bez gubitaka, pa je rezonantna amplituda uvijek konačna. Što je prigušenje veće (Q -faktor manji), rezonantna je amplituda manja, a i rezonantna se frekvencija više razlikuje od vlastite (sl. 1.32).



Slika 1.32. Amplituda pri prisilnom titranju u ovisnosti o frekvenciji i prigušenju

Brzina prisilnog oscilatora je derivacija elongacije (1.88). Njezina maksimalna vrijednost (amplituda) također ovisi o frekvenciji vanjske sile.

Kašnjenje u fazi (fazni pomak) dan je izrazom (1.91) i prikazan je na sl. 1.33. Za $\omega \ll \omega_0$ fazni je pomak nula. Oba su titranja u fazi. Pri $\omega = \omega_0$ sistem kasni za vanjskim oscilatorom za $\frac{T}{4}$, a fazni je pomak $\frac{\pi}{2}$. Za $\omega \gg \omega_0$ fazni je pomak π .

Jednadžba gibanja prisilnog oscilatora je

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = A_0 \sin \omega t. \quad (1.86)$$

To je nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Opće rješenje te jednadžbe, prema teoriji diferencijalnih jednadžbi, dobije se tako da se općem rješenju s_1 pripadne homogene jednadžbe pribroji

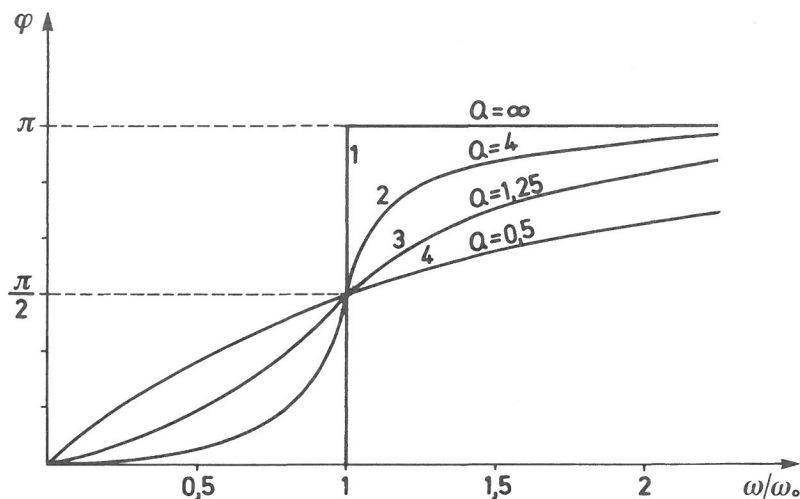
posebno rješenje s_2 nehomogene. Budući da je opće rješenje homogene jednadžbe $\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$ funkcija.

$$s_1 = s(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_p t + \varphi_0), \quad (1.72)$$

gdje je $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, a posebno rješenje nehomogene $s_2(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$, to je titranje prisilnog oscilatora opisano izrazom:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s(t) = A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_p t + \varphi_0) + A(\omega) \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.93)$$



Slika 1.33. Fazni pomak pri prisilnom titranju

Pri prisilnom titranju sistem počne titrati vlastitom frekvencijom $\omega_p = \omega_0$ i pritom nastoji slijediti titranje vanjskog oscilatora: rezultatno je titranje superpozicija tih dvaju titranja.

Nakon određenog vremena vlastito titranje zbog prigušenja utrne i sistem titra frekvencijom vanjskog oscilatora (ω) bez obzira na početne uvjete i vlastitu frekvenciju sistema. Ostaje samo rješenje s_2 koje se zove i *stacionarno rješenje jednadžbe prisilnog oscilatora*.

Rezonancija je česta u mnogim mehaničkim, električnim i drugim uređajima. Tako se električnom rezonancijom koristimo pri traženju stanice na radioaparatu ili televizoru, pomoću akustičke se rezonancije mogu usklađivati muzički instrumenti i sl. Rezonancija ponekad može biti opasna (pogotovo kad je Q -faktor visok) i u materijalu uzrokovati prevelika naprezanja, a time i lom i oštećenje. Tako je srušen most u Takomi (7. XI. 1940). Vjetar je izazvao titranje visećeg mosta frekvencijom bliskom rezonantnoj pa se zbog snažnih oscilacija velikih amplituda most srušio. Ako je u rezonanciji, relativno mala vanjska sila može izazvati jake oscilacije. Zato npr. vojnici dok prelaze most mijenjaju strojevi korak u obični.

Primjer

Tijelo mase $m = 0,1 \text{ kg}$ visi na opruzi konstante $k = 1,6 \text{ N/m}$. Pomoću vibratora (diska polumjera $R = 1,25 \text{ cm}$) kojim se frekvencija može mijenjati od nule do $1,6 \text{ s}^{-1}$ sistem se pobuđuje na titranje (sl. 1.34).

a) Odredite vlastitu i rezonantnu frekvenciju sistema, logaritamski dekrement i Q -faktor titrajnog sistema.

b) Izračunajte i nacrtajte ovisnost amplitude, elongacije i brzine titranja o frekvenciji vibratora. Pretpostavite da konstanta prigušenja može poprimiti ove vrijednosti: $b_1 = 0,01 \text{ kg/s}$, $b_2 = 0,1 \text{ kg/s}$, $b_3 = 0,28 \text{ kg/s}$ i $b_4 = 0,56 \text{ kg/s}$. Nacrtajte ovisnost elongacije o vremenu za $b = 0,1 \text{ kg/s}$.

a) Vlastita frekvencija titrajnog sistema tijela mase m , obješenog na oprugu, konstante k je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4 \text{ rad/s}.$$

Rotiranjem diska pomiče se gornji kraj opruge tako da je sila koja djeluje na tijelo $F = -k(s - R \sin \omega t)$. Sila trenja je

$$F = -bv = -b \frac{ds}{dt}.$$

Jednadžba gibanja sistema glasi:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - b \frac{ds}{dt} + kR \sin \omega t,$$

ili

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{Rk}{m} \sin \omega t = A_0 \sin \omega t.$$

Rješenje te jednadžbe je

$$v(t) = \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) = v_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi),$$

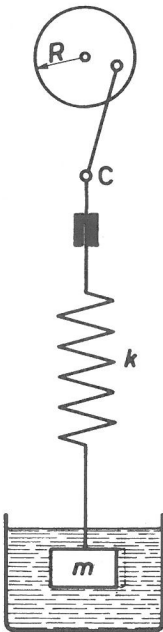
gdje je amplituda titranja

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} =$$

$$\frac{A_0}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

rezonantna kružna frekvencija

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$



Slika 1.34. Titrajni sistem

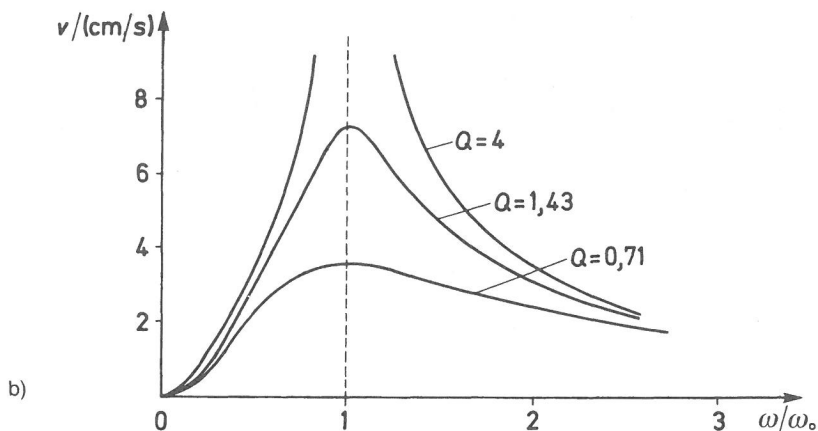
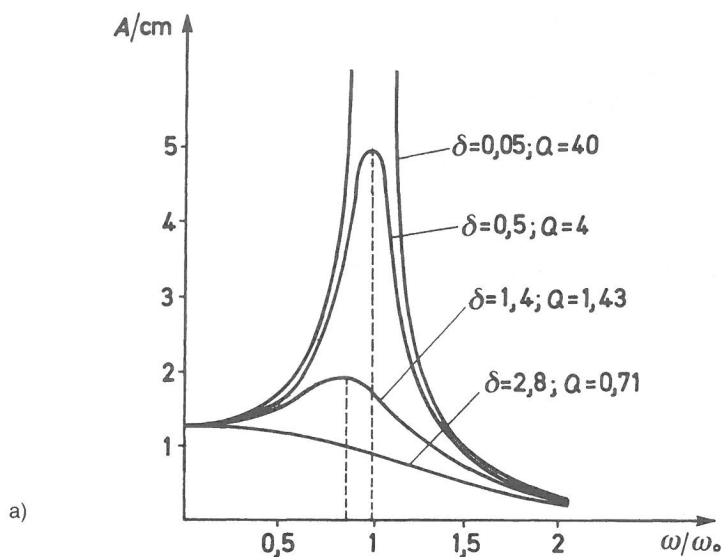
a kašnjenje u fazi titranja sistema iza titranja vanjskog oscilatora

$$\varphi = \arctg \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

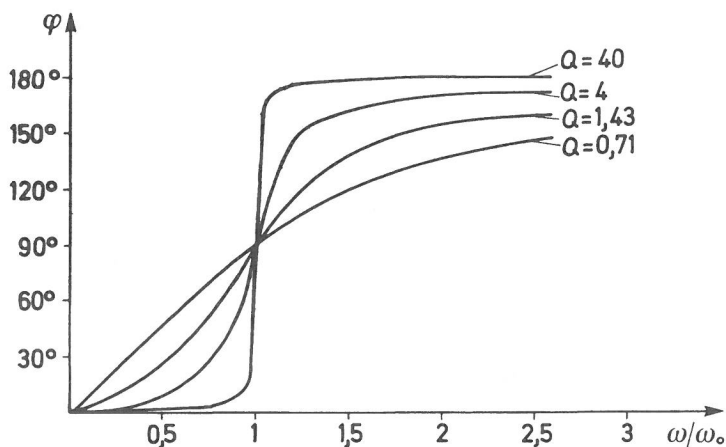
Logaritamski dekrement prigušenja λ i faktor kvalitete Q jesu:

$$\lambda = \frac{2\pi\delta}{\omega}, \quad Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

b) Rezultati računanja dani su u tablici 1.7. i 1.8. i na slici 1.35.



Slika 1.35. Ovisnost amplitude a) elongacije i b) brzine o frekvenciji vanjske sile



Slika 1.35. c) Ovisnost faznog pomaka o frekvenciji vanjske sile

Tablica 1.7.

	Konstanta prigušenja $b/(\text{kg/s})$	Faktor prigušenja δ/s^{-1}	Kružna frekvencija ω_r/s^{-1}	Dekrement λ	Q -faktor
1.	0,01	0,05	3,999	0,08	40
2.	0,1	0,5	3,94	0,8	4
3.	0,28	1,4	3,48	2,2	1,43
4.	0,563	2,8	0,36	4,4	0,71

Tablica 1.8. Ovisnost amplitude o frekvenciji vanjskog oscilatora

$\omega (\text{rad/s})$	ω/ω_0	$b = 0,01 \text{ kg/s}$		$b = 0,1 \text{ kg/s}$		$b = 0,28 \text{ kg/s}$		$b = 0,563 \text{ kg/s}$	
		A/cm	$v_m/\text{cm s}^{-1}$	A/cm	$v_m/\text{cm s}^{-1}$	A/cm	$v_m/\text{cm s}^{-1}$	A/cm	$v_m/\text{cm s}^{-1}$
1,5	0,375	1,45	2,2	1,45	2,2	1,39	2,1	1,24	1,9
2	0,5	1,67	3,33	1,64	3,3	1,51	3,0	1,21	2,4
3	0,75	2,85	8,57	2,63	7,9	1,83	5,5	1,10	3,3
4	1,0	50,0	200,0	5,0	20,0	1,79	7,1	0,89	3,6
5	1,25	2,2	11,1	1,94	9,7	1,2	6,0	0,68	3,4
6	1,5	1,0	6,0	0,96	5,7	0,77	4,6	0,51	3,1
8	2,0	0,4	4,2	0,341	3,3	0,38	3,0	0,30	2,4
10	2,5	0,24	2,4	0,24	2,3	0,23	2,3	0,20	2,0

Na slici 1.35.a pokazana je ovisnost amplitude $A(\omega)$ o frekvenciji vanjske sile za zadana prigušenja, na slici 1.35.b prikazana je ovisnost brzine $v_m = \omega A(\omega)$ o frekvenciji vanjske sile, a slika 1.35.c prikazuje fazni pomak φ .

Primjer

Na harmonički oscilator djeluje vanjska periodična sila $F(t) = 0,02 \cos 4t$. Masa tijela je 0,1 kg, konstanta opruge 1,6 N/m, a sila otpora $F = 0,2 v$.

Odredite $s(t)$ uz početne uvjete $t = 0$, $s = 0,1$ m, $v = 0$.
Nacrtajte opće rješenje jednadžbe gibanja kao funkciju vremena u intervalu 0,5 s. (Sve veličine izražene su jedinicama SI.)

Jednadžba gibanja prisilnoga harmoničkog oscilatora je

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = F(t).$$

U našem primjeru ona glasi

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 16 s = 0,2 \cos 4t \quad (1)$$

Opće rješenje te nehomogene diferencijalne jednadžbe dobija se ako se zbroji opće rješenje homogene jednadžbe (za koju je desna strana, tj. $F(t) = 0$) i posebno rješenje nehomogene.

Opće rješenje homogene je

$$s(t) = (A \sin \omega_p t + B \cos \omega_p t) e^{-\delta t} \quad (2)$$

(jednadžba prigušenog oscilatora) a posebno rješenje nehomogene jednadžbe (1) možemo odrediti npr. tako da ga pretpostavimo u obliku

$$s(t) = a \sin 4t + b \cos 4t \quad (3)$$

i uvrštenjem u (1) dobijemo konstante a i b . Derivirajući (3) jedanput i dvaput po vremenu i uvrstivši u (1), dobivamo da je $b = 0$ i $a = 0,025$ m, pa je

$$s(t) = e^{-t} (A \sin \omega_p t + B \cos \omega_p t) + 0,025 \sin 4t$$

gdje je $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{15} \text{ s}^{-1}$.

Da bismo odredili konstante A i B , upotrijebit ćemo uvjete

$$t = 0, \quad s = 0,1 \text{ m} \Rightarrow B = 0,1 \text{ m}$$

$$t = 0, \quad v = 0 \Rightarrow A = 0,$$

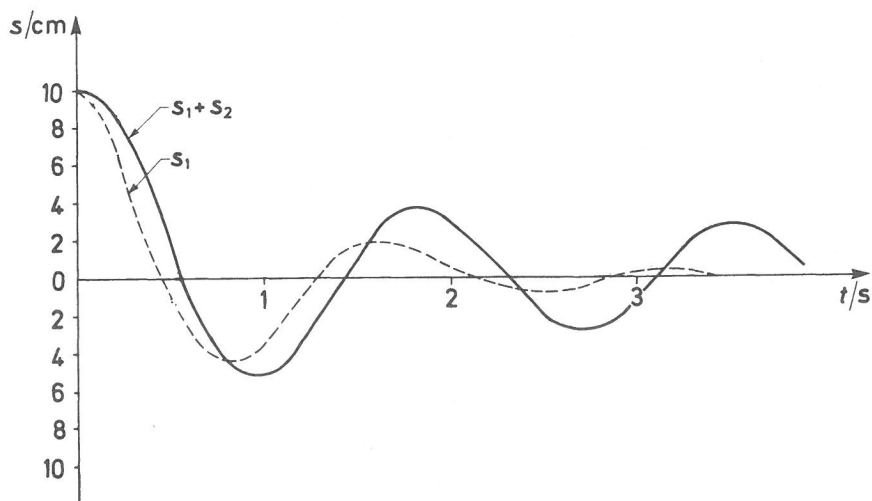
te je

$$s(t) = e^{-t} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \cos \sqrt{15} t + 0,025 \text{ m} \cdot \sin 4t.$$

Rješenje se sastoji od dva dijela: prvi dio $s_1(t)$ nakon nekog vremena zbog $e^{-\delta t}$ faktora iščezne, te ostane samo drugi dio $s_2(t)$ koji ovisi o vanjskoj sili i njezinoj frekvenciji. To se vidi i iz slike 1.36, na kojoj je pokazano opće rješenje $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ i rješenje homogene jednadžbe $s_1(t)$, koje već nakon nekoliko sekundi iščezne i ostane samo stacionarno rješenje $s_2(t) = 0,025 \text{ m} \cdot \sin 4 \text{ s}^{-1} t$. Zato se često pri traženju rješenja prisilnog oscilatora govori samo o stacionarnom rješenju.

Ono se u ovom primjeru može prikazati i u obliku

$$s_2(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi) \quad (4)$$



Slika 1.36. Opće rješenje jednadžbe prisilnog titranja

Uvrštavanjem (4) u jednadžbu (1) dobije se

$$s_2(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

U ovom primjeru $A_0 = 0,2 \text{ ms}^{-2}$; $\omega = \omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$, $A(\omega) = \frac{A_0}{8 \text{ s}^{-2}}$, $\varphi = 0^\circ$

$$s_2(t) = 0,025 \text{ m} \cdot \sin 4 \text{ s}^{-1} t.$$

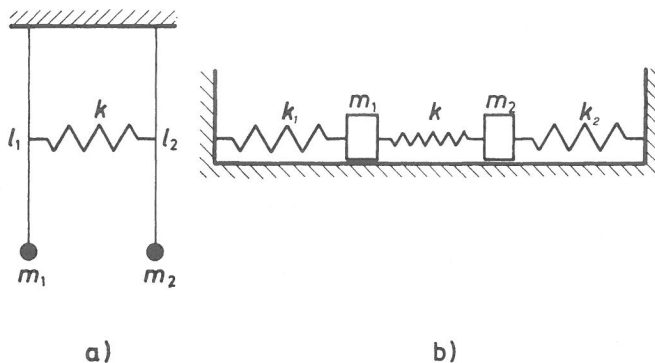
1.6. Vezani oscilatori

Jedan primjer **vezanih** titrajnih sistema je Oberbeckovo njihalo koje se sastoji od dva matematička njihala povezana elastičnom vezom, npr. oprugom (sl. 1.37.a). Titranje jednoga njihala nije potpuno neovisno, već je povezano s titranjem drugog njihala. Sličan vezani titrajni sistem može se ostvariti i pomoću dva tijela mase m_1 i m_2 na oprugama konstanti k_1 odnosno k_2 i međusobno povezanih oprugom konstante k (sl. 1.37.b).

Radi jednostavnosti pretpostavimo, da su oba njihala (sl. 1.37.a) jednaka ($m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$).

Prvo njihalo izvučemo iz ravnotežnog položaja i zanižimo, dok drugo miruje. Njišući se, prvo njihalo preko vezne opruge prenosi energiju na drugo njihalo i ono se počne njihati. Amplituda drugog njihala sve više raste, a amplituda prvoga

se postepeno smanjuje. Prijenos energije s prvoga na drugo njihalo traje određeno vrijeme ($T/2$) sve dok se prvo njihalo ne umiri, a drugo ne počne njihati amplitudom jednakoju amplitudi prvog njihala na početku pokusa. (Pretpostavimo da su gubici zbog trenja zanemarivi.) Sada kada je energija s prvog njihala prešla na drugo njihalo, uloge su se izmijenile, pa drugo njihalo počne pobuđivati prvo, i tako se proces ponavlja periodom T .



Slika 1.37. Vezani oscilatori: a) Oberbeckova njihala, b) dva harmonička oscilatora

Napisat ćemo jednadžbe gibanja za svaki oscilator (sl. 1.37). Neka su s_1 i s_2 pomaci tijela mase m_1 i m_2 iz položaja ravnoteže. Dogovorimo se da su pomaci pozitivni ako se tijelo giba slijeva nadesno, a negativni ako se giba u suprotnom smjeru. Jednadžbe gibanja materijalnih točaka su:

$$m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = -k_1 s_1 + k(s_2 - s_1) \quad (1.94)$$

$$m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = -k_2 s_2 - k(s_2 - s_1) \quad (1.94a)$$

gdje su $-k_1 s_1$ odnosno $-k_2 s_2$ sile opruge konstante k_1 odnosno k_2 , $k(s_2 - s_1)$ sila opruge konstante k na tijelo mase m_1 i $-k(s_2 - s_1)$ sila opruge konstante k na tijelo mase m_2 . Ako su amplitude malene, jednadžbe (1.94) i (1.94.a) vrijede i za Oberbeckovo njihalo. U tom je slučaju $k_1 = m_1 g / l_1$, a $k_2 = m_2 g / l_2$. Pretpostavit ćemo da su oba oscilatora jednaka, tj. da je $m_1 = m_2$ i $k_1 = k_2$.

Da bismo našli rješenje tih jednadžbi, tj. $s_1(t)$ i $s_2(t)$, jednadžbu pokušajmo riješiti harmoničkim funkcijama:

$$s_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad (1.95)$$

$$s_2(t) = B \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (1.96)$$

Uvrštavanjem (1.95) i (1.96) u (1.94) i (1.94a) dobivamo dva rješenja:

a) prvo rješenje

$$A = B = A_1 \quad \omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (1.97)$$

$$s_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad s_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

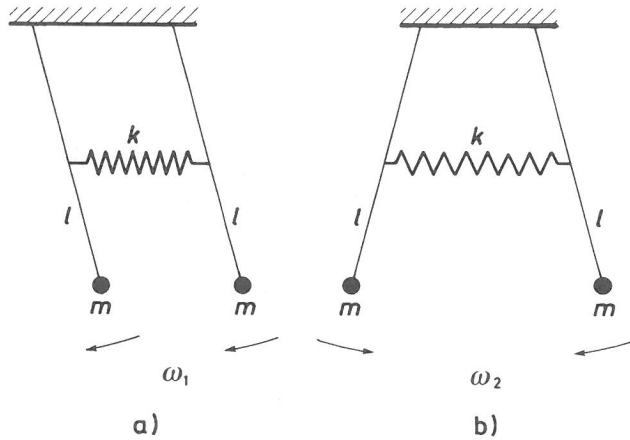
b) drugo rješenje

$$A = -B = A_2 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1} + \frac{2k}{m_1}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m_1}} \quad (1.98)$$

$$s_1(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad s_2(t) = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

To su dva osnovna načina titranja vezanih oscilatora.

Prvi je osnovni način titranja kada oscilatori (njihala) titraju *u fazi* jednakim amplitudama, tj. kad se oba gibaju zajedno lijevo, a zatim desno itd. (sl. 1.38.a).



Slika 1.38. Dva osnovna načina titranja vezanih oscilatora: a) titranje u fazi, b) protufazno titranje

Oscilatori titraju kao da nisu povezani, vlastitom frekvencijom $\omega_1 = \omega_0 =$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$, kojom svaki od njih titra kad je sam. Jednadžbe titranja su

$$s_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}), \quad s_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad (1.99)$$

Drugi je osnovni način titranja kada oscilatori titraju *protufazno*, tj. jedan ide lijevo, a drugi desno, i obratno (sl. 1.38.b). Tada oscilatori imaju jednake amplitude, ali im je frekvencija titranja malo veća nego kad nisu vezani:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + 2k/m_1} \quad (1.100)$$

Jednadžbe titranja sada možemo pisati ovako:

$$s_1(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}), \quad s_2(t) = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (1.101)$$

Općenito, gibanje vezanih oscilatora je zbroj ovih dvaju osnovnih načina titranja:

$$s_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (1.102)$$

$$s_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

Pretpostavimo li, radi jednostavnijeg razmatranja, da su amplitude jednake, $A_1 = A_2 = A$, nakon trigonometrijske transformacije dobivamo:

$$\begin{aligned} s_1 &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \\ s_2 &= 2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Vezani oscilatori titraju frekvencijom $\frac{f_1 + f_2}{2}$. Amplituda titranja

$$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \text{ odnosno } 2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \quad (1.104)$$

nije stalna već se mijenja od maksimalne $2A$ do nule, varira u vremenu frekvencijom $f_a = \frac{f_1 - f_2}{2}$ odnosno periodom $T_a = 1/f_a$. Kažemo da je amplituda modulirana. U općenitom slučaju, suprotno osnovnim načinima titranja (1.99) i (1.101) titranje (1.103) **nije harmoničko**.

Takvo se titranje naziva **udarima**. Frekvencija kojom se ponavlja maksimalna amplituda, tj. frekvencija udara, je

$$f_u = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \quad (1.105)$$

Ona je dvaputa veća od frekvencije mijenjanja amplitude ($f = 2f_a$).

Amplituda prvog oscilatora je

$$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right),$$

a drugoga

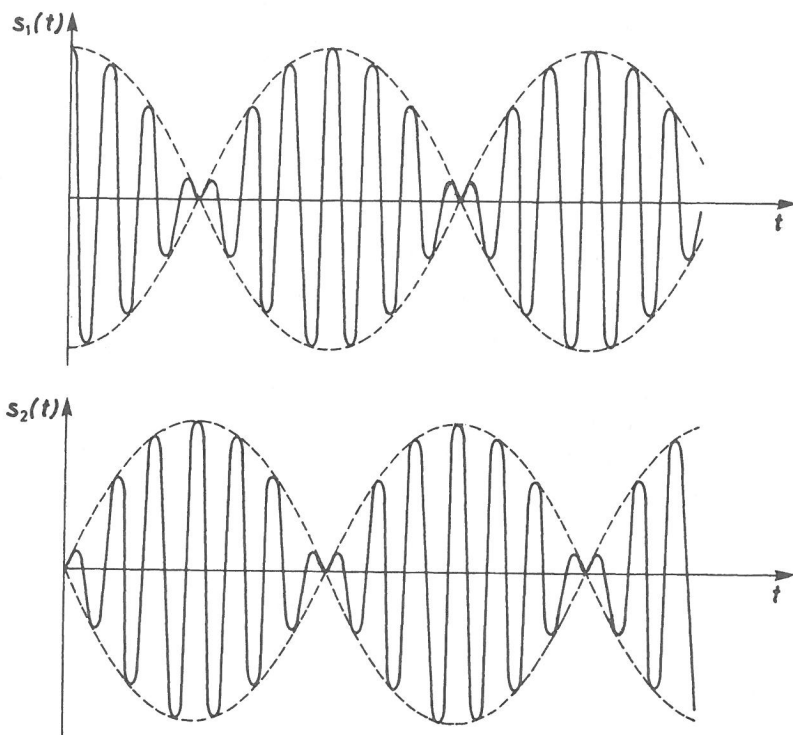
$$2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right),$$

ili drukčije napisano

$$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Razlika u fazi između amplituda prvoga i drugog oscilatora je $\frac{\pi}{2}$, odnosno $\frac{T_a}{4}$. Za to se vrijeme energija prenese s jednog oscilatora na drugi.

Slika 1.39. pokazuje funkcije $s_1(t)$ i $s_2(t)$, tj. relacije (1.103). Kada amplituda prolazi kroz nulu, funkcija kosinus mijenja predznak a njihalo fazu. Promatrajući njihanje Oberbeckova njihala, možemo opaziti da njihalo koje prima energiju uvijek zaostaje u fazi $\frac{\pi}{2}$ iza njihala koje daje energiju. Da bi se to postiglo, potrebno je da njihalo u trenutku kad mu je amplituda minimalna (odnosno nula) promijeni fazu titranja za π . Gledajući oblik funkcije (1.102), opažamo da funkcija kosinus mijenja predznak kada amplituda prolazi kroz nulu, odnosno da njihalo promijeni fazu za π . Tu ćete promjenu faze uočiti na slici 1.39.



Slika 1.39. Elongacije vezanih oscilatora kao funkcije vremena

Funkcije na sl. 1.39. izračunate su uz početne uvjete $t=0$, $s_1=A$, $s_2=0$, tj. u početnom trenutku prvo smo njihalo izvukli iz ravnotežnog položaja za maksimalnu elongaciju i pustili da njiše, a drugo je njihalo mirovalo. Odatle slijedi da je

$$\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{odnosno}$$

$$s_1 = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (1.102.a)$$

$$s_2 = A (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

Za druge početne uvjete dobili bismo malo drukčije funkcije s_1 i s_2 , ali bi frekvencija udara ostala jednaka.

1.7. Zbrajanje harmoničkih titraja

1.7.1. Zbrajanje dvaju harmoničkih titraja na istom pravcu

Ako na česticu istovremeno djeluju dvije harmoničke sile na istom pravcu pa ona izvodi dva jednostavna titraja, tada je resultantno titranje njihova superpozicija ili, kako se još kaže, interferencija. Najprije ćemo razmotriti zbrajanje titraja jednake, a zatim različite frekvencije.

a) Zbrajanje dvaju različitih harmoničkih titraja jednake frekvencije

Oba titranja imaju jednaku frekvenciju i među njima postoji razlika faza koja se ne mijenja cijelo vrijeme gibanja:

$$\begin{aligned} s_1 &= A_1 \sin (\omega t + \varphi_{01}) \\ s_2 &= A_2 \sin (\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Takva se titranja zovu *koherentna*. Resultantni je pomak čestice zbroj tih dvaju pomaka:

$$s = s_1 + s_2 = A_1 \sin (\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin (\omega t + \varphi_{02}) \quad (1.107)$$

Titranja ćemo zbrojiti metodom rotirajućeg vektora (sl. 1.40). Prvo ćemo titranje prikazati rotirajućim vektorom $\overrightarrow{OP_1}$, a drugo rotirajućim vektorom $\overrightarrow{OP_2}$ (v. odjeljak 1.3.5). Resultantno titranje je gibanje projekcije vrha vektorskog broja $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$. Zbrajanjem dvaju paralelnih harmoničkih titraja jednake frekvencije ponovo ćemo dobiti harmoničko titranje jednake frekvencije

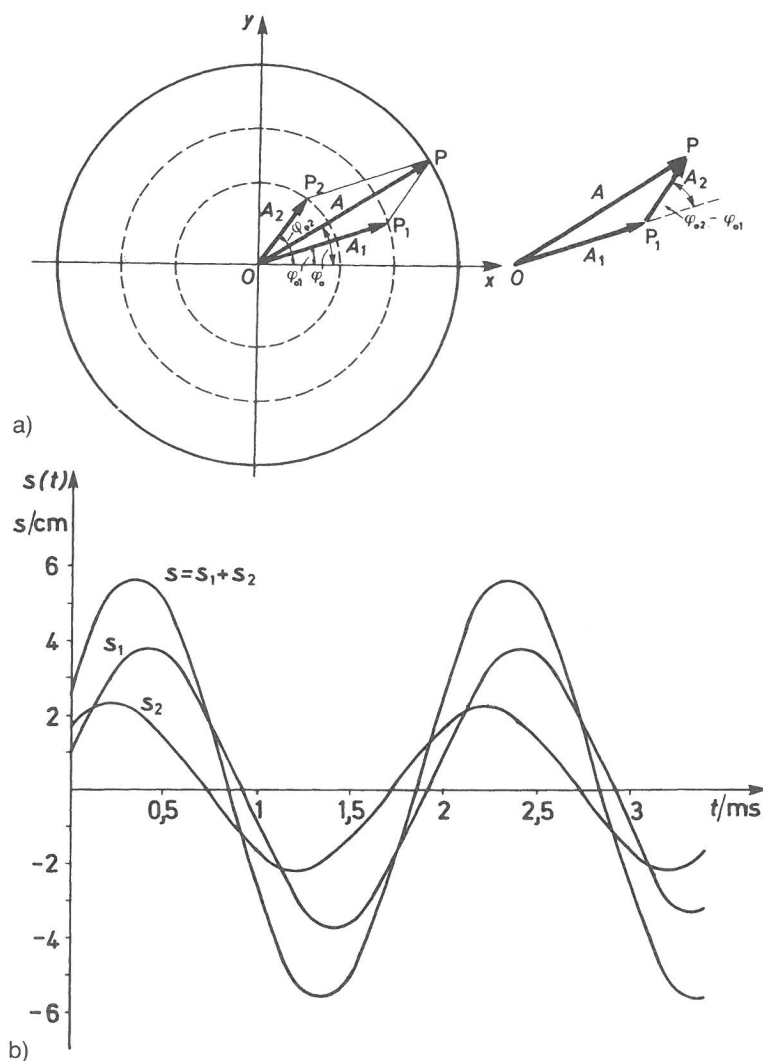
$$s = A \sin (\omega t + \varphi_0) \quad (1.108)$$

Amplitudu resultantnog titranja možemo odrediti iz trokuta OP_1P (sl. 1.40.a)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\varphi_{02} - \varphi_{01})} \quad (1.109)$$

Iz crteža se također vidi da je početna faza resultantnog titranja

$$\varphi_0 = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \quad (1.110)$$



Slika 1.40. Zbrajanje dvaju paralelnih harmoničkih titraja jednake frekvencije

Na slici 1.40.b prikazan je zbroj dvaju titraja u posebnom slučaju: $A_1 = 3,7$ cm, $A_2 = 2,2$ cm, $\varphi_{01} = 15^\circ$, $\varphi_{02} = 50^\circ$, $f = 500$ Hz. Zbrajanjem tih dviju sinusnih funkcija dobivamo također sinusnu funkciju jednake frekvencije, amplitude $A = 5,6$ cm i početne faze $\varphi_0 = 28^\circ$.

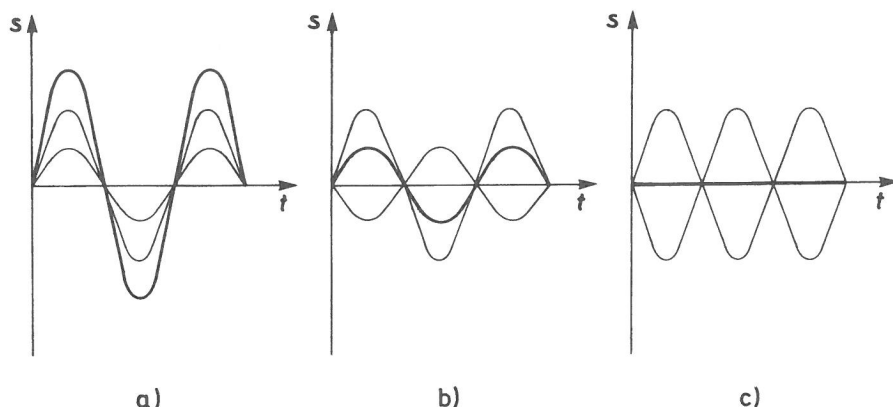
Amplituda resultantnog titranja (1.109) ovisi o amplitudi pojedinih titranja i razlici u fazi $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$. Ako je razlika faza $\Delta\varphi = 0$ ili 2π ili $4\pi \dots$, resultantna je amplituda najveća:

$$A = A_1 + A_2 \quad (1.111)$$

To je *konstruktivna* interferencija (sl. 1.41.a). Ako je $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$, tada je

$$A = A_1 - A_2 \quad (1.112)$$

tj. nastaje *destruktivna* interferencija (sl. 1.41.b). Ako su obje amplitude A_1 i A_2 jednake, rezultatna je amplituda jednaka nuli i titranja nema (sl. 1.41.c).



Slika 1.41. a) Konstruktivna interferencija, b) i c) destruktivna interferencija

b) Zbrajanje dvaju paralelnih harmoničkih titranja različitih frekvencija

Razmotrit ćemo interferenciju dvaju jednostavnih harmoničkih titranja različitih frekvencija na istom pravcu:

$$s_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad s_2 = A \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (1.113)$$

(Radi jednostavnosti, pretpostavili smo da su amplitude jednake.)

Rezultantno titranje je

$$s = s_1 + s_2 = A [\sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})] \quad (1.114)$$

Nakon transformacije izraz (1.114) poprima oblik:

$$s = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \quad (1.114.a)$$

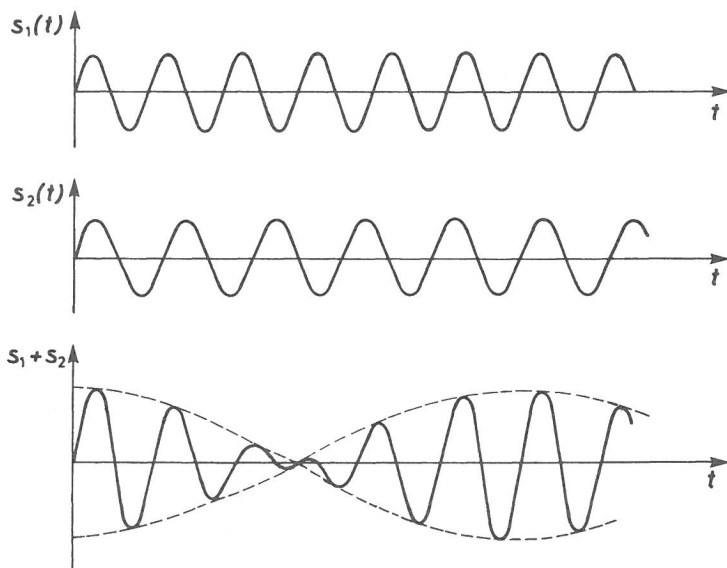
Iz izraza (1.114) vidi se da čestica titra kružnom frekvencijom $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ i amplitudom

$$a = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \quad (1.115)$$

Amplituda je modulirana i mijenja se od maksimalne $2A$ do nule. Frekvencija kojom se maksimalna amplituda ponavlja jest

$$f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \quad (1.105.a)$$

Rezultantni pomak čestice pri interferenciji dvaju jednostavnih paralelnih harmoničkih titraja kojima se frekvencije malo razlikuju pokazan je na slici 1.42. Tu pojavu najlakše možemo opaziti pomoću dvije glazbene viljuške čije su frekvencije neznatno različite. (Malu razliku u frekvenciji možemo postići tako da masu kraka jedne od njih malo povećamo.) Kada obje zatitramo, uho čuje niz zvučnih maksimuma frekvencije $f = f_1 - f_2$. Ta pojava, koju u akustici nazivamo *udarima*, može poslužiti za ugađanje muzičkih instrumenata. Instrument se ugađa sve dok udari koje daje s određenom glazbenom viljuškom iščeznu. Naime, tada je frekvencija tog tona jednaka frekvenciji glazbene viljuške.



Slika 1.42. Zbrajanje dvaju paralelnih harmoničkih titraja različitih frekvencija, kojima se frekvencije neznatno razlikuju

1.7.2. Harmonička analiza. Fourierov red i spektri

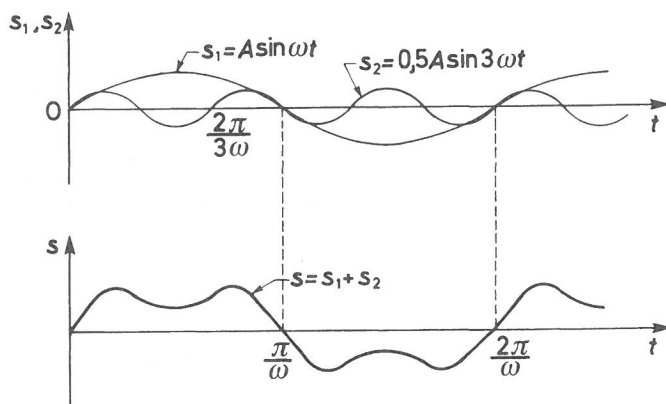
Zbrojimo li dva ili više harmoničkih titranja čije su frekvencije višekratnici neke osnovne frekvencije, dobiveno rezultantno titranje više nije jednostavna harmonička funkcija već *složena periodična funkcija* $f(t)$, koja se ponavlja nakon

perioda T . Na slici 1.43. pokazana su titranja $s_1 = 2 \sin \omega t$ i $s_2 = \sin 3 \omega t$, te njihov zbroj:

$$s = s_1 + s_2 = 2 \sin \omega t + \sin 3 \omega t.$$

Period prvog titranja je $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, a drugoga $T_2 = \frac{2\pi}{3\omega} = T_1/3$. Rezultantno titranje više nije sinusna (harmonička) frekvencija, ali je periodična funkcija perioda $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.

Frekvencija ω odnosno f zove se **osnovna frekvencija**, a višekratnici te frekvencije $2\omega, 3\omega, 4\omega \dots, n\omega, \dots$ zovu se **viši harmonici**. Zbrajajući jednostavna harmonička titranja čije su frekvencije višekratnici osnovne frekvencije, možemo, uzimajući odgovarajući broj viših harmonika s odabranim amplitudama, dobiti bilo koju periodičnu funkciju. Isto se tako svaka periodična jednoznačna funkcija $f(t)$ perioda T može izraziti beskonačnim redom harmoničnih članova:



Slika 1.43. Zbroj dvaju harmonika

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1.116)$$

To je poznati Fourierov red za periodičnu funkciju $f(t)$ s periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

U praksi se, međutim, amplitude članova višeg reda obično sve više smanjuju tako da se Fourierov red često sastoji od samo nekoliko prvih članova.

Fourierovi koeficijenti dani su formulama:

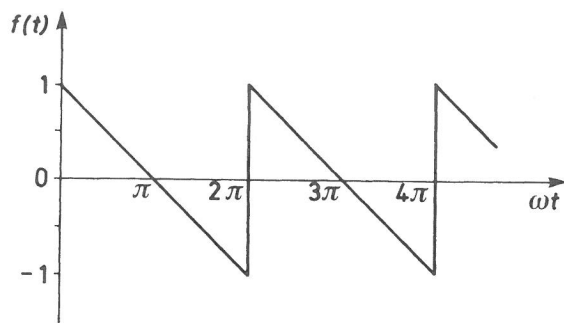
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt, & n = 0, 1, 2 \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt, & n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (1.117)$$

Rastavljanje nesinusne periodične funkcije u njezine harmoničke komponente zove se i *spektralna analiza*.

Razvoj funkcije u Fourierov red detaljnije je obrađen u matematičkim udžbenicima.

Grafički prikaz amplituda kao funkcija frekvencije zove se spektar periodičnoga nesinusoidalnog titranja. Takav je spektar diskretan i sastoji se od frekvencija $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$

Na slici 1.44. dana je pilasta krivulja. Takva je npr. jakost struje u vertikalnome otklonskom stupnju televizora.



Slika 1.44. Pilasta krivulja kao primjer periodične funkcije za harmoničku analizu

To je periodična funkcija perioda $2\pi/\omega$, čija je jednadžba u intervalu $[0, 2\pi/\omega]$

$$f(t) = -\frac{\omega}{\pi} t + 1 \quad (1.118)$$

Ona se može prikazati kao suma harmoničkih titraja (može se razviti u Fourierov red):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \quad (1.116.a)$$

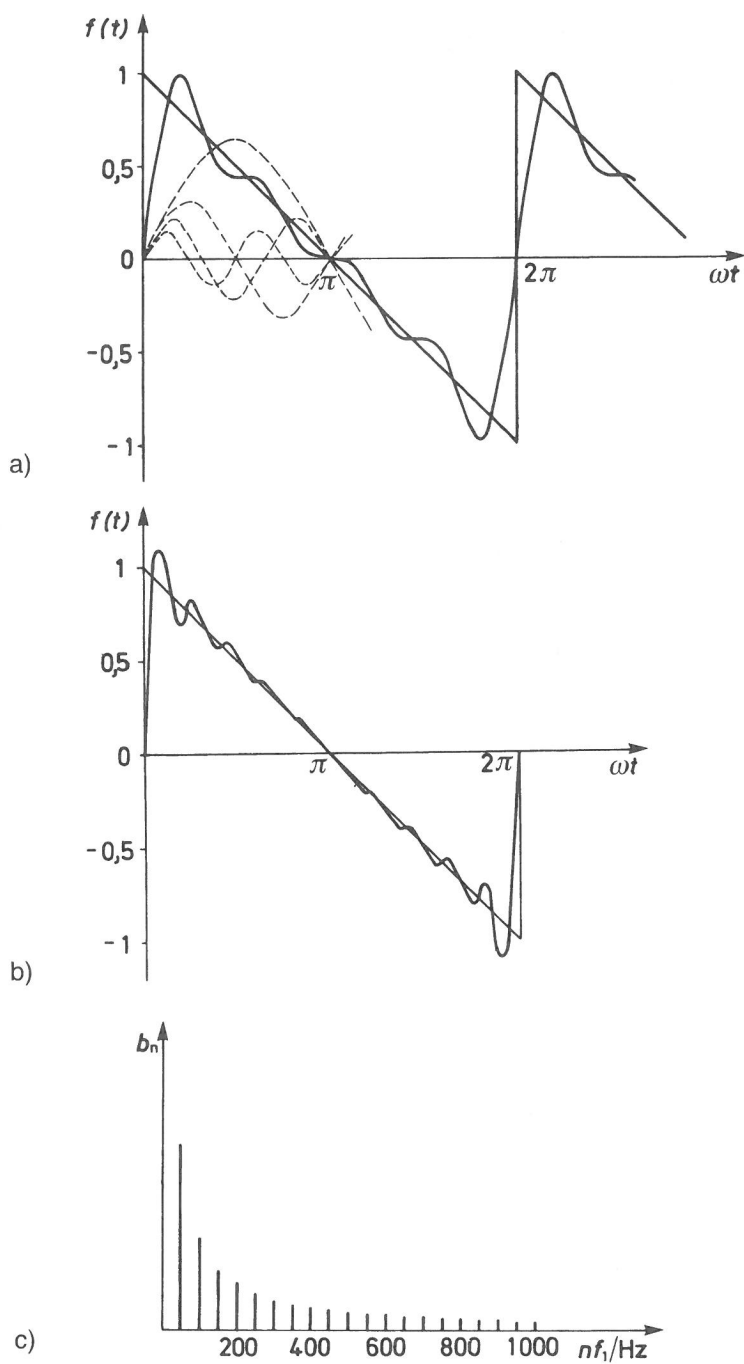
Ako pomoću formula (1.117) izračunamo Fourierove koeficijente, dobit ćemo:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \left(-\frac{\omega}{\pi} t + 1\right) \cos n \omega t \, dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \left(-\frac{\omega}{\pi} t + 1\right) \sin n \omega t \, dt = \frac{2}{n \pi} \quad (1.117.a)$$

Fourierov red za pilastu funkciju prikazanu na sl. 1.44. dakle glasi:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 2 \omega t}{2} + \frac{\sin 3 \omega t}{3} + \frac{\sin 4 \omega t}{4} + \dots \right) \quad (1.118.a)$$



Slika 1.45. Pilasta funkcija prikazana a) kao zbroj četiriju prvih članova Fourierova reda, b) kao broj prvih 10 članova reda, c) diskretni spektar pilaste krivulje sa slike 1.44.

(U slučaju vertikalnoga izlaznog stupnja u televizoru $\omega = 2\pi f = 100\pi$.) Što više članova uzmemo u obzir, dobit ćemo bolju aproksimaciju. Na slici 1.45.a prikazan je zbroj prvih četiriju članova reda, a na slici 1.45.b zbroj prvih 10 članova. Diskretni spektar, tj. vrijednost koeficijenta b_n (amplituda pojedinih harmonika) prikazan je na slici 1.45.c.

Napomenimo da se i neperiodične funkcije mogu analizirati Fourierovom metodom. U tom slučaju umjesto diskretnog spektra imamo *kontinuirani spektar* frekvencija.

Primjer

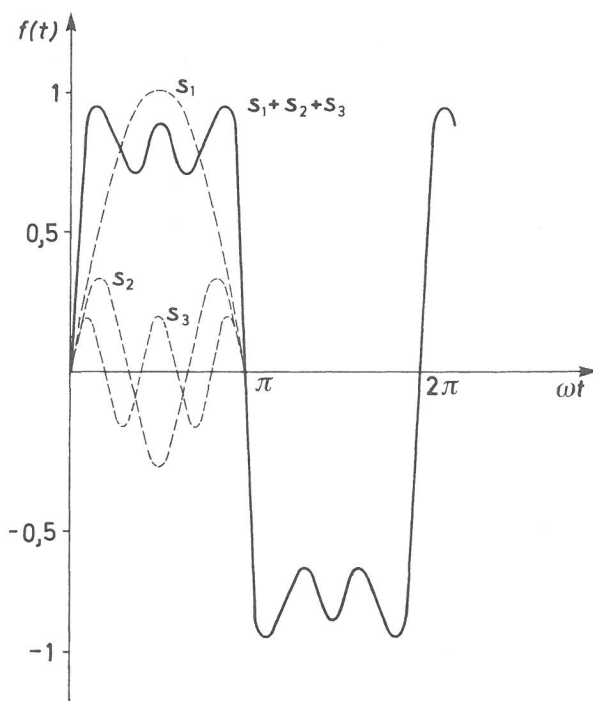
Odredite funkciju

$f(t) = (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t)$ u intervalu $0 < \omega t < 2\pi$ zbrajajući pojedina harmonička titranja.

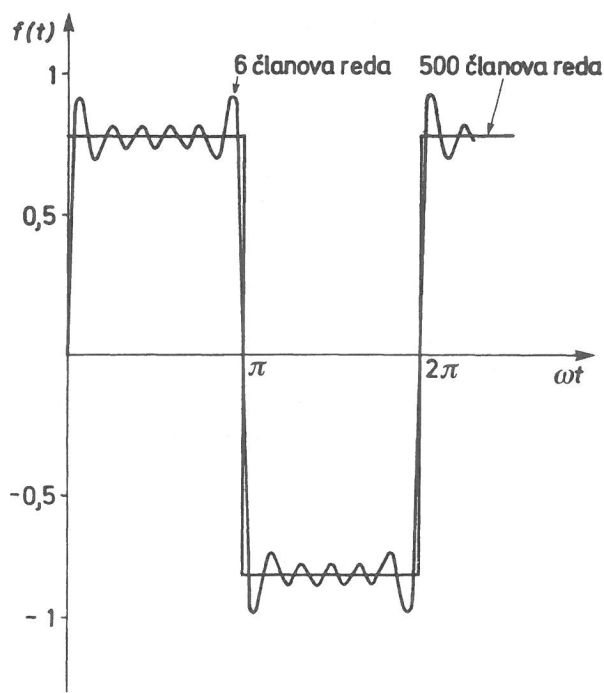
Koliki je period te funkcije? Nacrtajte odgovarajući diskretni spektar.

Zadana je funkcija zbroj triju harmoničkih titranja različitih amplituda i frekvencija, ω , 3ω i 5ω . Ako titraje nacrtamo i zbrojimo (sl. 1.46.a) rezultat je periodična nesinusoidalna funkcija perioda $\frac{2\pi}{\omega}$.

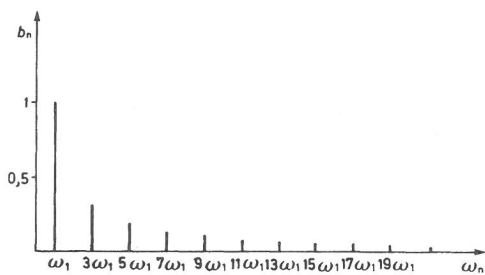
Ako umjesto prva tri člana za funkciju $f(t)$ zbrojimo veliki broj članova reda,



Slika 1.46. a) Zbroj prvih triju članova reda u zadanom primjeru



Slika 1.46. b) Periodična funkcija dobivena zbrajanjem harmoničkih titranja u zadanom primjeru



Slika 1.46. c) Diskretni spektar

kao što je to učinjeno na sl. 1.46.b, dobit ćemo periodičnu funkciju $f(t) = \frac{\pi}{4}$ za $0 < \omega t < 2\pi$ i $f(t) = -\frac{\pi}{4}$ za $\pi < \omega t < 2\pi$ kao što je to pokazano na sl. 1.46.b.

Diskretni spektar tog titranja prikazan je na sl. 1.46.c.

1.7.3. Zbrajanje dvaju međusobno okomitih harmoničkih titraja. Lissajousove krivulje

Kada na materijalnu točku (česticu) djeluju dvije međusobno okomite harmoničke sile, čestica istovremeno obavlja dva međusobno okomita harmonička titranja:

$$x = A_1 \sin \omega_1 t, \quad y = A_2 \sin (\omega_2 t + \Delta\varphi) \quad (1.119)$$

gdje je $\Delta\varphi$ fazna razlika između titranja u smjeru osi y i titranja u smjeru osi x . Putanja čestice bit će dvodimenzionalna krivulja zadana parametarskim jednadžbama (1.119). Budući da čestica ne može biti udaljenija od ishodišta više nego amplitude A_1 i A_2 komponentnih titranja, putanja čestice uvijek će biti upisana u pravokutnik stranica $2A_1$ i $2A_2$. Oblik putanje ovisit će o međusobnom odnosu frekvencija ω_1/ω_2 i razlici u fazi $\Delta\varphi$.

Francuski fizičar J. A. Lissajous (1822–1880) prvi je proučavao međusobno okomita harmonička gibanja i po njemu se takve putanje nazivaju *Lissajousovim krivuljama*.

Razmotrit ćemo nekoliko posebnih slučajeva.

a) Frekvencije obaju gibanja su jednake

Najjednostavniji primjer je onaj kad su oba titranja u fazi ($\Delta\varphi = 0$):

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \omega t \quad (1.120)$$

Eliminiranjem parametra t dobivamo

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad (1.121)$$

što je jednadžba pravca. U tom najjednostavnijem slučaju čestica se giba po dijelu pravca (dijagonali pravokutnika) na slici 1.47.a.

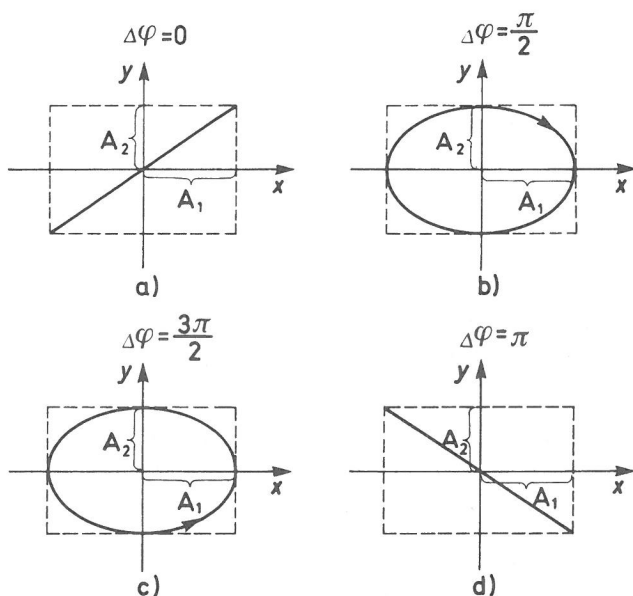
Ako je $\Delta\varphi = \pi$, jednadžba putanje je

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad (1.121.a)$$

dakle ponovo dio pravca koji je sada nagnut prema osi x ne za 45° , kao u prethodnom slučaju, već za 135° (sl. 1.47.d).

Kada je $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, jednadžba putanje poprima oblik

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A_2 \cos \omega t \quad (1.122)$$



Slika 1.47. Lissajousove krivulje za $\omega_1 = \omega_2$: a) $\Delta\varphi = 0$, b) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, c) $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$, d) $\Delta\varphi = \pi$

Eliminiranjem vremena iz te dvije jednačbe dobivamo jednačbu elipse:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (1.123)$$

Kada su frekvencije obaju okomitih titraja jednake a razlika u fazi je $\frac{\pi}{2}$, čestica se giba po elipsi (sl. 1.47.b).

Ako je pak $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$:

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) = A_2 \cos \omega t \quad (1.124)$$

jednačba je ponovo elipsa. Iz parametarskih jednačbi lako možemo zaključiti da se u prvom slučaju (1.123) čestica giba u smjeru kazaljke sata, a u drugom slučaju (1.124) suprotno kazaljci na satu. Za druge fazne razlike putanja je elipsa čija je velika os nagnuta prema osi x .

Zaključujemo da interferencijom dvaju međusobno okomitih harmoničkih titranja jednake frekvencije nastaje **eliptički polarizirano** titranje.

b) Frekvencije okomitih titranja nisu jednake

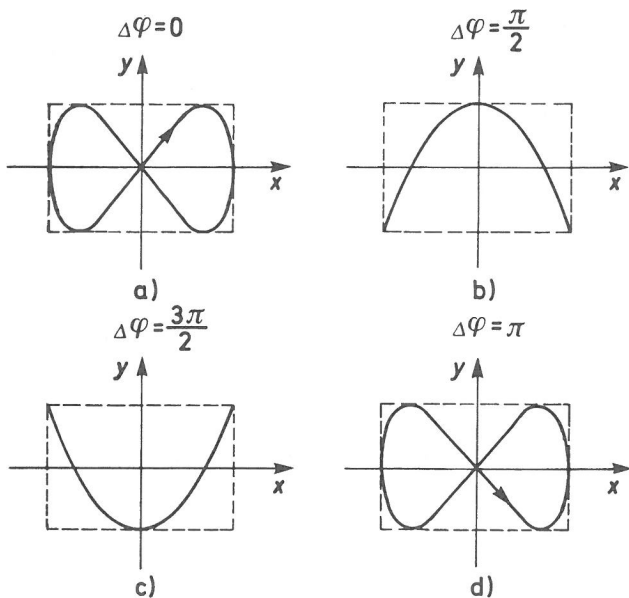
Kada frekvencije nisu jednake, putanja postaje složenija. Osobito su važni slučajevi kada se frekvencije odnose kao prirodni brojevi. Razmotrit ćemo

nekoliko takvih slučajeva. Ako je $\omega_1:\omega_2=1:2$, parametarska je jednačba putanje

$$x = A_1 \sin \omega_1 t, \quad y = A_2 \sin (2 \omega_1 + \Delta \varphi) \quad (1.125)$$

Oblik krivulje ovisi o $\Delta \varphi$. Slika 1.48.a i d prikazuje slučaj $\Delta \varphi = 0$ i $\Delta \varphi = \pi$, kada je putanja lemniskata, a slika 1.28.b i c slučaj $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$ i $\Delta \delta \varphi = \frac{3\pi}{2}$, kada je putanja parabola. Za druge omjere ω_2/ω_1 Lissajousove su krivulje još složenije i nećemo ih razmatrati.*

Iz oblika Lissajousovih krivulja mogu se odrediti omjeri frekvencija, pa se njome koristimo za točno određivanje frekvencije u krugovima izmjenične struje.



Slika 1.48. Lissajousove krivulje za $\omega_2/\omega_1=2$: a) $\Delta \varphi = 0$, b) $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$, c) $\Delta \varphi = \frac{3\pi}{2}$, d) $\Delta \varphi = \pi$

PITANJA I ZADACI

1. Što su elastična, a što plastična tijela?
2. Kako se definira napetost, a kako deformacija? Kojim se jedinicama mjere?
3. Kako deformacija ovisi o napetosti? U kojem području vrijedi Hookeov zakon?
4. Kako glasi Hookeov zakon za elastičnu deformaciju štapa, žice i sl., a kako za volumnu deformaciju?

* Detaljnije o Lissajousovim krivuljama v. u V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, III. dio, Sveučilište u Zagrebu, 1962.

5. Kako se definira stlačivost (kompresibilnost)? U kojim se jedinicama iskazuje?
6. Što je granica elastičnosti, a što napetost kidanja?
7. Što je elastična sila?
8. Kako se može objasniti Hookeov zakon razmatranjem deformacije kristalne rešetke?
9. Što je torzija? Kako se definira modul torzije, a kako torziona konstanta?
10. Koje konstante za opisivanje elastičnosti materijala poznajete? Povežite ih međusobno.
11. Ukratko definirajte: a) periodično gibanje, b) harmoničko titranje, c) prigušeno titranje, d) prisilno titranje, e) rezonanciju.
12. Navedite nekoliko primjera harmoničkog titranja.
13. Ovisi li period utega koji titra na opruzi o amplitudi titranja? O čemu ovisi?
14. Kolika je srednja brzina $\bar{v}$ u toku jednog perioda za česticu koja se periodički giba?
15. Kolika je konstanta opruge dobivene serijskim spajanjem dviju opruga konstanti k_1 i k_2 ?
16. Hoće li se period utega povećati ili smanjiti ako umjesto na jednoj uteg titra obješen na dvije jednake, paralelno spojene opruge?
17. Uteg obješen na opruzi titra frekvencijom f . Kolika će biti frekvencija sistema ako oprugu prerežemo na dva jednaka dijela i uteg objesimo na jednu polovinu opruge?
18. Je li gibanje klipa u automobilskome motoru harmoničko titranje?
19. Kako masa opruge utječe na period (frekvenciju) harmoničkog titranja?
20. Navedite nekoliko primjera harmoničkog titranja.
21. Izvedite izraz za elongaciju i period harmoničkog titranja.
22. Kako se mjerenjem može odrediti izraz za period titranja utega obješenog na oprugu?
23. Napišite izraz za elongaciju titranja harmoničkog oscilatora uz ove početne uvjete: a) $t = 0$, $s_0 = A$, $v_0 = 0$ i b) $t = 0$, $s_0 = 0$, $v = v_0$.
24. Što je matematičko njihalo? O čemu ovisi period njihala?
25. Objasnite gibanje matematičkog njihala za male i velike amplitude. Kako se može izvesti izraz za elongaciju i period tog njihala?
26. U kojoj je točki putanje matematičkog njihala napetost niti najveća, a u kojoj najmanja? Kolika je napetost niti ako je amplituda 60° ?
27. Kolika je pogreška ako se period matematičkog njihala računa formulom $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ za amplitudu $\theta_0 = 30^\circ$?
28. Kako se promijeni period matematičkog njihala u liftu koji se diže akceleracijom a ?
29. Izračunajte maksimalnu brzinu matematičkog njihala koje je počelo titrati iz amplitudnog položaja θ_0 .
30. Usporedite titranje opruge na kojoj visi uteg na površini Zemlje i te iste opruge i utega u prostoru bez gravitacijskog polja. Napišite jednadžbu gibanja, izračunajte pomak kao funkciju vremena i vlastitu frekvenciju za oba slučaja. Kakva je razlika?
31. Kako se izračunava period fizičkog njihala za male, a kako za velike amplitude?
32. Kada fizičko njihalo harmonički titra? Kako mu u tom slučaju elongacija ovisi o vremenu?
33. Što je reducirana duljina fizičkog njihala?
Kolika je reducirana duljina fizičkog njihala u obliku štapa koje se njiše oko osi što prolazi: a) jednim njegovim krajem, b) kroz središte titranja?
34. Kugla polumjera R obješena je o nit dužine $4R$. Koliki je period takvog njihala? Koliku bismo vrijednost dobili za period smatrajući to njihalo matematičkim njihalom dužine $5R$?
35. Što je reverziono njihalo? Kako ga možemo napraviti od štapa?
36. Iz jednadžbe gibanja torzionog njihala odredite period. Kako se može odrediti moment inercije pomoću torzionih titraja?
37. Izvedite izraz za kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju harmoničkog titranja i dokažite da za jednostavno titranje vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije.
38. Što je prigušeno titranje? Kako glasi jednadžba gibanja i njezino rješenje?
39. O čemu ovisi frekvencija prigušenog titranja? Kada nastaje aperiodično titranje i kritično gušenje titranja?
40. Što je faktor prigušenja, logaritamski dekrement i faktor kvalitete (Q -faktor) titrajnog sistema?
41. Što je prisilno titranje? Napišite jednadžbu gibanja i razmotrite njezina rješenja. Kad nastaje rezonancija?

42. O čemu ovisi amplituda elongacije i amplituda brzine pri prisilnom titranju? Nacrtajte $s_{\text{maks}}(\omega)$, $v_{\text{maks}}(\omega)$, $a_{\text{maks}}(\omega)$ za različite Q -faktore. Kolika je razlika u fazi φ između titranja sistema i titranja vanjskog oscilatora i kako ona ovisi o frekvenciji? Kolika je rezonantna frekvencija?
43. Na uteg m obješen na oprugu konstante k djeluje vanjska sila $F = F_0 \cos \omega t$. Napišite jednadžbu gibanja i njezino rješenje. Čemu je jednako $A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$?
44. Objasnite Oberbeckova njihala. Kako titraju dva vezana titrajna sistema? Koji su osnovni načini titranja?
45. Zbrojte dva paralelna harmonička titranja iste frekvencije i različitih amplituda i faza. Odredite resultantno titranje koje nastaje superpozicijom dvaju harmoničkih gibanja:
 $s = 0,1 \sin \pi t$ i $s = 0,2 \sin \pi \left(t + \frac{1}{2} \right)$.
46. Zbrojte dva harmonička titranja različitih frekvencija. Kakvo je resultantno gibanje? Kad nastaju udari? Kolika je frekvencija udara?
47. Što je harmonička analiza? Koju periodičnu funkciju označava Fourierov red:
 $\sin \omega t - \frac{\sin 3 \omega t}{3^2} + \frac{\sin 5 \omega t}{5^2} - \frac{\sin 7 \omega t}{7^2} \dots$
48. Kako se dobiju Lissajousove krivulje? Nacrtajte nekoliko takvih krivulja i objasnite kako nastaju?
49. Zbrojte dva međusobno okomita titranja predložena jednadžbama $x = A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ i $y = A \cos 2 \omega t$. Kako se zove dobivena krivulja?
50. Čelična osovina promjera 4 cm i dužine 4 m učvršćena je na jednom kraju. Koliki je kut torzije ako na drugom kraju djeluje moment para sila od 100 Nm? (Modul torzije čelika je 79 GPa.)
51. Na oprugu konstante 100 N/m objesimo uteg mase 2 kg. Utég zatim podignemo do položaja koji je zauzimala neistegnuta opruga (bez utega) i ispustimo bez početne brzine. Kolika je amplituda i frekvencija? Kako glasi jednadžba titranja?
52. Klip motora »Zastava 101« ima hod 55,5 mm i masu 360 g. Uz pretpostavku da gibanje klipa u cilindru motora možemo aproksimirati jednostavnim harmoničkim titranjem, kolika je maksimalna brzina i akceleracija klipa pri vrtnji motora sa 6000 okr./min? Kolika je pritom maksimalna sila na klip?
53. Odredite srednju vrijednost pomaka i brzine čestice koja titra po zakonu $s(t) = 0,2 \text{ m} \sin \omega t$ za vrijeme $T/4$.
54. Kolika je srednja vrijednost u vremenskom intervalu između nule i T potencijalne i kinetičke energije čestice koja neprigušeno harmonički titra?
55. Kugla polumjera $R = 10 \text{ cm}$ obješena na nit duljine l njiše se malim amplitudama. Izračunajte period takvog fizikalnog njihala. Koliki je period u dva ekstremna slučaja, $l \gg R$ i $l = 0$? Koliki je period kada je $l = 1 \text{ m}$ i koliko se taj period razlikuje od perioda matematičkog njihala dugog 1 m?
56. Torziona se njihalo sastoji od diska polumjera 0,1 m i mase 1 kg, koji visi na čeličnoj žici dužine 2 m i promjera 2 mm. Modul torzije čelika je $G = 70 \text{ GPa}$. Kolika je torziona konstanta žice? Koliki je period njihala?

2. Mehanički valovi

2.1. Uvod

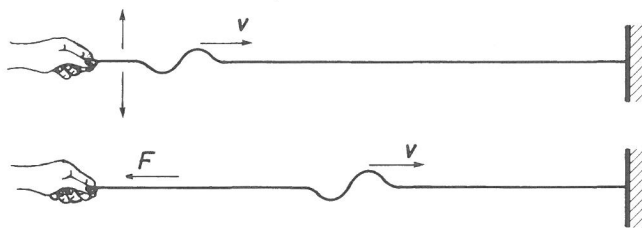
Energija se može prenositi od jednog mjesta na drugo na dva načina, i to gibanjem čestica (tijela) i valovitim gibanjem. Kada npr. bacimo kamen u vodu, na površini vode nastaje poremećaj koji se širi i prenosi energiju od mjesta gdje je kamen pao. Ustitramo li površinu vode u posudi pomoću šiljka koji u pravilnim razmacima titra gore-dolje, periodični će se poremećaji koje šiljak proizvodi širiti po površini vode u obliku koncentričnih kružnica. Kada zatitramo žicu nekoga muzičkog instrumenta, kad titra membrana zvučnika i sl., kroz okolni se prostor šire *zvučni* valovi. Iz izvora svjetlosti šire se svjetlosni valovi, a iz upaljene peći infracrveni elektromagnetski valovi i sl. Sve su to primjeri valnog gibanja. **Val** je, dakle, poremećaj sredstva koji se određenom brzinom širi kroz prostor.

Osim mehaničkih valova, pri kojima su poremećene koordinate pojedinih dijelova sredstava, postoje i *elektromagnetski* valovi, u kojih se vremenski mijenjaju električno i magnetsko polje. *Mehanički* valovi šire se kroz elastična sredstva, a elektromagnetski se valovi mogu širiti i u vakuumu.

U ovom ćemo poglavlju razmatrati **mehaničke valove** (valove kroz elastična sredstva), a elektromagnetske ćemo valove obraditi u 4. poglavlju.

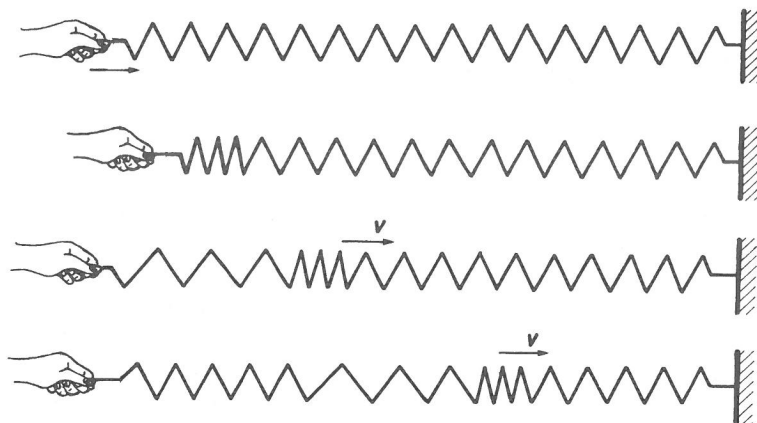
Pri širenju vala čestice sredstva ostaju na svojim mjestima i titraju oko ravnotežnog položaja, a širi se samo stanje titranja odnosno prenosi se energija izvora vala. Val je zapravo titranje koje se širi prostorom i time prenosi energiju.

Valovi mogu biti *longitudinalni* ili *transverzalni*. Valove pri kojima čestice sredstva titraju okomito na smjer širenja vala zovemo transverzalni valovi. Takav je npr. val na užetu. Ako jedan kraj horizontalno napetog užeta (žice, gumene cijevi i sl.) zatitramo rukom (ili, još bolje, pomoću vibratora), kroz žicu će se širiti transverzalni poremećaj odnosno val (sl. 2.1.a).



Slika 2.1. a) Transverzalni val na užetu.

Longitudinalni su oni valovi u kojima čestice titraju u smjeru širenja vala. Longitudinalne valove možemo promatrati na dužoj opruzi. Ako nekoliko zavoja na početku opruge stisnemo, a zatim ispustimo, zgušćenje zavoja brzo će se širiti prema drugom kraju opruge (sl. 2.1.b). Ako jedan kraj opruge spojimo s

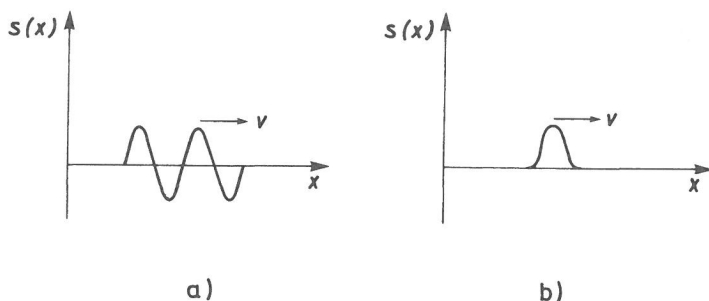


Slika 2.1. b) Longitudinalni val na opruzi

vibratorom koji harmonički titra, titranje će se po opruzi prenositi kao zgušnjavanje i razrjeđivanje zavoja opruge i kroz oprugu će se širiti longitudinalni val. Tipičan su primjer longitudinalnih valova zvučni valovi.

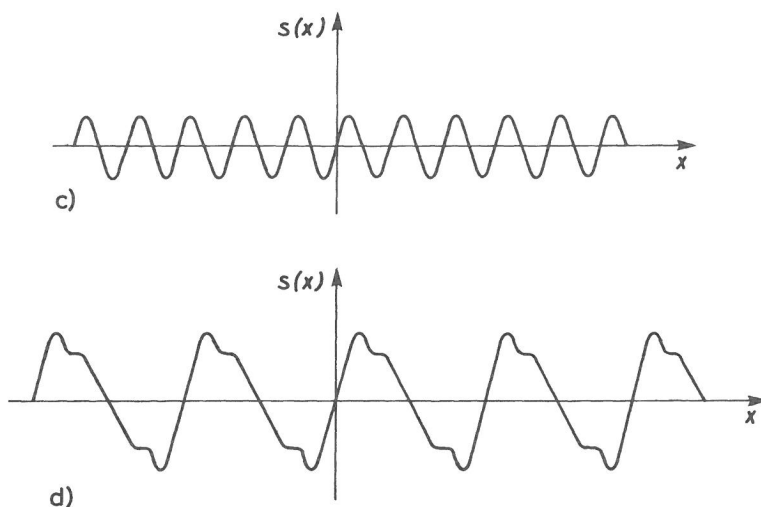
Valove možemo podijeliti u progresivne i stojne valove. *Progresivni* (putujući) val giba se u određenom smjeru i pritom se energija prenosi sa čestice na česticu. Pri stojnom valu neke čestice titraju, a neke stalno miruju: valna se slika ne mijenja s vremenom već je stacionarna i zato se val i zove *stacionarni* ili stojni. Suprotno progresivnom valu, pri stojnom se valu energija ne širi prostorom. Val na žici primjer je linearnoga, val na vodi površinskoga, a zvučni prostornog vala.

Ako jedan kraj napetog užeta (sl. 2.1.a) pomaknemo gore-dolje, kroz uže će se širiti transverzalni poremećaj koji zovemo puls. Ako početak užeta nastavimo



Slika 2.2. a) Harmonički i b) neharmonički puls

titrati, kroz uže će se širiti kontinuirani transversalni val. **Pulsom** se obično naziva valno gibanje ograničeno na određeni dio prostora Δx , a izvan tog intervala nema valnog gibanja. Puls još možemo zvati i *valnim paketom*. Suprotno pulsu ili valnom paketu, kontinuirani val nije ograničen u prostoru. Na slici 2.2.a i b prikazan je harmonički i neharmonički puls, a na slici 2.2.c i d harmonički i neharmonički val u određenom trenutku.



Slika 2.2. c) Harmonički i d) neharmonički val

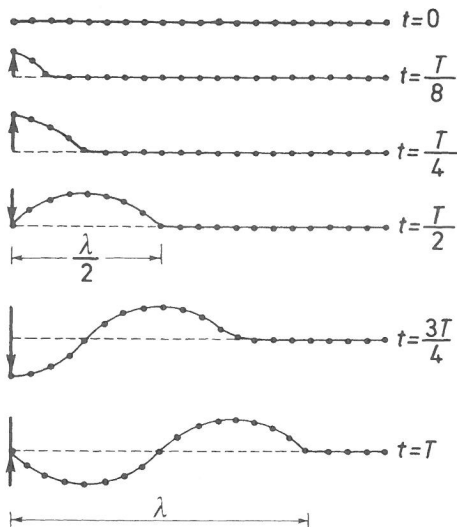
Valovi nastaju u izvoru vala, a titranje se određenom brzinom proširi kroz sredstvo. U elastičnim su tvarima susjedne čestice međusobno povezane elastičnim silama te pomak jedne čestice iz ravnotežnog položaja uzrokuje i pomak susjednih čestica. Poremećaj ravnotežnog stanja zbog inercije se ne prenosi trenutno nego nekom konačnom brzinom. Pritom kroz sredstvo ne putuju čestice već samo poremećaj; zato treba razlikovati brzinu titranja čestica oko ravnotežnog položaja od brzine širenja vala.

Na slici 2.3. shematski je prikazano nastajanje i širenje valnoga gibanja kroz uže ili žicu. Kada čestica u izvoru vala (početku žice) počne transversalno titrati, uzrokuje pomak susjedne čestice, ali s određenim kašnjenjem, pomakom u fazi. Zatim zatitra treća, pa četvrta čestica itd., pa se poremećaj određenom brzinom prenosi kroz sredstvo. Što je čestica dalje od izvora vala, to će kasnije zatitrati, tj. to će više kasniti u fazi u odnosu prema čestici u izvoru vala.

Dok čestica u izvoru vala (početku žice) napravi jedan potpuni titraj, val prevale određeni put koji zovemo **valna duljina** λ . To je udaljenost najbližih točaka koje titraju istom fazom (sl. 2.3).

Valovi se kroz sredstvo šire određenom brzinom. To je kvocijent puta koji prijeđe određena faza vala, npr. brijeg, i za to potrebnog vremena. Ta se brzina

često zove i *fazna brzina* jer se njome širi određena faza vala. Budući da za vrijeme jednog titraja T val prijeđe jednu valnu duljinu λ , slijedi da je



Slika 2.3. Širenje vala iz izvora koji titra. Valna duljina.

$$\lambda = vT,$$

ili, ako umjesto T pišemo $\frac{1}{f}$:

$$v = \lambda f \quad (2.1)$$

Brzina širenja vala jednaka je produktu valne duljine i frekvencije. To je veza između duljine, frekvencije i brzine vala, osnovna relacija za svako valovito gibanje.

Brzina vala ovisi o osobinama (elastičnosti i gustoći) sredstva kroz koje val prolazi. Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo ili se prostire kroz nehomogeno sredstvo, brzina i valna duljina mu se mijenjaju, a frekvencija ostaje ista. Brzina kojom se energija prenosi kroz sredstvo može biti različita od fazne brzine, što se događa uvijek kada fazna brzina ovisi o frekvenciji (valnoj duljini). Nasuprot faznoj brzini, brzinu širenja energije zovemo **grupna brzina**. O grupnoj ćemo brzini detaljnije govoriti kasnije.

Ako u trenutku $t=0$ točka u izvoru vala ($x=0$) počne titrati, taj će se poremećaj proširiti do mjesta x za vrijeme $\Delta t = \frac{x}{v}$. Razlika u fazi titranja čestice na mjestu x i čestice u izvoru vala ($x=0$) proporcionalna je sa x , tj. $\Delta \varphi = kx$. Iz definicije valne duljine slijedi da je za $x = \lambda$, $\Delta \varphi = 2\pi$, te je $k = 2\pi/\lambda$.

Razlika u fazi između titranja čestice udaljene od izvora vala za x i titranja čestice u izvoru vala je

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t = kx = \frac{2\pi}{\lambda} x \quad (2.2)$$

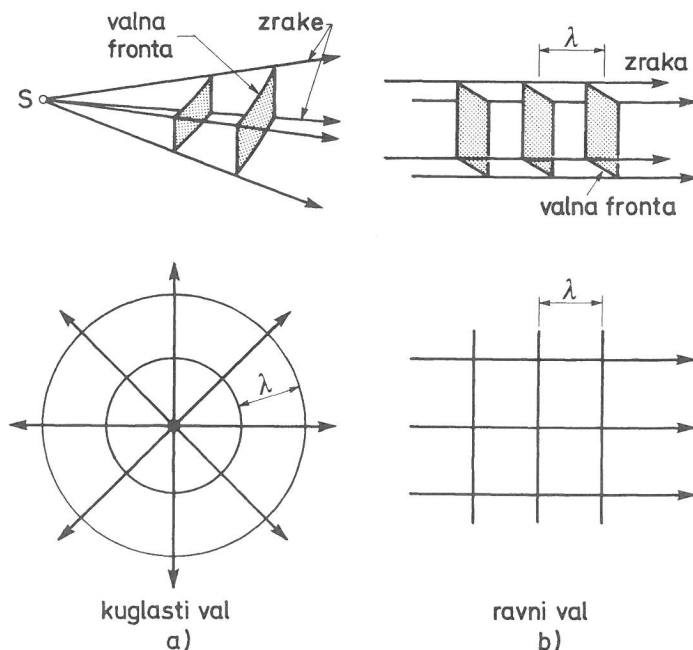
Veličina $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ naziva se **valni broj**. (Valni broj i konstanta opruge imaju istu oznaku k , međutim, to su dvije sasvim različite veličine.)

Šireći se od izvora, titranje zahvaća nove i nove čestice sredstva. Geometrijsko mjesto točaka do kojih dopire titranje u određenom trenutku zove se **valna fronta**. Sve točke valne fronte imaju istu fazu titranja.

Pravce po kojima se titraji šire od čestice do čestice zovemo **valna zraka**; zrake su okomite na valne fronte.

(Neki autori geometrijsko mjesto točaka koje titraju istom fazom zovu *valna ploha* ili valna površina, a valnu plohu koja je do određenog trenutka stigla najdalje od izvora zovu valnom frontom. Drugi autori ne prave razliku između valnih ploha i fronta, pa jedne i druge nazivaju valnim frontama.)

U prirodi su najčešći prostorni (trodimenzionalni) valovi. Spomenut ćemo dva najjednostavnija slučaja.



Slika 2.4. a) Kuglasti, b) ravni val

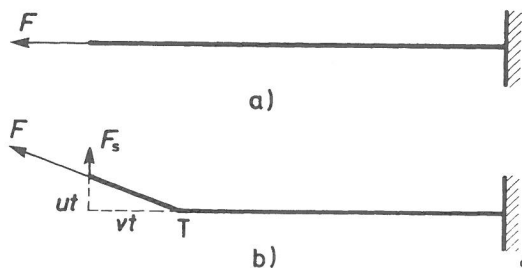
Iz točkastog izvora u izotropnom sredstvu (tj. sredstvu koje u svim smjerovima ima jednake osobine) širi se kuglasti val čije su valne fronte koncentrične kugline plohe (sfere), a zrake radijalni pravci (sl. 2.4.a). Ravni val nastaje iz beskonačno dalekoga točkastog izvora; valne fronte ravnog vala su ravnine, a zrake paralelni pravci (sl. 2.4.b).

2.2. Širenje valova u sredstvu

U *Uvodu* smo vidjeli da mehanički val nastaje kada se periodični poremećaji, koji se ponavljaju u pravilnim razmacima, iz jednog dijela sredstva (izvora vala) šire određenom brzinom kroz okolno elastično sredstvo. Budući da se val sastoji od niza periodičnih poremećaja, radi jednostavnosti najprije ćemo promatrati širenje jednoga takvog poremećaja (pulsa). Iako ćemo se kasnije uglavnom baviti periodičnim poremećajima, spomenut ćemo da se i takvi pojedinačni poremećaji javljaju u prirodi, npr. udarni val neke eksplozije i sl.

Još ćemo jednom istaknuti da širenje poremećaja (vala) nije identično s gibanjem čestica sredstva kroz koje se poremećaj širi. Pri širenju poremećaja kroz sredstvo čestice uglavnom ostaju na svojim mjestima – samo se malo pomaknu iz položaja ravnoteže. Brzina pomicanja čestica u mnogo je manja od brzine širenja poremećaja v .

Brzina širenja transverzalnih poremećaja. Transverzalne poremećaje možemo promatrati na zategnutome elastičnom užetu (žici). Neka je μ linearna gustoća (masa po jedinici duljine) užeta, a F sila kojom je uže zategnuto. Kada u trenutku $t=0$ lijevom kraju užeta damo mali transverzalni pomak brzinom u , taj će se poremećaj širiti kroz uže brzinom v i nakon vremena t prijeći put vt i doći do točke T (sl. 2.5). Za to se vrijeme lijevi kraj užeta pomakne za ut .



Slika 2.5. Brzina širenja transverznog poremećaja na žici

Da bismo izračunali brzinu širenja poremećaja v , možemo se poslužiti zakonom o jednakosti impulsa sile i promjene količine gibanja. Transverzalna sila koja je uzrokovala poremećaj jednaka je $F \frac{ut}{vt} = F \frac{u}{v}$, te je njezin impuls za vrijeme t

$$F \frac{u}{v} t \quad (2.3)$$

Budući da je uže na početku mirovalo, promjena količine gibanja užeta jednaka je količini gibanja u trenutku t , tj. produktu mase lijevog dijela užeta do točke T i brzine u kojom se čestice tog dijela užeta transverzalno gibaju:

$$\mu v t u \quad (2.4)$$

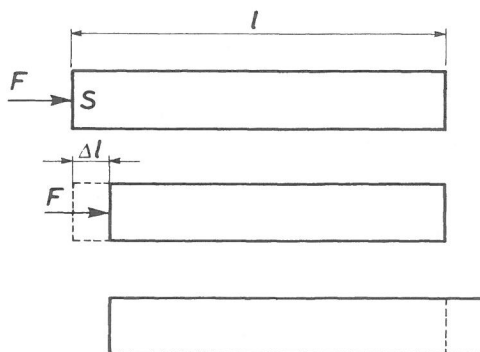
Izjednačimo li (2.3) i (2.4) dobijemo:

$$F \frac{u}{v} t = \mu v u t$$

odnosno

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.5)$$

Brzina širenja transversalnog poremećaja odnosno vala kroz napeto uže (žicu) ovisi samo o napetosti užeta i masi po jedinici duljine (linearnoj gustoći).



Slika 2.6. Brzina širenja longitudinalnog poremećaja u štapu

Brzina širenja longitudinalnih poremećaja. Širenje longitudinalnih poremećaja u čvrstom tijelu možemo promatrati na štapu duljine l i presjeka S od elastičnog materijala, gustoće ρ (sl. 2.6). U času $t = 0$ udarimo npr. čekićem lijevi kraj štapa. Pritom nastane longitudinalna deformacija opisana Hookeovim zakonom (v. odjeljak 1.2)

$$F = ES \frac{\Delta l}{l} \quad (2.6)$$

gdje je F tlačna sila koja je izazvala deformaciju, a E Youngov modul elastičnosti materijala. Taj se poremećaj u obliku udarnog vala širi kroz štap brzinom v i nakon vremena t dođe do kraja štapa, te je $v = l/t$; pritom se štap kao cjelina pomakne za Δl brzinom u .

Brzinu širenja poremećaja izračunat ćemo tako da izjednačimo impuls sile s promjenom količine gibanja u longitudinalnom smjeru. Pomnožimo li silu s vremenom, dobivamo longitudinalni impuls sile:

$$F t = ES \frac{\Delta l}{l} t = ES \frac{u}{v} t \quad (2.7)$$

Štap je na početku mirovao, a zbog udarca se pomakao brzinom $u = \Delta l/t$, te je promjena količine gibanja jednaka

$$m u = \rho S l u = \rho S v u t$$

Izjednačimo li (2.7) sa (2.8), dobivamo

$$ES \frac{u}{v} t = \rho S v u t \quad (2.9)$$

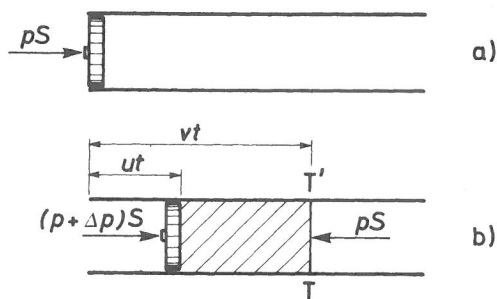
odnosno

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.10)$$

Na sličan se način može odrediti brzina longitudinalnih poremećaja i u fluidu (tekućini ili plinu). Pretpostavimo da se fluid gustoće ρ nalazi u cijevi presjeka S pod tlakom p . Na početku cijevi nalazi se pomični klip čijim se pomicanjem može izazvati elastična deformacija fluida (sl. 2.7.a). Neka se u trenutku $t = 0$ klip naglo pomakne udesno brzinom u , i za vrijeme t prijeđe put ut . Taj će pomak uzrokovati kompresiju fluida ispred klipa; nastali će se poremećaj širiti kroz cijev brzinom v i za vrijeme t proširiti na udaljenost vt . U času t svi se dijelovi fluida lijevo od točke T na sl. 2.7.b gibaju brzinom u , a fluid desno od T (do kojega poremećaj još nije stigao) miruje. Dok se klip i čestice fluida gibaju brzinom u , granična ploha TT' pokreće se udesno brzinom širenja poremećaja v . Da bismo izračunali tu brzinu, izjednačit ćemo longitudinalni impuls sile i promjenu količine gibanja fluida.

Pomakom klipa prvotni se volumen fluida $V = Svt$ smanjio za iznos $\Delta V = S u t$. Pritom je tlak porastao za Δp , pa se ta elastična deformacija fluida može prikazati u obliku sličnom Hookeovu zakonu:

$$\Delta p = - \frac{1}{K} \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} \frac{u}{v} \quad (2.11)$$



Slika 2.7. Longitudinalni poremećaj u fluidu

ili

$$\Delta p = - B \frac{\Delta V}{V} = B \frac{u}{v},$$

gdje je K koeficijent stlačivosti (kompresibilnost) fluida, a $B = \frac{1}{K}$ volumni modul elastičnosti. Budući da je sila jednaka produktu tlaka i površine presjeka

cijevi (klipa), longitudinalni je impuls sile $\Delta p St$. Promjena količine gibanja promatranog dijela fluida je

$$mu = \rho(Svt)u$$

te je zbog jednakosti impulsa sile i promjene količine gibanja:

$$\frac{1}{K} \frac{u}{v} St = (\rho Svt)u \quad (2.12)$$

Odatle se dobiva brzina širenja longitudinalnih poremećaja odnosno valova kroz fluid:

$$v = \sqrt{\frac{1}{K \rho}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (2.13)$$

Pri širenju valova kroz plinove temperatura koja se povisi pri zgušćavanju (kompresiji) a smanji pri razređivanju ne uspije se izjednačiti jer je vođenje topline mnogo sporije od širenja poremećaja. Takvi, tzv. adijabatski procesi u plinovima opisani su zakonom:

$$p V^\kappa = \text{konst.} \quad (2.14)$$

gdje su p i V tlak i volumen plina, a $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ omjer specifičnih toplinskih kapaciteta pri stalnom tlaku i stalnom volumenu plina. Konstanta κ za jednoatomne plinove približno iznosi 1,67, za dvoatomne plinove (npr. za zrak) 1,40, a za višeatomne plinove 1,33.

Adijabatski koeficijent stlačivosti K_a koji preuzima ulogu izoternog koeficijenta stlačivosti K jednak je:

$$K_a = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\kappa p} \quad (2.15)$$

Uvrstivši izraz za K_a u (2.13), dobivamo izraz za faznu brzinu zvučnih valova u plinu:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad (2.16)$$

Upotrebom plinske jednadžbe $pV = \frac{m}{M} RT$, tj. zamjenom $\frac{p}{m/V} = \frac{RT}{M}$ u (2.16), dobivamo ovisnost brzine zvuka o temperaturi i vrsti plina:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \quad (2.17)$$

gdje je $R = 8,314 \text{ J/(mol K)}$ (plinska konstanta), T apsolutna temperatura, a M molna masa plina.

2.3. Matematički opis valnog gibanja

Promatrajmo val koji se širi kroz jednodimenzionalno elastično sredstvo, npr. žicu, užu i sl. Val nastaje kada u izvoru vala (npr. na početku užeta) čestice sredstva titraju pa se to titranje zbog elastičnih osobina sredstva širi na susjedne čestice, najprije na one najbliže, a zatim na one dalje. Tako nastaju periodični poremećaji koji se šire sredstvom, tj. nastaje val.

Pomak (elongacija) s čestice sredstva kroz koje se val širi ovisi o položaju čestice (njezinoj udaljenosti od izvora vala) i o vremenu, tj. s je funkcija prostornih koordinata i vremena $s(x, y, z, t)$. U jednodimenzionalnom sredstvu (npr. užetu ili žici) pomak će biti funkcija dviju varijabli, x i t , tj. $s(x, t)$. Slično vrijedi i za trodimenzionalni ravni val koji se širi u smjeru osi x . Naime, pri ravnom valu sve točke valne fronte (koja je u tom slučaju ravnina okomita na os x) titraju jednako te je, iako je val trodimenzionalan, za opisivanje položaja čestice dovoljna jedna koordinata, a elongacija $s(x, t)$ za trodimenzionalni je ravni val funkcija dviju varijabli, kao i za jednodimenzionalno valno gibanje.

Pretpostavimo da u izvoru vala, u kojem odaberemo ishodište koordinatnog sustava, čestica harmonički titra po zakonu

$$s(x=0, t) = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (2.18)$$

gdje je A amplituda titranja, ω kružna frekvencija, a T period titranja.

Titranje će se širiti iz ishodišta i do neke će točke P , udaljene za x od ishodišta, val doći nakon vremena

$$t' = \frac{x}{v}, \quad (2.19)$$

gdje je v brzina vala. Što je točka dalje od izvora (što je x veći), val će do nje kasnije stići, te će i razlika u fazi između njezina titranja i titranja čestice u izvoru biti veća (sl. 2.3).

Kada val dođe do čestice na mjestu x , ona će početi, dakle, harmonički titrati istom frekvencijom ω , ali s razlikom u fazi u odnosu prema titranju čestice u izvoru. Stoga će njezina elongacija biti dana formulom

$$s(x, t) = A \sin \omega(t - t') = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (2.20)$$

Pritom smo pretpostavili da se pri širenju vala ne mijenja amplituda.

Pogledajmo kako se određena konstantna faza $\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \text{konst.}$ giba kroz prostor. Napišemo li taj izraz u obliku

$$x = v t + \text{konst.} \quad (2.21)$$

vidimo da se određena vrijednost faze (npr. maksimalna amplitudna vrijednost) giba brzinom širenja v . Prema tome, brzina v u jednadžbi (2.21) jest brzina širenja faze i zato se često naziva fazna brzina.

Izraz za harmonički val (2.20) možemo pisati i u drugom obliku. Koristeći se relacijom $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ i $v = f\lambda$, dobivamo

$$s(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.22)$$

Uvođenjem valnog broja $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$, valna funkcija (2.22) poprima oblik

$$s(x, t) = A \sin (\omega t - kx) \quad (2.23)$$

Jednadžbe (2.20), (2.22) i (2.23) opisuju ravni val koji se širi slijeva nadesno, tj. u pozitivnom smjeru osi x . Ako val putuje zdesna nalijevo, u negativnom smjeru osi x , tada se s porastom vremena koordinata x smanjuje, pa je

$$x = -vt + \text{konst.} \quad (2.24)$$

odnosno

$$s(x, t) = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

ili

$$s(x, t) = A \sin (\omega t + kx) \quad (2.25)$$

Ako čestica u izvoru vala titra po zakonu $s(t) = A \sin (\omega t + \varphi_0)$, tada će i val imati malo drukčiji oblik:

$$s(x, t) = A \sin (\omega t - kx + \varphi_0) \quad (2.23.a)$$

Ako se val, umjesto po osi x , širi po nekome drugom pravcu, čiji je smjer određen jediničnim vektorom $\vec{u}_0$, valna je funkcija

$$s(r, t) = A \sin (k \vec{u}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) = A \sin (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \quad (2.26)$$

gdje je uveden valni vektor $\vec{k} = k \vec{u}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_0$.

Ponekad je valno gibanje umjesto sinusnom ili kosinusnom funkcijom praktičnije prikazati eksponencijalnom funkcijom s kompleksnim eksponentom. Budući da je $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, valna se funkcija (2.26) može pisati i u obliku

$$s(r, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} \quad (2.26.a)$$

Tada je imaginarni dio funkcije (2.26.a) jednak jednadžbi (2.20). Razlog za takvo pisanje je lakše računanje s eksponencijalnom funkcijom.

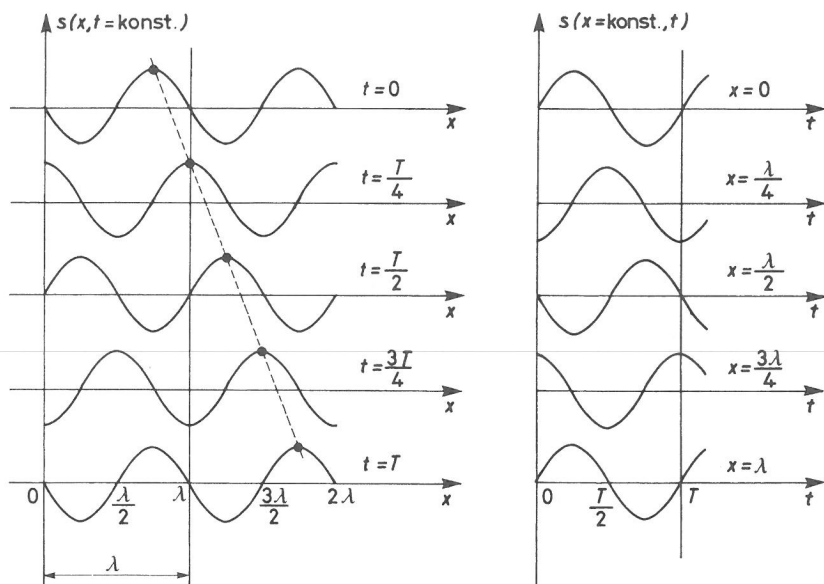
Jednadžba vala (2.25) periodična je funkcija u prostoru i vremenu. Njezin je vremenski period T , a prostorni λ . Slika 2.8. pokazuje funkciju $s(x, t)$ kao funkciju udaljenosti za različita vremena (valna slika) i funkciju vremena za različite udaljenosti (titranje čestica na različitim mjestima).

Jednadžba sfernog vala. Izvor vala često možemo smatrati točkastim. Ako se valovi koji izlaze iz takvog izvora šire kroz homogeno i izotropno sredstvo, oni su sferni, a valne su im fronte kugline plohe. Ako je titranje izvora opisano funkcijom

$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, točka na udaljenosti r od izvora također će titrati harmonički, ali s kašnjenjem od $\Delta t = \frac{r}{v}$, te će faza takvog titranja umjesto $\omega t + \varphi_0$ biti $\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \varphi_0 = \omega t - kr + \varphi_0$.

Ako je na $r = 1$ m, amplituda vala A , jednadžba sfernog vala na udaljenosti r od izvora glasi:

$$s(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi_0) \quad (2.27)$$



Slika 2.8. Ovisnost elongacije jednodimenzionalnoga sinusoidalnoga vala o udaljenosti i vremenu. Točke upućuju na prostiranje brijega u smjeru osi x

Amplituda sfernog vala smanjuje se udaljenošću kao funkcija $1/r$.

Dosada smo pretpostavili da se pri prolazu vala kroz sredstvo ne apsorbira energija. Međutim, ako postoji apsorpcija, amplituda vala se s udaljenošću smanjuje prema eksponencijalnom zakonu, pa jednadžba ravnog vala ima oblik

$$s(x, t) = A_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (2.28)$$

a jednadžba sfernog vala

$$s(r, t) = \frac{A_0}{r} e^{-\alpha r} \sin(\omega t - kr + \varphi_0) \quad (2.29)$$

Pritom je α koeficijent apsorpcije.

Primjer

Transverzalni sinusoidalni val na užetu ima amplitudu $A = 5 \text{ cm}$ i valnu duljinu $\lambda = 0,5 \text{ m}$. Lijevi kraj užeta, koji se nalazi u koordinatnom ishodištu, titra frekvencijom 3 Hz po zakonu $s(0, t) = A \sin \omega t$.

a) Kolika je brzina vala?

b) Napišite jednadžbu titranja proizvoljne čestice užeta.

c) Kolika je transversalna elongacija, transversalna brzina akceleracija čestice užeta udaljene $0,5 \text{ m}$ od ishodišta u času $t = 5 \text{ s}$?

a) Brzinu vala možemo naći iz osnovne formule valnog gibanja:

$$v = \lambda f = 1,5 \text{ m/s}.$$

b) Budući da je jednadžba vala

$$s(x, t) = A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right),$$

a čestica u ishodištu titra po zakonu

$$s(0, t) = A \sin 2\pi ft,$$

nakon uvrštenja zadanih vrijednosti dobivamo jednadžbu titranja proizvoljne čestice na udaljenosti x od ishodišta

$$s(x, t) = 0,05 \sin 2\pi (3t - 2x),$$

gdje je x iskazano metrima, a t sekundama.

c) Iz $s(x, t) = 0,05 \sin 2\pi (3t - 2x)$, nakon uvrštenja $x = 0,5 \text{ m}$ i $t = 5 \text{ s}$, dobivamo transversalnu elongaciju:

$$s = 0,05 \sin 28\pi = 0 \text{ m}.$$

Transverzalna je brzina prva derivacija pomaka (elongacije) po vremenu. (Budući da je $s(x, t)$ funkcija dvije varijable, derivirat ćemo je po vremenu, smatrajući x konstantnim, i tako dobivenu parcijalnu derivaciju označiti $\partial s / \partial t$.) Dakle:

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = 2\pi f A \cos 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,94 \text{ m/s}.$$

Akceleracija čestice užeta je

$$a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (2\pi f)^2 A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) = (2\pi f)^2 \cdot s = 0.$$

2.3.1. Jednadžba transversalnog vala na žici

Pošto smo u odjeljku 2.3. promatrali širenje sinusoidalnog vala, sada ćemo izvesti diferencijalnu valnu jednadžbu za širenje valova po zategnutoj žici. Jednadžba bilo kojeg vala je rješenje diferencijalne valne jednadžbe, pa ćemo na

još jedan, ali matematički precizniji način dobiti matematički izraz za valno gibanje i brzinu vala.

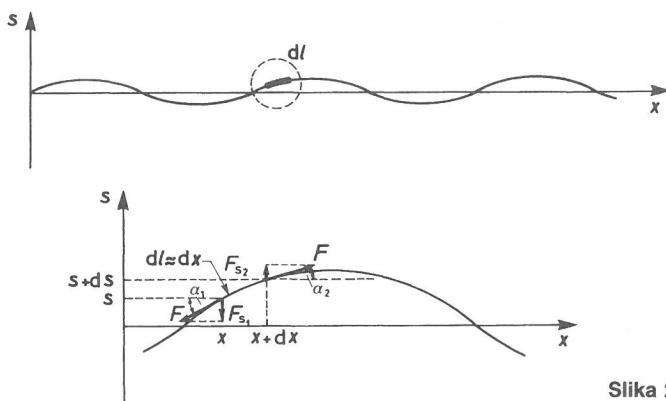
Neka je μ masa jedinice duljine žice (linearna gustoća žice, kg/m), a F sila kojom je žica zategnuta. Pogledajmo sile koje djeluju na djelić žice $dl = dx$ (sl. 2.9). Ako žica ne titra, tada se sile koje djeluju na jedan i drugi kraj poništavaju, jer su jednake po iznosu, a suprotnog su smjera. Ako se kroz žicu širi transverzalni val, postoji rezultantna sila u transverzalnom smjeru, čiji je iznos (sl. 2.9)

$$dF_s = F_{s2} - F_{s1} = F(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (2.30)$$

Zbog utjecaja te sile djelić žice dl transverzalno titra. Pretpostavimo da su amplitude titranja malene u usporedbi s valnom duljinom. Tada su kutovi α maleni, pa je $\sin \alpha_2 \approx \alpha_1 + d\alpha \approx \tan \alpha_1 + d\alpha$. Budući da je

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\partial s}{\partial x}, \\ d\alpha &= d(\tan \alpha) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx^*, \end{aligned}$$

transverzalnu silu dF_s možemo napisati u obliku:



Slika 2.9. Uz izvod valne jednadžbe

$$\begin{aligned} dF_s &= F d\alpha \\ dF_s &= F \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (2.31)$$

Primijenimo li na djelić žice dx čija je masa $dm = \mu dx$ drugi Newtonov zakon $F = ma$, dobit ćemo:

$$dF_s = \mu dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

* Funkcija $s(x, t)$, koja opisuje elongaciju djelića (čestice) žice, funkcija je od dvije varijable i zato se koristimo parcijalnim derivacijama; pri takvom parcijalnom deriviranju jednu varijablu smatramo konstantnom kada deriviramo po drugoj varijabli. Parcijalne derivacije označavamo slovom ∂ , a derivacije funkcije jedne varijable slovom d .

gdje je $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ akceleracija djelića žice. Uvrstivši (2.31) u (2.32), dobivamo *diferencijalnu valnu jednadžbu* za transversalne valove u jednoj dimenziji:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33)$$

To je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda u x i t , a njezina rješenja opisuju transversalne valove na žici.

Konstantu $\frac{\mu}{F}$ obično pišemo kao $\frac{1}{v^2}$, jer $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ima dimenziju brzine. U odjeljku 2.3. pokazali smo da je v fazna brzina vala. S ovom oznakom:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.34)$$

valna jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33.a)$$

Prema teoriji diferencijalnih jednadžbi opće je rješenje ove jednadžbe funkcija oblika:

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (2.35)$$

ili, drukčije pisano,

$$s(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

gdje je $s(x, t)$ elongacija čestice sredstva na udaljenosti x u trenutku t , a f i g proizvoljne funkcije koje se mogu dvaput derivirati. Zaista, derivirajući (2.35) dvaput po x i po t , te uvrstivši u (2.33.a), možemo vidjeti da je jednadžba zadovoljena.

Pokažimo da funkcija $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ opisuje val koji se kreće udesno brzinom v , tj. $v = \sqrt{F/\mu}$ brzina vala na žici. Drugim riječima: treba pokazati da za vrijeme Δt val prijeđe put $v\Delta t$. Ako je u trenutku t_1 određena faza vala bila u točki x_1 , u trenutku t_2 ona će biti u točki x_2 , tj.:

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = f\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right)$$

To mora vrijediti za svaku fazu vala, što je ispunjeno samo u slučaju:

$$t_1 - \frac{x_1}{v} = t_2 - \frac{x_2}{v},$$

ili

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1) \quad (2.36)$$

Relacija (2.36) daje put pri jednolikom gibanju, što pokazuje da se određena faza vala giba konstantnom brzinom v , tj. da je $v = \sqrt{F/\mu}$ fazna brzina vala.

Tako smo pokazali da funkcija oblika $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ opisuje val koji se kreće u smjeru pozitivne osi x brzinom v . Na sličan se način može pokazati da funkcija $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ opisuje val koji ide u smjeru osi $-x$.

Posebno rješenje valne jednadžbe (2.33) jest sinusoidalni (harmonički) val koji se prostire u smjeru osi x . On nastaje kada izvor vala harmonički titra. Ako početak žice ($x = 0$) titra s elongacijom $s(0, t) = A \sin \omega t$, tada čestice udaljene od početka za x također titraju sinusoidalno:

$$s(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (2.22)$$

gdje je T period titranja, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ kružna frekvencija, λ valna duljina, a v brzina vala. Izraze (2.34) i (2.22) dobili smo već prije, u odjeljku 2.3, na drukčiji način.

Dok je brzina vala za homogeno sredstvo konstantna i dana relacijom (2.34), brzina pojedine čestice sredstva se mijenja i računa se deriviranjem elongacije po vremenu:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = A \omega \cos(\omega t - kx) \quad (2.37)$$

Akceleracija čestice druga je derivacija elongacije po vremenu:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t - kx) \quad (2.38)$$

2.3.2. Superpozicija valova

Stignu li dva ili više valova istovremeno u istu točku prostora, rezultatno titranje u toj točki vektorski je zbroj pojedinih titranja. To je *princip superpozicije* koji vrijedi za sva valna gibanja i direktna je posljedica činjenice da je valna jednadžba linearna i homogena. Ako su, naime, $s_1(x, t)$ i $s_2(x, t)$ rješenja valne jednadžbe, tada je i bilo koja linearna kombinacija $c_1 s_1(x, t) + c_2 s_2(x, t)$ rješenje.

Pri zbrajanju (superpoziciji) dvaju ili više valova nastaje interferencija. Promatrajmo dva jednodimenzionalna vala jednake amplitude, frekvencije i brzine koji se šire u smjeru osi $+x$:

$$s_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.39)$$

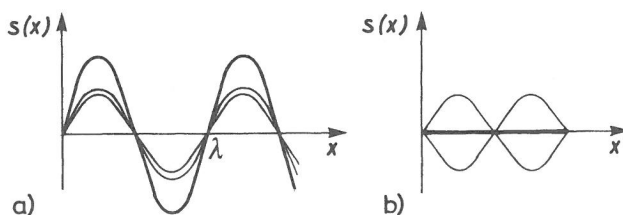
$$s_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Prema principu superpozicije, rezultatni je val

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = A [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \varphi)] \\ &= 2A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Rezultantni val ima istu frekvenciju i brzinu, ali mu je amplituda $2A \cos \frac{\varphi}{2}$.

Ako je $\varphi = 0$, $\cos \frac{\varphi}{2} = 1$, amplituda je maksimalna, $2A$. Tada su valovi s_1 i s_2 u fazi i nastaje konstruktivna interferencija (sl. 2.10.a).

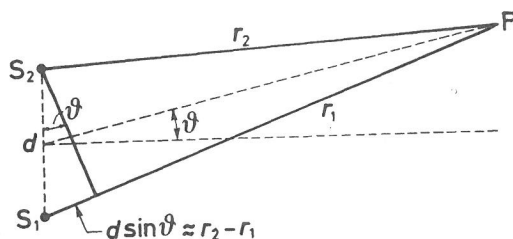


Slika 2.10. a) Konstruktivna, b) destruktivna interferencija

Ako je $\varphi = \pi$, $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$, amplituda je jednaka nuli, nastaje destruktivna interferencija (sl. 2.10.b). Rezultat superpozicije dvaju valova ovisi, dakle, o njihovoj faznoj razlici.

Superpoziciju valova i nastale interferencijske pojave najlakše je promatrati pomoću površinskih valova na vodi. Ustitramo li površinu vode pomoću vibratora na koji je spojen šiljak što dodiruje površinu vode, od izvora će se širiti kružni val. Ako imamo dva takva točkasta izvora jedan blizu drugoga, opazit ćemo da se površina vode djelomično giba, a djelomično miruje.

Pretpostavimo da valovi koji izlaze iz izvora S_1 i S_2 (sl. 2.11) imaju jednaku



Slika 2.11. Interferencija valova iz dva izvora

amplitudu i fazu. Dok dođu do točke P valovi prevale različite putove, te se titranja koja proizvode u toj točki razlikuju u fazi:

$$\begin{aligned}s_1 &= A_1 \sin \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) \\ s_2 &= A_2 \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Razlika u fazi tih dvaju titranja jednaka je:

$$\Delta \varphi = \frac{\omega}{v} (r_2 - r_1) = k (r_2 - r_1)\tag{2.42}$$

gdje je $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Pretpostavimo li da su amplitude jednake ($A_1 = A_2 = A$) rezultatno je titranje:

$$\begin{aligned}s &= s_1 + s_2 = A \left[\sin \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) + \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right) \right] \\ s &= 2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \sin \left[\omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} \right]\end{aligned}\tag{2.43}$$

Ako je točka P daleko od izvora ($r_1, r_2 \gg d$), $r_2 - r_1 = d \sin \vartheta$ (sl. 2.11), amplituda rezultatnog titranja je $2A \cos \frac{k d \sin \vartheta}{2}$ i ovisi o mjestu na kojem promatramo interferenciju i udaljenosti izvora d .

Titranje će biti maksimalno na mjestima gdje je $\cos \frac{k d \sin \vartheta}{2} = \pm 1$, tj. gdje je $\frac{k d \sin \vartheta}{2} = n\pi$. U tom je slučaju razlika u fazi $\Delta \varphi$ (2.42) višekratnik od 2π :

$$\Delta \varphi = k(r_2 - r_1) = k d \sin \vartheta = 2n\pi.\tag{2.44}$$

te su na tim mjestima oba titranja u fazi. Konstruktivnu interferenciju dobivamo, dakle, u smjerovima ϑ_n :

$$d \sin \vartheta_n = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{2.45}$$

Destruktivna interferencija nastaje na mjestima gdje je $\Delta \varphi = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$, ili u smjerovima ϑ_n za koje je

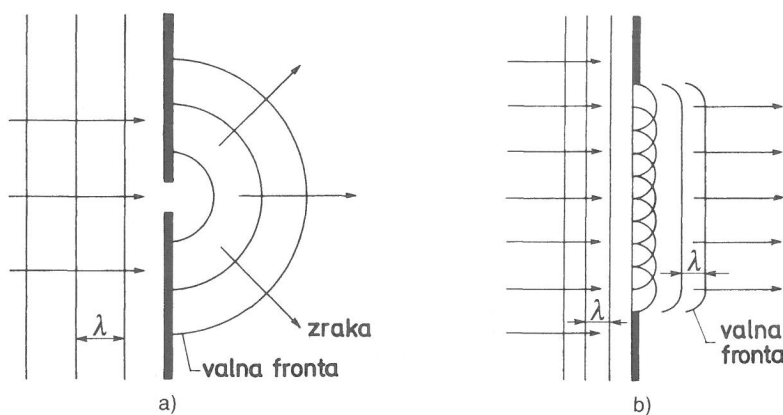
$$d \sin \vartheta_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{2.46}$$

Ako su amplitude obaju titranja u (2.41) jednake, $A_1 = A_2$, na tim mjestima čestice uopće neće titrati.

Interferencija se može opaziti i sa svjetlošću, pa je to jedan od dokaza valne prirode svjetlosti.

Promatramo li ravni val koji na površini vode nailazi na pukotinu (sl. 2.12.a) čija je širina manja od valne duljine, iza pukotine ćemo opaziti kuglasti val. Pukotina se ponaša kao izvor novoga kuglastog vala. Christian Huygens (1629–1695) uočio je opći princip koji se može primijeniti na širenje valova u nekom sredstvu: svaka točka valne fronte izvor je novoga kuglastog »elementarnog« vala; *anvelopa* svih elementarnih valova je nova valna fronta.

Ako je pukotina široka, mnogo šira od valne duljine, tada iz dijela valne fronte koja dođe na pukotinu nastaje mnogo elementarnih valova čijom superpozicijom iza pukotine nastaju paralelne valne fronte – dobivamo geometrijsku sliku pukotine (sl. 2.12.b).



Slika 2.12. Uz Hygensov princip

Ako je pukotina reda veličine valne duljine, valovi se ogibaju iza pukotine, ulaze u prostor »geometrijske sjene«, to više što je pukotina manja. U prostoru iza pukotine postoje mjesta gdje je titranje maksimalno (tzv. maksimumi ogiba) i mjesta gdje titranja nema (minimumi ogiba).

Ogib (difrakcija) tipična je valna pojava i dokaz valne prirode neke pojave; ogibom se upravo i dokazala valna priroda svjetlosti.

Detaljnije o ogibu bit će riječ u 6. poglavlju.

2.3.3. Valni paket, grupna brzina

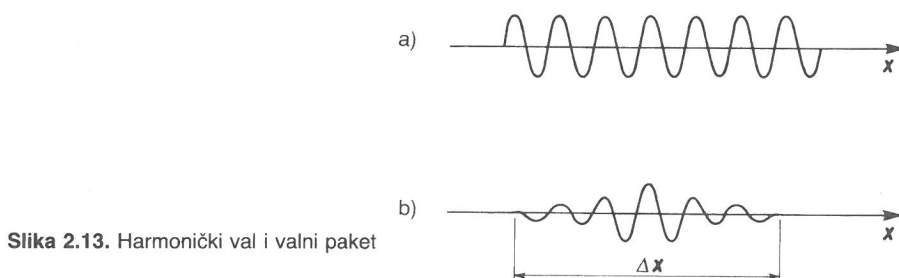
Sinusoidalni valovi $s(x, t) = e^{i(kx \pm \omega t)}$, tzv. *ravni valovi* (sl. 2.13.a) nisu lokalizirani u prostoru već se prostiru od $-\infty$ do $+\infty$.

Valni paket je valno gibanje uglavnom lokalizirano u prostoru. Slika 2.13.b prikazuje jednodimenzionalni valni paket.

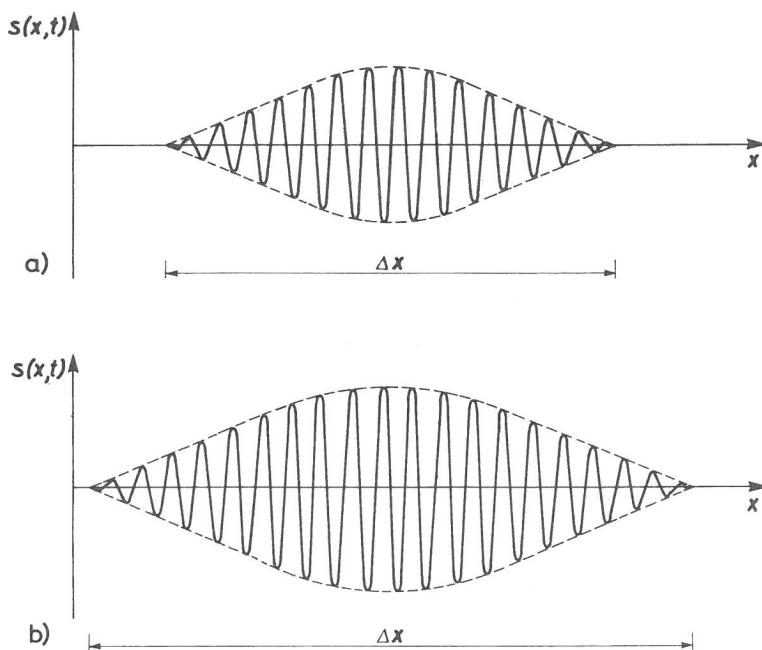
Valne pakete možemo dobiti interferencijom sinusoidalnih valova: prikladnim odabirom valova koji interferiraju na jednom se mjestu u prostoru (područje Δx na slici 2.14), može postići konstruktivna interferencija, a u svim ostalim točkama prostora destruktivna interferencija.

Superpozicijom više ravnih valova možemo dobiti prostorno omeđen val, valni paket, koji se kreće prostorom određenom brzinom

$$s(x, t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad (2.47)$$



Slika 2.13. Harmonički val i valni paket



Slika 2.14. Valni paket za različite Δk

Ako je raspodjela valnih brojeva i frekvencija kontinuirana, umjesto sume pišemo integral:

$$s(x, t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (2.47.a)$$

Pritom je $A(k)$ amplituda svake komponente vala.

Može se pokazati da se bilo koja funkcija, pa i valni paket sa slike 2.14. može napisati kao superpozicija sinusoidalnih funkcija (Fourierova analiza); treba samo zgodno odabrati funkcije $A(k)$ i poslužiti se relacijama (2.47) ili (2.47.a).

Funkciju $A(k)$ možemo prikazati npr. sljedećom relacijom:

$$A(k) = A_0 e^{-a^2(k-k_0)^2} \quad (2.48)$$

Pritom je A_0 maksimalna vrijednost funkcije, dok a karakterizira širinu krivulje: ako je a maleno, krivulja je šira, odnosno područje valnih brojeva Δk za koje je funkcija različita od nule veće.

Zanima nas kako izgleda prostorna valna funkcija $s(x, t)$ za tako odabranu $A(k)$; hoće li ona predočavati valni paket?

Da bismo to saznali, u izraz (2.47.a) moramo uvrstiti funkciju $A(k)$ i integrirati. Dovoljno je promatrati valnu funkciju u određenom trenutku, npr. $t = 0$, i integrirati samo po prostornim koordinatama:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{ikx} dk \quad (2.49)$$

Rješenje tog integrala glasi:

$$s(x) = \frac{A_0 \sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} e^{ik_0 x}$$

To je sinusoidalni val e^{ikx} moduliran anvelopom $e^{-x^2/4a^2}$ koja ga lokalizira u prostoru. Valno je gibanje primjetno samo u malom dijelu prostora Δx , to manjem što je a manji.

Parametar a određuje širinu valnog paketa: uočimo da uskoj $A(k)$ odgovara široka $s(x)$, i obrnuto. Ako je Δk velik, valni je paket bolje lokaliziran. Što je Δk manji, lokalizacija je slabija, valni je paket sve širi, a za $\Delta k = 0$ (ravni val) poprima sinusni oblik i prostire se od $-\infty$ do $+\infty$.

Na slici 2.14 prikazana su dva valna paketa za različite $A(k)$.

Fourierova analiza valnoga gibanja. U poglavlju 1.9. pokazali smo da se svako periodično gibanje (periodična vremenska funkcija) može prikazati kao zbroj sinusoidalnih (harmoničkih) gibanja frekvencije ω , 2ω , 3ω , ... $n\omega$. To se može proširiti i na neperiodične funkcije i umjesto diskretnim, prikazati ih kontinuiranim spektrom frekvencija.

Valno je gibanje također periodična funkcija, ali u dvije varijable: u vremenu i prostoru. Na periodičnu funkciju $f = \left(x \pm \frac{x}{v}\right)$, koja označava valno gibanje, također možemo primijeniti Fourierovu analizu i pisati:

$$f\left(t \mp \frac{x}{v}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\omega \left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \sum b_n \sin n\omega \left(t \mp \frac{x}{v}\right) \quad (2.50)$$

gdje su Fourierovi koeficijenti a_0 , a_n i b_n dani sličnim formulama kao i u odjeljku 1.9. Možemo, dakle, zaključiti da se svako valno gibanje može prikazati zbrojem sinusoidalnih (harmoničkih) valova.

Ako umjesto zbroja po diskretnome frekventnom spektru izračunamo integral po svim frekvencijama od ω_1 do ω_2 , tj. po kontinuiranom spektru frekvencija u intervalu $\Delta\omega$, dobit ćemo grupu valova ili, kako se često zove, valni paket:

$$s(x, t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) d\omega \quad (2.51)$$

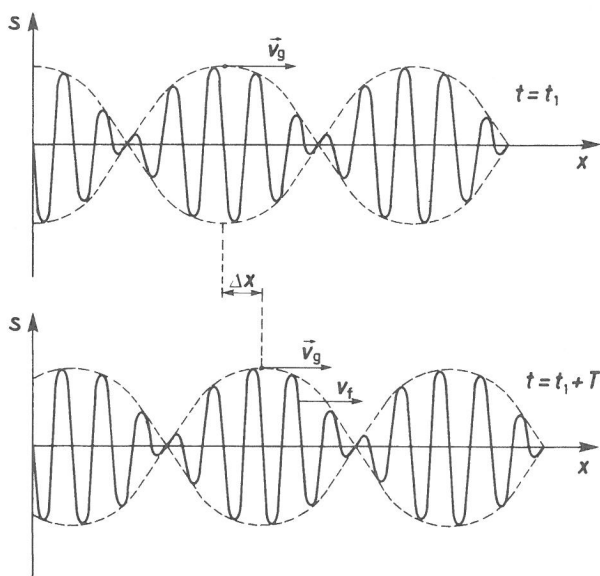
Dobiveno je valno gibanje ograničeno u prostoru u intervalu od x_0 do $x_0 + \Delta x$ i kako vrijeme raste, širi se određenom brzinom kroz prostor. (Umjesto po ω možemo integrirati po $k = \omega/v$ kao što smo naveli u relaciji 2.47.a).

Što je pritom interval frekvencije $\Delta\omega$, odnosno interval valnih brojeva $\Delta k = \Delta\omega/v$ veći, to je širina valnog paketa manja.

Grupna brzina. Brzina

$$v = \omega/k$$

harmoničkog vala kružne frekvencije ω i valne duljine λ zove se fazna brzina jer je to brzina kojom se faza vala ($\omega t - kx$) širi prostorom. Međutim, ako je grupa



Slika 2.15. Superpozicija valova različitih frekvencija. Fazna i grupna brzina

valova nastala superpozicijom harmoničkih valova, takvo se valno gibanje (i energija koju ono prenosi kroz prostor) širi grupnom brzinom v_g , a pojedine njegove harmoničke komponente imaju faznu brzinu v .

Na slici 2.15. prikazan je zbroj dvaju harmoničkih valova kojima se frekvencije malo razlikuju

$$s = s_1 + s_2 = A \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + A \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$s = 2 A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\omega_2 - \omega_1) x/v}{2} \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\omega_2 + \omega_1) x/v}{2} \quad (2.52)$$

Svaki val ima faznu brzinu v , a frekvencije i valne duljine (valni brojevi) malo im se razlikuju. Rezultat superpozicije je valno gibanje s moduliranom amplitudom koja se mijenja od nule do $2A$. Takva grupa valova putuje kroz prostor grupnom brzinom v_g . To je brzina kojom se npr. giba vrh brijege modulirane amplitude predložene crtano na slici 2.15. Ona se može odrediti iz slike tako da se pređeni put Δx podijeli vremenskim intervalom Δt . Za promatrani primjer grupna je brzina

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \quad (2.53)$$

Ako je fazna brzina svakoga komponentnog vala u grupi valova jednaka (kao što je na sl. 2.15), tada je $\omega_1 = k_1 v$ i $\omega_2 = k_2 v$ te je $v_g = v$, tj. grupna je brzina jednaka faznoj brzini.

Međutim, ako fazna brzina ovisi o valnoj dužini, kao u disperzivnom sredstvu, grupna se brzina razlikuje od fazne. Zbrojimo li valove $s_1 = A \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{v_1} \right)$ i $s_2 = A \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{v_2} \right)$, grupna brzina dobivenog vala bit će drukčija od faznih brzina v_1 i v_2 .

Budući da je $\omega = v_f k$, grupna se brzina može izraziti pomoću fazne:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (v_f k) = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (2.54)$$

Ako je

$$\frac{dv_f}{d\lambda} = 0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{dv_f}{d\lambda} = 0,$$

tada nema disperzije, svi komponentni valovi u valnom paketu imaju jednaku brzinu, a grupna je brzina valnog paketa jednaka faznoj brzini pojedinog vala.

Ako je

$$\frac{dv_f}{d\lambda} < 0, \quad \text{tada je } v_g > v_f,$$

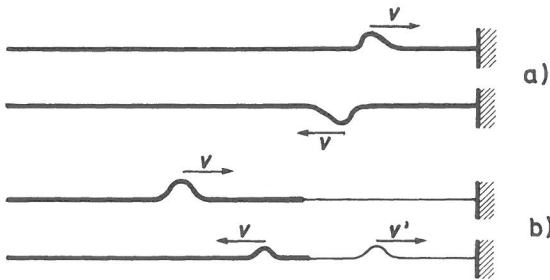
inače za

$$\frac{dv_f}{d\lambda} > 0, \quad v_g < v_f.$$

Računanje za valni paket složenije je nego za grupu od dva vala, ali konačni rezultat je jednak.

2.4. Refleksija valova

Promatrajmo širenje valova u jednodimenzionalnome ograničenom sredstvu, npr. na zategnutom užetu, žici, gumenoj cijevi i sl. Udarimo li zategnuto uže na jednome mjestu, poremećaj (npr. brijeg) širit će se na obje strane. Ako je uže na kraju pričvršćeno (sl. 2.16.a), poremećaj će se **reflektirati**. Pritom opažamo da nastaje promjena faze za π , tj. da se poremećaj reflektira od čvrste zapreke sa suprotnom fazom. Naprotiv, ako kraj debljeg užeta spojimo s tankom uzicom (sl. 2.16.b), na tom će se spoju brijeg reflektirati kao brijeg, tj. reflektirat će se s istom fazom.



Slika 2.16.
Refleksija vala na:
a) gušćemu, b) rjeđem sredstvu

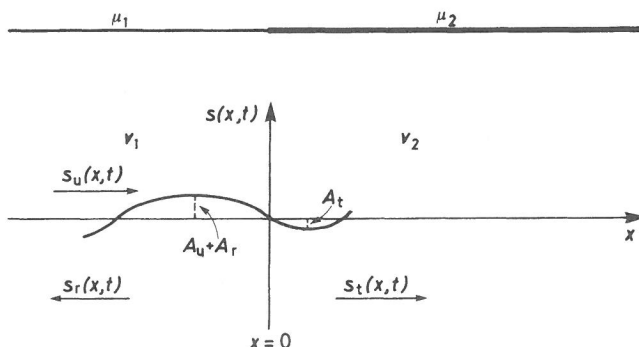
Iz tih i sličnih razmatranja možemo zaključiti: kada val upada na granicu između dva sredstva, jedan se dio energije vala reflektira, a ostatak prelazi u drugo sredstvo; od upadnog vala nastaje reflektirani i transmitirani val. Pri refleksiji na gušćem sredstvu reflektirani je val pomaknut u fazi na π prema upadnome, a pri refleksiji na rjeđem sredstvu nema pomaka u fazi. Posebno, pri refleksiji od čvrste zapreke nema transmitiranog vala, a reflektirani val ima istu amplitudu kao upadni, samo je pomaknut u fazi za π ; pri refleksiji na slobodnom kraju upadni i reflektirani val imaju jednake amplitude i faze.

Ta kvalitativna razmatranja možemo pokazati i kvantitativno:

Promatrajmo refleksiju vala na užetu na mjestima gdje se gustoća mijenja, npr. na spoju dvaju užeta različite debljine. Jednadžbe upadnog vala $s_u(x, t)$, reflektiranog vala $s_r(x, t)$ i transmitiranog vala $s_t(x, t)$ jesu:

$$\begin{aligned} s_u(x, t) &= A_u \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \\ s_r(x, t) &= A_r \sin \omega \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \\ s_t(x, t) &= A_t \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

gdje su A_u , A_r i A_t amplituda upadnoga, reflektiranog i transmitiranog vala. Elongacija $s(x, t)$ mora svugdje biti dvaput derivabilna funkcija udaljenosti, tj. u svakoj točki neprekinuta funkcija s neprekinutom derivacijom.



Slika 2.17. Reflektirani i transmitirani val

Na mjestu gdje se gustoća mijenja, (sl. 2.17), neka to bude ishodište koordinatnog sustava $x = 0$, moraju biti ispunjeni sljedeći rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} s_u + s_r &= s_t \\ \frac{\partial}{\partial x} (s_u + s_r) &= \frac{\partial s_t}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Prvi uvjet razumijeva da se na mjestu $x=0$ val dijeli na reflektirani i transmitirani, a drugi uvjet zahtijeva da u graničnoj točki nagibi obiju žica moraju biti jednaki.

U graničnoj točki valne funkcije (2.55) imaju oblik:

$$s_u = A_u \sin \omega t, \quad s_r = A_r \sin \omega t \quad \text{ i } \quad s_t = A_t \sin \omega t \quad (2.57)$$

Primjena prvoga rubnog uvjeta (2.56) daje:

$$A_u + A_r = A_t, \quad (2.58)$$

Deriviramo li (2.55) kako zahtijeva drugi rubni uvjet (2.56), dobivamo:

$$\frac{A_u}{v_1} - \frac{A_r}{v_1} = \frac{A_t}{v_2}. \quad (2.59)$$

Iz (2.58) i (2.59) dobivamo amplitude reflektiranoga i transmitiranog vala:

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_u \quad (2.60)$$

$$A_t = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} A_u. \quad (2.61)$$

Pogledajmo kakva je refleksija kad val prelazi iz rjeđeg sredstva u gušće. Tada je

$$\mu_1 < \mu_2,$$

te je

$$v_1 > v_2$$

(relacija 2.34). Iz (2.60) i (2.61) zaključujemo da amplituda reflektiranog vala ima suprotan predznak od amplitude upadnog vala, a amplituda transmitiranog vala isti predznak kao amplituda upadnog vala. Drugim riječima, **reflektirani val ima skok u fazi** za π kada je sljedeće sredstvo gušće; transmitirani se dio, naprotiv, u drugom sredstvu nastavlja bez promjene u fazi.

U posebnom slučaju, kada je kraj žice učvršćen ($\mu_2 = \infty$, $v_2 = 0$), reflektirani val ima istu amplitudu kao upadni, ali je pomaknut u fazi za π , a transmitiranog vala nema:

$$s_u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \quad (2.62)$$

$$s_r = -A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v_1} \right)$$

Pri refleksiji na rjeđem sredstvu reflektirani val ne mijenja fazu ($\mu_2 < \mu_1 \Rightarrow v_2 > v_1$); ako je refleksija na slobodnom kraju ($\mu_2 = 0$, $v_2 = \infty$), upadni i reflektirani val imaju iste amplitude i faze:

$$s_u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \quad (2.63)$$

$$s_r = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v_1} \right)$$

2.4.1. Stojni valovi

Stojni val nastaje interferencijom dvaju valova jednake amplitude i jednake frekvencije, a time i jednake valne duljine, koji na istom pravcu putuju jedan nasuprot drugome. Stojni se val može dobiti tako da se progresivni val reflektira na jednom kraju žice, vrati natrag i zbroji s upadnim valom.

Promatrajmo upadni i reflektirani val na žici koja je na jednom kraju ($x = 0$) učvršćena (sl. 2.18). Zdesna (prema negativnom smjeru osi x) upada progresivni val:

$$s_u = A \sin (\omega t + kx) \quad (2.64)$$

On će se na čvrstom kraju žice ($x = 0$) reflektirati mijenjajući pritom fazu za π i vratiti natrag u smjeru osi x :

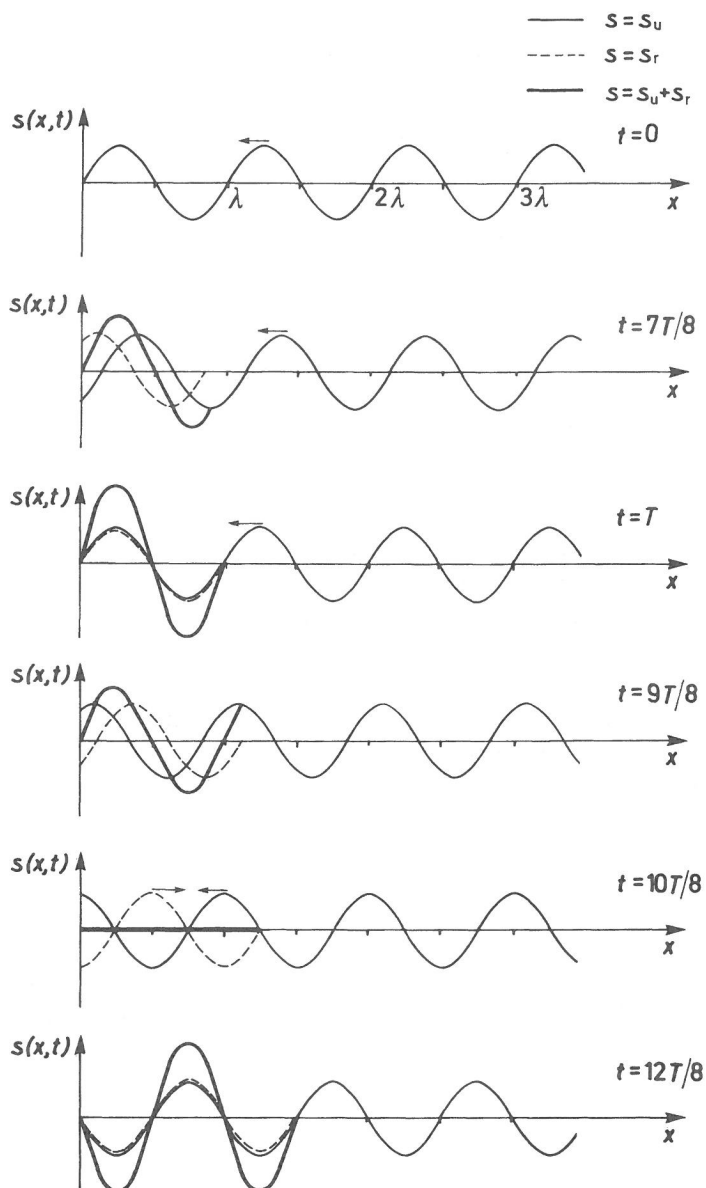
$$s_r = A \sin (\omega t - kx + \pi) = -A \sin (\omega t - kx) \quad (2.65)$$

Rezultantnu elongaciju žice dobivamo zbrajanjem upadnoga i reflektiranog vala:

$$s = s_u + s_r = A \{ \sin (\omega t + kx) - \sin (\omega t - kx) \} \quad (2.66)$$

ili

$$s = 2A \sin kx \cos \omega t \quad (2.67)$$



Slika 2.18. Formiranje stojnog vala

To više nije progresivni val jer funkcija nema tipičnog argumenta $\omega t \pm kx$ koji pokazuje putovanje faze prostorom; vrijeme t i položaj x pojavljuju se u dva različita faktora. Iz (2.67) vidimo da na žici ima točaka koje trajno miruju. To se događa na mjestima x_n gdje je:

$$\sin kx_n = 0 \Rightarrow x_n = \frac{n\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

Takav se val zove *stojni val*.

Čvorovi stojnog vala, tj. mjesta na kojima je elongacija stalno nula, nalaze se na udaljenostima $n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) od čvrstog kraja. Uočit ćemo da je razmak dvaju susjednih čvorova jednak $\lambda/2$.

Mjesta na žici koja najjače titraju zovu se *trbusi* stojnog vala. Ta maksimalna titranja dobivamo na mjestima gdje je:

$$\sin kx = \pm 1 \Rightarrow x_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

Stojni se val ne giba i ne prenosi nikakvu energiju. Ima trenutaka kada je elongacija po cijeloj žici jednaka nuli ($\cos \omega t = 0$) i trenutaka kada cijela žica miruje ($\frac{d}{dt} \cos \omega t = 0$). U prvom je slučaju sva energija stojnog vala kinetička, a u drugom slučaju *potencijalna* energija deformacije. U tom se periodu energija stojnog vala dvaput pretvori u potpuno potencijalnu, a onda u potpuno kinetičku energiju. Pritom je srednji tok energije kroz svaki presjek jednak nuli.

Jednadžbu stojnog vala na žici (2.67) možemo dobiti i kao rješenje diferencijalne valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33)$$

U stojnom valu valna je funkcija $s(x, t)$ produkt dvaju faktora, jednoga, koji ovisi samo o vremenu, i drugoga, koji ovisi samo o x . Stoga za stojni val možemo pisati

$$s(x, t) = X(x) T(t) \quad (2.70)$$

gdje je $T(t)$ funkcija samo vremena, a $X(x)$ funkcija samo prostorne varijable x . Funkcije $X(x)$ i $T(t)$ odredit ćemo tako da je funkcija (2.70) rješenje jednadžbe (2.33). Ta metoda u kojoj se pretpostavlja rješenje oblika (2.70), ili nekoga sličnog oblika, i uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu određuju funkcije $X(x)$ i $T(t)$ zove se metoda separacije varijabli i često se primjenjuje u matematičkoj fizici.

Ako dvaput deriviramo (2.70) po x odnosno t , dobivamo:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} T(t) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X(x) \quad (2.71)$$

Uvrstimo li (2.71) u jednadžbu (2.33), valna jednadžba poprima oblik

$$v^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (2.72)$$

Lijeva strana te jednadžbe ovisi samo o x , a desna samo o t . Budući da jednadžba mora biti ispunjena za sve vrijednosti x i t (a x i t su nezavisne varijable), može biti ispunjena samo ako su obje njezine strane jednake nekoj konstanti.

Napišimo tu konstantu u obliku $-k^2 v^2$ tako da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -k^2, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= -k^2, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + k^2 v^2 T = 0\end{aligned}\quad (2.73)$$

Označimo li $kv = \omega$, dobivamo dvije jednadžbe za X i T

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2.74)$$

Rješenje tih jednadžbi glasi

$$\begin{aligned}X(x) &= A_1 \sin kx + B_1 \cos kx \\ T(t) &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\end{aligned}\quad (2.75)$$

te je opće rješenje diferencijalne valne jednadžbe napisano u obliku stojnog vala

$$s(x, t) = (A_1 \sin kx + B_1 \cos kx) (A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t) \quad (2.76)$$

ili

$$s(x, t) = A \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (2.76.a)$$

gdje konstante određujemo iz početnih i rubnih uvjeta.

Primjer

Dvije žice od različitog materijala spojene su zajedno i napete silom F . Linearna gustoća prve žice četiri je puta manja od gustoće druge žice. Upadni se transversalni val $s = A \sin(\omega t - k_1 x)$ širi kroz prvu žicu brzinom v_1 , dolazi na granicu između dvije žice, gdje se reflektira i lomi.

a) Odredite resultantni val u prvoj i drugoj žici.

b) Ako je val u $t=0$ stigao na granicu (spoj) žice, nacrtajte oblik žice u $t=2T$ i $t=9T/4$ i anvelopu nastalog stojnog vala u prvoj žici.

a) Upadni val koji se širi kroz prvu žicu ima oblik

$$s_u(x, t) = A_u \sin(\omega t - k_1 x)$$

U točki gdje se gustoća mijenja, u tzv. *točki diskontinuiteta* ($x=0$), val se reflektira i lomi. Reflektirani val ima oblik $s_r(x, t) = A_r \sin(\omega t + k_1 x)$, a transmitirani se val giba kroz drugu žicu brzinom v_2 i ima oblik $s_t(x, t) = A_t \sin(\omega t - k_2 x)$.

U točki diskontinuiteta $x=0$ moraju biti ispunjeni ovi rubni uvjeti:

$$x=0, \quad s_u(x=0, t) + s_r(x=0, t) = s_t(x=0, t)$$

$$x=0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(s_u + s_r) = \frac{\partial}{\partial x}s_t.$$

Odatle dobivamo

$$A_u + A_r = A_t$$

$$k_1(A_u - A_r) = k_2 A_t$$

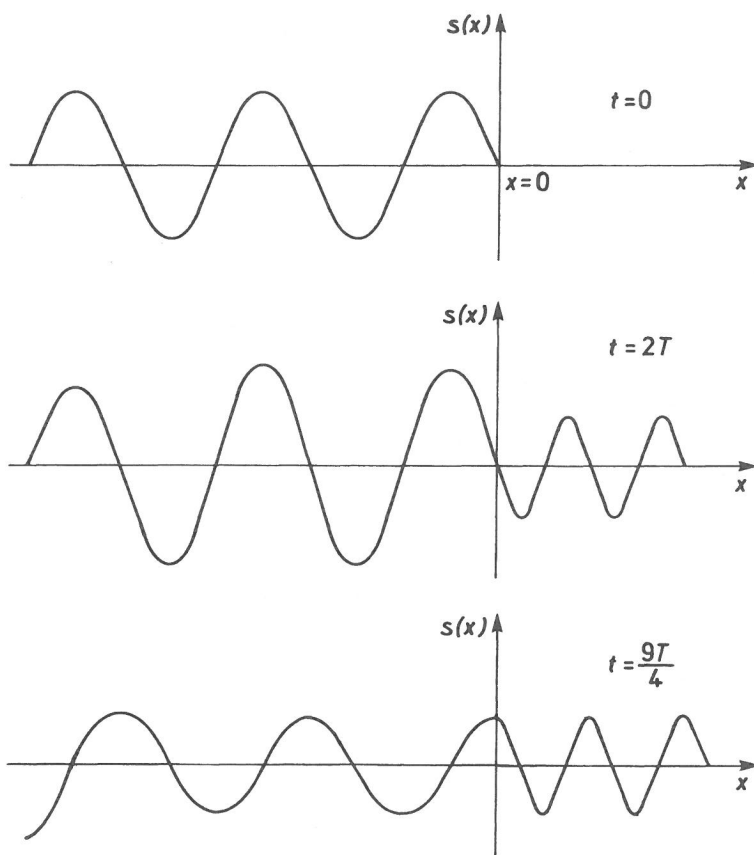
$$A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_i \quad A_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_i$$

Budući da je $k = \omega/v = \omega \sqrt{\frac{\mu}{F}}$, to je $k_1/k_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{1}{2}$ te je $k_2 = 2k_1$ i

$$A_r = -\frac{1}{3} A_u \quad A_t = \frac{2}{3} A_u$$

Kroz desnu žicu širi se transmitirani val

$$s_t(x, t) = \frac{2}{3} A_u \sin(\omega t - 2k_1 x),$$



Slika 2.19.

a valno je gibanje u lijevoj žici zbroj upadnoga i reflektiranog vala:

$$\begin{aligned}s_u(x, t) + s_r(x, t) &= A_u \sin(\omega t - k_1 x) - A_r \sin(\omega t + k_1 x) = \\&= A_u \sin(\omega t - k_1 x) + A_u \sin(\omega t + k_1 x) + (A_r - A_u) \sin(\omega t + k_1 x) \\&= 2A_u \cos k_1 x \sin \omega t + (A_r - A_u) \sin(\omega t + k_1 x)\end{aligned}$$

Za naš primjer $A_r = -\frac{1}{3}A_u$, te je

$$s(x, t) = 2A_u \cos k_1 x \sin \omega t - \frac{4}{3}A_u \sin(\omega t + k_1 x)$$

b) Oblik žice u $t = 2T$ i $t = 2T + \frac{T}{4} = 9T/4$ prikazan je na slici 2.19. Budući da se upadni val samo djelomično reflektirao, dobiveni val ima promjenljivu amplitudu od $A_{\min} = A_u - A_r$ do $A_{\max} = A_u + A_r$.

2.4.2. Transverzalni stojni valovi na napetoj žici

Ako titramo jedan kraj napete žice duljine L , nastalo će se valno gibanje širiti žicom, doći na njezin kraj, reflektirati, vraćati natrag, ponovo reflektirati na početku žice i tako ćemo dobiti valove koji u žici putuju u jednome i drugom smjeru. Ako sa

$$s(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx)$$

označimo val koji po žici putuje u smjeru osi $+x$, a

$$s(x, t) = A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi)$$

val koji putuje u obrnutom smjeru, prema principu superpozicije, resultantno će valno gibanje biti zbroj tih dvaju valnih gibanja,

$$s(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi) \quad (2.77)$$

Pretpostavimo da je $\varphi = 0$ i da su oba kraja žice učvršćena, tj. da su rubni uvjeti

$$s(x = 0, t) = 0 \quad \text{ i } \quad s(x = L, t) = 0 \quad (2.78)$$

Prvi uvjet primijenjen na (2.77) daje

$$s(x = 0, t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin \omega t = 0 \quad (2.79)$$

a to može biti ispunjeno ako je $A_1 = -A_2$. Dakle,

$$\begin{aligned}s(x, t) &= A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx) \\&= -2A \sin kx \cos \omega t = 2A \sin kx \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned} \quad (2.80)$$

Umjesto progresivnog vala dobili smo stojni val na žici. Žica harmonički titra, ali tako da amplituda titranja ovisi o mjestu na žici (koordinati x). Žica je na početku i na kraju tj. za $x = 0$ i $x = L$, učvršćena, i tu su čvorovi stojnog vala.

Primjenom drugoga uvjeta rubnog dobivamo:

$$\sin kL = 0$$

$$kL = n\pi,$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot L = n\pi, \quad L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

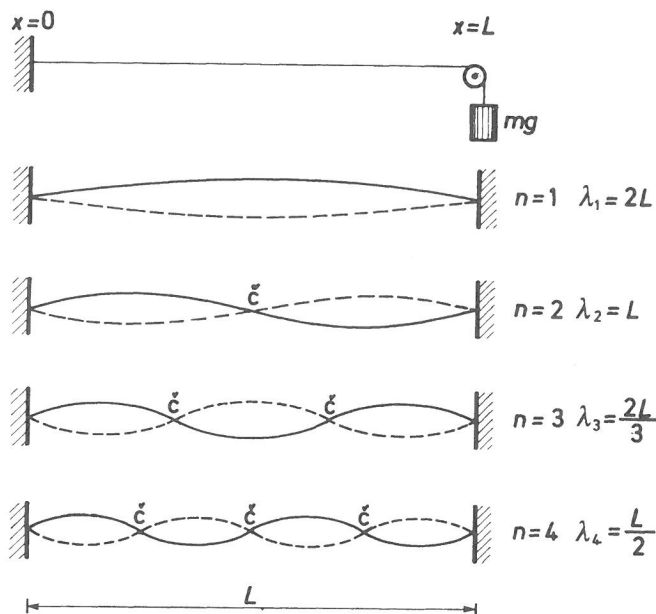
odnosno

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2.81)$$

Pritom je n prirodni broj $n = 1, 2, 3, \dots$

Na žici će pobuditi samo stojni valovi za koje je duljina žice jednaka cijelom broju polovina valne duljine.

U tom su slučaju moguće samo određene, diskretne valne duljine. Oba rubna uvjeta, tj. čvorovi na početku i kraju žice, ograničila su valne duljine titranja žice na samo neke specifične (kvantizirane) vlastite vrijednosti. Slika 2.20 prikazuje i nekoliko prvih stojnih valova na zategnutoj žici duljine L .



Slika 2.20. Stojni valovi na zategnutoj žici

Frekvencije kojima titra napeta žica, tzv. *vlastite frekvencije*, određene su brzinom prostiranja valova (2.34):

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.81.a)$$

gdje je F sila kojom je žica zategnuta, a μ linearna gustoća žice.

Najniža frekvencija $f_1 = \frac{v}{2L}$, *osnovna frekvencija*, odgovara najvećoj valnoj duljini. Osim osnovnom, žica može titrati i drugim frekvencijama, tzv. višim harmonicima. Kao što se vidi iz formule (2.81.a), tanka, lagana, jako zategnuta žica daje visoku osnovnu frekvenciju, a debela, malo zategnuta žica daje duboki ton. Na tome se temelji gradnja muzičkih instrumenata.

Konstante A i φ u (2.77) određujemo iz početnih uvjeta, tj. početnim oblikom žice i raspodjelom početnih brzina točaka žice:

$$t = 0, \quad s(x, 0) = s_0(x), \quad \frac{\partial s}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (2.82)$$

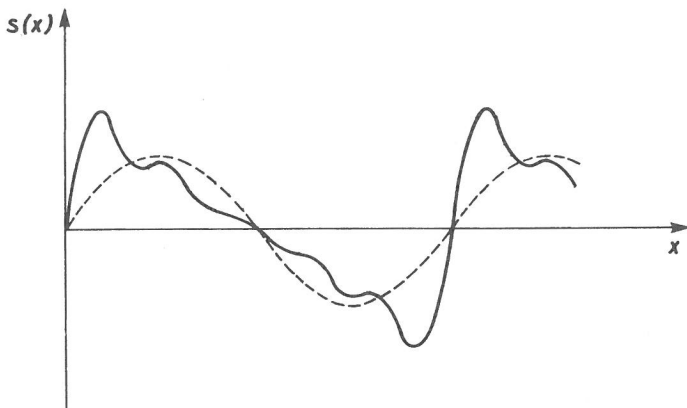
Kada zatitramo napetu žicu, ona će uglavnom titrati s više vlastitih frekvencija. Valna funkcija koja opisuje pomak čestica žice je superpozicija svih vlastitih titranja:

$$s(x, t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x \quad (2.83)$$

Boja tona ovisit će o primjesama viših harmonika, tj. o relativnoj veličini pojedinih A_n i B_n u izrazu (2.82).

Funkcija (2.82) zapravo je Fourierov red za $s(x, t)$. Uzmemo li u obzir početni uvjet $t = 0$, $s(x, t = 0) = s_0$, dobivamo

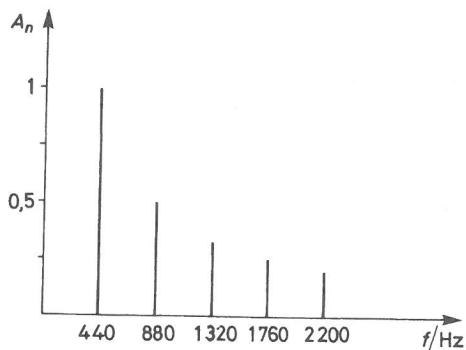
$$s_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x. \quad (2.84)$$



Slika 2.21. Zvučni val koji uz osnovni ton ima i više harmonike. a) Oblik zvučnog vala,

Koeficijente B_n možemo odrediti iz drugoga početnog uvjeta: $t = 0$, $v = \frac{ds}{dt} = v_0$.

Na sl. 2.21.a prikazan je oblik zvučnog vala koji, osim valova osnovne frekvencije 440 Hz (crtkana krivulja), sadrži i više harmonike, i to 50% drugoga, 33% trećega, 25% četvrtoga i 20% petog harmonika, što se vidi iz slike 2.21.b.



Slika 2.21. b) Spektar frekvencija

2.5. Longitudinalni valovi. Valovi zvuka

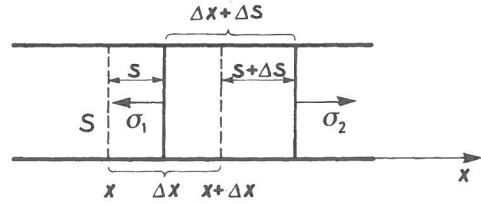
Zvuk je najvažniji primjer longitudinalnoga mehaničkog vala. U širem smislu zvuk obuhvaća sve longitudinalne elastične valove u čvrstim tijelima, tekućinama i plinovima.

Mehaničke valove koje čuje ljudsko uho nazivamo zvukom u užem smislu. To su longitudinalni valovi frekvencija od 20 Hz do 20 kHz koji mogu zatitrati bubnjić našeg uha i tako proizvesti osjećaj zvuka. Zvučni valovi frekvencije niže od 20 Hz nazivaju se **infrazvuk**, a više od 20 kHz **ultrazvuk**. Ultrazvuk i infrazvuk čovjek ne čuje; granice zvučnog područja koje ljudsko uho čuje u raznih osoba, pogotovo starijih, variraju, pa granica između zvuka i ultrazvuka nije točno određena. Infrazvučni valovi nastaju npr. pri potresima tla, a ultrazvuk se može dobiti elastičnim titrajima u kristalima (v. odjeljak 2.14). Zvučne valove možemo proizvesti raznim muzičkim instrumentima, zvučnicima, govorom i sl.

Radi jednostavnosti, promotrit ćemo jednodimenzionalni longitudinalni val kroz čvrsto tijelo (štap, šipku) i kroz fluid u dugoj cijevi. Tako stečena znanja mogu se lako proširiti i na trodimenzionalne zvučne valove.

2.5.1. Longitudinalni val u štapu

Pretpostavimo da se longitudinalni elastični val širi u smjeru osi x kroz neki čvrsti materijal, npr. kroz dugi štap. Uočimo djelić volumena ΔV debljine Δx (sl. 2.22). U određenom trenutku jedna će se baza uočenog valjka pomaknuti za s , a



Slika 2.22. Longitudinalni val na štapu

druga će baza imati pomak $s + \Delta s$. Longitudinalne deformacije koje pritom nastaju mogu se opisati Hookeovim zakonom:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial s}{\partial x}$$

gdje je σ napetost, $\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$ relativna deformacija, a E Youngov modul elastičnosti materijala.

Budući da su napetosti ovisne o koordinati x , na svakoj će bazi valjka biti različite i stoga će na element volumena djelovati rezultantna sila:

$$F = F_1 - F_2 = S(\sigma_1 - \sigma_2) = S \Delta \sigma \quad (2.85)$$

Za male Δx i Δs , $\Delta \sigma \approx \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x$, te je

$$F = S E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \Delta x \quad (2.86)$$

Primijenivši 2. Newtonov zakon $F = ma$ na elementarni valjak (sl. 2.22) mase $\Delta m = \rho S \Delta x$, dobivamo

$$S E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \Delta x = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.87)$$

Ta je jednadžba slična jednadžbi valova na žici (2.33) pa možemo zaključiti da je brzina elastičnog longitudinalnog vala kroz čvrsta tijela

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.88)$$

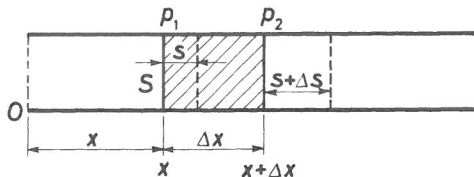
gdje je E Youngov modul elastičnosti, a ρ gustoća materijala.

2.5.2. Longitudinalni val u plinu

Radi jednostavnosti, pretpostavit ćemo da se val kroz plin u cilindričnoj cijevi širi u smjeru osi x (sl. 2.23). U plinu možemo uočiti dio volumena $S \Delta x$ između koordinata x i $x + \Delta x$. Masa plina u tom volumenu iznosi $\Delta m = \rho S \Delta x$. Kada

nema valnoga gibanja, tlak i gustoća su konstantni, p_0 i ϱ_0 . Dok val prolazi kroz plin, čestice plina titraju oko položaja ravnoteže, nastaju zgušćenja i razrjeđenja plina, tlak i gustoća plina se mijenjaju i funkcije su prostora i vremena, tj x i t .

Kada se tlak plina promijeni tako da je na mjestu x tlak p_1 , a na mjestu $x + \Delta x$, tlak $p_2 = p_1 + \Delta p$, volumen ΔV pomaknuti će se zbog nastale sile $F = F_1 - F_2 = Sp_1 - Sp_2 = -S\Delta p$ tako da će mu početak, umjesto na mjestu x , biti na mjestu $x + s$, a kraj, umjesto na mjestu $x + \Delta x$, na mjestu $x + \Delta x + s + \Delta s$ (sl. 2.23). Pritom se promijenio volumen plina, promijenila se i gustoća, ali je masa ostala ista.



Slika 2.23. Longitudinalni val u plinu

Prema 2. Newtonovu zakonu $F = ma$, jednačba gibanja promatranog elementa volumena je

$$-S\Delta p = \varrho S\Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (2.89)$$

jer je rezultantna sila $F = -S\Delta p$, a akceleracija druga derivacija pomaka po vremenu $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$.

Izračunamo li graničnu vrijednost tog izraza kada $\Delta x \rightarrow 0$, dobivamo

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (2.90)$$

Formula (2.90) daje gradijent tlaka koji nastaje u plinu zbog prolaza zvučnog vala. Budući da želimo naći jednačbu za elongaciju čestica plina, to ćemo $\partial p / \partial x$ izraziti pomoću pomaka čestice plina od ravnotežnog položaja.

Kada se tlak plina promijeni od p_1 na $p_1 + \Delta p$, gustoća plina se promijeni od ϱ_1 na $\varrho_1 + \Delta \varrho$ jer se volumen promijeni za ΔV . Veza između promjene tlaka i volumena dana je relacijom analognom Hookovu zakonu za čvrsta tijela, tj.:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{S(s + \Delta s - s)}{S\Delta x} = -B \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

ili za $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.91)$$

Predznak minus kaže da se povećanjem tlaka volumen smanjuje, i obratno.

Gradijent tlaka $\partial p / \partial x$ dobivamo derivirajući relaciju (2.91) po x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (2.92)$$

Ako (2.92) uvrstimo u (2.90), dobivamo diferencijalnu valnu jednadžbu za valove zvuka:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.93)$$

Ta je jednadžba slična jednadžbi valova na žici. Iz nje slijedi brzina longitudinalnih valova:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (2.94)$$

Budući da diferencijalna jednadžba za valove zvuka ima isti oblik kao i jednadžba za transverzne valove na žici, tj.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.95)$$

njezina će rješenja imati isti oblik. Tako će ravni val zvuka koji se uzduž osi x širjeva nadesno širi brzinom v biti opisan relacijom:

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.96)$$

Relacija (2.96) opisuje promjenu elongacije čestica plina u vremenu u određenoj točki prostora, odnosno oblik vala u određenom trenutku. Promjene tlaka koje nastaju širenjem zvučnog vala kroz plin možemo izračunati integriranjem jednadžbe (2.90). Naime iz (2.90) i (2.96) slijedi:

$$dp = \omega^2 \rho A \sin(\omega t - kx) dx \quad (2.97)$$

Ako tu jednadžbu integriramo, dobit ćemo oscilacije tlaka oko ravnotežnog tlaka p_0 :

$$p = p_0 + \rho v \omega A \cos(\omega t - kx) \quad (2.98)$$

Ako se pomak čestice plina mijenja po zakonu sinusa, tlak se mijenja po zakonu kosinusa i obratno, ako čestice titraju po zakonu kosinusa, tlak se mijenja po zakonu sinusa. Maksimalna promjena (amplituda) tlaka je:

$$\Delta p_{\text{maks}} = \rho v \omega A \quad (2.99)$$

Promjena tlaka jednodimenzionalnoga ravnog zvučnog vala prikazana je jednadžbom:

$$\Delta p = \Delta p_{\text{maks}} \cos(\omega t - kx) \quad (2.98.a)$$

Ta je funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe za tlak koja je istog oblika kao i jednadžba za elongaciju:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.100)$$

i može se izvesti npr. iz relacija (2.90) i (2.91).

2.5.3. Brzina zvuka

Izvedeći valnu jednadžbu za longitudinalne valove, dobili smo izraz za brzinu vala u čvrstom tijelu

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.88)$$

gdje je E Youngov modul, a ρ gustoća materijala. Po toj formuli možemo izračunati brzinu zvuka npr. kroz čeličnu šipku.

Brzina zvuka kroz fluid računa se pomoću izraza

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (2.94)$$

gdje je B volumni modul elastičnosti, a ρ gustoća fluida.

Volumni modul elastičnosti fluida (v. odjeljak 1.2.1) definira se

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \quad (2.101)$$

i označava relativnu promjenu volumena pri promjeni tlaka. Modul elastičnosti ovisi o vrsti termodinamičkog procesa u plinu. Pri širenju zvuka kroz plinove tlak i volumen se mijenjaju dosta brzo, pa je prijenos topline kroz plin zanemariv. Zato možemo pretpostaviti da su kompresija i ekspanzija plina adijabatski procesi.*

Veza između tlaka i volumena plina za adijabatske procese dana je izrazom

$$p V^\kappa = \text{konst.}, \quad (2.102)$$

ili

$$p = \text{konst. } \rho^\kappa$$

gdje su p , V i ρ tlak, volumen i gustoća plina, a κ konstanta karakteristična za pojedini plin, tzv. *adijabatski koeficijent*. To je omjer specifičnih kapaciteta plina pri stalnom tlaku i stalnom volumenu, $\kappa = c_p/c_v$. Za jednoatomne plinove iznosi 1,67, za dvoatomne plinove (i za zrak) 1,4, a za višeatomne plinove 1,3.

Volumni modul elastičnosti plina, uzimajući u obzir adijabatski proces, iznosi:

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \rho \frac{dp}{d\rho} = \kappa p \quad (2.103)$$

Uvrštavanjem izraza za B u (2.94) dobivamo izraz za faznu brzinu zvučnih valova u plinu:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (2.104)$$

* Vidi npr. Kulišić, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb 1987, str. 213.

Upotrebom plinske jednadžbe $pV = \frac{m}{M}RT$, odnosno $p = \frac{\rho}{M}RT$, dobivamo ovisnost brzine zvuka o temperaturi i vrsti plina:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \quad (2.105)$$

gdje je $R = 8,314 \text{ J/mol K}$ (plinska konstanta), T apsolutna temperature (u kelvinima), a M molna masa plina (kg/mol).

Za ovisnost brzine zvuka u zraku o temperaturi t iskazanoj Celzijevim stupnjem iz (2.105) možemo izvesti približnu formulu.

Budući da je $T = t + 273,15 \text{ K}$, $\kappa = 1,4$, $M = 28,84 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, dobivamo

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{\kappa R}{M}} \cdot \sqrt{T} = 20,06 \text{ ms}^{-1} \text{K}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{T} = 20,06 \text{ ms}^{-1} \text{K}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{273,15 + t} \\ v &= 332 \text{ ms}^{-1} \sqrt{1 + \frac{t}{273,15 \text{ K}}} \approx 332 \text{ ms}^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t}{273,15 \text{ K}} \right) \\ v &= 332 \text{ ms}^{-1} (1 + 0,00183 \text{ K}^{-1} t) \\ v &= 332 \text{ ms}^{-1} + 0,62 \text{ ms}^{-1} \text{°C}^{-1} \cdot t \end{aligned} \quad (2.105a)$$

U formuli (2.105.a) temperatura t izražena je Celzijevim stupnjevima, a brzina v metrima u sekundi.

Brzinu zvuka u tekućinama možemo izračunati po sličnoj formuli kao i brzinu zvuka za čvrsta tijela i plinove. Ako koeficijent stlačivosti tekućine K definiramo kao

$$K = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (2.106)$$

tada je brzina longitudinalnih valova u tekućini jednaka:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho K}} \quad (2.107)$$

Formule za izračunavanje faznih brzina valova u raznim sredstvima.

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$	transverzalni valovi na žici
$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	longitudinalni valovi u čvrstom tijelu
$v = \sqrt{\frac{1}{\rho K}}$	longitudinalni valovi u tekućini
$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$	longitudinalni valovi u plinovima

Tablica 2.1. Brzina zvuka u nekim materijalima

Materijal	v/ms^{-1}	Materijal	v/ms^{-1}
aluminij	5100	staklo	5500
bakar	3900	ugljik-dioksid (0°C, 1013 mbar)	260
dušik (0°C, 1013 mbar)	334	voda	1500
kisik (0°C, 1013 mbar)	315	zrak (0°C, 1013 mbar)	331
kvarc (SiO ₂)	5300	zrak (20°C, 1013 mbar)	345

Primjer

- a) Duga čelična žica polumjera 0,127 mm zategnuta je težinom utega mase 10 kg. Kolika je brzina transversalnog vala na toj žici?
 Kolika je valna duljina vala frekvencije 250 Hz?
- b) Kolika je brzina longitudinalnih elastičnih valova u čeličnom štapu?
- c) Kolika je brzina elastičnoga longitudinalnog vala u zraku pri normiranim uvjetima?
- d) Kolika je brzina zvuka u vodi? (Koeficijent stlačivosti vode je $5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.)
- a) Gustoća čelika je 7800 kg/m^3 . Odatle možemo izračunati linearnu gustoću:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{m}{V/S} = S \frac{m}{V} = S \rho$$

$$\mu = r^2 \pi \cdot \rho$$

$$\mu = 0,127^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \pi \cdot 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 3,952 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Brzina transversalnog vala na žici je

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\mu}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10}{3,952 \cdot 10^{-4}}} \text{ m/s} = 498 \text{ m/s.}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = 1,99 \text{ m.}$$

b) Brzina longitudinalnih valova u čeličnom štapu je

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti za čelik ($E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$) i $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 5064 \text{ m/s.}$$

c) Normirani su uvjeti 273 K (0°C), tlak $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Adijabatski koeficijent za zrak je 1,4. Gustoća zraka u tim uvjetima je $1,293 \text{ kg/m}^3$. Primjenom formule (2.105) dobivamo

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{1,293 \text{ kg/m}^3}} = 331 \text{ ms}^{-1}$$

d)

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho K}} = \sqrt{\frac{1}{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-2}}} = 1414 \text{ m s}^{-1}$$

2.5.4. Stojni longitudinalni valovi

U odjeljku 2.4.2. promatrali smo stojne transversalne valove na zategnutoj žici. Slična razmatranja vrijede i za longitudinalne valove.

Stojne longitudinalne valove možemo dobiti na opruzi, u štapovima, staklenim cijevima (npr. u Kundtovoj cijevi), sviralama itd.

Kada stakleni štap određene duljine prevučemo mokrom krpom, čuje se određeni zvuk. Ako štap držimo u sredini, na tom će mjestu biti čvor, a na krajevima trbusi nastaloa stojnog vala.

Da bismo dobili matematički oblik stojnog vala u štapu, moramo zbrojiti valove koji putuju po štapu, jedan slijeva nadesno, a drugi zdesna nalijevo:

$$\underline{s} = A \sin(\omega t - kx) \quad \underline{s} = A \sin(\omega t + kx) \quad (2.108)$$

Rubni uvjeti određuju frekvencije (valne duljine) titranja, a brzina vala određena je modulom elastičnosti i gustoćom štapa.

Budući da je kraj štapa slobodan reflektirani je val u fazi s upadnim valom.

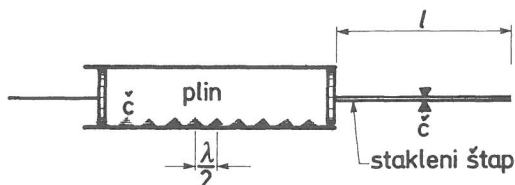
Uzimajući u obzir da su krajevi štapa slobodni, zbrajanjem upadnoga i reflektiranog vala dobivamo:

$$s = \underline{s} + \underline{s} = 2 A \cos kx \sin \omega t \quad (2.109)$$

Da bi stojni val predočen formulom (2.109) na oba kraja imao trbuhe, a u sredini čvor, mora biti također ispunjeno:

$$\cos kl = \pm 1 \text{ i } \cos k \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2l \quad (2.110)$$

Stojne valove zvuka možemo dobiti i u tzv. Kundtovoj cijevi (sl. 2.24). To je staklena cijev na jednom kraju zatvorena pomičnim čepom, a na drugom je njezinu kraju stakleni ili metalni štap. Kada štap zbog trljanja zatitra, na njemu se formira stojni val. Štap je učvršćen u sredini, gdje je čvor titranja, a na krajevima su trbusi stojnog vala. Titranje štapa prenosi se na zrak u cijevi i tu nastaju longitudinalni valovi zvuka. Pomicanjem čepa na lijevom kraju cijevi, duljina stupca zraka može se tako odabrati da u cijevi nastane jako titranje. Ako



Slika 2.24. Kundtova cijev

se u cijevi nalazi lagana prašina od pluta, ona će se skupiti na mjestima gdje su čvorovi, i na taj ćemo način u cijevi dobiti sliku stojnog vala. Mjereći razmak između dva čvora, možemo odrediti valnu duljinu zvučnih valova u plinu cijevi, jer je razmak čvorova u stojnom valu jednak $\lambda/2$.

Ako umjesto zrakom cijev napunimo nekim plinom, frekvencija titranja ostat će ista (određena je frekvencijom titranja štapa), ali će se promijeniti brzina i valna duljina u plinu.

Iz frekvencije titranja štapa i izmjerene valne dužine može se izračunati brzina zvuka u plinu:

$$f_s = \frac{v_s}{\lambda_s} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad v_p = f \lambda_p = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (2.111)$$

Budući da je brzina zvuka povezana s adijabatskim koeficijentom κ za plin, mjerenjem brzine zvuka u Kundtovoj cijevi može se odrediti adijabatski koeficijent.

Primjer

Čelični štap u Kundtovoj cijevi dugačak je 1 m i u sredini učvršćen. Kad u njemu proizvedemo stojni val, čvorovi u Kundtovoj cijevi međusobno su udaljeni 6,7 cm. (Temperatura zraka je 293 K.) Odredite frekvenciju i brzinu širenja zvuka u čeliku.

Stojni val na štapu duljine 1 m učvršćenom u sredini ima valnu dužinu $\lambda_s = 2l = 2$ m. Stojni val u Kundtovoj cijevi (u zraku) ima valnu duljinu $\lambda_z = 2 \cdot 6,7$ cm = 0,134 m. Brzina zvuka u zraku, na temperaturi 293 K, iznosi

$$v_t = 20,06 \sqrt{T} \text{ ms}^{-1} = 343 \text{ ms}^{-1}$$

Budući da je $\lambda_z = 0,134$ m, frekvencija zvuka je

$$f = \frac{v_z}{\lambda_z} = 2562 \text{ Hz.}$$

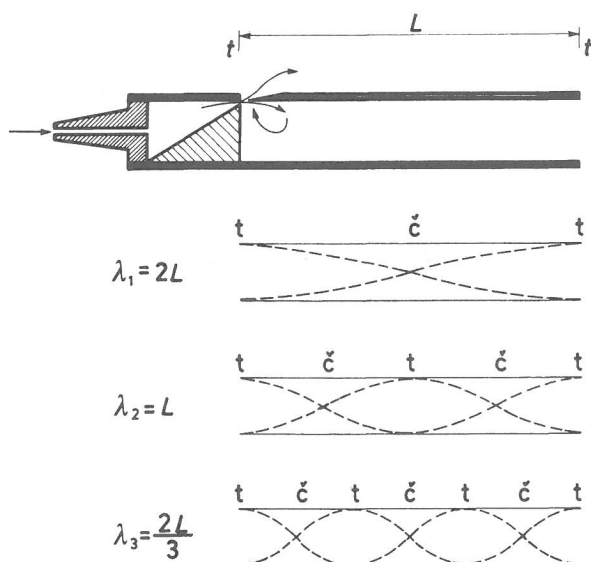
To je frekvencija titranja čeličnog štapa. Za valnu duljinu $\lambda_s = 2$ m i frekvenciju $f = 2562$ Hz možemo odrediti brzinu zvuka u čeličnom štapu

$$v = \lambda_s f = 5125 \text{ ms}^{-1}.$$

Stojni valovi u stupcu zraka mogu se proizvesti sviralom (sl. 2.25). Svirala može biti različite duljine L , otvorena ili zatvorena na kraju. Frekvencija tona svirale ovisit će o njezinoj duljini i o tome je li otvorena ili zatvorena. Struja zraka udara u oštricu svirale, tu proizvede vrtloge zraka i tako ustitra stupac zraka u svojoj cijevi.

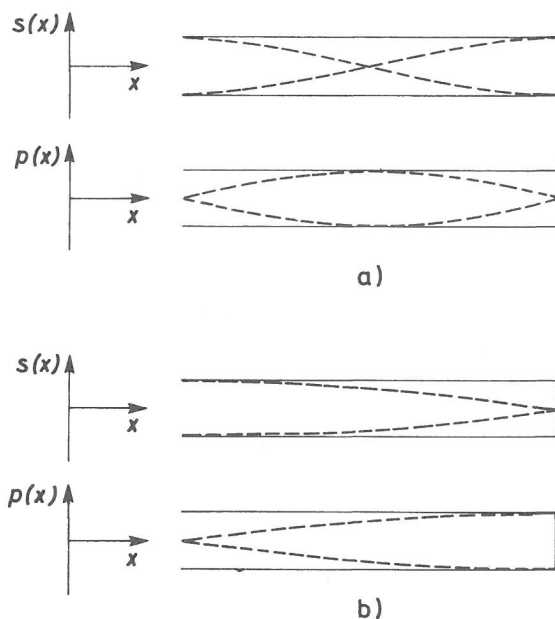
Tu se stvara trbuh nastaloga stojnog vala zvuka. Ako je svirala otvorena, sljedeći je trbuh na kraju svirale, pa je $\frac{\lambda}{2} = L$, odnosno valna je duljina jednaka dvostrukoj duljini svirale. Za zatvorenu sviralu čvor je na kraju svirale te je

* August Kundt (1893–1894), njemački fizičar.



Slika 2.25. Stojni val u svirali

$\frac{\lambda}{4} = L$, odnosno $\lambda = 4L$. Frekvencija tona zatvorene svirale dvaputa je manja nego frekvencija tona otvorene svirale jednake duljine. Na slici 2.25 prikazane su longitudinalne oscilacije čestica zraka, za prva tri načina titranja otvorene svirale



Slika 2.26. Oscilacije pomaka i tlaka za otvorenu i zatvorenu sviralu

duljine L . Budući da je nemoguće nacrtati oscilacije u longitudinalnom smjeru, one su nacrtane u transverzalnemu crtkanim linijama.

Na slici 2.26. prikazane su oscilacije tlaka i pomaka čestica zraka za otvorenu i zatvorenu sviralu.

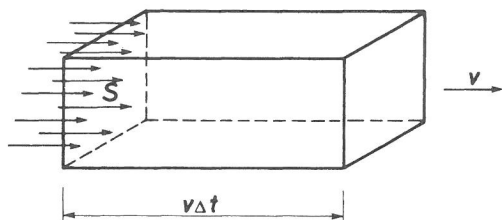
2.6. Energija mehaničkih valova

Dok se val širi kroz sredstvo, on prenosi energiju u smjeru svog širenja. Očit primjer za to su valovi na vodi: razbješnjelo more može ljuljati i velike brodove.

Izračunajmo energiju koju harmonički ravni val prenosi kroz sredstvo. Ukupna energija čestice koja harmonički titra iznosi

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

(v. odjeljak 1.3.6). Pretpostavimo da u trenutku t val naide na površinu okomitu na smjer širenja vala (sl. 2.27). Nakon vremena Δt val prijeđe udaljenost $v \Delta t$ i pritom ustitra sve čestice u promatranom prostoru volumena $\Delta V = S v \Delta t$. Ukupna energija u elementu volumena ΔV jednaka je zbroju energija titranja svih čestica



Slika 2.27. Uz izračunavanje energije vala

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 n \Delta V = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho \Delta V \quad (2.112)$$

gdje je n broj čestica u jedinici volumena, a $nm = \rho$ gustoća sredstva.

Gustoću energije, tj. energiju po jedinici volumena označimo sa

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} \quad (2.113)$$

Iz (2.112) i (2.113) proizlazi:

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho (2\pi f)^2 A^2 \quad (2.113.a)$$

Za harmonički ravni val gustoća energije proporcionalna je kvadratu frekvencije i kvadratu amplitude.

Budući da je energija prenesena valnim gibanjem kroz površinu S i predana česticama sredstva u elementu volumena ΔV jednaka $w \Delta V = S w v \Delta t$, energija u jedinici vremena (snaga) prenesena kroz površinu S jednaka je

$$P = \frac{w S v \Delta t}{\Delta t} = w S v \quad (2.114)$$

odnosno za harmonički ravni val:

$$P = \frac{1}{2} \rho (2 \pi f)^2 A^2 S v \quad (2.114.a)$$

To je energijski tok kroz površinu S , okomitu na smjer širenja vala.

Energija koju val prenese u jedinici vremena kroz jedinicu površine okomitu na smjer širenja vala, tj. **gustoća energijskog toka** (ili, kako se još zove, intenzitet vala) iznosi:

$$I = \frac{\Delta E}{S \Delta t} = \frac{P}{S} = w v \quad (2.115)$$

što za harmonički ravni val prelazi u

$$I = \frac{1}{2} \rho (2 \pi f)^2 A^2 v. \quad (2.116)$$

Iz definicijskih jednadžbi proizlaze jedinice za:

$$\text{gustoću energije} \quad [w]_{\text{SI}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3},$$

$$\text{energijski tok} \quad [P]_{\text{SI}} = \text{W},$$

$$\text{gustoću energijskog toka} \quad [I]_{\text{SI}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Izračunajmo gustoću energijskog toka za sferni (kuglasti) val koji nastaje iz točkastog izvora. (Budući da svaki realni izvor ima konačne dimenzije, to će razmatranje vrijediti samo kad su promatrane udaljenosti mnogo veće od dimenzija izvora.) Pretpostavimo da izvor emitira stalnu snagu P u okolno sredstvo. Na udaljenosti r od izvora emitirana je energija jednoliko raspoređena preko kugline plohe površine $4 r^2 \pi$, pa je gustoća energijskog toka

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 r^2 \pi} \quad (2.117)$$

Gustoća energijskog toka (intenzitet) kuglastog vala obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti od izvora. Odatle slijedi da je amplituda kuglastog vala obrnuto proporcionalna udaljenosti od izvora, pa jednadžbu kuglastog vala možemo napisati ovako:

$$s(r, t) = \frac{A}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad (2.118)$$

gdje je r udaljenost od izvora, a A konstanta koja je brojčano jednaka amplitudi na jediničnoj udaljenosti od izvora.

Uzimajući u obzir relaciju (2.99), intenzitet zvučnog vala (2.116) možemo pisati u obliku:

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_{\text{maks}})^2}{\rho v} \quad (2.119)$$

Budući da je $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{maks}} = A \omega$, slijedi da je $\Delta p_{\text{maks}} = \rho v \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{maks}}$, odnosno:

$$I = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{maks}} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{maks}} \quad (2.120)$$

Intenzitet zvučnog vala često zovemo i **jakost zvuka**.

Naprimjer, za zvučni val frekvencije 1 000 Hz na pragu čujnosti amplituda pomaka čestica zraka iznosi oko 10^{-11} m, a amplituda oscilacija tlaka oko $2 \cdot 10^{-5}$ Pa. Pri najjačem zvučnom valu koje uho još podnosi bez boli pomak čestica je oko 10^{-5} m, a amplituda tlaka oko 30 Pa.

Izrazi na energijski tok (snagu) vala (2.114) koji smo izveli pojednostavljenim načinom zapravo je vremenski srednjak. Sada ćemo taj izraz izvesti egzaktnije.

Izračunajmo brzinu prijenosa energije za transverzalni harmonički val koji putuje po zategnutoj žici odnosno za longitudinalni elastični val kroz štap ili fluid.

Kada se transverzalni harmonički val širi kroz žicu linearne gustoće μ zategnutu silom F , elongacija djelića žice je $s(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$. Snaga P (energija po jedinici vremena) koju val prenosi po žici može se izračunati iz rada što ga u određenoj točki žice djelić žice lijevo od te točke i obavi na djeliću žice desno od te točke:

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = F_s \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.121)$$

$$P = -F \sin \alpha \cdot \frac{\partial s}{\partial t}$$

Budući da je za male kutove

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (2.122)$$

snaga je

$$P = -F \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.123)$$

Derivirajući elongaciju $s(x, t)$ po x i po t i uvrstivši u (2.123), dobivamo

$$P = F A^2 k \omega \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \mu \omega^2 A^2 v \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.124)$$

Ako je žica presjeka S i gustoće ρ , tada je $\mu = \rho S$, pa je

$$P = \rho A^2 \omega S v \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.125)$$

Slično se može izračunati snaga koju harmonički longitudinalni val prenosi kroz štap odnosno stupac fluida (u dugoj cijevi) presjeka S .

Snaga koja se na određenom presjeku prenosi kroz fluid je

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \Delta p S \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.126)$$

Budući da je $\Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x}$ (B – volumni modul elastičnosti), tada je

$$P = -BS \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial x} = -v^2 \rho S \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.127)$$

Za harmonički val, nakon uvrštavanja $\frac{\partial s}{\partial x}$ i $\frac{\partial s}{\partial t}$, dobivamo

$$P = \rho A^2 \omega^2 S v \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.128)$$

Snaga koju prenosi sinusoidalni rad mijenja se po zakonu kvadrata kosinusa, uvijek je pozitivna i ovisi o trenutku t i mjestu x na kojem je promatramo. Srednju snagu $\bar{P}$ možemo izračunati usrednjavanjem izraza (2.128) po vremenu (tj. od 0 do T). Budući da je srednja vrijednost kvadrata kosinusa jednaka jednoj polovini, to je

$$\bar{P} = \overline{\rho A^2 \omega^2 S v \cos^2(\omega t - kx + \varphi)} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 S v \quad (2.129)$$

To je identično s izrazom (2.114.a) dobivenim na pojednostavljen način.

2.6.1. Jakost i glasnoća zvuka

Jakost zvuka je intenzitet zvučnog vala, energija koju zvučni val prenese u jedinici vremena kroz jediničnu površinu okomitu na smjer širenja zvuka. Jedinica jakosti zvuka je, dakle, vat po četvornom metru, W/m^2 .

U praksi susrećemo različite zvukove, od onih najslabije jakosti, koje uho jedva čuje (na pragu čujnosti), pa do onih najjačih, koji uzrokuju bol. Smatra se da je zvuk jakosti $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ *prag čujnosti* i – s njim se uspoređuju ostale jakosti. Najveća jakost zvuka koji još ne oštećuje uho je oko 10 W/m^2 . Omjer između najjače i najslabije jakosti zvuka je 10^{13} , te je praktičnije računati s logaritmom omjera jakosti umjesto sa samim omjerima. Osim toga, osjet jakosti zvuka raste približno logaritamski, pa i to opravdava računanje s logaritmom omjera jakosti. Zato se razina (nivo) zvuka računa pomoću formule:

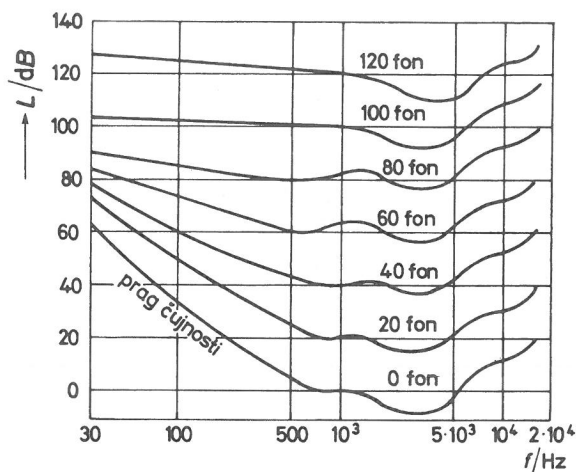
$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (2.130)$$

gdje je I jakost zvuka (buke), I_0 jakost zvuka na pragu čujnosti (10^{-12} W/m^2), a L razina jakosti zvuka izražen decibelima (dB). Tako zvuk na pragu čujnosti ima razinu 0 dB, a zvuk od 120 do 130 dB počinje uzrokovati bol u uhu.

Glasnoća zvuka je osjet jakosti zvuka u našem uhu, te je fiziološka veličina za jakost zvuka. Ona ovisi o intenzitetu i frekventnom spektru zvuka.

Zvukovi iste jakosti ali različitih frekvencija, čine se uhu različito glasnima. Za određivanje razine glasnoće treba, dakle, nepoznate glasnoće usporediti s nekim referentnim zvukom. Za tu se svrhu upotrebljava zvuk frekvencije 1 000 Hz.

Jedinica za razinu glasnoće zvuka je **fon**. Za zvuk frekvencije 1 000 Hz podudaraju se brojčane vrijednosti jakosti zvuka (u decibelima) i razine glasnoće u fonima. Sl. 2.28. prikazuje odnos dB i fon za čujno područje. Tablica 2.2 daje razine jakosti zvuka za neke tipične slučajeve.



Slika 2.28. Odnos decibela i fona

Tablica 2.2. Razine jakosti zvuka

prag čujnosti	0 dB	automobil	70 dB
šapat	20 dB	kamion	90 dB
govor	50 dB	avionski motor	120 dB
stan u prometnoj ulici	60 dB	prag bola	130 dB
prometna ulica	70 dB		

Uho je najosjetljivije na frekvencije od 1 000 do 3 500 Hz, a osjetljivost se s višim i nižim frekvencijama smanjuje.

Razinu jakosti zvuka možemo računati i pomoću amplitude promjene tlaka.

Služeći se relacijom (2.119) $I = \frac{(\Delta p_{\text{maks}})^2}{2 \nu \rho}$, dobivamo

$$L = 20 \log \frac{\Delta p_{\text{maks}}}{(\Delta p_{\text{maks}})_0} \quad (2.131)$$

gdje je $(\Delta p_{\text{maks}})_0$ minimalna amplituda promjene tlaka koju bubnjić može detektirati, a približno iznosi $2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

Promjene tlaka zbog zvučnog vala u uhu se pretvaraju u električne impulse koji se prenose u mozak i daju osjet sluha. Ulazeći kroz vanjski dio uha, zvučni

val pada na bubnjić, membranu koja pri oscilacijama tlaka titra. To se titranje prenosi u unutrašnji dio uha, a odatle preko slušnog živca, u obliku električnih impulsa, u mozak.

Primjer

Zvuk jakosti $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ definira se kao prag čujnosti, a zvuk intenziteta 1 W/m^2 smatra se granicom na kojoj zvuk počinje uzrokovati bol u uhu.

Za frekvenciju 1 kHz izračunajte nivo zvuka (dB), amplitudu titranja, amplitudu promjene tlaka zraka i amplitudu akceleracije čestica zraka pri normiranim uvjetima (0°C , $P_0 = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$) za obje jakosti zvuka.

a) Za zvuk na pragu čujnosti

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 0 \text{ dB}.$$

Iz

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega A^2 v \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2I}{\omega^2 \rho v}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}}{(2000 \pi)^2 \text{ s}^{-2} \cdot 1,293 \text{ kg m}^{-3} \cdot 331 \text{ m s}^{-1}}} = 1,09 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Iz

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_{\text{maks}})^2}{\rho v} \Rightarrow (\Delta p_{\text{maks}}) = \sqrt{2 I \rho v} = \sqrt{2 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \cdot 1,293 \text{ kg m}^{-3} \cdot 331 \text{ m s}^{-1}} = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}.$$

Amplituda brzine čestica zraka je

$$v_{\text{maks}} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{maks}} = \omega A = 6,85 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

$$a_{\text{maks}} = \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right)_{\text{maks}} = \omega^2 A = (2 \pi f)^2 \cdot A = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

b) Za najjači zvuk

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log 10^{12} = 120 \text{ dB}$$

$$A = \frac{2I}{(2 \pi f)^2 \rho v} = 1,09 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\Delta p_{\text{maks}} = \sqrt{2 I \rho v} = 29,3 \text{ Pa}$$

$$v_{\text{maks}} = \omega A = 6,85 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$a_{\text{maks}} = \omega^2 A = 430 \text{ m/s}^2$$

2.7. Ultrazvuk

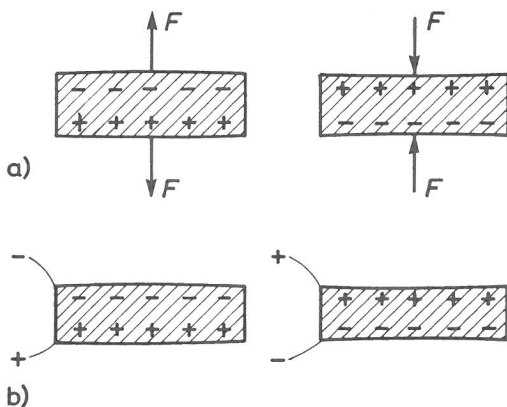
Mehanički valovi frekvencije veće od 20 kHz pripadaju području ultrazvuka. Gornja granica za mehaničke valove u kristalima je oko 10^{12} Hz, što je posljedica periodičnosti kristalne rešetke.

Ljudsko uho ne osjeća ultrazvučne frekvencije, međutim neke životinje (npr. pas, šišmiš, ribe) mogu ih čuti. Šišmiši npr. odašilju valove ultrazvuka i procjenjuju udaljenost i oblik predmeta prema povratnim reflektiranim valovima.

Ultrazvuk se može dobiti pomoću *inverznoga piezoelektričnog* efekta i pomoću magnetostrikcije. Zbog djelovanja električnog polja pločica kvarca se malo deformira (produžuje ako je polje u jednom smjeru, a steže pri polju suprotnog smjera) te tu pojavu, tzv. inverzni piezoelektrični efekt, iskoristavamo za dobivanje mehaničkih titraja pločice – ultrazvuka. Ultrazvuk se može dobiti i kada se feromagnetski materijali nalaze u promjenljivome magnetskom polju, *magnetostrikcijom*.

Piezoelektrični efekt. Elastičnom deformacijom nekih kristalnih dielektrika (npr. kvarca) stvara se električni naboj: jedna površina na odgovarajući način odrezane kristalne pločice nabije se pozitivno, a druga negativno, tj. kristali postaju *električki polarizirani*. Polarizacija je najveća kad je naprezanje locirano na pravcu tzv. piezoelektrične osi kristala. Ako deformacija promijeni smjer (tj. ako umjesto istezanja kristal stiskamo), nastaje polarizacija suprotnog smjera (sl. 2.29.a). Tu pojavu nazivamo piezoelektričnim efektom. Otkrili su ga braća Pierre i Jacques Curie, 1890. godine.

Najpoznatiji piezoelektrici su: kvarc (SiO_2), turmalin i Seignettova sol ($\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6\text{KNa} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$).



Slika 2.29. Piezoelektrični i inverzni piezoelektrični efekt

Obratno, kada na pločicu takvog kristala dovedemo napon (sl. 2.29.b) pod utjecajem električnog polja, dipoli će se nastojati orijentirati u smjer polja, i to će uzrokovati mehanička naprezanja u kristalu, pločica će se skupiti odnosno raširiti ovisno o smjeru polja. Ako na takvu pločicu dovedemo izmjenični napon, pločica će vibrirati frekvencijom tog napona. To je tzv. *inverzni piezoelektrični efekt*. Na taj se način mogu postići titranja pločica frekvencijom od nekoliko megaherca.

Naročito jake titraje dobivamo u slučaju rezonancije, tj. kad je frekvencija promjene električnog polja jednaka vlastitoj frekvenciji titranja pločice. Tako se može dobiti ultrazvuk.

Pritom nastaju trbusi titranja na plohama pločice, pa je debljina pločice upravo jednaka polovici valne duljine ultrazvuka u kvarcu. Ako je debljina pločice npr. 1,5 mm, valna je duljina $\lambda = 3$ mm. Iz brzine ultrazvuka u kvarcu dobijemo $f = v/\lambda = 1,8$ MHz.

Vlastita (rezonantna) frekvencija kristala kvarca ovisi o dimenzijama pločice i načinu na koji je izrezana. Prikladnim rezanjem i brušenjem mogu se dobiti pločice čija je vlastita frekvencija u području od 50 Hz do stotinjak MHz. Budući da je frekvencija takvih kristala stalna, neovisna o temperaturi i točno poznata, primjenjuju se u radiotehnici, za stabiliziranje frekvencije titrajnih krugova.

Ultrazvučni valovi prenose mnogo veću energiju nego zvuk i – na tome se i osnivaju neke njihove primjene. Naime, intenzitet vala ovisi o kvadratu frekvencije, a ultrazvučne su frekvencije mnogo veće od frekvencija čujnog područja. Akceleracija čestica sredstva kroz koje prolaze valovi ultrazvuka također je vrlo velika ($\partial^2 s / \partial t^2 \sim \omega^2$), te se i to može korisno primijeniti u praksi. Osim toga, valne duljine ultrazvuka relativno su malene, pa pri širenju nije potrebno uzimati u obzir ogib. Ultrazvuk se širi praktički pravocrtno, što je povoljno za detekciju položaja prepreke.

Primjena ultrazvuka vrlo je raznolika. Nabrojiti ćemo neke: stvaranje finih emulzija, čišćenje, mikromasaža, uništavanje bakterija, bušenje, ispitivanje homogenosti materijala, mjerenje dubine mora, medicinska dijagnostika itd.

Primjer

Usporedite zvučne valove frekvencije 1 000 Hz ultrazvučne valove frekvencije $2 \cdot 10^5$ Hz koji se šire kroz vodu i izazivaju titranje čestica vode amplitude $6 \cdot 10^{-7}$ m.

Izračunajte valnu duljinu, intenzitet i nivo jakosti zvuka, amplitudu oscilacija tlaka i amplitudu brzine i akceleracije čestica vode. (Brzina zvuka u vodi je 1500 m/s.)

a) Zvuk

Valna duljina je

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m s}^{-1}}{1000 \text{ Hz}} = 1,5 \text{ m.}$$

Intenzitet je

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = 10,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Razina jakosti zvuka je $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$

$$L = 130 \text{ dB.}$$

Amplituda oscilacija tlaka:

$$\Delta p_{\text{maks}} = \rho v \omega A = 5,65 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Amplituda brzine i akceleracije čestica je

$$v_{\text{maks}} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\text{maks}} = A \omega$$

$$v_{\text{maks}} = 2 \pi f A = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$a_{\text{maks}} = \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right)_{\text{maks}} = A \omega^2 = (2 \pi f)^2 A = 23,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) *Ultrazvuk*

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500}{2 \cdot 10^5} \text{ m}$$

$$\lambda = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

$$I = 4,26 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$\Delta p_{\text{maks}} = \rho v \omega A = 1,13 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$v_{\text{maks}} = A \omega = 0,75 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{maks}} = A \omega^2 = 9,46 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$$

2.8. Dopplerov efekt

Kada su izvor vala i prijemnik nepokretni u odnosu prema sredstvu kroz koje se val širi, frekvencija valova koje prijemnik prima jednaka je frekvenciji titranja izvora. Izvor vala i prijemnik (detektor) jedan se prema drugome mogu relativno gibati. Pritom prijemnik registrira drukčiju frekvenciju f' od one koju emitira izvor; ta pojava se zove *Dopplerov* efekt*. Razlikujemo dva slučaja:

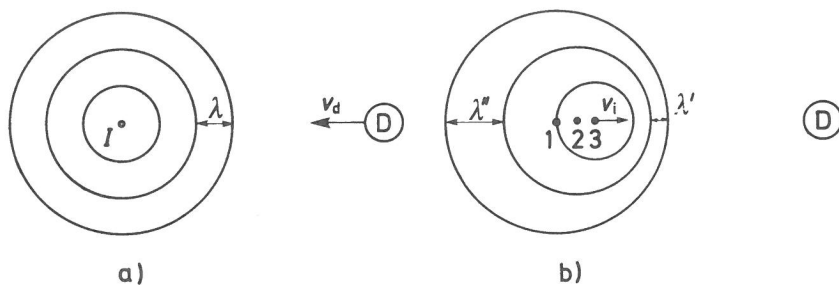
- a) izvor miruje, a detektor se giba brzinom v_d ,
- b) izvor se giba brzinom v_i , a detektor miruje.

* Ch. Doppler (1803–1853), austrijski matematičar i fizičar.

Neka izvor koji miruje emitira valove frekvencije $f = v/\lambda$, a detektor koji se giba brzinom v_d registrira frekvenciju f' (sl. 2.30.a). Ako se detektor približava izvoru, relativna je brzina vala s obzirom na detektor $v' = v + v_d$. Kad se detektor udaljuje, relativna brzina vala s obzirom na detektor iznosi $v - v_d$. Zato je frekvencija koju detektor registrira:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v \pm v_d}{\lambda} = \frac{v \pm v_d}{v} f = f \left(1 \pm \frac{v_d}{v}\right) \quad (2.132)$$

gdje je znak $+$ za približavanje znak $-$ za udaljavanje.



Slika 2.30. Uz izvod Dopplerova efekta

Kad se izvor giba a detektor miruje (sl. 2.30.b) valne plohe nisu više koncentrične kugline plohe: zato je frekvencija koju detektor registrira različita od one koju emitira izvor. Iz crteža vidimo da se valna duljina u smjeru gibanja izvora skрати za pomak izvora u jednom periodu.

$$\lambda' = \lambda - v_i T = \frac{v}{f} - \frac{v_i}{f} = \frac{v - v_i}{f} \quad (2.133)$$

Kako je $\lambda' = \frac{v}{f'}$ frekvencija f' koju registrira detektor jednaka je:

$$f' = \frac{v}{v - v_i} f \quad (2.134)$$

U slučaju udaljavanja umjesto razlike brzina u nazivnik uvrstavamo njihov zbroj. Kada se izvor približava, detektor registrira višu, a kada se izvor udaljava nižu frekvenciju.

Oba slučaja možemo prikazati jednom formulom,

$$f' = f \frac{v + v_d}{v - v_i} \quad (2.135)$$

gdje se v_d smatra pozitivnom ako se prijemnik približava izvoru, a negativnom ako se udaljava od njega. Slično, brzina izvora v_i pozitivna je ako se izvor kreće prema prijemniku, a negativna ako se izvor udaljava od njega. Pritom smo pretpostavili da se prijemnik i izvor gibaju duž pravca koji ih povezuje.

Ako je brzina izvora v_i odnosno brzina detektora v_d mnogo manja od brzine vala v , formule (2.132) i (2.134) imaju približno isti oblik i svejedno je giba li se izvor ili detektor. Tada naime, formula (2.134) poprima oblik:

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_i}{v}} f \approx f \left(1 + \frac{v_i}{v} \right) \quad (2.136)$$

jer je $\frac{1}{1 - \frac{v_i}{v}} = 1 + \frac{v_i}{v} + \left(\frac{v_i}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_i}{v}\right)^3 + \dots$, a za $\frac{v_i}{v} \ll 1$ dovoljno je zadržati prva

dva člana reda i u toj aproksimaciji postaje jednaka formuli (2.132).

Dopplerov efekt za elektromagnetske valove. Formule za Dopplerov efekt moraju se drukčije izvesti ako je riječ o elektromagnetskim valovima. Prema prvom postulatu specijalne teorije relativnosti, brzina svjetlosti (elektromagnetskih valova) jednaka je u svim inercijalnim referentnim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili detektora.

Neka u sustavu S izvor elektromagnetskog vala miruje i emitira val frekvencije f . Opažač u tom sustavu izmjerit će period T , valnu duljinu λ , i brzinu c . Opažač u sustavu S' , koji se prema sustavu S giba relativnom brzinom v , izmjerit će frekvenciju f' , period T' , valnu duljinu λ' ali jednaku brzinu c . Period T' bit će pritom povezan s periodom T relacijom za dilataciju vremena,

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.137)$$

gdje je $\beta = \frac{v}{c}$.

Ako se izvor elektromagnetskih valova udaljava od detektora (promatrača), promatrač u sustavu S' izmjerit će valnu duljinu

$$\lambda' = (c + v) T' \quad (2.138)$$

gdje je T' period izvora elektromagnetskih valova mjereno iz sustava S' .

Uvrstimo li relaciju (2.137) u (2.138), dobit ćemo

$$\lambda' = \frac{c + v}{\sqrt{1 - \beta^2}} T \quad (2.139)$$

Budući da je $\lambda' = \frac{c}{f'}$ i $T = \frac{1}{f}$, to je

$$\frac{c}{f'} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{c}{f}$$

odnosno

$$f' = f \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = f \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.140)$$

Ako se izvor približava promatraču, tada je

$$f' = f \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = f \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (2.141)$$

Brzina v je relativna brzina sustava S i S'. Ako se dogovorimo da je v pozitivno kad se izvor približava detektoru, Dopplerov efekt možemo prikazati jednom formulom

$$f' = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (2.142)$$

i brzinu v , odnosno β za približavanje smatrati pozitivnom, a za udaljšavanje negativnom.

Ako je $v \ll c$, formule za Dopplerov efekt za elektromagnetske i zvučne valove imaju jednak oblik. Tada je $\beta^2 \approx 1$, pa je

$$f' \approx f \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \quad (2.143)$$

Promjena frekvencije pri refleksiji vala na predmetu koji se giba. Kada se val koji se širi kroz sredstvo brzinom v reflektira na površini predmeta koji se giba, reflektirani će val, zbog Dopplerova efekta imati drukčiju frekvenciju od upadnog. Pretpostavimo da val frekvencije f upada okomito na površinu koja se giba brzinom v_p prema izvoru vala. Primjenom formule koju smo izveli za slučaj kada izvor miruje a detektor se giba dobivamo frekvenciju vala na promatranoj površini,

$$f' = f \frac{v + v_p}{v} = f \left(1 + \frac{v_p}{v}\right) \quad (2.144)$$

Reflektirani val možemo shvatiti kao val frekvencije f' emitiran s površine koja se giba brzinom v_p . Prema jednadžbi za Dopplerov efekt u slučaju izvora koji se približava, zaključujemo da će detektor registrirati frekvenciju:

$$f'' = f' \frac{v}{v - v_p} = f \frac{v + v_p}{v - v_p} \quad (2.145)$$

Ako se površina udaljšava, brzini v_p u formuli treba pridati suprotni predznak.

Tako se pri mjerenju brzine automobila radarskim valovima, frekvencija reflektiranih valova f'' razlikuje od frekvencije odaslatih valova f za

$$\Delta f = f'' - f = \frac{2fv_p}{c - v_p} \quad (2.146)$$

gdje je c brzina svjetlosti, a v_p brzina automobila. Superpozicijom upadnih i reflektiranih valova dobiju se *udari* čija je frekvencija dana formulom (2.146). Mjerenjem frekvencije udara može se odrediti brzina automobila:

$$v_p = \frac{c \Delta f}{2f} \quad (2.147)$$

jer je $v \ll c$. Za relativističke brzine te su formule različite.

Dopplerov se efekt opaža i pri proučavanju svjetlosti koja dolazi sa zvijezda. Frekvencija spektralnih linija u toj svjetlosti neznatno se razlikuje od frekvencije linija dobivenih od istih elemenata na Zemlji. Mjereći taj pomak, možemo odrediti smjer i iznos brzine gibanja zvijezde. Ako se npr. zvijezda približava Zemlji, frekvencija je veća nego kad zvijezda miruje. Iz formule za promjenu frekvencije

$$f' = f \frac{v}{v - v_i} = f \frac{c}{c - v_i} \quad (2.148)$$

dobivamo brzinu gibanja zvijezde

$$v_i = c \left(1 - \frac{f}{f'} \right) \quad (2.149)$$

kada se zvijezda udaljava, $f' < f$, pa je

$$v_i = c \left(\frac{f}{f'} - 1 \right) \quad (2.150)$$

PITANJA I ZADACI

1. Kako nastaje val? Koje su veličine karakteristične za valno gibanje?
2. Koji val određuje jednadžba $s = A \sin(\omega t - kx)$?
3. Elastični val prelazi iz sredstva u kojemu mu je fazna brzina v_1 u sredstvo gdje mu je fazna brzina v_2 . Što se pritom događa s frekvencijom i valnom duljinom?
4. Izvedite valnu jednadžbu za valove na žici.
5. Diskutirajte rješenja diferencijalne valne jednadžbe.
6. Razmotrite refleksiju valova. Izvedite izraz za amplitudu reflektiranog vala.
7. Kada val pri refleksiji mijenja fazu? Dokažite.
8. Napišite izraz za upadni i reflektirani harmonični ravni val pri refleksiji na a) čvrstom kraju, b) slobodnom kraju.
9. Kako nastaje stojni val? Izvedite valnu jednadžbu za stojni val.
10. Razmotrite titranje napete žice (monokorda). Kolike su joj vlastite frekvencije.
11. Koliko će se promijeniti frekvencija osnovnog tona žice ako sredinu žice pritisnemo prstom tako da je na tome mjestu učvrstimo?
12. Odredite kako se čeličnom žicom dugom pola metra može dobiti A ton prve oktave (440 Hz).
13. Što su valovi zvuka? Izvedite diferencijalnu jednadžbu za te valove.
14. O čemu ovisi brzina longitudinalnih valova? Izvedite izraz za ovisnost brzine zvuka o temperaturi.
15. Kako nastaju stojni valovi zvuka? Opišite i rastumačite pokus s Kundtovom cijevi. Kako pomoću te cijevi izmjeriti adijabatski koeficijent nekog plina?
16. U kojem je plinu na jednakoj temperaturi brzina zvuka veća, u vodik u ili u CO_2 ? Koliko puta?
17. Iz brzine zvuka u vodi (1400 m/s) izračunajte stlačivost vode.
18. Koliko se promijeni brzina zvuka u zraku ako se temperatura povisi za 10°C ?
19. Što je intenzitet vala? Izvedite izraze za gustoću energije, snagu i intenzitet vala.
20. Što je jakost, a što glasnoća zvuka? Koje su jedinice za te veličine? Kako se računa nivo zvuka? Kakva je veza između decibela (dB) i fona?
21. Koliki je intenzitet (W/m^2) zvuka od razina ako je: a) 10 dB, b) 60 dB, c) 120 dB?
22. Za zvuk frekvencije 1 kHz i razine jakosti 120 dB odredite amplitudu oscilacije tlaka na pragu čujnosti pri normiranim uvjetima.
23. Što je ultrazvuk? Navedite njegove primjene.
24. Objasnite Dopplerov efekt.
25. Harmonički se val širi brzinom 330 m/s u smjeru osi $+x$. Dvije točke sredstva, međusobno udaljene 0,5 m u smjeru titranja vala, titraju s razlikom u fazi od 60° . Kolika je frekvencija i valna duljina? Napišite jednadžbu vala ako je u $t = 0$ i $x = 0$ elongacija jednaka nuli.
26. Val na užetu ima valnu duljinu 0,5 m i nastao je iz izvora koji titra po zakonu $A \sin 2\pi ft$, gdje je $A = 0,1$ m, a $f = 3$ Hz. Nadite elongaciju komadića užeta udaljenog 1 m od izvora u trenutku $t = 0,75$ s.

27. Jednadžba titranja jedne točke u valu glasi: $s/m = 0,05 \sin 3\pi t/2$. Nadite elongaciju točke koja je od izvora vala udaljena 10 cm nakon 2 s od početka gibanja. Brzina širenja vala je 30 cm/s.
28. Uz koji će uvjet brzina vala koji putuje po zategnutoj žici biti jednaka maksimalnoj transverzalnoj brzini čestice žice?
29. Napišite izraz za sinusoidalni ravni val koji se širi u smjeru određenom jediničnim vektorom $\vec{u}$, a ima amplitudu A , valni broj k i kružnu frekvenciju ω . Odredite smjer širenja vala $s(x, y, z, t) = A \sin [k(x + 2y + 2z) - \omega t]$.
30. Metalna žica nekog instrumenta dugačka je 50 cm, a napeta je silom 135 N. Njezin je promjer 0,55 mm, a gustoća materijala od kojega je napravljena iznosi 8,8 g/cm. Nadite frekvenciju osnovnog tona žica kad ona transverzalno titra.
31. Kuglasti se val zvuka širi iz točkastog izvora snage 13 W. Na kojoj će udaljenosti od izvora nivo zvuka biti: a) 10 dB, b) na pragu čujnosti?
32. Zvučni val frekvencije 1000 Hz prolazi kroz zrak i pritom je amplituda promjene tlaka 10 Pa. Kolika je amplituda pomaka čestica zraka? (Brzina zvuka u zraku je 331 m/s pri normiranim uvjetima 273 K i 101 kPa, a adijabatski koeficijent zraka je $\kappa = 1,4$.)
33. Kolika je amplituda titranja čestica zraka pri širenju zvučnog vala frekvencije 400 Hz ako je nivo 100 dB? Računajte s brzinom zvuka od 340 m/s i gustoćom zraka 1,29 kg/m³.
34. Kada se zvučni val širi iz točkastog izvora, intenzitet mu se smanjuje s kvadratom udaljenosti. Ako je na udaljenosti 1 m od zvučnika intenzitet 40 dB, na kojoj će udaljenosti intenzitet biti 10 dB?
35. Napišite izraz za pomak čestice zraka kada se zvučni val frekvencije 2000 Hz i amplitude $2 \cdot 10^{-6}$ m širi zrakom. Kolika je pritom maksimalna promjena (amplituda) tlaka? Izračunajte gustoću energijskog toka vala i nivo zvuka u decibelima. Pretpostavite da je gustoća zraka 1,29 kg/m³, a brzina zvuka u zraku 340 m/s.
36. Frekvencija sirene lokomotive je 1000 Hz. Koliku frekvenciju čuje putnik na peronu ako mu se lokomotiva približava brzinom 108 km/h? Koliku bi frekvenciju čuo da se lokomotiva udaljava? Pretpostavite da je brzina zvuka u zraku 340 m/s.
37. Izvor zvuka frekvencije 500 Hz odmiče od mirnog motritelja brzinom 4 m/s u smjeru okomitom na ravnu reflektirajuću površinu. Koliko zvučnih udara u sekundi bilježi motritelj? Uzmite da je brzina zvuka $v = 335$ m/s.)

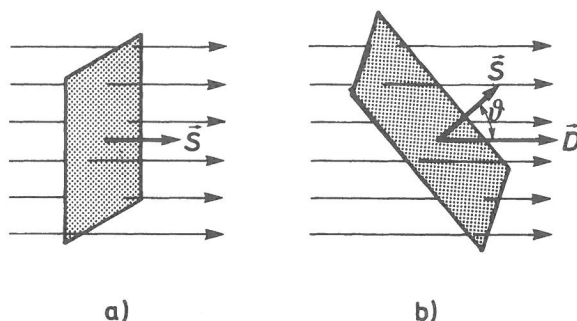
3. Maxwellove jednađžbe

J. C. Maxwell* je 1864. postavio opću matematičku teoriju elektriciteta i osnovne zakone elektrodinamike prikazao pomoću četiri jednađžbe. One su osnova klasične elektrodinamike i svih proračuna koji se odnose na elektromagnet-ske valove i njihovo širenje kroz prostor; cijeli se elektromagnetizam može sumirati pomoću te četiri jednađžbe. One opisuju vezu između električnoga i magnetskog polja, te vezu tih dvaju polja s električnim nabojem. To su zapravo, Gaussov zakon za elektricitet i magnetizam, Ampèreov zakon i Faradayev zakon indukcije.

3.1. Gaussov zakon za električno polje

Veza između električnog polja i naboja koji ga proizvodi može se iskazati jednostavnom i korisnom relacijom, tzv. **Gaussovim zakonom**, do kojega dolazimo razmatranjem toka električnog polja.

Kao što u hidrodinamici govorimo o toku tekućine, tako i u elektrostatici možemo definirati **tok električnog polja** kroz neku površinu. Zamislimo najjednostavniji slučaj: silnice homogenoga električnog polja upadaju okomito na ravnu plohu površine S (sl. 3.1). (Vektor $\vec{S}$ ima iznos površine, a smjer normale na



Slika 3.1.a) i b) Tok homogenoga električnog polja kroz ravnu plohu: a) $\vartheta = 0$, b) $\vartheta \neq 0$

* James Clerk Maxwell (1831–1879), škotski matematičar i fizičar, poznat po radovima iz elektrodinamike i kinetičke teorije plinova.

plohu). Tok električnog polja kroz površinu S u tom se slučaju definira kao

$$\Phi = \varepsilon E S = D S \quad (3.1)$$

gdje je vektor *gustoće električnog toka* (odnosno vektor električnog pomaka) $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (3.2)$$

Ako je kut ϑ između normale na površinu (odnosno vektora $\vec{S}$) i silnica različit od nule (sl. 31.b), tada je tok

$$\Phi = \vec{D} \cdot \vec{S} = D S \cos \vartheta \quad (3.3)$$

Tok električnog polja može se zorno predočiti brojem silnica koje prolaze kroz okomitu površinu S , a iznos vektora $\vec{D}$ brojem silnica kroz jediničnu okomitu površinu.

Pogledajmo koliki je tok električnog polja točkastog naboja Q kroz neku zatvorenu plohu S . Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je zamišljena ploha kugla u čijem se središtu nalazi pozitivni točkasti naboj Q (sl. 3.2).

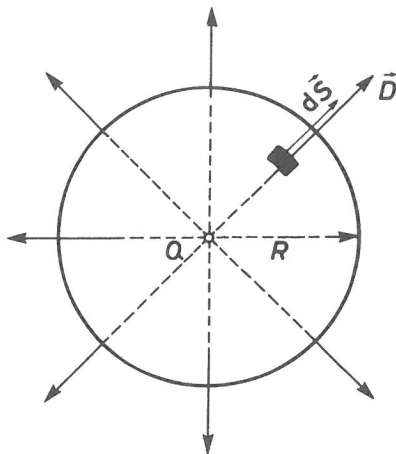
Tok električnog polja u tom je slučaju lako izračunati: silnice okomito probadaju kuglinu plohu, a iznos vektora $\vec{D}$ jednak je u svim točkama kugline plohe. Zato je tok električnog polja jednak umnošku iznosa vektora $\vec{D}$ i ukupne površine kugle, tj.

$$\Phi = 4R^2 \pi D \quad (3.4)$$

gdje je R polumjer kugle.

Budući da se unutar kugle nalazi točkasti naboj Q , polje na površini kugle je

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^2} \quad (3.5)$$



Slika 3.2. Tok električnog polja točkastog naboja kroz kuglu

a vektor gustoće električnog toka $D = \varepsilon E = \frac{Q}{4\pi R^2}$, te je tok

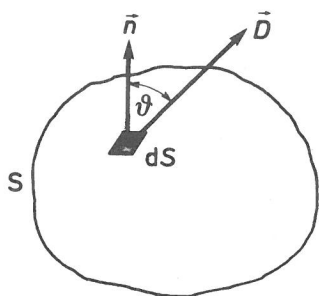
$$\Phi = \frac{Q}{4\pi R^2} 4R^2 \pi = Q \quad (3.6)$$

Tok električnog polja kroz neku kuglinu plohu proporcionalan je naboju unutar te kugle i neovisan o polumjeru kugle. Može se dokazati da je i općenito tok električnog polja kroz zatvorenu plohu proizvoljnog oblika jednak ukupnom naboju unutar te plohe.

Zamislimo zatvorenu plohu proizvoljnog oblika površine S (sl. 3.3) i odredimo tok električnog polja kroz nju. Budući da, općenito, električno polje u svim točkama plohe S nije konstantno, plohu ćemo podijeliti na male površine ΔS , tako malene da ih možemo smatrati ravnima i da možemo pretpostaviti da je polje u svakoj točki na ΔS konstantno. Također ćemo definirati vektor $\Delta \vec{S}$ iznosa ΔS , a smjer mu je određen smjerom vanjske normale $\vec{n}$ na tu površinu.

Tok električnog polja $\vec{D}$ kroz zatvorenu površinu S dobijemo zbrajanjem produkata $\vec{D} \cdot \Delta \vec{S}$ za sve elemente površine $\Delta \vec{S}$, tj.

$$\Phi = \vec{D}_1 \cdot \Delta \vec{S}_1 + \vec{D}_2 \cdot \Delta \vec{S}_2 + \vec{D}_3 \cdot \Delta \vec{S}_3 + \dots = \sum_i \vec{D}_i \cdot \Delta \vec{S}_i \quad (3.7)$$



Slika 3.3. Tok električnog polja kroz zatvorenu plohu

Točan rezultat dobivamo tek u graničnom slučaju, kada svaki ΔS_i teži prema nuli, tj. dvostrukim površinskim integralom:

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{D}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

Dakle, tok električnog polja kroz zatvorenu plohu S jednak je plošnom integralu skalarnog produkta $\vec{D} \cdot d\vec{S}$ preko te plohe.

Često se tok električnog polja povezuje s brojem silnica koje prolaze kroz promatrane plohu; pritom se silnice koje ulaze u zatvorenu plohu smatraju negativnima, a one koje izlaze pozitivnima. Kada iz plohe izlazi onoliko silnica koliko je u plohu ušlo, ukupni je tok jednak nuli.

Uvrstimo li u (3.6) izraz za tok (3.8), dobit ćemo Gaussov zakon za elektrostatsko polje – osnovni zakon elektrostatičke:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (3.9)$$

Iako je formula (3.9) radi jednostavnosti izvedena za kuglinu plohu, ona vrijedi i za bilo koju zatvorenu plohu oko naboja.

Kada u volumenu koji zatvara plohu S ima više točkastih naboja, tada je ukupno električno polje zbroj pojedinih polja; tok pojedinih električnih polja jednak je nabojima iz kojih ta polja proizlaze, pa je tok ukupnoga električnog polja jednak zbroju svih naboja unutar plohe. Ako unutar plohe nema naboja ili je količina pozitivnoga i negativnog naboja jednaka, ukupni je tok nula jer je $Q = 0$.

Ako naboj Q izrazimo prostornom gustoćom naboja u volumenu V (koji obuhvaća ploha površine S ,

$$Q = \iiint_V \rho dV \quad (3.10)$$

tada jednačba (3) poprima oblik:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (3.11)$$

To je *prva* Maxwellova jednačba u integralnom obliku.

Iz prve se Maxwellove jednačbe (*Gaussova zakona*) izvodi *Coulombov zakon*, tj. dokazuje se da se sila između dva točkasta naboja smanjuje s kvadratom udaljenost među njima. Pomoću te jednačbe može se također dokazati da je sav naboj smješten na površini nabijenog vodiča; mjerenjem se lako dokazuje ta činjenica, pa je upravo to i jedan od dokaza Gaussova i Coulombova zakona.

3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje

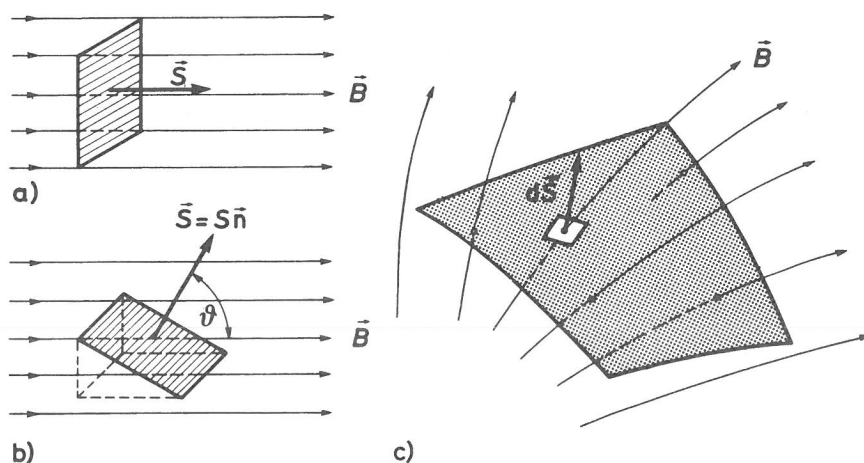
Magnetsko polje možemo zorno predočiti silnicama. Iz gustoće silnica zaključujemo je li polje jako ili slabo. Ondje gdje su silnice gušće, magnetska indukcija i jakost magnetskog polja su veće. Paralelne ekvidistantne silnice predočuju homogeno magnetsko polje.

Kao i za električno polje, i za magnetsko ćemo skup silnica koje prolaze kroz neku plohu zvati **tok magnetskog polja** kroz tu plohu i označavati slovom Φ_B . Za homogeno (u svim točkama prostora jednako polje) tok kroz ravnu površinu S , okomitu na magnetske silnice a time i na vektor $\vec{B}$ (sl.3.4.a), jednak je

$$\Phi_B = BS \quad (3.12)$$

Magnetski tok Φ_B jednak je produktu magnetske indukcije B i površine S okomite na smjer magnetskih silnica. Sada je jasno zašto se *magnetska indukcija*

$$B = \frac{\Phi_B}{S} \quad (3.13)$$



Slika 3.4. Tok magnetskog polja

naziva i *gustoćom magnetskog toka*.

Ako silnice homogenoga magnetskog polja ne padaju okomito na površinu S već pod nekim kutom ϑ , tada je tok

$$\Phi_B = B S \cos \vartheta = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (3.14)$$

gdje je $\vec{S}$ vektor čiji je iznos jednak površini, a smjer mu je jednak u smjeru normale na plohu (sl.3.4.b). Općenito, plohu moramo podijeliti na infinitezimalno male elemente dS (sl.3.4.c) i tok magnetskog polja izračunati integralom po površini kroz koju računamo tok:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.15)$$

Tok magnetskog polja jednak je, dakle, plošnom integralu vektora magnetske indukcije.

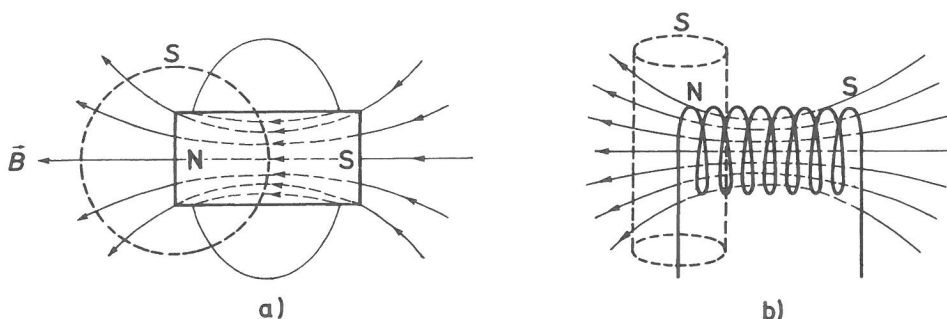
Jedinica magnetskog toka je veber (Wb)*,

$$[\Phi_B]_{SI} = [B] \cdot [S] = \text{T m}^2 = \text{Vs} = \text{Wb}$$

Koliki je magnetni tok kroz bilo koju zatvorenu plohu?

Općenito, tok vektorskog polja kroz zatvorenu plohu jednak je zbroju svih izvora unutar plohe (Gaussov zakon). Pokazali smo da je tok električnog polja kroz neku zatvorenu plohu jednak naboju unutar volumena obuhvaćenog tom plohom. Isto vrijedi i za tok magnetskog polja. Budući da nema izoliranih magnetskih polova, magnetske su silnice zatvorene krivulje; broj silnica koje ulaze

* Wilhelm Weber (1904–1891), njemački fizičar, poznat po istraživanjima na području magnetizma; osnovao je elektromagnetski cgs-sustav.



Slika 3.5. Ukupni tok magnetskog polja kroz zatvorenu plohu a) kuglu i b) valjak iščezava

u neku zatvorenu plohu jednak je broju silnica koje izlaze iz te plohe. Na sl.3.5.a prikazan je tok magnetskog polja magneta oblika štapa kroz zamišljenu kuglu, a na sl.3.5.b tok magnetskog polja zavojnice kroz valjak. Uočavamo da je broj silnica koje u promatrane plohe ulaze jednak broju silnica koje izlaze. Drugim riječima, magnetski tok kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak je nuli,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.16)$$

To je Gaussov zakon za magnetizam, jedna od osnovnih jednačbi elektromagnetizma. Relacija (3.16) *druga je Maxwellova jednačba* u integralnom obliku.

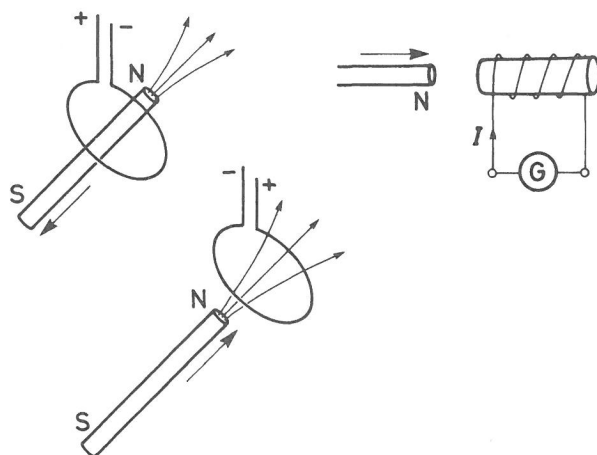
3.3. Faradayev zakon indukcije

Oersted* je opazio (1820) da električna struja (tj. naboj u gibanju) proizvodi magnetsko polje i tako je dokazao da su električne pojave uzrok magnetskima. Malo kasnije (1831) M. Faraday** je ustanovio da promjenljivo magnetsko polje stvara električno polje. Naime, on je eksperimentalno dokazao da promjenljivi magnetski tok kroz neki vodič (zavojnicu) na njegovim krajevima inducira elektromotornu silu. Tako je otkrivena **elektromagnetska indukcija**, jedan od najvažnijih načina dobivanja električne energije.

Uvlačenjem magnetskog štapa u zavojnicu (ili strujnu petlju) na njezinim se krajevima inducira *elektromotorna sila* odnosno kroz strujni krug poteče struja (sl.3.6). Izvlačenjem magneta nastaje elektromotorna sila suprotnog smjera. Dok magnet u zavojnici miruje, nema inducirane elektromotorne sile ni inducirane struje.

* H. C. Oersted (1777–1851), danski fizičar, otkrio je vezu između električnih i magnetskih pojava, poznat je i po istraživanjima iz kemije.

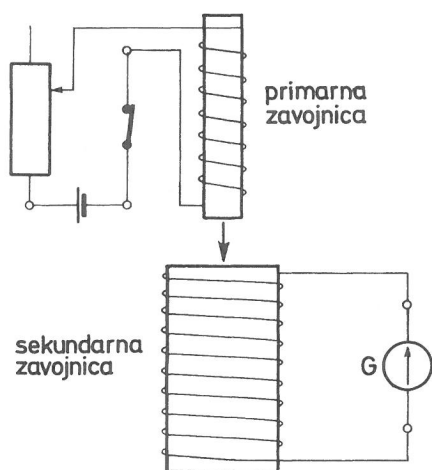
** Michael Faraday (1791–1867), engleski fizičar i kemičar otkrivač elektromagnetske indukcije, zakona elektrolize i dr.



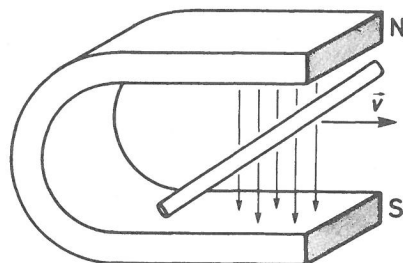
Slika 3.6. Induciranje elektromagnetske sile gibanjem magneta kroz zavojnicu

Elektromagnetsku indukciju opažamo i kada umjesto permanentnog magneta kroz petlju ili zavojnicu gibamo elektromagnet. Ako u jednoj od dvije zavojnice (koje su blizu jedna drugoj) mijenjamo jakost struje, u drugoj (sekundarnoj) inducirat će se elektromotorna sila (sl. 3.7). Elektromotorna se sila inducira i kada vodič siječe magnetske silnice (sl. 3.8).

Ti i slični pokusi pokazuju da se u petlji od jednoga (ili više) zavoja žice inducira elektromotorna sila uvijek kad se kroz petlju mijenja tok magnetskog polja. Ako je pritom strujni krug zatvoren, nastat će i inducirana struja.



Slika 3.7. Induciranje elektromotorne sile mijenjanjem struje u primarnoj zavojnici



Slika 3.8. Induciranje elektromotorne sile gibanjem vodiča u magnetskom polju

Inducirana je elektromotorna sila to veća što je promjena toka brža i veća i što je broj zavoja veći. Magnetski se tok može mijenjati na različite načine, npr. gibanjem vodiča u magnetskom polju, gibanjem magneta s obzirom na vodič, rotacijom zavojnice, promjenom struje u zavojnici i sl.

Možemo reći da je elektromagnetska indukcija pojava u kojoj se u prisutnosti magnetskog polja mehanička energija pretvara u električnu; to se iskorištava u tehnici proizvodnje električne energije.

Mjerenja pokazuju da je inducirana elektromotorna sila razmjerna brzini promjene magnetskog toka kroz petlju (zavoj žice):

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.17)$$

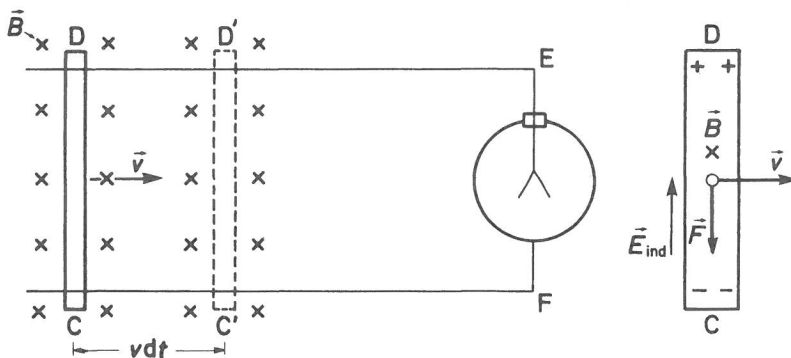
Ako umjesto jednoga zavojnice ima N zavoja, tada je:

$$\mathcal{E} = - N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.18)$$

gdje je $\Psi = N\Phi$ ukupni (tzv. ulančani) tok.

To je **Faradayev zakon indukcije**. Negativan predznak u (3.17) posljedica je zakona o održanju energije. Inducirana elektromotorna sila ima predznak suprotan predznaku promjene toka. Značenje predznaka minus najbolje objašnjava Lenzovo* pravilo, koje kaže da je smjer inducirane elektromotorne sile uvijek takav da struja stvorena tim naponom svojim magnetskim učinkom nastoji poništiti uzrok koji ju je proizveo. O Lenzovu ćemo pravilu još govoriti u daljem tekstu.

Faradayev zakon indukcije izvest ćemo za poseban slučaj kada se komad kratkoga metalnog vodiča dužine l koji klizi preko dvije paralelne metalne tračnice (sl.3.9) giba jednolikom brzinom $\vec{v}$ okomito na homogeno magnetsko polje $\vec{B}$.



Slika 3.9. Uz izvod Faradayeva zakona

* E. H. Lenz (1804–64), ruski fizičar, poznat po pravilu za određivanje smjera inducirane struje objavljenom 1834.

Dok se vodič giba u magnetskom polju, na njegove slobodne elektrone djeluje Lorentzova sila $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ i tjera ih prema jednom kraju žice, u našem primjeru prema dolje. Možemo shvatiti da je to gibanje naboja (u smjeru od D prema C na sl.3.9) uzrokovano induciranim neelektrostatskim električnim poljem:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (3.19)$$

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.20)$$

Žica se električki polarizira, jedan njezin kraj postaje pozitivan, a drugi negativan. Tako razdvojeni naboji u žici stvaraju elektrostatsko polje $\vec{E}$; razdvajanje naboja prestaje i ravnoteža se uspostavlja kada elektrostatsko polje postane jednako $-\vec{v} \times \vec{B}$ i tako poništi inducirano električno polje.

Inducirana je elektromotorna sila jednaka cirkulaciji induciranog (neelektrostatskog) polja:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{s} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = vBl \quad (3.21)$$

Ako smjer gibanja vodiča (smjer vektora $\vec{v}$) i smjer magnetske indukcije $\vec{B}$ zatvaraju kut ϑ , tada je iznos inducirane elektromotorne sile:

$$\mathcal{E} = Blv \sin \vartheta \quad (3.22)$$

Gibanjem vodiča mijenja se površina S koju petlja (pravokutnik CDEF na sl.3.9) obuhvaća u magnetskom polju. Za vrijeme dt vodič se pomakne za $ds = v dt$ i pritom se površina promijeni za $lv dt$; stoga promjena magnetskog toka iznosi:

$$d\Phi = Blv dt \quad (3.23)$$

Odatle je

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= Blv \\ \mathcal{E}_{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Predznak je minus zbog Lenzova pravila. Tako bi u primjeru na sl.3.9. struja imala takav smjer da bi njezino magnetsko polje imalo jednak smjer kao vanjsko jer bi se tako protivila smanjenju magnetskog polja kroz petlju.

Faradayev zakon indukcije (3.17) možemo prikazati u još jednom obliku, praktičnijemu za teoriju polja. Ako induciranu elektromotornu silu prikažemo cirkulacijom induciranoga električnog polja po zatvorenoj krivulji K , a tok magnetskog polja plošnim integralom magnetske indukcije po površini S koju ta krivulja obuhvaća, izraz (3.17) prelazi u

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.24)$$

Promjena magnetskog toka inducira je električno polje; to je jedna od osnovnih jednadžbi elektromagnetizma.

Uočiti ćete da se magnetski tok može mijenjati na dva načina:

- mijenjanjem toka magnetnog polja u vremenu zbog vremenske promjene magnetskog polja u mirnoj petlji; tu promjenu možemo iskazati parcijalnom derivacijom toka po vremenu ($\partial\Phi/\partial t$) i
- mijenjanjem toka zbog promjene površine petlje, tj. gibanjem pojedinih dijelova petlje. Tu promjenu, koja je u posebnom slučaju bila prikazana izrazom $-Blv$, općenito možemo pisati:

$$\oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad (3.25)$$

Inducirano električno polje može, dakle, nastati vremenskom promjenom magnetske indukcije, odnosno relativnim gibanjem vodiča u magnetskom polju:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad (3.26)$$

Jednadžba (3.26) općeniti je izraz za Faradayev zakon indukcije. U elektrostatiki je cirkulacija električnog polja

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.27)$$

ali to ne vrijedi za inducirano električno polje: inducirano električno polje nije konzervativno.

Primjene elektromagnetske indukcije su mnogobrojne i na njima se osniva današnja elektrotehnika. Nabrojiti ćemo samo neke: generatori, transformatori, induktori, mikrofon, betatron itd.

Lenzovo pravilo. Inducirana elektromotorna sila ovisi o brzini mijenjanja magnetskog toka:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.28)$$

Kada je strujni krug zatvoren, *inducirana elektromotorna sila* uzrokuje struju:

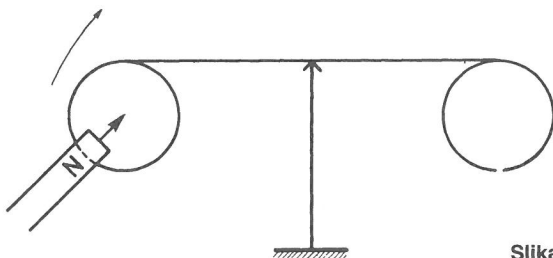
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{d\Phi/dt}{R} \quad (3.29)$$

Predznak minus u tim jednadžbama objašnjava se Lenzovim pravilom: *inducirana* električna struja ima takav smjer da proizvodi magnetski tok koji se suprotstavlja promjeni toka zbog kojega je nastala. Kada se npr. tok kroz petlju smanjuje ($d\Phi < 0$), inducirana ga struja svojim vlastitim tokom nastoji povećati; kada se tok povećava, inducira se struja koja ga svojim magnetskim učinkom nastoji smanjiti.

Lenzovo pravilo proizlazi iz zakona o održanju energije. Rad koji ulažemo kad npr. u magnetskom polju gibamo vodič pretvara se u vodiču u Jouleovu toplinu. U protivnom bi slučaju inducirana struja još jače mijenjala tok koji ju je proizveo, to bi pojačavalo induciranu struju, pa bismo dobili neku vrstu perpetuum mobile, što je suprotno zakonu o održanju energije.

Lenzovo pravilo može se pokazati mnogim pokusima.

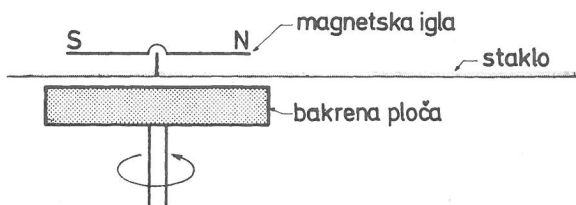
Kada npr. u zatvoreni aluminijski prsten uvučemo magnet, on se nastoji izmaknuti i otkloniti iz magnetskog polja (sl.3.10). Inducirana struja u prstenu proizvodi magnetsko polje smjera suprotnog smjeru polja koje ju je induciralo. Kada magnet izvlačimo, prsten se giba u suprotnom smjeru nastojeći slijediti magnet. Naprotiv, kada prsten nije zatvoren, uvlačenje i izvlačenje magnetu ne uzrokuje gibanje prstena. Zašto?



Slika 3.10. Pokus za ilustraciju Lenzova pravila

Poznatim se Aragoovim pokusom (1824) lijepo mogu pokazati elektromagnet-ska indukcija i Lenzovo pravilo. Kada se bakrena ploča vrti ispod magnetske igle (sl.3.11), igla se počinje vrtjeti u istom smjeru. Zbog gibanja u magnetskom polju igle u ploči se induciraju *virtložne struje* koje imaju takav smjer da svojim magnetskim efektima nastoje ukloniti uzrok koji ih je izazvao, tj. nastoje poništiti relativno gibanje ploče s obzirom na magnetsku iglu.

Kada se masivni metalni predmet nalazi u *promjenljivome* magnetskom polju (odnosno kad se giba kroz magnetsko polje), u predmetu se induciraju virtložne, tzv. *Foucaultove struje*. To su male zatvorene strujne petlje unutar vodiča, slične vrtlozima u fluidu. Aragoov pokus (sl.3.11) jedan je od primjera za induciranje vrtložnih struja.



Slika 3.11. Aragoov pokus

Metalna ploča koja se može njihati između polova elektromagneta ubrzo se zaustavi kada uključimo struju kroz zavojnice elektromagneta. Slično se ukoči i kotač od aluminija koji se vrti između polova elektromagneta. Nastale vrtložne

struje djeluju kao trenje i nastoje zaustaviti metalni predmet. Djelovanje vrtložnih struja slično je trenju u mehanici – troše energiju pretvarajući je u toplinu. U raznim su uređajima nepoželjne pa ih nastojimo što više smanjiti. To se može postići upotrebom tankih, međusobno izoliranih limova, kao npr. u transformator-skoj jezgri.

Vrtložne se struje iskorištavaju za rad električnih brojila, mjerila potroška električne energije, za zagrijavanje u indukcionim pećima itd.

Faradayev zakon indukcije koji kaže da je inducirana elektromotorna sila proporcionalna brzini promjene magnetskog toka

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.30)$$

možemo napisati u obliku *treće* Maxwellove jednačbe.

Ako na lijevoj strani napišemo relaciju za $\mathcal{E}$ a na desnoj definicijsku relaciju za tok magnetskog polja, dobit ćemo treću Maxwellovu jednačbu:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (3.31)$$

gdje se prvi integral računa po zatvorenoj krivulji K , a drugi po plohi S obuhvaćenoj tom krivuljom. Predznak minus potječe od Lenzova pravila (zakona o očuvanju energije).

3.4. Ampèreov zakon; struja pomaka

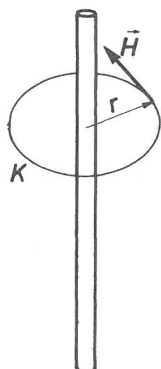
Kada neku veličinu u svakoj točki prostora opisujemo vektorom, govorimo o **vektorskom polju** te veličine. Vektorska su polja npr. električno i magnetsko polje.

Cirkulacija vektorskog polja linijski je integral po zatvorenoj krivulji projekcije vektora na krivulju u svakoj njezinoj točki. Tako je cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja po krivulji K :

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (3.32)$$

Najprije ćemo izračunati cirkulaciju jakosti magnetskog polja dugoga ravnog vodiča kojim teče struja I . Radi jednostavnosti, neka zatvorena krivulja bude kružnica (silnica) oko vodiča (sl.3.12). U svakoj točki te kružnice magnetsko je polje tangencijalno na kružnicu i – po iznosu – konstantno i jednako $H = \frac{I}{2\pi r}$. Stoga je cirkulacija vektora $\vec{H}$ jednaka:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi r} ds = \frac{I}{2\pi r} \oint_K ds$$



Slika 3.12. Izračunavanje cirkulacije jakosti magnetskog polja

Budući da je $\oint_K d\vec{s}$ po kružnici jednak opsegu kružnice $2\pi r$,

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad (3.33)$$

Cirkulacija* vektora $\vec{H}$ u tom je slučaju jednaka jakosti struje koja prolazi kroz krivulju. Može se dokazati da to vrijedi za bilo koju krivulju. Ako krivulja K obuhvaća više struja, tad (3.33) možemo pisati:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Sigma I$$

ili

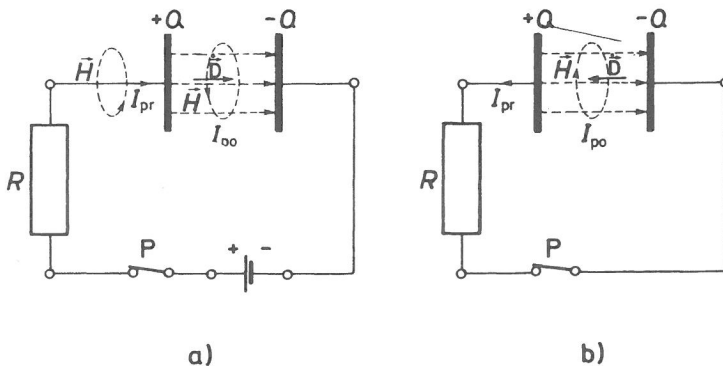
$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \Sigma I \quad (3.34)$$

To je Ampèreev zakon ili, kako se još često zove, *zakon protjecanja*. Magnetske su silnice zatvorene krivulje kroz koje protječe struja i obratno: struja oko sebe stvara zatvorene magnetske silnice.

Struja pomaka. Promatrajmo nabijanje ili izbijanje kondenzatora (sl.3.13). Dok se kondenzator nabija, vodičem teče struja, a na pločama kondenzatora prikuplja se naboj i pojačava električno polje između ploča gdje nema provodne struje. Da bi prvo Kirchhoffovo pravilo važno i za kondenzator, kažemo da provodna struja, koja vodičem dolazi do ploča kondenzatora, nastavlja teći između ploča kao struja pomaka. Promjenu električnog polja između ploča tumačimo kao struju pomaka. Da bi važila jednadžba kontinuiteta struje (koja proizlazi iz zakona o očuvanju naboja), provodna struja i struja pomaka moraju biti jednake.

* Analogno električnom naponu, izraz $\int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ponekad se zove i *magnetski napon*, a izraz $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s}$ *magnetomotorna sila*.

Potražimo vezu između struje pomaka i toka električnog polja. Zamislimo neku zatvorenu plohu koja obuhvaća pozitivno nabijenu ploču kondenzatora na slici 3.13.



Slika 3.13. Struja pomaka između ploča kondenzatora: a) pri nabijanju, b) pri izbijanju

Prema Gaussovu zakonu je:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (3.35)$$

Provodna struja jednaka je struji pomaka

$$I_{pr} = \frac{dQ}{dt} = I_{pom}. \quad (3.36)$$

Uvrstivši (3.35) u (3.36) dobivamo:

$$I_{pom} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (3.37)$$

To je ukupno struja pomaka kroz zatvorenu površinu oko ploče. Struja pomaka kroz odabranu površinu S jednaka je:

$$I_{pom} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.38)$$

Vidimo, dakle, da se u strujnom krugu na slici 3.13. promjenljiva provodna struja u vodovima nastavlja kao **struja pomaka u izolatoru** (vakuumu) između ploča i tako zatvara strujni krug. Isto kao provodna struja, i struja pomaka uzrokuje magnetske efekte. Zato u Ampèreovom zakonu, koji povezuje električnu struju i magnetsko polje koje ona proizvodi, moramo napisati obje struje, i *provodnu*, i *pomačnu*:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{pr} + I_{pom} \quad (3.39)$$

ili

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.40)$$

gdje je krivulja K rub plohe površine S . To je **poopćeni Ampèreov zakon**.

Provodnu struju možemo prikazati i *gustoćom struje* $\vec{J}$:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.41)$$

i uvrstiti u relaciju (3.40). Tako dobijemo relaciju:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.42)$$

To je *četvrta Maxwelllova jednadžba*.

Jednadžba (3.42) može se provjeriti npr. mjerenjem sile između dvije pravčaste struje, odnosno proučavanjem osobina elektromagnetskih valova.

Ako magnetsko polje nastaje samo promjenom električnog toka (tj. ako nema provodnih struja), četvrta Maxwelllova jednadžba izgleda ovako:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.42.a)$$

Ampèreov zakon (3.42) i Faradayev zakon (3.31) gotovo su simetrične jednadžbe, pogotovo one (3.42.a) i (3.31); jedina je razlika suprotan predznak i to što u Faradayevu zakonu nema člana koji se pojavljuje zbog gibanja magnetskih monopola jer oni ne postoje.

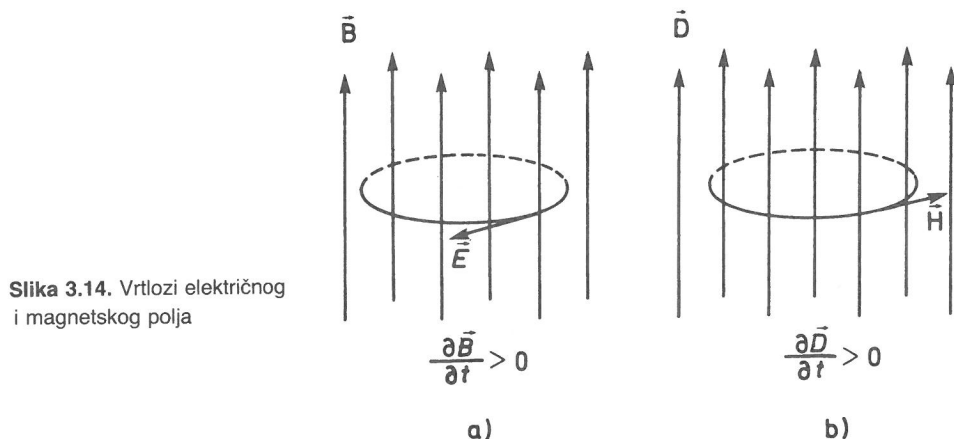
U Faradayevu i Ampèreovu zakonu, posebno ako su napisani u obliku (3.31) i (3.42.a), vidimo još jedan primjer simetrije u prirodi. Faradayev zakon kaže da **promjenljivo magnetsko polje inducira električno**, a Ampèreov zakon govori da **promjenljivo električno polje inducira magnetsko**.

Maxwell je uočivši simetriju električnoga i magnetskog polja, poopćio Ampèreov zakon i tako došao do relacije (3.42.a), simetrične jednadžbi Faradayeva zakona indukcije.

Razlika u predznaku jednadžbi (3.31) (3.42.a), koju potvrđuje eksperiment, ilustrirana je na slici 3.14. Ako homogeno magnetsko polje indukcije B i njegov tok Φ_B (proizvedeno npr. elektromagnetom u čijim se zavojima mijenja jakost struje) jednoliko rastu tako da je $\frac{d\Phi_B}{dt} = \text{konst.}$ i veće od nule tada se smjer silnica električnog polja koje se u obliku koncentričnih kružnica induciraju oko magnetskih silnica odnosno smjer vektora $\vec{E}$ određuje pravilom lijeve ruke.

Slično, ako se električno polje (sl.3.14.b) mijenja, tako da se npr. iznos toka Φ_D povećava ($\frac{d\Phi_D}{dt} = \text{konst.}$ i veće od nule), inducira se magnetsko polje $\vec{H}$ odnosno $\vec{B}$.

Silnice magnetskog polja koncentrične su kružnice, a vektor $\vec{H}$ (odnosno $\vec{B}$) u smjeru je tangente na kružnicu i smjer mu se određuje pravilom desne ruke.



Slika 3.14. Vrtlozi električnog i magnetskog polja

3.5. Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku

Maxwellove jednadžbe povezuju *električno i magnetsko polje* i *naboje* koji ta polja proizvode. One su osnova klasične elektrodinamike i opisuju elektromagnet-ske valove i njihovo širenje kroz prostor. U prethodnim smo ih odjeljcima izveli iz osnovnih zakona elektriciteta i magnetizma, napisali u integralnom obliku i tako dobili ove četiri jednadžbe:

$$1. \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad \text{Gaussov zakon za električno polje}$$

$$2. \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Gaussov zakon za magnetsko polje}$$

$$3. \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Faradayev zakon indukcije}$$

$$4. \oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \text{poopćeni Ampèreov zakon}$$

Ako brzine promjene električnoga i magnetskog toka $\left(\frac{d\Phi_D}{dt} \text{ i } \frac{d\Phi_B}{dt}\right)$ nastaju sa-mo zbog mijenjanja vektora $\vec{D}$ i $\vec{B}$, tada je

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{ i } \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

pa zadnje dvije Maxwelllove jednađbe možemo pisati i u obliku:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (3.31.a)$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (3.42.b)$$

Maxwellove jednađbe pokazuju da su električno i magnetsko polje određeni *razmještajem i gibanjem naboja* i da su polja *međusobno povezana*.

Električno i magnetsko polje $\vec{E}$ i $\vec{B}$ definirani su Lorentzovom silom, tj. ukupnom silom na naboj koji se nalazi u elektromagnetskom polju:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.43)$$

Maxwellove jednađbe, kao i ova relacija, fundamentalne su jednađbe elektromagnetizma te su, zajedno s relacijom između gustoće struje i jakosti električnog polja $\vec{J} = \kappa \vec{E}$, relacijama $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ i $\vec{B} = \mu \vec{H}$ i jednađbom kontinuiteta za naboj

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ}{dt}, \text{ osnova elektrodinamike.}$$

Primjer

U dugoj cilindričnoj zavojnici polumjera 1 cm struja raste po zakonu $I = 0,5 t^2$. Broj zavoja je 2000 m^{-1} . Odredite električno polje i struju pomaka: a) na osi solenoida i b) na površini zavojnice.

Primjenit ćemo treću Maxwellovu jednađbu

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Krivulja K bit će kružnica polumjera r sa središtem na osi zavojnice, okomita na tu os, a površina S bit će površina te kružnice:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2r\pi E$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = Br^2\pi = \mu_0 \frac{NI}{l} r^2\pi$$

Iz treće Maxwellove jednađbe slijedi:

$$E \cdot 2r\pi = \mu_0 \frac{N}{l} r^2\pi \frac{\partial I}{\partial t} = \mu_0 \frac{NI}{l} r^2\pi t$$

$$E = \mu_0 r \frac{N}{2l} t$$

Ako je $r=0$, $E=0$. Za $r=R$, $E = \mu_0 \frac{RN}{2l} t = 1,256 \cdot 10^{-5} \text{Vm}^{-1} \text{s}^{-1} t$. Struja pomaka nastaje u prostoru gdje se vremenski mijenja električno polje

$$I_{\text{pomaka}} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = r^2 \pi \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = r^2 \pi \epsilon_0 \mu_0 r \frac{N}{2l}$$

Ako je $r=0$, $I_p=0$. Ako je $r=R$, $I_p = R^2 \pi \epsilon_0 \mu_0 \frac{RN}{2l}$, a gustoća struje pomaka je $J_p = \epsilon_0 \mu_0 \frac{RN}{2l}$, tj. $J_p = 1,1 \cdot 10^{-16} \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$.

Primjer

Pločasti kondenzator kapaciteta $C=1 \text{ nF}$ nabijen je na izvoru napona od 1000 V . Razmak među pločama je 1 mm . Nakon toga odvojen je od izvora napona i izbijen preko otpora $R=1000 \Omega$.

Koliko je magnetsko polje u točki između ploča udaljenoj 10 cm od osi kondenzatora u $t=1 \mu\text{s}$?

Pri izbijanju napon na pločama kondenzatora mijenja se prema zakonu

$$U = \frac{Q_0}{C} e^{-t/RC},$$

a električno polje između ploča je $E = \frac{U}{d}$.

Vremenska konstanta $RC = 10^{-9} \cdot 10^3 \text{ s} = 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s}$, $Q_0 = CU$, $Q_0 = 10^{-9} \cdot 10^3 = 10^{-6} \text{ C}$, te je

$$E = \frac{Q}{Cd} e^{-t/RC} = \frac{10^{-6} \text{ C}}{10^{-9} \text{ F} \cdot 10^{-3} \text{ m}} e^{-t/10^{-6} \text{ s}}$$

$$E = 10^{-6} e^{-t/10^{-6}}, \text{ V m}^{-1}$$

Magnetsko ćemo polje izračunati pomoću četvrte Maxwellove jednadžbe,

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Kao krivulju K odabrat ćemo kružnicu polumjera r unutar kondenzatora, paralelnu s pločama kondenzatora. Površina S neka bude površina toga kruga:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \oint_K ds = 2\pi r H$$

$$\iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \iint_S dS = \epsilon_0 r^2 \pi \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$2 r \pi H = \epsilon_0 r^2 \pi \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$H = \frac{\epsilon_0 r}{2} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad B = \mu_0 H = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} r \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Pri izbijanju kondenzatora električno se polje mijenja u vremenu. Vremenska derivacija jakosti električnog polja je:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{Q_0}{C d} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \frac{1}{RC} = -3,68 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{sm}}.$$

$$\text{Uvrštavanjem } r = 0,1 \text{ m, } \frac{\partial E}{\partial t} = 3,7 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{sm}},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad \text{i} \quad \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}, \text{ dobivamo:}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{Tm A}^{-1} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \cdot 0,1 \text{m} \cdot 3,7 \cdot 10^{11} \text{Vs}^{-1} \text{m}^{-1})$$

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \text{T}.$$

Iz dobivenog rezultata uočiti ćete kako vremenska promjena električnog polja uzrokuje vrlo malo (nemjerljivo) magnetsko polje, suprotno elektromagnetskoj indukciji kojom se, prema Faradayevom zakonu, promjenom magnetskog polja inducira relativno jako (lako mjerljivo) električno polje.

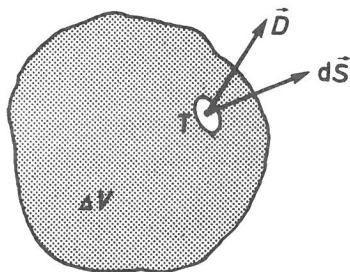
3.6. Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku

Maxwellove jednadžbe koje smo obradili u prethodnom odjeljku odnose se na konačne volumene i površine u prostoru. Da bismo opisali ponašanje električnoga i magnetskog polja u nekoj točki prostora, napisane jednadžbe moramo transformirati u diferencijalni oblik. Treba, dakle, pogledati što se događa s jednadžbama kada se volumen i površina, po kojima integriramo, smanjuju i postaju infinitezimalno maleni, kada je plohom zatvoreno sasvim malo područje, infinitezimalni okoliš neke točke, kratko rečeno, kada se graničnim prijelazom volumen suzi na jednu točku.

Prva Maxwellova jednadžba. Divergencija vektora. Ako prvu Maxwellovu jednadžbu podijelimo volumenom ΔV (sl.3.15) što ga obuhvaća zatvorena ploha

S (kroz koju se traži tok vektora $\vec{D}$) i načinimo granični prijelaz tako da se ta ploha stegne na točku T , imamo:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \rho dV}{\Delta V}. \quad (3.44)$$



Slika 3.15. Uz definiciju divergencije vektora

Na lijevoj ćemo strani jednadžbe (3.44) dobiti skalarnu veličinu koja se zove **divergencija** vektora $\vec{D}$; ona definira tok tog vektora po jediničnom volumenu u infinitezimalno malom okolišu promatrane točke:

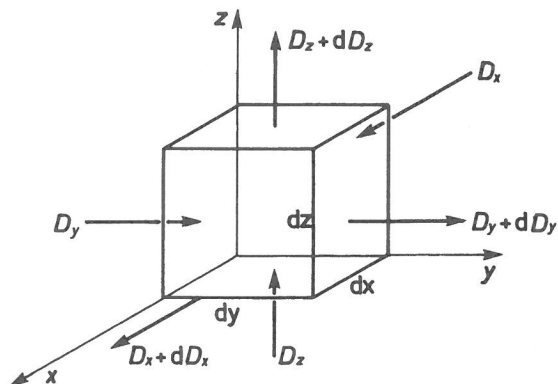
$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \text{div } \vec{D} \quad (3.45)$$

Desna strana jednadžbe (3.44) jednaka je prostornoj gustoći naboja ρ u promatranoj točki. Jednadžbu (3.44) možemo, dakle, pisati ovako:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (3.46)$$

To je prva Maxwelllova jednadžba u diferencijalnom obliku.

Izračunavanje $\text{div } \vec{D}$. Da bismo izračunali divergenciju vektora $\vec{D}$, $\text{div } \vec{D}$ u Cartesijevu sustavu, promatrajmo tok vektora $\vec{D}$ kroz infinitezimalno mali volumen oblika kocke (sl.3.16).



Slika 3.16. Uz izračunavanje divergencije vektora

Tok vektora $\vec{D}$ kroz stranice kocke je

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= (D_x + dD_x) dydz - D_x dydz + (D_y + dD_y) dxdz - D_y dxdz + \\ &+ (D_z + dD_z) dxdy - D_z dxdy = dD_x dydz + dD_y dxdz + dD_z dxdy = \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial D_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial D_z}{\partial z} dxdydz = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

Budući da je prema prvoj Maxwelllovoj jednadžbi

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

to je:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (3.47)$$

Tako smo izračunali $\text{div } \vec{D}$ u Cartesijevu koordinatnom sustavu:

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (3.48)$$

Divergencija nekog vektora je skalar, kako se i vidi iz relacije (3.48).

Druga Maxwelllova jednadžba. Slično se dobije diferencijalni oblik za drugu jednadžbu:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.49)$$

ili, pisano u Cartesijevim koordinatama:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3.50)$$

Iz hidrodinamike je poznato da je divergencija mjera jakosti izvora i ponora, tj. da mjeri strujanje iz neke točke. Ako je divergencija u nekoj točki pozitivna, silnice izlaze iz točke: to je »izvor« polja.

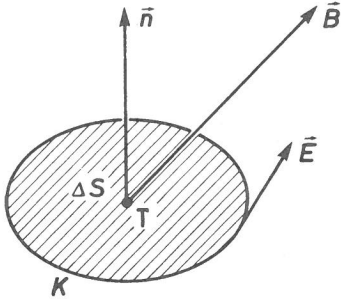
Prva nam jednadžba kaže da su pozitivni naboji *izvori*, a negativni naboji *ponori električnog polja*, a druga jednadžba kaže da nema izoliranih magnetskih naboja.

Treća Maxwelllova jednadžba. Rotacija vektora. Kada površinu odnosno krivulju integracije u trećoj i četvrtoj Maxwelllovoj jednadžbi suzimo na točku, i te jednadžbe dobivamo u diferencijalnom obliku.

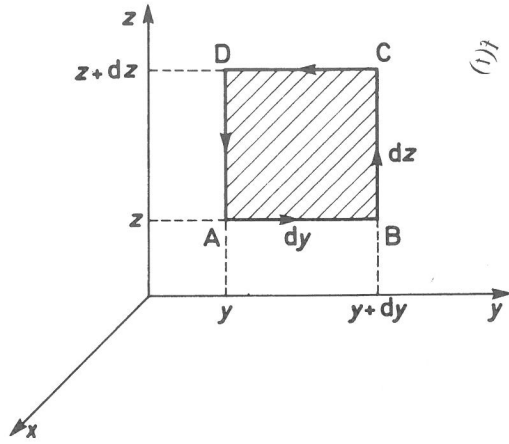
Ako treću jednadžbu podijelimo površinom ΔS (sl.3.17) i napravimo granični prelaz $\Delta S \rightarrow 0$, dobit ćemo:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta S} = - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \iint_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\Delta S} \quad (3.51)$$

$$\left(\text{Pritom smo uzeli u obzir da je } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\Delta S} B_n dS. \right)$$



Slika 3.17. Uz definiciju rotacije vektora



Slika 3.18. Uz izračunavanje rotacije vektora

Da bismo transformirali izraz (3.51), kao površinu ΔS odabrat ćemo infinitezimalno mali kvadrat, a kao krivulju K četiri stranice (opseg) kvadrata ABCDA. Odaberimo ga najprije u ravnini yz kao na slici 3.18.

Cirkulacija vektora $\vec{E}$ po krivulji K je

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= [E_y(z) - E_y(z+dz)] dy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dz dy \\ \int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= [E_z(y+dy) - E_z(y)] dz = \frac{\partial E_z}{\partial y} dz dy. \end{aligned}$$

Cirkulacija vektora $\vec{E}$ po infinitezimalno malom kvadratu ABCDA je

$$\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dz dy \quad (3.52)$$

Magnetski tok vektora $\vec{B}$ kroz površinu kvadrata $d\vec{S}$ je

$$\iint_{d\vec{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_x dz dy \quad (3.53)$$

Uvrštavanjem izraza (3.52) i (3.53) u (3.51) dobivamo

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (3.54)$$

Slično ćemo integracijom po kvadratu stranica dx i dy u xy ravnini odnosno dx i dz uz xz ravnini dobiti još dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Te tri skalarne jednadžbe mogu se prikazati jednom vektorskom. Na desnoj su strani tih jednadžbi komponente vremenske derivacije vektora magnetske indukcije $\vec{B}$, pa se i njihove lijeve strane mogu smatrati komponentama vektora koji ćemo nazvati *rotacijom električnog polja* $\vec{E}$ ($\text{rot } \vec{E}$) i koji je definiran izrazom

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta S} \quad (3.56)$$

Rot $\vec{E}$ im ove komponente

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Treća Maxwellova jednadžba može se, dakle, napisati u diferencijalnom obliku

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.58)$$

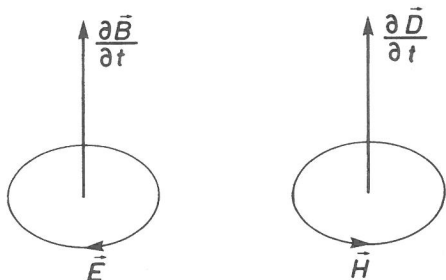
Četvrta Maxwellova jednadžba. Na sličan način i četvrtu Maxwellovu jednadžbu možemo dobiti u diferencijalnom obliku integrirajući ponovo po infinitezimalno malom kvadratu i njegovoj površini. Rezultat je:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.59)$$

To je veza između gustoće struje $\vec{J}$ u nekoj točki prostora i električnoga i magnetskog polja u istoj točki.

Iz hidrodinamike je poznato da je fizikalno značenje rotacije povezano s *vrtlozima*. U Maxwellovim jednađbama rotacija opisuje *jakost vrtloga električnoga i magnetskog polja*.

Zadnje dvije jednađbe elektromagnetskog polja (3.58) i (3.59) kažu da oko silnica promjenljivoga magnetskog polja, okomito na njih nastaju zatvorene silnice (vrtlozi) električnog polja, i obratno, oko silnica promjenljivoga $\vec{E}$ nastaju zatvorene silnice $\vec{B}$ (sl. 3.19).



Slika 3.19. Simetrija treće i četvrte Maxwellove jednađbe

Tablica 3.1. Maxwellove jednađbe

Gaussov zakon za električno polje	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
Gaussov zakon za magnetsko polje	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Faradayev zakon indukcije	$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampèreov zakon	$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

3.7. Energija elektromagnetskog polja

Energiju električnog polja možemo protumačiti analizirajući nabijanje pločastog kondenzatora, a energiju magnetskog polja promatranjem uspostavljanja struje kroz cilindričnu ili torusnu zavojnicu. Tako dobivene izraze zatim možemo poopćiti na bilo koja električna i magnetska odnosno na elektromagnetska polja, a dobivene izraze kasnije upotrijebiti pri proučavanju energije elektromagnetskih valova.

Energija električnog polja. Za nabijanje kondenzatora potrebno je izvršiti određeni rad jer je nužno svladati odbojne sile pri dovođenju naboja na armaturu kondenzatora.

Nabijanje kondenzatora možemo shvatiti kao prijenos naboja s jedne ploče

na drugu. Rad potreban da se naboj dQ prenese s jedne ploče na drugu pri naponu U između ploča je:

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ \quad (3.60)$$

jer je za kondenzator $Q = CU$. Integracijom dobivamo ukupni rad potreban za nabijanje kondenzatora kapaciteta C nabojem Q , odnosno do napona U :

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} \quad (3.61)$$

Rad potreban za nabijanje kondenzatora pretvara se u potencijalnu energiju električnog polja unutar kondenzatora:

$$E_{el} = \frac{CU^2}{2} \quad (3.62)$$

Ako umjesto kapaciteta C u relaciji (3.62) pišemo izraz $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$ za kapacitet pločastog kondenzatora te primijenimo vezu $U = Ed$, dobit ćemo:

$$E_{el} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \frac{U^2}{2} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 V \quad (3.63)$$

gdje je $V = Sd$ volumen kondenzatora. Iz (3.63) dobivamo *gustoću energije homogenoga električnog polja* u vakuumu:

$$w_{el} = \frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$w_{el} = \frac{1}{2} ED \quad (3.64)$$

Budući da izraz za gustoću energije ne ovisi o geometrijskim veličinama, on vrijedi ne samo za pločasti kondenzator, nego općenito za bilo koje električno polje.

Primjer

Kolika je energija i gustoća energije pločastog kondenzatora ako je površina ploče 100 cm^2 , razmak ploča $0,5 \text{ cm}$, a između ploča dielektrik ($\epsilon_r = 2,2$)? Napon kondenzatora je 1000 V .

Iz (3.63) i (3.64) dobivamo energiju i gustoću energije električnog polja nabijenog kondenzatora:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \frac{0,01 \text{ m}^2}{0,005 \text{ m}} \cdot 10^6 \text{ V}^2$$

$$E_{\text{el}} = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ J}; \quad w = 0,39 \text{ J/m}^3$$

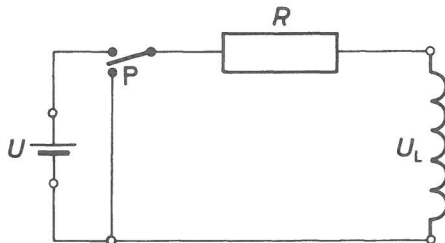
Energija magnetskog polja. Kada zavojnicu induktiviteta L (sl. 3.20) priključimo na izvor napona, struja neće odmah postići maksimalnu vrijednost jer će se ukupna elektromotorna sila smanjiti za inducirani napon nastao vremenskim mijenjanjem struje.

Inducirani napon samoindukcije na krajevima zavojnice dan je izrazom:

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.65)$$

Da bi se u zavojnici uspostavila struja, a time i magnetsko polje, potrebno je izvršiti određeni rad koji se pretvara u energiju magnetskog polja zavojnice.

Kada prekidačem P (sl. 3.20) isključimo izvor napona i krajeve zavojnice spojimo preko otpornika otpora R , struja neće odmah pasti na nulu nego će se postepeno smanjivati obavljajući rad na otporniku. Taj je rad jednak radu koji smo utrošili za stvaranje magnetskog polja: magnetsko nam polje u obliku rada na otporniku vraća energiju. Promjena energije magnetskog polja jednaka je, dakle, radu struje.



Slika 3.20. Uz izračunavanje energije magnetskog polja

$$W = \int_0^\infty U_L I dt = - \int_0^\infty L \frac{dI}{dt} I dt = -L \int_I^0 I dI \quad (3.66)$$

$$W = \frac{LI^2}{2} - 0 = E_m(I) - E_m(I=0)$$

Uvrstimo li u (3.66) izraz za induktivitet zavojnice $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$, dobivamo izraz za energiju magnetskog polja zavojnice:

$$E_m = \mu \frac{N^2 S I^2}{2l} = \frac{\mu}{2} V H^2 \quad (3.67)$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je magnetsko polje različito od nule jedino unutar zavojnice, tj. u volumenu $V = Sl$ te da mu je tu jakost $H = \frac{NI}{l}$.

Gustoća energije magnetskog polja je:

$$w_m = \frac{E_m}{V} = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (3.68)$$

Rezultat (3.68) iako izveden samo za zavojnicu vrijedi za svako magnetsko polje.

Primjer

Torusna zavojnica s jezgrom od željeza srednjeg opsega 50 cm i presjeka 5 cm² ima 500 zavoja. Kroz zavojnicu teče struja jakosti 1 A. Relativna permeabilnost željeza u tim je uvjetima 500.

Kolika je energija i gustoća energije magnetskog polja u jezgri zavojnice?

Prema relaciji (3.67) energija magnetskog polja zavojnice je

$$E_m = \frac{L I^2}{2} = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 S}{2l} I^2 = 7,9 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

Gustoća energije magnetskog polja dana je formulom (3.68) i u našem primjeru iznosi:

$$w = \frac{E_m}{V}$$

$$w = \frac{E_m}{Sl} = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 I^2}{2 l^2} = 314 \text{ J/m}^3.$$

PITANJA I ZADACI

1. Protumačite prve dvije Maxwellove jednačbe.
2. Objasnite Faradayev zakon indukcije. Što kaže treća Maxwellova jednačba?
3. Protumačite četvrtu Maxwellovu jednačbu. Na koji način pomoću struje pomaka treba proširiti Ampèrov teorem da bi se dobila četvrta Maxwellova jednačba?
4. Napišite Maxwellove jednačbe za vakuum.
5. Iz općenitog oblika Maxwellovih jednačbi izvedite jednačbe koje vrijede za elektrostatiку.
6. Kako se iz Maxwellovih jednačbi u integralnom obliku dobiju jednačbe u diferencijalnom obliku?
7. Magnetsko je polje zadano izrazom $\vec{B} = \vec{k} B_0 \sin \omega(t - \frac{x}{c})$. Dokažite da ono zadovoljava drugu Maxwellovu jednačbu u posebnom slučaju, kada je zatvorena ploha kocka stranice a na slici 3.16.
8. Zadano je električno polje u vakuumu $\vec{E} = \vec{i} E \sin \omega(t - \frac{z}{c})$. Izračunajte struju pomaka kroz kocku stranice a na slici 3.16. Kolika je cirkulacija pridruženoga magnetskog polja po rubu svake stranice kocke?
9. Pomoću četvrte Maxwellove jednačbe dokažite da je magnetsko polje točkastog naboja Q koji se giba nerelativističkom brzinom v u točki T jednako

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3},$$

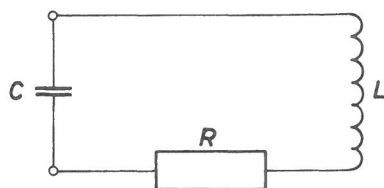
gdje je r udaljenost točke T od naboja Q .

4. Elektromagnetski titraj i valovi

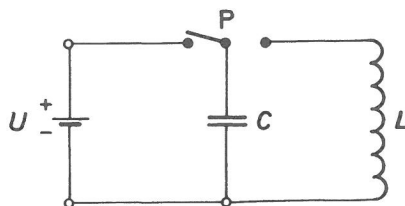
4.1. Titrajni LC-krug

Elektromagnetski titraji nastaju u električnome titrajnom krugu koji se sastoji od kondenzatora kapaciteta C , zavojnice induktiviteta L i otpornika otpora R (sl. 4.1). Takav se krug često skraćeno zove *RLC-krug*. Ponekad se omski otpor kruga može zanemariti i promatrati idealizirani titrajni *LC-krug*.

Titranje u krugu možemo uspostaviti dovođenjem početnog naboja na kondenzator tako da u $t=0$, naboj na kondenzatoru bude Q_0 . Zamislimo da pomoću prekidača P u strujnom krugu na slici 4.2. odvojimo kondenzator od



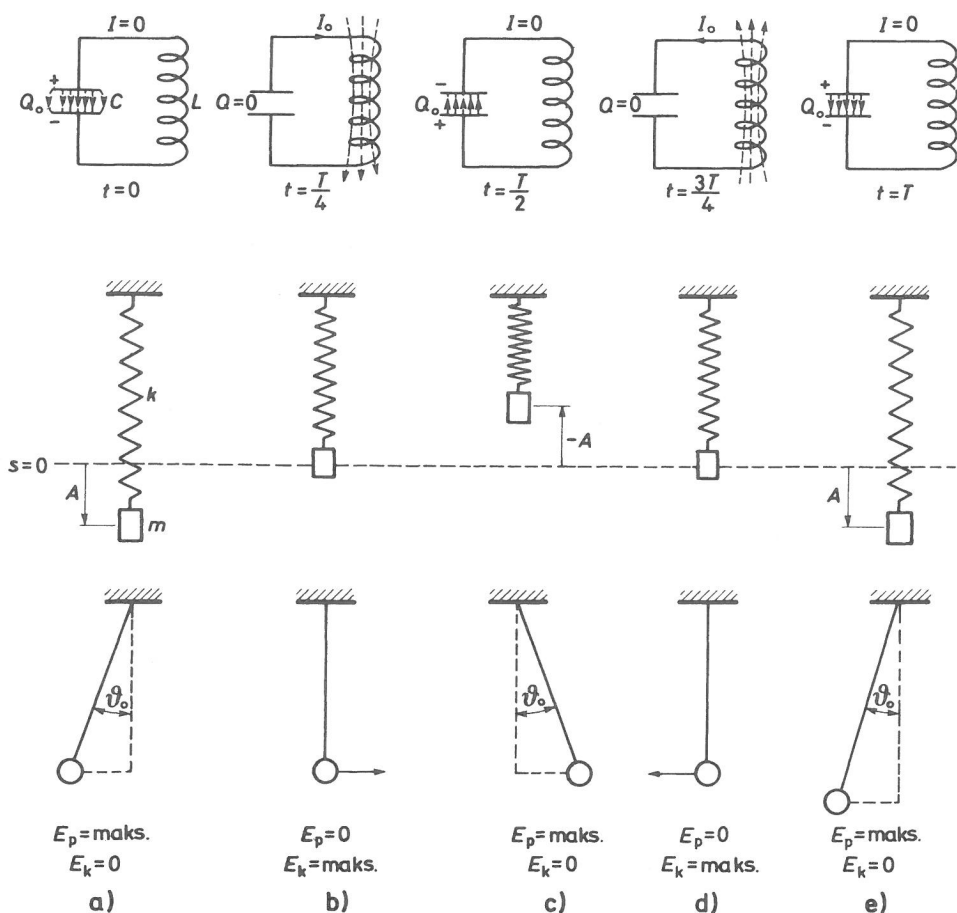
Slika 4.1. Titrajni krug



Slika 4.2. Nabijanje kondenzatora u LC-krugu

zavojnice i iz nekoga vanjskog izvora kondenzator nabijemo nabojem Q_0 , te da napon na njemu bude U_0 , a energija električnog polja u kondenzatoru $E_C = Q_0^2 / 2C$. Zatim prekidačem P isključimo izvor napona U i zatvorimo *LC*-krug tako da se kondenzator izbijja kroz zavojnicu (sl. 4.3.a). Zbog samoindukcije zavojnice struja kroz *LC*-krug eksponencijalno raste, i kada se kondenzator izbijje, dosegne maksimalnu vrijednost I_0 (sl. 4.3.b).

Energija električnog polja kondenzatora $E_C = Q^2 / 2C$ pritom se pretvori u energiju magnetskog polja zavojnice $E_L = LI^2 / 2$. Kada se kondenzator isprazni, struja ne prestane teći kroz krug jer zbog samoindukcije zadržava isti smjer i postepeno se smanjuje do nule, nabivši ponovo kondenzator, ovaj put suprotnim polaritetom (sl. 4.3.c). Tada ponovo počinje izbijanje kondenzatora i proces teče u suprotnom smjeru (sl. 4.3.d. i e), a nakon vremena T sistem se nađe u početnom stanju i počinje isti proces, koji se stalno ponavlja. Rezultat je periodično nabijanje i izbijanje kondenzatora odnosno pretvaranje energije električnog polja u energiju magnetskog polja i obratno. U titrajnom su krugu nastali elektromagnetski titraji perioda T .



Slika 4.3. Usporedba električnoga i mehaničkoga titrajnog sistema

Između mehaničkih i električnih titrajnih sistema postoji analogija.

Na slici 4.3. uspoređeno je mehaničko i elektromagnetsko titranje. U trenucima $t = 0$, $t = T/2$, $t = T$ itd. energija električnog polja $Q^2/2C$ je najveća, a energija magnetskog polja jednaka nuli (jer je $I = 0$). U mehaničkom je sistemu potencijalna energija $ks^2/2$ tada maksimalna, a kinetička je jednaka nuli jer je brzina nula. U trenucima $t = T/4$, $t = 3T/4$ itd. energija magnetskog polja $LI^2/2$ maksimalna je, a energija električnog polja jednaka nuli. U mehaničkom sistemu kinetička je energija ($mv^2/2 = m\dot{s}^2/2$) maksimalna, a potencijalna jednaka nuli.

Budući da je omski otpor zanemariv (nema pretvaranja energije u toplinu) i da je isijavanje energije u prostor u obliku elektromagnetskih valova zanemarivo (titrajni je krug zatvoren), pritom vrijedi zakon očuvanja elektromagnetske energije, kao što za jednostavni harmonički oscilator vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije.

Analogija između mehaničkih i električnih titrajnih sistema omogućuje primjenu rezultata mehaničkog titranja (1. poglavlje) na električne titrajne krugove. Uspoređujući mehaničke i električne sisteme, možemo zaključiti da električna potencijalna energija $Q^2/2C$ u LC -krugu odgovara potencijalnoj energiji harmoničkog oscilatora $ks^2/2$, energija magnetskog polja $LI^2/2$ odgovara kinetičkoj energiji $ms^2/2$, induktivitet L odgovara masi m , naboj Q odgovara pomaku s , struja I odgovara brzini $\dot{s}$, $1/C$ konstanti k , brzina promjene struje dI/dt akceleraciji a , sila $F=ks$ odgovara naponu (elektromotornoj sili), itd. Pomoću te analogije jednačbe, koje smo izveli u poglavlju *Mehaničko titranje*, možemo transformirati i iskoristiti i u ovom poglavlju. (V. odjeljak 4.4. i primjer na str. 170)

U idealnom LC -krugu (tj. u LC -krugu u kojemu je omski otpor $R=0$) zbroj električne i magnetske energije u svakom je trenutku konstantan:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{konst.} \quad (4.1)$$

Deriviramo li tu jednačbu po vremenu, dobit ćemo:

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

ili, zbog $I = \frac{dQ}{dt}$

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (4.3)$$

Ta je jednačba analogna jednačbi harmoničkog oscilatora u mehanici

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m} s = 0 \quad (4.4)$$

Rješenje jednačbe (4.3) možemo pisati u obliku

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.5)$$

gdje je kružna frekvencija slobodnih elektromagnetskih titraja

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.6)$$

odnosno period

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} \quad (4.7)$$

To je poznata **Thomsonova formula** za frekvenciju i period električnoga titrajnog kruga.

Napon na kondenzatoru je $U_C = \frac{Q}{C}$, te iz (4.5) dobivamo:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.8)$$

Promjenu jakosti struje u titrajnom krugu dobivamo derivirajući naboj (4.5)

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = Q_0 \omega_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.9)$$

Fazni pomak između struje i napona na kondenzatoru je $\frac{\pi}{2}$, tj. struja prethodi naponu na kondenzatoru za 90° . U primjeru na slici 4.3. u $t=0$, $Q = Q_0$, $I = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Promjenljivo električno i magnetsko polje u titrajnom krugu (sl. 4.3) lokalizirano je u prostoru oko kruga. Takav se krug zove zatvoreni titrajni krug. Iz njega se elektromagnetski titraji ne šire u prostor, pa takav krug ne može služiti kao izvor elektromagnetskih valova. Da bi se promjenljivo električno i magnetsko polje iz titrajnog kruga širilo prostorom, potrebno je otvoriti titrajni krug, o čemu ćemo govoriti u odjeljku 4.5.

4.2. Prigušeni elektromagnetski titraji

U idealnome titrajnom krugu (sl. 4.3) nema gubitaka ($R=0$) i takav bi krug titrao uvijek jednakim amplitudama i frekvencijom danom Thomsonovom formulom (4.6). U realnome titrajnom krugu ($R \neq 0$), dio energije pretvara se u toplinu pa se titranje priguši kao u mehaničkim sistemima.

Energija u RLC -krugu jednaka je

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \quad (4.10)$$

i nije očuvana. Derivacija energije po vremenu jednaka je

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -RI^2 \quad (4.11)$$

gdje je RI^2 snaga koja se utroši u omskom otporu. (Predznak minus znači da se energija u krugu smanjuje). Zamjenom $I = \frac{dQ}{dt}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

(Umjesto iz zakona očuvanja energije, jednadžbu (4.12) možemo dobiti i primjenom Ohmova zakona na RLC -strujni krug.)

Ta je jednačba analogna jednačbi za prigušeno mehaničko titranje

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (4.13)$$

Jednačbu (4.12) možemo i formalno dobiti iz (4.13) ako umjesto s pišemo Q , umjesto $\omega_0^2 = k/m$ uvrstimo $\omega_0^2 = 1/LC$, a $2\delta = b/m$ zamijenimo $2\delta = R/L$.

Omski otpor u električnom krugu ima istu ulogu kao i koeficijent trenja b u mehaničkim titrajnim sistemima.

Naboj Q na kondenzatoru mijenja se po sličnom zakonu kao i pomak s u prigušenome mehaničkom titranju

$$Q = Q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.14)$$

gdje je Q_0 amplituda naboja u $t = 0$, $\delta = R/2L$ faktor prigušenja, φ početna faza titranja naboja, a ω kružna frekvencija titranja:

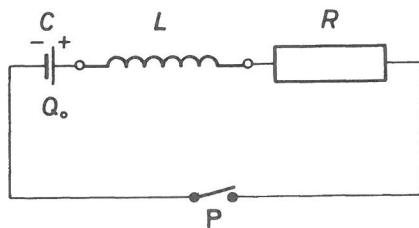
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4.15)$$

što se može pokazati uvrštavanjem (4.14) u (4.12).

Primjer

Kondenzator nabijen nabojem Q_0 spojen je sa zavojnicom induktiviteta L i otpornikom otpora R u serijski strujni krug.

Odredite ovisnost struje o vremenu.



Slika 4.4. Titrajni krug

Diferencijalna jednačba titranja je

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0 \quad (1)$$

Početni su uvjeti $t = 0$, $Q = Q_0$, $I = 0$.

Opće rješenje jednačbe (1) je

$$Q = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

gdje je $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, što se može dobiti uvrštavanjem

(2) u (1).

Uvrštavanjem početnih uvjeta u jednadžbe za Q i $I = \frac{dQ}{dt}$ možemo odrediti konstante A i φ_0 :

$$t = 0 \quad Q = Q_0 = A \sin \varphi_0$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = A e^{-\delta t} [\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \delta \sin(\omega t + \varphi_0)]$$

$$t = 0, \quad I = 0, \quad A \left(\omega \cos \varphi_0 - \delta \sin \varphi_0 \right) = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega}{\delta}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{\omega/\delta}{\sqrt{1 + \omega^2/\delta^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}$$

$$A = \frac{Q_0}{\sin \varphi_0} = \frac{Q_0 \sqrt{\omega^2 + \delta^2}}{\omega} = \frac{Q_0 \omega_0}{\omega}$$

Ovisnost naboja kondenzatora o vremenu:

$$Q = \frac{Q_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{Q_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} [\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0]$$

$$Q = e^{-\delta t} \frac{Q_0 \omega_0}{\omega} \left[\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} \sin \omega t + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} \cos \omega t \right]$$

$$Q = \frac{Q_0}{\omega} e^{-\delta t} [\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t].$$

Ovisnost struje o vremenu:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0(\omega^2 + \delta^2)}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$I = \frac{Q_0 \omega_0^2}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

Neka je npr. $Q_0 = 10 \mu\text{C}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $L = 2 \text{mH}$ i neka omski otpor u jednom primjeru bude $R_1 = 1 \Omega$, a u drugome $R_2 = 5 \Omega$. Tada je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7071 \text{ s}^{-1} \quad T_0 = 8,89 \text{ ms}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_1^2}{4L^2}} = 7067 \text{ s}^{-1} \quad T_1 = 8,89 \text{ ms}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{4L^2}} = 6960 \text{ s}^{-1} \quad T_2 = 9,03 \text{ ms}$$

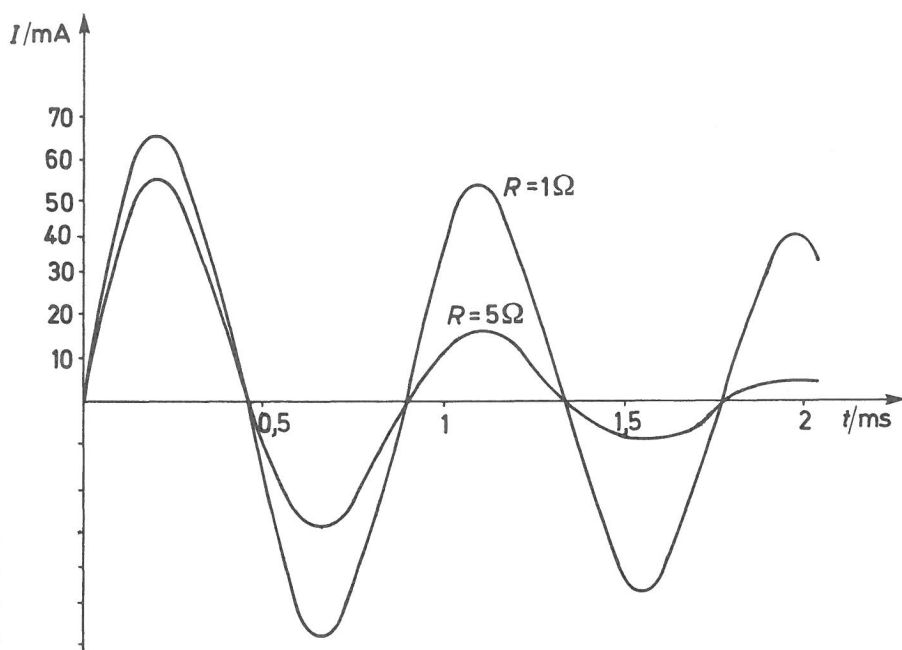
$$\delta_1 = \frac{R_1}{2L} = 250 \text{ s}^{-1}$$

$$\delta_2 = \frac{R_2}{2L} = 1250 \text{ s}^{-1}$$

$$I_1 = 0,071 \text{ A } e^{-250t} \sin 7067 t$$

$$I_2 = 0,072 \text{ A } e^{-1250t} \sin 6960 t,$$

gdje je struja izražena amperima a vrijeme u sekundama. Na slici 4.5. pokazana je ovisnost struje o vremenu za zadane omske otpore: vidi se ovisnost prigušenja o otporu.



Slika 4.5. Ovisnost struje o vremenu za različita prigušenja

4.3. Prisilni elektromagnetski titraji

Ako titrajni LCR -krug spojimo na vanjsku sinusoidalnu (izmjeničnu) elektromotornu silu (napon)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (4.16)$$

gdje je $\mathcal{E}_0$ amplituda izmjenične elektromotorne sile, a ω njezina kružna frekvencija, nastaju prisilni elektromagnetski titraji. (Vanjskim se izvorom nadoknađuju gubici energije zbog otpora R .)

Taj problem analogan je prisilnom titranju mahaničkih sistema (v. odjeljak 1.5), za koje je jednadžba gibanja glasila:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = F_0 \sin \omega t \quad (4.17)$$

Uzevši u obzir analogiju mahaničkoga i električnog sistema, dobivamo jednadžbu za električni sistem (sl. 4.7)

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (4.18)$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \sin \omega t \quad (4.19)$$

a zamjenom $2\delta = \frac{R}{L}$ i $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

dobivamo

$$\ddot{Q} + 2\delta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \sin \omega t \quad (4.20)$$

(Ta se jednadžba može izvesti i primjenom Ohmova zakona ili primjenom zakona očuvanja energije na *LRC*-krug.)

Slično kao i u mehanici, rješenje te jednadžbe je sinusna funkcija:

$$Q = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.21)$$

što se može dokazati uvrštavanjem. Pritom je

$$A(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{U_0}{\omega \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2}} \quad (4.22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$$

Napon na kondenzatoru je

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (4.23)$$

Deriviranjem (4.21) dobivamo struju u krugu,

$$I = I_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (4.24)$$

gdje je

$$I_0 = \omega Q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (4.25)$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad (4.26)$$

Rezonancija za naboj Q i napon U_C je na frekvenciji:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 \quad (4.27)$$

Struja koja se harmonički mijenja u vremenu (4.24) zove se *izmjenična struja*. Nastaje prisilnim titranjem u LRC -krugu kada krug priključimo na vanjski izvor izmjenične elektromotorne sile $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Veza između amplitude struje I_0 i elektromotorne sile $\mathcal{E}_0$ u krugu je

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \quad (4.28)$$

Izraz u nazivniku nazivamo impendancijom $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$. Struja doseže maksimum kada je *impedancija* Z minimalna, tj. kad je

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad (4.29)$$

Kružna frekvencija pri rezonanciji struje je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.29.a)$$

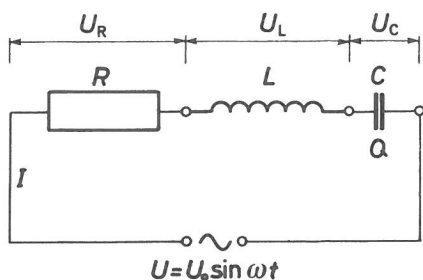
i jednaka je kružnoj frekvenciji slobodnih neprigušenih titraja u LC -krugu (sl. 4.3). Prisilno titranje u RLC -krugu može se, dakle, shvatiti kao prolaz izmjenične struje proizvedene vanjskom elektromotornom silom.

4.3.1. Naponska i strujna rezonancija

Jakost izmjenične struje kroz strujni krug u kojemu su omski, induktivni i kapacitivni otpor serijski spojeni (sl. 4.6) dana je izrazom

$$I_0 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (4.28.a)$$

Ako je induktivni otpor jednak kapacitivnome $\left(L\omega = \frac{1}{C\omega}\right)$, struja u krugu je maksimalna. Ta se pojava zove serijska rezonancija, a frekvenciju f_0 pri kojoj

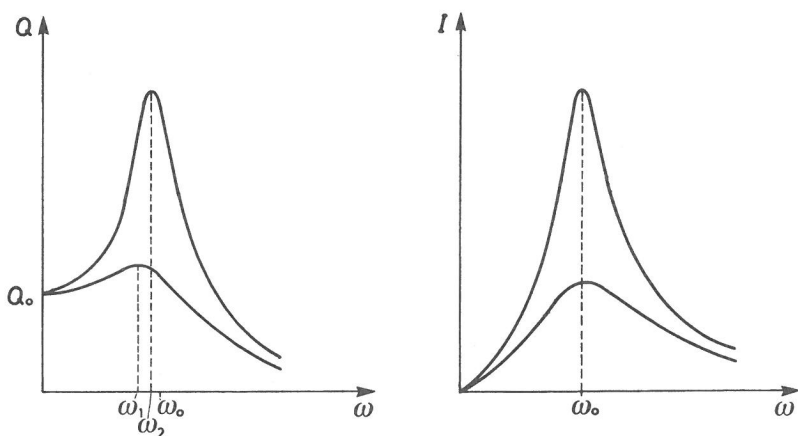


Slika 4.6. Titrajni krug spojen s vanjskom sinusoidalnom elektromotornom silom (prisilni elektromagnetski titraji)

se to postiže zovemo rezonantnom frekvencijom. Izjednačimo li oba otpora, dobit ćemo poznatu Thomsonovu formulu za rezonantnu frekvenciju:

$$\begin{aligned}
 L \omega_0 &= \frac{1}{C \omega_0} \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
 f_0 &= \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}
 \end{aligned}
 \tag{4.29.b}$$

Kad je rezonancija, $Z = R$, struja je maksimalna i u fazi je s naponom ($\varphi = 0$). Rezonanciju možemo postići mijenjanjem induktiviteta L , kapaciteta C ili frekvencije izmjenične struje. Na slici 4.7. prikazana je promjena naboja i jakosti struje zbog promjene frekvencije za dva omska otpora.



Slika 4.7. Ovisnost naboja i jakosti struje o frekvenciji vanjskog izvora

U slučaju rezonancije (4.29) naponi na zavojnici i kondenzatoru jednako su veliki, ali su suprotne faze pa se poništavaju. Ukupni je napon malen (ovisno o

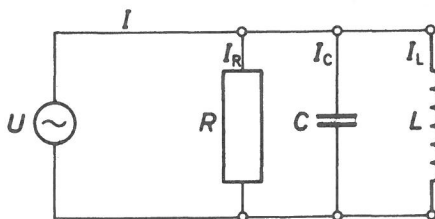
omskom otporu), a struja jaka. Takvu rezonanciju zovemo *serijskom* ili *naponskom* rezonancijom.

Ako su omski, induktivni i kapacitivni otpor paralelno spojeni u tzv. *paralelnom LRC-krugu* (sl. 4.8), pad napona jednak je na svakom elementu kruga dok struja ima različite amplitude i faze. Ako je amplituda napona U_0 , tada su amplitude struje

$$I_{R0} = U_0/R, \quad I_{C0} = \frac{U_0}{1/(C\omega)}, \quad I_{L0} = U_0/(L\omega) \quad (4.30)$$

Ukupna je struja jednaka

$$I = I_R + I_L + I_C \quad (4.31)$$



Slika 4.8. Strujna rezonancija

Vektorskim zbrajanjem tih triju struja dobivamo

$$I = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} U_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.32)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega C - 1/L\omega}{1/R}$$

Ako je omski otpor $R = \infty$, tada je

$$I = I_L + I_C \quad (4.31.a)$$

Budući da između struja kroz pojedine otpore postoji fazni pomak odnosno pomak između tih struja i napona izvora, to je uz $R = \infty$:

$$I = \frac{U_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}{R_C} + \frac{U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{R_L} \quad (4.33)$$

$$I = \sqrt{\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} U_0 \cos \omega t$$

Strujna (paralelna) rezonancija nastat će kad je struja kroz krug minimalna (impedancija maksimalna). To se događa kada je

$$\omega_0 C = \frac{1}{L\omega_0}$$

ili

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dakle, uvjet je jednak (Thomsonova formula) kao i za naponsku rezonanciju. Kad je struja iz izvora minimalna (rezonancija), struje kroz kapacitivni odnosno induktivni otpor imaju jednake amplitude, ali su suprotnih faza pa se poništavaju i ne pridonose ukupnoj struji koja je u tom slučaju jednaka struji kroz otpornik omskog otpora. Kažemo da strujni krug titra frekvencijom ω_0 danom Thomsonovom formulom (4.29).

4.4. Analogija između električnih i mehaničkih titrajnih sistema

U odjelcima prije ovoga uočili smo analogiju između elektromagnetskih i mehaničkih titrajnih sistema. Ta nam analogija pomaže pri razumijevanju rada tih sistema i rješavanju problema s tog područja.

U tablici su uspoređene analogne veličine mehaničkih i električnih sistema.

Tablica 4.1. Analogija između električnih i mehaničkih sistema

Mehanički sistem	Električni sistem
pomak s	naboj Q
masa m	induktivitet L
brzina $v = \frac{ds}{dt}$	struja $I = \frac{dQ}{dt}$
konstanta opruge k	recipročna vrijednost kapaciteta $\frac{1}{C}$
sila F	elektromotorna sila $\mathcal{E}$
vlastita frekvencija $\omega_0 = \sqrt{k/m}$	vlastita frekvencija $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
koeficijent otpora b	otpor R
koeficijent prigušenja $\delta = \frac{b}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$

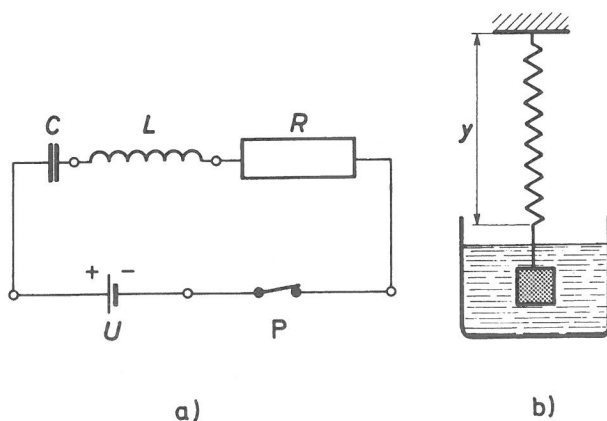
Primjer

Izračunajte ovisnost naboja i struje u serijskom LCR -krugu spojenom na bateriju stalnog napona U , uz početne uvjete $t = 0$, $Q = Q_0$, $I = 0$.

Nacrtajte analogni mehanički sistem, napišite jednadžbu gibanja i uz slične početne uvjete odredite elongaciju i brzinu.

Primjenom drugoga Kirchhoffova pravila na krug (sl. 4.9.a) dobivamo

$$U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = RI,$$



Slika 4.9. a) Titrajni krug, b) Mehanička analogija titrajnog kruga

odnosno, nakon zamjene $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$,

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{Q}{LC} = \frac{U}{L}, \quad (1)$$

gdje je U konstantni napon baterije.

Rješenje te jednadžbe je

$$Q = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + CU, \quad (2)$$

gdje je koeficijent prigušenja $\delta = \frac{R}{2L}$ i $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, što se može provjeriti uvrštavanjem (2) u (1). Konstante A i φ_0 određuju se iz početnih uvjeta. Ako je $t = 0$, $Q = Q_0$, $I = 0$, tada je

$$t = 0 \quad Q_0 = A \sin \varphi_0 + CU$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = A e^{-\delta t} [\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \delta \sin(\omega t + \varphi_0)]$$

$$t = 0, \quad I = 0, \quad \omega \cos \varphi_0 = \delta \sin \varphi_0, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega}{\delta}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}$$

$$Q = \frac{Q_0 - CU}{\sin \varphi_0} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + CU = (Q_0 - CU) e^{-\delta t} [\sin \omega t \operatorname{ctg} \varphi_0 + \cos \omega t] + CU$$

$$Q = \frac{Q_0 - CU}{\omega} e^{-\delta t} [\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t] + CU.$$

Struja kroz krug je derivacija naboja:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0 - CU}{\omega} (\delta^2 + \omega^2) e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$I = \frac{Q_0 - CU}{\omega} \omega_0^2 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

i prigušeno titra.

Nakon dovoljno dugog vremena struja će biti jednaka nuli, a naboj na kondenzatoru bit će $Q = Q_0 - CU$.

Mehanička analogija tom sistemu jest uteg koji visi na opruzi i titra uronjen u viskoznu tekućinu (sl. 4.9.b). Kao promjenjivu koordinatu uzet ćemo duljinu opruge y . Početni su uvjeti

$$t = 0, \quad y = l_m, \quad v = \frac{dy}{dt} = 0.$$

U ravnotežnom položaju $y = l$. Sila opruge koja djeluje na uteg je $F = -k(y - l)$, pa je *jednadžba gibanja*:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kl.$$

Dobili smo nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Njezino je rješenje prigušeno titranje oko ravnotežnog položaja $y = l$.

Nakon dovoljno dugog vremena sistem će se umiriti u položaju ravnoteže, i tada je rješenje jednadžba $y = l$.

Opće rješenje jednadžbe je:

$$y = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + l$$

pri čemu je $\delta = \frac{b}{2m}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Konstante A i φ_0 određuju se iz

početnih uvjeta: $t = 0$, $y = l_m$, $v = \frac{dy}{dt} = 0$.

Uvrštavanjem $t = 0$, $y = l_m$ u (3) dobivamo

$$A \sin \varphi_0 = l_m - l.$$

Brzina je

$$v = \frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta t} [\delta \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega \cos(\omega t + \varphi_0)]$$

$$t = 0, \quad v = 0, \quad \delta \sin \varphi_0 = \omega \cos \varphi_0, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega}{\delta}.$$

Ovisnost koordinate y o vremenu je

$$y = (l_m - l) e^{-\delta t} [\sin \omega t \operatorname{ctg} \varphi_0 + \cos \omega t] + l =$$

$$= \frac{l_m - l}{\omega} e^{-\delta t} [\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t] + l,$$

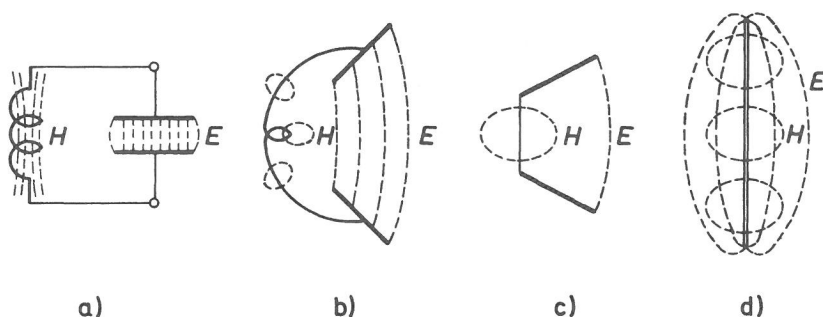
pa je brzina

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{l_m - l}{v} e^{-\delta t} (\omega^2 + \delta^2) \sin \omega t$$

$$v = -\frac{l_m - l}{\omega} \omega_0^2 e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

4.5. Nastajanje elektromagnetskih valova

Da bi se promjenljivo električno i magnetsko polje širilo prostorom u obliku *elektromagnetskog vala*, potrebno je otvoriti *titrajni krug*. To se postiže povećanjem razmaka između ploča kondenzatora i zavoja zavojnice, čime se smanjuje kapacitet i induktivitet te postiže da silnice promjenljivoga električnog polja zauzmu što veći dio prostora oko titrajnog kruga sl. 4.10.



Slika 4.10. Otvoreni titrajni krug

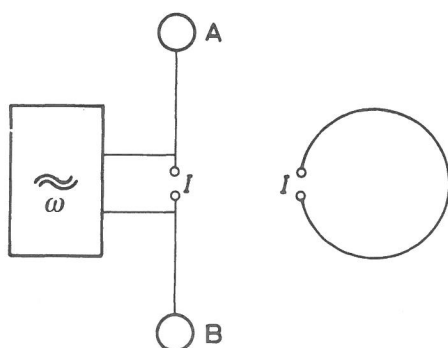
Potpunim otvaranjem ploča kondenzatora i zamjenom zavojnice pravocrtnim vodičem u krajnjem se slučaju dobije pravocrtni vodič u kojemu titraju elektroni (sl. 4.10.d). Takav se uređaj zove *otvoreni titrajni krug* ili *titrajući dipol*.

Titranje električnoga i magnetskog polja prenosi se iz otvorenoga titrajnog kruga u okolni prostor, oko kruga nastaje *elektromagnetsko polje*; otvoreni je titrajni krug izvor elektromagnetskih valova.

Prvi takav oscilator (sl. 4.11.a) napravio je H. Hertz* (1888) i tako proizveo elektromagnetske valove. Pomoću prijemnika, tj. *rezonantnoga titrajnog kruga* (savijene žice s iskrištem, sl. 4.11.b) uspio je dobiti iskru u iskrištu i tako detektirati elektromagnetske valove iz odašiljača.

Dva metalna štapa A i B razdvojena iskrištem (sl. 4.11.a) čine otvoreni titrajni krug. Krajevi dipola spojeni su na sekundar induktora. Kada razlika potencijala

* Heinrich Hertz (1857–1894), njemački fizičar, prvi je eksperimentalno dobio elektromagnetske valove i time potvrdio Maxwellovu teoriju.



a)

b)

Slika 4.11. a) Hertzov oscilator, b) detektor

dosegne probojnu vrijednost, u iskrištu preskoči iskra. Ako je gornji dio dipola (A) bio npr. pozitivan a B negativan, od A do B će proteći struja. Ubrzo međutim, A postane negativno, a B pozitivno, pa struja u vodiču AIB mijenja smjer i tako se proces ponavlja. Na taj način titraju naboji u dipolu sve dok se energija ne utroši na Jouleovu toplinu i zračenje elektromagnetske energije u okolni prostor. Međutim, induktor osigurava da se ti prigušeni titraji ne ugase već da se ponavljaju nakon vremena određenog periodom rada njegova prekidača.

Pretpostavimo da električno polje na dipolu titra po zakonu

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Budući da se električno polje od antene širi konačnom brzinom v , jakost polja u nekoj točki prostora P ne odgovara položaju naboja odnosno polju (na dipolu) u tom trenutku, već položaju koji je naboj imao malo prije toga, tj. u vrijeme $t - x/v$, pri čemu je x/v vrijeme potrebno da val prijeđe udaljenost x od antene do točke P. Polje u točki P opisano je izrazom:

$$E = E'_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.34)$$

(E'_0 se razlikuje od E_0 jer amplituda ovisi o udaljenosti od antene).

Jednadžba (4.34) pokazuje da se električno polje iz antene širi u obliku vala brzine v i valne dužine

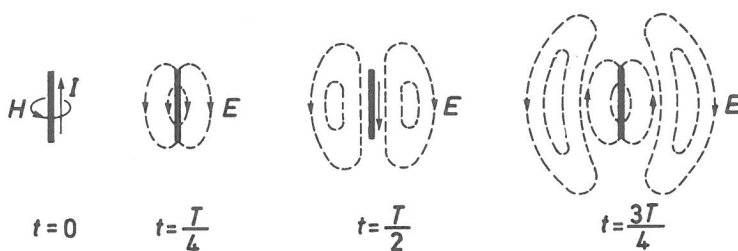
$$\lambda = v T$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Slika 4.12. pokazuje isijavanje vrtloga električnog polja iz antene. Nakon svakog $T/2$ dipol odašilje zatvorenu električnu silnicu.

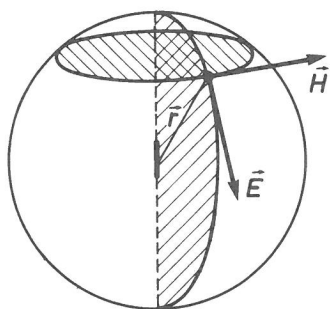
Osim električnog polja, iz antene se istovremeno isijava i magnetsko polje u obliku vrtloga koji se šire u ravninama okomitim na vodič.

Iz dipola se dakle širi kuglasti elektromagnetski val čiji smjer širenja daje radijus-vektor. Električno i magnetsko polje međusobno su okomiti, a okomiti su i na smjer širenja vala.

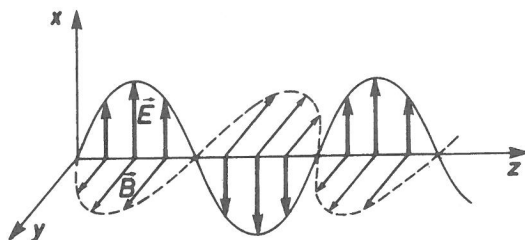


Slika 4.12. Isijavanje električnog polja iz antene

Ako oko dipola zamislimo kuglu radijusa r tako da polarna os kugle prolazi kroz dipol, tada jakost električnog polja u bilo kojoj točki kugle ima smjer tangente na meridijan, a jakost magnetskog polja smjer tangente na paralelu (sl. 4.13). Polje dipola je *polarizirano*. Iznos električnoga i magnetskog polja ovisi o



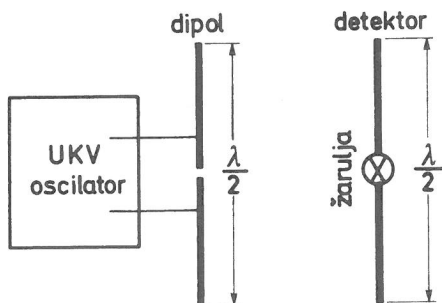
Slika 4.13. Elektromagnetski val dipola



Slika 4.14. Trenutna slika sinusoidalnoga elektromagnetskog vala

kutu između radijus-vektora i dipolnog momenta te o udaljenosti (radijus-vektoru). Daleko od dipola ($r \gg \lambda$) električno i magnetsko polje titraju u fazi i slabe sa $1/r$.

Slika 4.14. pokazuje harmonički ravni elektromagnetski val; to su dvije međusobno okomite sinusoide od kojih jedna prikazuje promjenu $\vec{E}$, a druga

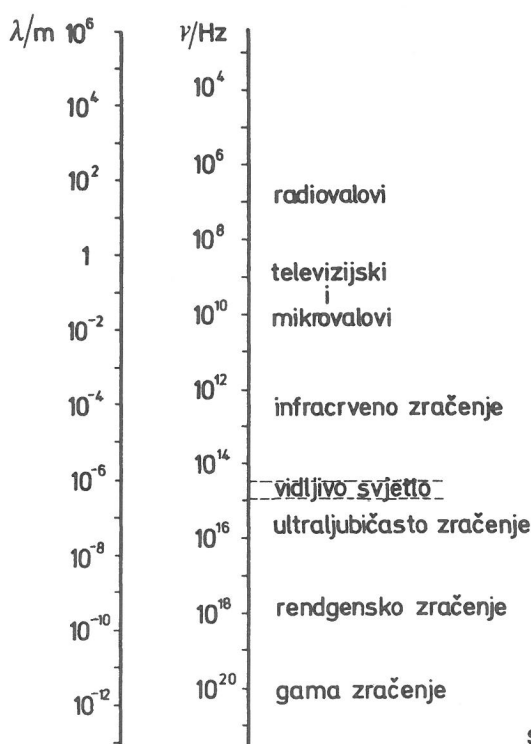


Slika 4.15. Shema uređaja u pokusu za dobivanje i detekciju elektromagnetskih valova

promjenu vektora $\vec{B}$. Oba vektora titraju u fazi; njihov smjer možemo odrediti desnom rukom: ako prstima slijedimo kraći put od $\vec{E}$ do $\vec{B}$, palac pokazuje smjer širenja.

Ultrakratke elektromagnetske valove ($\lambda \approx 1$ m) možemo dobiti iz metalnog dipola duljine $\frac{\lambda}{2}$ spojenog s oscilatorom (sl. 4.15). Sličan dipol jednake duljine u sredini prekinut i premošten žaruljom može nam poslužiti kao detektor.

Na slici 4.16. prikazan je spektar frekvencija i valnih duljina elektromagnetskih valova. Opažamo da je vidljiva svjetlost samo maleni dio tog spektra koji se proteže od duljih radiovalova do gama-zračenja vrlo kratkih valnih duljina. Detaljnije o valnim osobinama vidljive svjetlosti bit će riječi u šestom poglavlju.



Slika 4.16. Spektar elektromagnetskih valova

4.6. Širenje elektromagnetskih valova kroz prostor

Maxwellove jednadžbe opisuju elektromagnetsko polje u svakoj točki prostora: iz njih možemo izvesti *valnu jednadžbu za elektromagnetske valove*, i odrediti kako se magnetsko i električno polje šire kroz prostor.

Postoji više načina izvođenja valne jednadžbe. Najprije ćemo je izvesti iz integralnih, a zatim iz diferencijalnih Maxwellovih jednadžbi.

Promatrat ćemo elektromagnetske valove u homogenome izotropnom prostoru bez struja i naboja tako da je $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$ te ε i μ konstantni. U tom slučaju Maxwellove jednačbe glase:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.35)$$

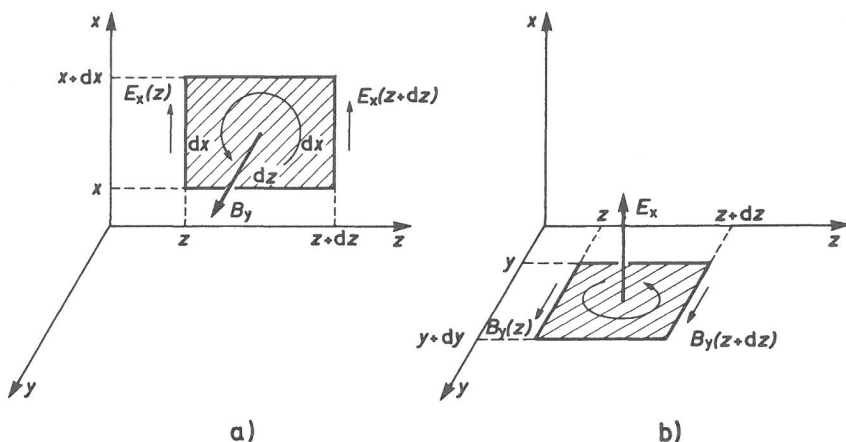
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.36)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.37)$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.38)$$

Promatrat ćemo harmonički ravni elektromagnetski val koji putuje u smjeru osi z (sl. 4.14). Iz prve dvije Maxwellove jednačbe može se dokazati da električno i magnetsko polje moraju biti okomiti na pravac širenja, tj. da ne postoji longitudinalna komponenta električnoga odnosno magnetskog polja u smjeru osi z . Vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ titraju, dakle, okomito na smjer širenja. Odaberimo takav koordinatni sustav u kojemu $\vec{E}$ titra na pravcu osi x , $\vec{B}$ na pravcu osi y , a val se širi u smjeru osi z ; postoje, dakle, samo komponente E_x i B_y .

Na takav ćemo ravni val primijeniti Maxwellove jednačbe. Lako je dokazati da su prve dvije jednačbe zadovoljene; tok električnoga i magnetskog polja takvog vala kroz bilo koju zatvorenu površinu uvijek je jednak nuli.



Slika 4.17. Uz izračunavanje krivuljnog integrala u trećoj i četvrtoj Maxwellovoj jednačbi

Taj ravni val mora zadovoljavati i treću jednadžbu.

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.37)$$

Kao površinu integracije S najpraktičnije je izabrati pravokutnik u ravnini x - z stranica Δx i Δz (sl. 4.17).

Tada je:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_x)_{z+\Delta z} \Delta x - (E_x)_z \Delta x \quad (4.39)$$

a desna je strana jednadžbe

$$-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Delta x \Delta z \quad (4.40)$$

Izjednačavanjem (4.39) i (4.40) te nakon dijeljenja sa $\Delta x \Delta z$ dobivamo

$$\frac{(E_x)_{z+\Delta z} - (E_x)_z}{\Delta z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (4.41)$$

U graničnom slučaju, kada $\Delta z \rightarrow 0$, dobivamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(E_x)_{z+\Delta z} - (E_x)_z}{\Delta z} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (4.42)$$

Tako smo iz treće Maxwellove jednadžbe dobili vezu između električnoga i magnetskog polja u nekoj točki prostora:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (4.43)$$

Za izračunavanje četvrte Maxwellove jednadžbe izabrat ćemo pravokutnik stranica Δy i Δz u ravnini y - z . (Izbor pravokutnika u ostale dvije koordinatne ravnine ne bi nas doveo do rezultata jer bi se tada obje strane četvrte Maxwellove jednadžbe poništile.)

Sličnim računom kao prije dobivamo:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = (H_y)_z \Delta y - (H_y)_{z+\Delta z} \Delta y \quad (4.44)$$

$$\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \Delta y \Delta z \quad (4.45)$$

Izjednačavanjem tih dviju jednadžbi, dijeljenjem sa $\Delta y \Delta z$ i primjenom graničnog prijelaza $\Delta z \rightarrow 0$ dobivamo:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad (4.46)$$

odnosno

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\varepsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

(Pritom smo uzeli u obzir da je $D = \varepsilon E$ i $B = \mu H$ te da su permeabilnost i dielektričnost konstantne.)

4.6.1. Valna jednadžba

Dobili smo dvije diferencijalne jednadžbe (4.43) i (4.46) koje povezuju električno i magnetsko polje elektromagnetskog vala. Ako iz njih eliminiramo jedno polje, npr. magnetsko polje B_y , dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu sa samo jednim poljem, E_x . To postizemo deriviranjem (4.43) po z i (4.46) po vremenu:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t}, \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4.47)$$

Kombinirajući te dvije jednadžbe, dobivamo **valnu jednadžbu za električno polje $\vec{E}$**

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (4.48)$$

Slično ćemo eliminiranjem E_x dobiti **valnu jednadžbu za magnetsko polje $\vec{B}$**

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.49)$$

Tako smo iz Maxwellovih jednadžbi dobili valnu jednadžbu za električno i magnetsko polje.

Izvod valne jednadžbe iz diferencijalnog oblika Maxwellovih jednadžbi. Valnu jednadžbu možemo još lakše izvesti iz **diferencijalnog** oblika Maxwellovih jednadžbi ako poznamo vektorsku analizu. Iz

$$\text{rot } \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.50)$$

i deriviranjem po vremenu dobivamo:

$$\text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.51)$$

Jednadžba

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nakon primjene operatora rotacije postaje:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.52)$$

Iz (4.51) i (4.52) dobivamo

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.53)$$

Budući da je $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ (jer je $\text{div } \vec{E} = 0$), valna jednadžba za električno polje glasi:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.54)$$

gdje je

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}.$$

Slično se dobije i valna jednadžba za magnetsko polje.

4.6.2. Brzina elektromagnetskih valova

Diferencijalne jednadžbe (4.48), (4.49) i (4.54) slične su jednadžbi za transverzalni val u žici:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (4.55)$$

gdje je s deformacija, a v brzina kojom val putuje u žici. U valnoj jednadžbi za elektromagnetski val (4.54) analogno možemo pisati

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} \quad (4.56)$$

nakon čega valna jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.57)$$

Fazna brzina (tj. brzina širenja valne fronte u smjeru širenja vala) u sredstvu s određenom dielektričnošću ε i permeabilnošću μ bit će, dakle:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (4.58)$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$):

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ C}^{-2} \text{ N s}^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}}$$

$$v = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c,$$

a to je upravo **brzina svjetlosti** u vakuumu – što ukazuje na to da je svjetlost elektromagnetski val.

U vakuumu je **fazna brzina za sve frekvencije, odnosno valne duljine jednaka; u vakuumu nema disperzije**. U tom je slučaju grupna brzina (brzina širenja energije) jednaka faznoj brzini. Drukčije je u sredstvu čija *dielektričnost* i *permeabilnost* ovise o frekvenciji, tj. gdje postoji disperzija.

Za većinu materijala (osim za feromagnete) $\mu \approx \mu_0$ ($\mu_r \approx 1$)

te je

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.59)$$

Pri prijelazu elektromagnetskog vala iz sredstva u kojem se širi jednom brzinom u sredstvo u kojem se širi nekom drugom brzinom mijenja se valna duljina vala.

Ako je prvo sredstvo vakuum, valna će se duljina $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ pri ulasku u drugo sredstvo relativne dielektričnosti ϵ_r i permeabilnosti μ_r smanjiti na:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (4.60)$$

Heinrich Hertz (1888) svojim je poznatim eksperimentom potvrdio Maxwellova teorijska predviđanja. Proizveo je elektromagnetske valove frekvencije $3 \cdot 10^7$ Hz, izmjerio njihovu valnu duljinu i iz dobivenog rezultata ($\lambda = 9,7$ m) odredio brzinu širenja tog vala:

$$c = \lambda \cdot f = 3 \cdot 10^7 \cdot 9,7 \text{ m/s}^{-1} = 2,9 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

što se doista dobro slaže s eksperimentalno dobivenom vrijednosti za brzinu svjetlosti. Tako je Hertz eksperimentalno dokazao da se i radiovalovi šire na isti način i istom brzinom kao i svjetlost.

4.6.3. Harmonički elektromagnetski valovi kao rješenja valne jednadžbe

Najjednostavniji oblik valnoga gibanja nastaje kada izvor vala harmonički titra. To posebno rješenje valne jednadžbe možemo pisati u obliku analognom onome za mehaničke valove:

$$E_x = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \text{ i} \quad (4.61)$$

$$H_y = H_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right)$$

gdje je $\omega = 2\pi f$, a E_0 i H_0 amplitude elektromagnetskog polja. Ako se val širi u nekom smjeru određenim jediničnim vektorom $\vec{u}$, rješenje valne jednadžbe možemo pisati:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v} \right) = \vec{E}_0 \sin (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (4.62)$$

Rješenje valne jednadžbe često je prikladnije pisati u obliku eksponencijalne funkcije s imaginarnim eksponentom:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.63)$$

U sredstvima u kojima postoje *slobodni naboji* (npr. u metalima) u Maxwellovim je jednadžbama potrebno uzeti u obzir struju kao posljedicu električnog polja elektromagnetskog vala.

Za metale, kojima je električna vodljivost velika, rješenje valne jednadžbe poprima formalno jednak oblik kao za prozirna sredstva (4.66), samo je valni broj $k = i\tilde{\kappa}$ imaginaran:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} e^{-\tilde{\kappa} \cdot \vec{r}} \quad (4.64)$$

što znači da polje eksponencijalno slabi s dubinom, te se elektromagnetski val u metalima ne može širiti, nego se odbija na graničnoj površini (metalna zrcala).

4.6.4. Omjer amplituda električnoga i magnetskog polja

Pokažimo koliki je omjer amplituda jakosti električnoga i magnetskog polja u elektromagnetskom valu.

Iz diferencijalnih jednadžbi (4.43) i (4.46)

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4.65)$$

uz pretpostavku da je $E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$, možemo odrediti koliki je H_y :

$$H_y = - \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = - \int \frac{1}{\mu} k E_0 \cos(kz - \omega t) dt = \frac{1}{\mu} \frac{k}{\omega} E_x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x \quad (4.66)$$

Budući da su u ravnom valu $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u fazi, amplitude električnoga i magnetskog polja u svakom trenutku povezane relacijom

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (4.67)$$

odnosno, budući da je $B = \mu H$, $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, to je

$$E_0 = v B_0$$

U vakuumu, a praktično i u zraku, vrijedi

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} \Omega = 377 \Omega \quad (4.68)$$

a za većinu materijala ($\mu \approx \mu_0$):

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{377 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.69)$$

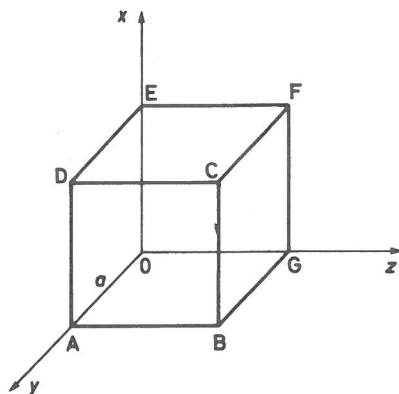
Za ravni elektromagnetski val općenito vrijedi:

$$\vec{B} = \sqrt{\epsilon\mu} (\vec{u} \times \vec{E}) \quad \text{odnosno} \quad \vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (\vec{B} \times \vec{u}) \quad (4.70)$$

gdje je $\vec{u}$ jedinični vektor u smjeru širenja vala.

Primjer

Dokažite da elektromagnetsko polje $E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$, $E_y = 0$, $E_z = 0$, $B_x = 0$, $B_y = B_0 \sin(\omega t - kz)$, $B_z = 0$ u prostoru bez struja i naboja zadovoljava Maxwellove jednadžbe u posebnom slučaju – kad je zatvorena ploha kocka brida a , a zatvorena krivulja stranica te kocke (sl. 4.18).



Slika 4.18. Integracijska ploha u obliku kocke

Prve dvije Maxwellove jednadžbe glase

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

pri čemu je zatvorena ploha S kocka na sl. 4.18. Kako je smjer električnog polja u smjeru osi x , $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ je različit od nule samo za stranice ABGO i DCFE, na svim je ostalim stranicama $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Tok vektora $\vec{E}$ kroz stranicu DCFE je

$$\iint_{\text{DCFE}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^a dy \int_0^a E_0 \sin(\omega t - kz) dz = \frac{E_0 a}{k} [\cos(\omega t - ka) - \cos \omega t].$$

Na donjoj stranici kocke (ABGO) $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ su antiparalelni, te je

$$\iint_{ABGO} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_0^a dy \int_0^a E_0 \sin(\omega t - kz) dz = -\frac{E_0 a}{k} [\cos(\omega t - ka) - \cos \omega t].$$

Ukupni tok vektora $\vec{E}$ po zatvorenoj plohi (kocki) jednak je

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{DCFE} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{ABGO} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

što dokazuje da zadano električno polje zadovoljava prvu Maxwellovu jednadžbu.

Slično računajući tok vektora $\vec{B}$, možemo dokazati da magnetsko polje zadovoljava drugu Maxwellovu jednadžbu.

Da bismo pokazali da zadano električno i magnetsko polje zadovoljavaju treću Maxwellovu jednadžbu, najprije ćemo izračunati tok vektora $\vec{B}$ npr. kroz stranicu ADCB, zatim cirkulaciju vektora $\vec{E}$ po rubu te stranice i dobivene rezultate uvrstiti u treću Maxwellovu jednadžbu:

$$\oint_{ADCBA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{ADCB} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Tok vektora $\vec{B}$ je

$$\int_0^a \int_0^a B_0 \sin(\omega t - kz) dx dz = \frac{B_0 a}{k} [\cos(\omega t - ka) - \cos \omega t].$$

Cirkulacija vektora $\vec{E}$ je

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_{AD} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{DC} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{CB} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{BA} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = 0 \\ &= \int_0^a E_0 \sin \omega t dx + \int_a^0 E_0 \sin(\omega t - ka) dx = \end{aligned}$$

Uvrstimo li dobivene rezultate u treću Maxwellovu jednadžbu, dobit ćemo

$$\begin{aligned} E_0 a [\sin \omega t - \sin(\omega t - ka)] &= -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{B_0 a}{k} [\cos(\omega t - ka) - \cos \omega t] \right\} \\ &= \frac{B_0 a \omega}{k} [\sin \omega t - \sin(\omega t - ka)]. \end{aligned}$$

Budući da je za elektromagnetski val $\frac{\omega}{k} = v$ i $B_0 = \frac{E_0}{v}$, vidimo da zadani elektromagnetski val zadovoljava treću Maxwellovu jednačbu. Slično bismo mogli dokazati da je cirkulacija vektora $\vec{B}$ npr. po rubu EDCFE jednaka vremenskoj derivaciji toka vektora $\vec{E}$ kroz stranicu EDCF pomnoženoj sa $\epsilon\mu$.

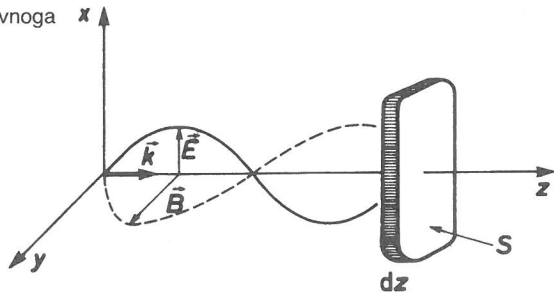
4.7. Energija elektromagnetskog vala. Poyntingov vektor

Kao i svaki drugi val, i elektromagnetski val može prenositi energiju kroz prostor. Radiovalovi prenose energiju od odašiljača do prijemnika, toplinska i svjetlosna energija preko elektromagnetskih valova dolazi od Sunca itd. Odredimo energiju koju ravni elektromagnetski val u jedinici vremena prenese kroz jedinicu površine, tj. odredimo *gustoću toka* energije ili, kako se često zove, intenzitet elektromagnetskog vala.

Promatrajmo infinitezimalni valjak baze površine S i debljine $dz = v dt$ (sl. 4.19). Ukupna gustoća energije elektromagnetskog polja je zbroj gustoće energije električnog polja i gustoće energije magnetskog polja:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu} B_y^2 \quad (4.71)$$

Slika 4.19. Uz izračunavanje intenziteta ravnoga elektromagnetskog vala



Budući da su električno i magnetsko polje u elektromagnetskom valu povezani relacijom (4.66), doprinosi električnog i magnetskog polja gustoći energije jednaki su, te je

$$w = \epsilon E_x^2 = \frac{1}{\mu} B_y^2 \quad (4.72)$$

U vremenu dt kroz površinu S na sl. 4.19. prođe energija:

$$P dt = w dV = w S dz = w S v dt \quad (4.73)$$

te je gustoća toka energije (intenziteta), tj. snaga po jediničnoj površini:

$$\mathcal{S} = w v \quad (4.74)$$

Ta relacija vrijedi općenito za valove i već smo je izveli u odjeljku 2.6 za mehaničke valove. Koristeći (4.74), (4.72) i (4.66), dobivamo izraz za gustoću toka energije elektromagnetskog vala

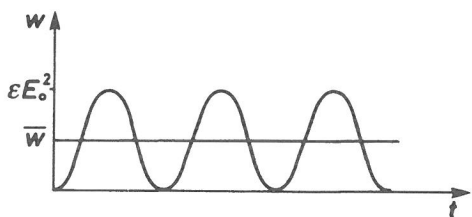
$$\mathcal{S} = v \varepsilon E_x^2 = v \mu H_y^2 = E_x H_y \quad (4.75)$$

Gustoća toka je vektorska veličina, a smjer joj je jednak smjeru širenja vala i zove se *Poyntingov vektor*. Uzevši u obzir da je iznos Poyntingova vektora određen izrazom (4.75), možemo pisati:

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (4.76)$$

Gustoća energije harmoničkoga elektromagnetskog vala mijenja se s vremenom (sl. 4.20). Srednja gustoća energije jednaka je polovici maksimalne vrijednosti:

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \quad (4.77)$$



Slika 4.20. Ovisnost gustoće energije o vremenu na odabranome mjestu

jer je srednja vrijednost kvadrata funkcije sinus jednaka 1/2. Budući da je $\mathcal{S} = wv$, i iznos Poyntingova vektora ravnoga harmoničkog vala mijenja se kao kvadrat funkcije sinus

$$\mathcal{S} = v \varepsilon E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad (4.78)$$

a srednja je vrijednost

$$\overline{\mathcal{S}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0 \quad (4.79)$$

Gustoća toka kuglastih valova (koji izlaze iz točkastog izvora) smanjuje se sa $\frac{1}{r^2}$ zadržavajući time ukupni tok energije (snagu) konstantom. Amplitude električnoga i magnetskog polja kuglastog vala smanjuju se sporije (kao $\frac{1}{r}$).

Primjer

Magnetsko polje monokromatskoga ravnog vala u vakuumu zadano je izrazom

$$\vec{B} = \vec{k} B_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \text{ pri čemu je } B_0 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ T i } \omega = 10^{15} \cdot \pi \text{ s}^{-1}.$$

Izračunajte:

- a) frekvenciju, valnu dužinu i valni broj,
- b) električno polje,
- c) srednju gustoću energijskog toka vala.

a) Iz $\omega = 2\pi f = 10^{15} \pi \text{ s}^{-1}$ dobivamo da je frekvencija vala $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Valna duljina je

$$\lambda = \frac{c}{f} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m},$$

a valni broj

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}.$$

b) Amplituda električnog polja je

$$E_0 = c B_0 = 0,6 \text{ V m}^{-1},$$

pa je električno polje

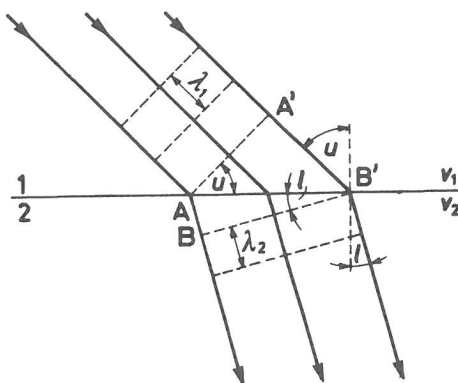
$$\frac{\vec{E}}{\text{V m}^{-1}} = 0,6 \vec{j} \sin \frac{3,14 \cdot 10^{15}}{s} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

c) Gustoća energijskog toka jednaka je srednjoj vrijednosti iznosa Poyntingova vektora

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ W m}^{-2}.$$

4.8. Refleksija i lom elektromagnetskih valova

Kada elektromagnetski val, npr. svjetlost, dođe na granicu dvaju dielektrika, jedan se dio vala reflektira, a drugi prolazi u drugo sredstvo. Ako fronta ravnog vala koji se giba brzinom v_1 upada pod nekim kutom ($0 < u < 90^\circ$) u drugo sredstvo, u kojem mu je brzina v_2 , transmitirani će val promijeniti smjer širenja (sl. 4.21).



Slika 4.21. Refleksija i lom elektromagnetskih valova

Umjesto valnim frontama, valove, pogotovo svjetlosne, često predočujemo zrakama (okomicama na valne plohe). Tako se zraka svjetlosti pri prijelazu iz jednoga optičkog sredstva u drugo lomi. Upadni kut (kut između smjera širenja i okomice na graničnu ravninu) označimo sa u , kut refleksije sa r , a kut loma sa l (sl. 4.21).

Proučavanjem loma i refleksije pronađene su neke zakonitosti.

1. Reflektirana zraka leži u istoj ravnini kao upadna zraka i okomica na graničnu plovu, tj. u tzv. upadnoj ravnini.

Kut upada u jednak je kutu refleksije r . To je poznati zakon refleksije o kojemu ćemo, kao i o zakonu loma, opširnije govoriti u 5. poglavlju.

2. Poznati Snellov zakon loma kaže da je

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \text{konst.} \quad (4.80)$$

Pritom lomljena zraka također leži u upadnoj ravnini.

Valna fronta AA' (sl. 4.21) prijeđe udaljenost $A'B'$ za isto vrijeme za koje valna fronta BB' prijeđe put AB . Iz slike je očito da je:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.81)$$

gdje je omjer n_2/n_1 tzv. *relativni indeks loma*. Ako se val širi iz vakuuma u dielektrik, tada je

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{c}{v} = n \quad (4.82)$$

pri čemu je c brzina vala u vakuumu, v brzina vala u sredstvu, a n apsolutni indeks loma.

$$n = \frac{c}{v} \quad (4.83)$$

Ako brzine iskažemo relacijom (4.58), dobit ćemo:

$$n = \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (4.84)$$

gdje su ϵ_r i μ_r relativna permitivnost i relativna permeabilnost sredstva. Tako je indeks loma (optička konstanta materijala) povezan s električnim i magnetskim konstantama neke tvari. Umjesto sa ϵ_r i μ_r , indeks loma možemo izraziti pomoću *električne susceptibilnosti* χ_e i *magnetske susceptibilnosti* χ_m :

$$n = \sqrt{(1 + \chi_e)(1 + \chi_m)} \quad (4.85)$$

Za prozirne tvari magnetska je permeabilnost $\mu_r \approx 1$, pa je indeks loma:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \chi_e} \quad (4.86)$$

Tablica 4.2 uspoređuje vrijednosti indeksa loma vidljive svjetlosti izračunate po formuli (4.86), s mjernim podacima. Za neke je tvari podudarnost s tom

jednostavnom teorijom dobra, a za neke npr. za vodu permitivnost je mnogo veća od n^2 . To vrijedi za sve polarne molekule, pa objašnjenje za to neslaganje nalazimo u mehanizmu interakcije elektromagnetskog vala s elektronima u materijalu. Maxwellova formula (4.86) vrijedi samo za jednoatomne plinove i simetrično građene molekule, ali ne i za molekule koje imaju permanentne električne dipole poput npr. molekule vode.

Tablica 4.2. Indeks loma i dielektričnost materijala

Materijal	n	$\sqrt{\epsilon_r}$
zrak	1,0003	1,0003
vodik	1,00013	1,00015
benzen	1,5	1,51
polistirol	1,59	1,61
voda	1,33	9

4.9. Disperzija i apsorpcija

Indeks loma materijala ovisi o valnoj duljini (frekvenciji) svjetlosti. Poznato je da se vidljiva ili bijela svjetlost pomoću prizme može razložiti na obojene svjetlosti pri čemu se najmanje lomi crvena, a najviše ljubičasta komponenta.

U vidljivom dijelu elektromagnetskog spektra indeks loma prozirnih tvari povećava se s frekvencijom. Empirijski utvrđena ovisnost može se napisati pomoću Cauchyve formule:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (4.87)$$

gdje su A i B konstante karakteristične za pojedini materijal.

Pokušat ćemo shvatiti tu ovisnost indeksa loma o frekvenciji mikroskopski promatrajući materiju, tj. proučavajući mehanizam interakcije elektromagnetskog vala s česticama materijala.

Zašto materijal mijenja brzinu elektromagnetskog vala, i to za različite valne duljine različito?

Pri prolazu elektromagnetskog vala kroz neki materijal dolazi do interakcije s elektronima u atomu. Interakcija s pozitivnim jezgrama zbog njihove je velike mase vrlo malena.

Električno polje upadnog vala $\vec{E}$ djeluje na elektrone u materijalu silom $\vec{F} = e \vec{E}$.

Električno polje $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$ titra frekvencijom ω , pa naboj atoma i molekula (elektronski) počinje oscilirati. Te se oscilacije sastoje od promjena težišta naboja u odnosu prema jezgri, pri čemu se i atom ponaša kao harmonički oscilator koji prisilno titra.

Prolazeći kroz materiju, elektromagnetski val uzbudi velik broj malih harmoničkih oscilatora, a kao makroskopsku posljedicu toga opažamo ovisnost indeksa loma o valnoj duljini, događa se disperzija. Pritom od neutralnih atoma električno polje inducira male električne dipole.

Permanentni su molekularni dipoli dosta tromi pa ih promjenjivo polje elektromagnetskog vala, koje vrlo brzo titra (mijenja smjer vrlo velikom frekvencijom), ne uspije pokrenuti, orijentirati, tj. nema interakcije. Zato je dielektričnost vode (koja se mjeri stalnim ili slabo promjenjivim električnim poljima) mnogo veća od n^2 kojemu pridonose samo inducirani dipolni momenti u molekulama H_2O .

Zbog djelovanja elektromagnetskog vala težište naboja u atomu se pomakne, i atom se ponaša kao mali električni dipol s dipolnim momentom

$$p = qz,$$

gdje je z udaljenost između pozitivnoga i negativnog naboja q atoma.

Nemoguće je mjeriti dipolni moment pojedinog atoma u nekoj određenoj količini materijala, ono što se može mjeriti, to je električna polarizacija dielektrika, vektorska veličina $\vec{P}$, što je zapravo ukupni dipolni moment jediničnog volumena materijala. Ako je N elementarnih dipola, tada je

$$\vec{P} = N\vec{p}.$$

Iz elektrostatike je poznato da je ta električna polarizacija iskazana produktom dielektričnosti vakuuma ϵ_0 električne susceptibilnosti materijala χ_e i jakosti električnog polja $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}.$$

Ako na neki način uspijemo računski odrediti električnu polarizaciju $\vec{P}$, indeks lom možemo odrediti prema formuli:

$$n = \sqrt{1 + \chi_e} = \sqrt{1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}} \quad (4.88)$$

Elektroni su u izolatorima (dielektricima) u atomu vezani privlačnom silom koja je u prvoj aproksimaciji proporcionalna pomaku elektrona iz položaja ravnoteže $F = -kz$ (harmonička sila). Stoga možemo uzeti kao da elektron u atomu izvodi harmoničko gibanje i smatrati atome harmoničkim oscilatorima. Takav model atoma nije daleko od stvarnosti. Omogućuje lako računanje, pa se često primjenjuje u fizici. Zato ćemo u rješavanju ovog problema atome prikazati kao harmoničke oscilatore koji titraju frekvencijom

$$\omega = 2\pi \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(m je masa elektrona). Ako elektron gubi energiju zračenjem, uz harmoničku silu F pojavljuje se još jedna sila, tzv. reakciona sila zračenja. Vlastito zračenje djeluje na elektron poput trenja: ono prigušuje titranje elektrona. Pokazuje se da je ta sila trenja proporcionalna brzini elektrona:

$$F = -m\gamma v.$$

gdje je m masa elektrona, γ konstanta prigušenja i v brzina elektrona.

Preostaje nam da napišemo jednadžbu gibanja elektrona u vanjskome elektromagnetskom polju svjetlosti i da je riješimo. Kao rješenje ćemo dobiti

pomak elektrona z iz ravnotežnog položaja zbog djelovanja elektromagnetskog vala, zatim vektor polarizacije $\vec{P}$ i, konačno, indeks loma kao funkciju frekvencije.

Atomi su nekoliko tisuća puta manji od valne duljine svjetlosti, pa se električni vektor na cijelom području atoma praktički prostorno ne mijenja. Zato uzimamo u obzir samo vremensku ovisnost vektora $\vec{E}$ ($\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$).

Jednadžba gibanja elektrona u vanjskom elektromagnetskom polju glasi:

$$m \ddot{z} = -m\omega_0^2 z - m\gamma \dot{z} + eE_0 e^{i\omega t} \quad (4.89)$$

Rješenjem te diferencijalne jednadžbe dobivamo pomak elektrona u atomu (duljinu atomskog dipola) z :

$$z = \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (4.90)$$

Odatle je električna polarizacija dielektrika $P = Ne z$, i, konačno, **indeks loma**:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/\epsilon_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (4.91)$$

Indeks loma je kompleksan broj. Rastavimo ga na realni i imaginarni dio,

$$n = n' - in''.$$

Prolazi li elektromagnetski val kroz takav medij kompleksnog indeksa loma, njegova jednadžba je

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)} \\ E &= E_0 e^{-(\omega/c)zn''} e^{i\omega(t - n'z/c)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Amplituda vala u sredstvu s kompleksnim indeksom loma eksponencijalno trne: val se **apsorbira**. Apsorpcija je velika kada je frekvencija upadnog vala bliska vlastitoj frekvenciji vezanih elektrona ($\omega \approx \omega_0$); maksimalna je kada je $\omega = \omega_0$. Tada je realni dio indeks loma $n' = 1$, a imaginarni dio n'' uzrokuje apsorpciju. Na sl. 4.22. grafički je pokazana ovisnost realnoga i imaginarnog dijela indeksa loma o frekvenciji.

Konstanta γ vrlo je malena, pa je u ostalim slučajevima ($\omega \neq \omega_0$) možemo zanemariti i indeks loma smatrati realnim:

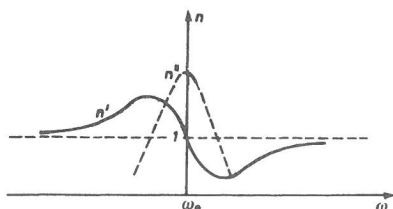
$$\omega \neq \omega_0 \quad n'' = 0 \quad n^2 = n'^2 = 1 + \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.93)$$

Kada je frekvencija upadnog vala ω dosta različita od vlastite frekvencije elektrona ω_0 , aproksimativni izraz za indeks loma možemo dobiti razvijajući kvadratni korijen u red i zanemarujući članove višeg reda,

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.94)$$

Za frekvencije različite od vlastite ω_0 indeks loma se bitno ne razlikuje od jedinice, to manje što je razlika frekvencija veća (sl. 4.22).

Općenito, indeks loma se povećava s frekvencijom, i ta pojava se zove **disperzija**. Izuzetak je područje frekvencija oko vlastite frekvencije elektrona ω_0 : u njemu se indeks loma smanjuje s povećanjem frekvencije ω . To područje oko ω_0 zove se područje **anomalne disperzije**.



Slika 4.22. Ovisnost realnoga i imaginarnog dijela indeksa loma o frekvenciji

Pojava anomalne disperzije povezana je s apsorpcijom elektromagnetskih valova. Svako tijelo u području u kojemu pokazuje anomalnu disperziju jako apsorbira svjetlost. Realni dio indeksa loma, naime, određuje faznu brzinu valova, a imaginarni dio određuje apsorpciju vala odnosno smanjenje njegove amplitude.

U području anomalne disperzije $n' \approx 1$, a n'' je velik. Koeficijent apsorpcije u tom je slučaju vrlo velik. Dakle, disperzija i apsorpcija bitno ovise o relativnoj vrijednosti frekvencije vala s obzirom na vlastitu frekvenciju molekularnih dipola.

U ovim smo razmatranjima pretpostavili da atom ima samo jednu vlastitu frekvenciju. To ne odgovara stvarnosti jer atomi emitiraju i apsorbiraju svjetlost različitih frekvencija.

Dakle, atom moramo predložiti s više harmoničkih oscilatora različitih frekvencija.

Zrak apsorbira svjetlost samo u ultraljubičastom dijelu spektra. Karakteristična frekvencija za zrak je $\nu_0 = 1,6 \cdot 10^{15}$ Hz ($\lambda_0 = 186$ nm).

Primjer

Odredimo indeks loma zraka za vidljivu svjetlost.

U području vidljive svjetlosti ($\nu \ll \nu_0$) u formuli (4.94) možemo zanemariti ω^2 prema ω_0^2 :

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0\omega_0^2}. \quad (4.94.a)$$

Nakon uvrštavanja vrijednosti dobivamo $n = 1,0004$, što se dobro slaže s empirijskom vrijednosti 1,0003.

Za staklo je također ω_0 u području ultraljubičaste svjetlosti i zato ona kroza nj ne prolazi: stoga umjesto stakla pri radu s ultraljubičastom svjetlošću moramo upotrebljavati kvarc (kvarcne lampe).

Iz formule (4.94), a i iz crteža, lako se uočava da je indeks loma pri $\omega > \omega_0$ **manji od jedinice**. Kada je ω_0^2 prema ω^2 zanemarivo, možemo pisati:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2} \quad (4.95)$$

Tako rendgensko zračenje (elektromagnetski valovi visokih frekvencija) imaju indeks loma manji od jedinice. Za njih su stvari optički rjeđe od vakuuma: totalna refleksija nastaje (suprotno običnoj svjetlosti) kad snop rendgenskog zračenja iz vakuuma pada na površinu nekog materijala pod izrazito kosim kutom.

U sredstvima s velikim brojem **slobodnih elektrona** (metalima, ionosferi) $\omega_0 = 0$, a indeks loma manji je od jedinice za sve valne duljine. U tom je slučaju za niže frekvencije $\omega^2 < Ne^2/m\epsilon_0$ indeks loma čisti imaginarni broj, pa takvi valovi ne mogu proći kroz metal ili ionosferu (npr. dugi i srednji radiovalovi) oni su za takvo zračenje neprozirni. Naprotiv, valovi **visokih frekvencija** vrlo lako prolaze kroz metale i ionosferu: njihov je indeks loma realan i blizak jedinici, te im je *koeficijent transmisije* velik.

Kada je indeks loma manji od jedan, brzina valova mora biti veća od brzine svjetlosti u vakuumu ($n = c/v$), a dobro je poznato da je c najveća moguća brzina u prirodi (Einstein). Taj prividni paradoks možemo objasniti razlikom fazne i grupne brzine.

Ravni elektromagnetski val $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega(t - z/v)$ putuje faznom brzinom v kroz prostor. To je brzina kojom putuju npr. maksimumi toga sinusnog vala, a indeks loma ovisi o njoj, prema jednostavnoj $n = c/v$ relaciji. Fazna se brzina računa po formuli:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (4.96)$$

gdje je k valni vektor ($k = 2\pi/\lambda$).

Pojedina faza toga ravnog vala može se predočiti jednadžbom $\omega t - kz = \text{konst.}$

Brzina kojom se ta faza širi prostorom je $dz/dt = \omega/k$, i zato se ta brzina zove *fazna brzina*.

Crvena, plava i ostale obojene svjetlosti u vakuumu putuju jednom brzinom c . Međutim, njihove će se brzine u nekom drugom sredstvu razlikovati: nastaje disperzija. U nekome disperzionom sredstvu svaki val ima svoju **vlastitu faznu brzinu**, a rezultatna brzina grupe od više valova različitih frekvencija ovisi o zakonu disperzije.

U prirodi nije moguće dobiti idealnu monokromatsku svjetlost, tj. valove točno određene frekvencije. Čak se i najbolji snop monokromatske svjetlosti sastoji od velikog broja ravnih valova kojima se frekvencija neznatno razlikuje od srednje frekvencije te grupe valova. Budući da svaki od valova ima malo drukčiju faznu brzinu u sredstvu, grupa takvih valova gibat će se **grupnom** brzinom. Ona može biti veća, manja ili jednaka faznoj brzini (v. odjeljak 2.3.3).

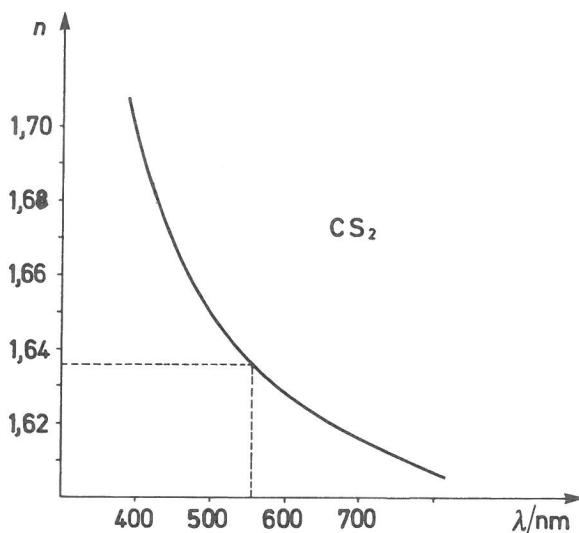
Veza između grupne i fazne brzine može se pisati i u obliku:

$$v_g = \frac{d\omega}{dn} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

$$v_g = v_f \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) = c \left(n + \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (4.97)$$

Grupna brzina ovisi o tome kako fazna brzina vala ovisi o valnoj duljini u nekom sredstvu (o $dv/d\lambda$ odnosno $dn/d\lambda$).

Slika 4.23 pokazuje kako indeks loma ugljik-disulfida, CS_2 ovisi o λ . Za normalnu je disperziju $\frac{dn}{d\lambda} < 0$, pa je grupna brzina manja od fazne brzine i od brzine svjetlosti u vakuumu, c . Samo grupna brzina ima fizikalnog smisla; tom brzinom elektromagnetski val prenosi energiju. Fazna je brzina više matematički pojam.



Slika 4.23. Ovisnost indeksa loma CS_2 o valnoj duljini

Može se dokazati da je grupna brzina uvijek manja od brzine svjetlosti u vakuumu, bez obzira na to je li indeks loma veći ili manji od jedinice: fazna brzina, naprotiv, može biti i veća i manja od brzine svjetlosti u vakuumu.

Primjer

Na slici 4.23. pokazana je ovisnost indeksa loma CS_2 (ugljik-bisulfida) o valnoj duljini u području vidljive svjetlosti. Sa slike se može očitati da je npr. za $\lambda = 555 \text{ nm}$ $n = 1,636$.

Izračunajte faznu i grupnu brzinu svjetlosti.

Fazna brzina za $\lambda = 555 \text{ nm}$ je

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1,636} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Grupna je brzina

$$v_g = v_f \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Iz slike se vidi i to da je u okolini $\lambda = 555 \text{ nm}$

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \approx -2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1},$$

$$v_g = v_f \left(1 - 2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} \cdot \frac{555 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{1,636} \right)$$

$$v_g = 1,7 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Michelson je izmjerio brzinu svjetlosti u CS_2 i dobio rezultat $1,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

4.10. Fresnelove jednadžbe

Intenzitet reflektiranog vala ovisi o kutu upada i o smjeru polarizacije upadnog vala, tj. o tome titra li upadni električni vektor u ravnini upadanja ili okomito na nju. Ravnina upadanja je određena smjerom širenja upadnog vala i okomicom na graničnu ravninu. Potpuna polarizacija reflektiranog vala pritom je određena tzv. *Brewsterovim zakonom*, koji ćemo izvesti iz Fresnelovih jednadžbi.

Francuski fizičar Augustin Fresnel (1788–1827) prvi je našao faktor refleksije i faktor transmisije, odnosno amplitude električnoga i magnetskog vektora reflektiranoga i transmitiranoga vala (Fresnelove jednadžbe).

Ako val upada okomito, računanje je dosta jednostavno, pa ćemo ga provesti. Kada upadni val pada koso, računanje je složenije, pa se navode samo konačni rezultati.

Kada električni i magnetski vektor dolaze na granicu između dva sredstva, oni prelaze iz jednoga u drugo tako da zadovoljavaju određene granične uvjete: pri prijelazu iz jednoga sredstva u drugo, uvijek su normalne komponente magnetske i električne indukcije $\vec{B}$ i $\vec{D}$ i tangencijalne komponente jakosti električnoga i magnetskog polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ kontinuirane na graničnoj površini.

Ako val upada okomito na graničnu plohu, granični su uvjeti

$$E_u + E_r = E_t \quad \text{i} \quad H_u + H_r = H_t \quad (4.98)$$

pri čemu indeksi u , r i t označavaju upadni, reflektirani i transmitirani val.

Intenzitet elektromagnetskog vala (energija koja u jedinici vremena prolazi kroz jedinicu površine) jednaka je iznosu Poyntingova vektora, tj.

$$\mathcal{S} = EH$$

Na graničnoj se plohi upadna energija elektromagnetskog vala dijeli na reflektiranu i transmitiranu:

$$E_u H_u = E_r H_r + E_t H_t \quad (4.99)$$

Pretpostavimo da se val iz vakuuma širi u prozirno sredstvo indeksa loma n . Iz povezanosti magnetskoga i električnog polja u elektromagnetskom valu i izrazu

$n = \sqrt{\epsilon_r}$ proizlazi da je:

$$H_u = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_u, \quad H_r = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_r, \quad \text{i} \quad H_t = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_t \quad (4.100)$$

Uvrštavanjem (4.100) u (4.99) dobivamo:

$$E_u^2 = E_r^2 + n E_t^2 \quad (4.101)$$

Ako iz uvjeta $E_u + E_r = E_t$ i te relacije izračunamo reflektiranu i transmitiranu komponentu električnog polja, dobit ćemo da je reflektirani i propušteni dio električnog polja

$$E_r = -E_u \frac{n-1}{n+1} \quad \text{i} \quad E_t = E_u \frac{2}{n+1} \quad (4.102)$$

Faktor refleksije, tj. udio reflektirane energije prema ukupnoj energiji elektromagnetskog vala definira se kao:

$$\varrho = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_u} = \frac{(EH)_r}{(EH)_u} \quad (4.103)$$

On će općenito ovisiti o polarizaciji upadnog vala, te ćemo imati dva faktora refleksije:

$$\varrho_{||} = \frac{\mathcal{P}_{r||}}{\mathcal{P}_{u||}} \quad - \text{kada električno polje } \vec{E} \text{ titra paralelno s upadnom ravninom} \quad (4.104)$$

$$\varrho_{\perp} = \frac{\mathcal{P}_{r\perp}}{\mathcal{P}_{u\perp}} \quad - \text{kada električno polje } \vec{E} \text{ titra okomito na upadnu ravninu} \quad (4.105)$$

Slično se definira i računa faktor transmisije, tj. udio propuštene energije elektromagnetskog vala u drugo sredstvo:

$$\tau = \mathcal{P}_t / \mathcal{P}_u = (EH)_t / (EH)_u \quad (4.106)$$

Naravno, $\varrho + \tau = 1$.

Uvrštavanjem (4.100) u (4.103) i (4.106) dobivamo faktor refleksije i transmisije:

$$\varrho = \frac{(EH)_r}{(EH)_u} = \left(\frac{E_r}{E_u} \right)^2 = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (4.107)$$

odnosno

$$\tau = \frac{(EH)_t}{(EH)_u} = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (4.108)$$

Kada elektromagnetski val upada na granicu sredstava pod nekim kosim kutom, tada se valovi čiji električni vektor titra paralelno ravnini upadanja i oni kod kojih titra okomito, različito reflektiraju i lome. Za reflektirani ćemo val dobiti:

$$E_{r||} = -E_{u||} \frac{\operatorname{tg}(u-l)}{\operatorname{tg}(u+l)} = -E_{u||} \frac{n \cos u - \cos l}{n \cos u + \cos l} \quad (4.109)$$

i

$$E_{r\perp} = -E_{u\perp} \frac{\sin(u-l)}{\sin(u+l)} = -E_{u\perp} \frac{n \cos l - \cos u}{n \cos l + \cos u} \quad (4.110)$$

odnosno

$$\varrho_{||} = \frac{\operatorname{tg}^2(u-l)}{\operatorname{tg}^2(u+l)} \quad (4.111)$$

$$\varrho_{\perp} = \frac{\sin^2(u-l)}{\sin^2(u+l)} \quad (4.112)$$

Tu je u kut upada a l kut loma.

Kada je $u + l = 90^\circ$, vektor električnog polja koji je paralelan upadnoj ravnini uopće nije reflektiran ($\varrho_{||} = 0$). Reflektirani val sadrži samo električne vektore koji titraju okomito na upadnu ravninu, pa je, dakle, *potpuno polariziran*. Takav upadni kut naziva se *Brewsterov kut*. Dokažite da je

$$u_B = \arctg n \quad (4.113)$$

PITANJA I ZADACI

- Nacrtajte električni titrajni krug i objasnite elektromagnetske titraje.
- Iz zakona održanja energije izvedite Thomsonovu jednadžbu za period titrajnog kruga.
- Objasnite prigušeni električni titrajni krug.
- Usporedite mehanički i električni titrajni sistem i uočite analogne veličine.
- Koji je red veličine valne duljine i frekvencije za: a) ultraljubičasto zračenje, b) vidljivo svjetlo, c) infracrveno zračenje, d) rendgensko zračenje i e) gama-zračenje?
- Kako nastaju elektromagnetski valovi?
- Izvedite valnu jednadžbu i izraz za brzinu elektromagnetskog vala.
- Ako je električno polje elektromagnetskog vala dano jednadžbom $\vec{E} = E_0 \vec{k} \sin(ky - \omega t)$, u kojem se smjeru širi val? U kojem smjeru titra pripadno magnetsko polje?
- Kakva je veza između brzine elektromagnetskog vala i dielektrične konstante?
- Kakav je odnos između indeksa loma i dielektričnosti sredstva?
- Kolika je dielektričnost stakla ako je indeks loma $n = 1,58$?
- Zašto je za vodu indeks loma manji od $\sqrt{\epsilon_r}$ (ϵ_r relativna dielektričnost za elektrostatsko polje)?
- Kako je veza između električnoga i magnetskog polja u elektromagnetskom valu?
- Ako je amplituda magnetskog polja blizu odašiljača 3,3 pT, kolika je amplituda električnog polja?
- Izračunajte energiju elektromagnetskog vala. Što je Poyntingov vektor? Kolika je srednja vrijednost Poyntingova vektora za sinusoidalni ravni val?
- Dokažite da je za ravni harmonički elektromagnetski val u vakuumu, opisan izrazima $E_x = 0$, $E_y = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}$, $E_z = 0$, $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 e^{i(\omega t - kx)}$, zadovoljava valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2},$$
 uz uvjet da je $\omega/k = c$.
- Električno polje svjetlosnog vala dano je izrazom $E/(V/m) = 0,5 \sin \pi (1,2 \cdot 10^{15} t/s - 4 \cdot 10^6 x/m)$. Odredite amplitudu frekvenciju, valnu duljinu, period i brzinu.
- Električno polje elektromagnetskog vala zadano je jednadžbom $\vec{E} = \vec{j} E_0 f(x - ct)$, gdje je f proizvoljna funkcija. U kojem se smjeru širi val? Napišite jednadžbu za magnetsko polje tog vala.
- Dokažite da je za ravni harmonički elektromagnetski val srednja gustoća energije električnog polja jednaka srednjoj gustoći energije magnetskog polja.
- Srednja gustoća energijskog toka monokromatskoga harmoničkog elektromagnetskog valnog vala u zraku je 26 W/m^2 . Kolika je srednja gustoća energije?
- Koliki je srednji intenzitet sinusnoga valnog elektromagnetskog vala u vakuumu ako je amplituda magnetskog polja $0,05 \text{ A/m}$? Kolika je amplituda električnog polja u tom valu?

5. Geometrijska optika

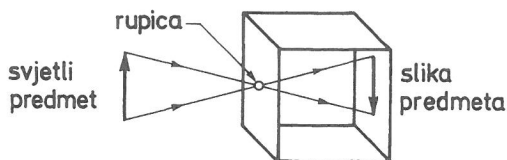
5.1. Osnovni zakoni; Optički put, Fermatov princip

Svjetlost je u užem smislu fizikalni učinak koji stvara osjet vida u oku. Osim te svjetlosti, postoji svjetlost na koju oko ne reagira, dakle nevidljiva je i može se otkriti određenim fizikalnim metodama. To je svjetlost u širem smislu. Optika proučava osobine i zakonitosti nastajanja, širenja i fizikalnog djelovanja svjetlosti. Također se bavi primjenom zakona u raznim optičkim napravama.

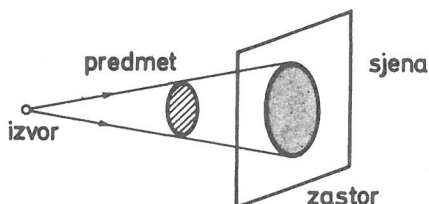
Geometrijska optika je dio optike u kojoj se za opis svjetlosnih pojava služimo svjetlosnom zrakom. Neki zakoni te optike bili su poznati već u doba stare Grčke, i temelje se na iskustvu. Pomoću tri osnovna zakona geometrijske optike mogu se objasniti svojstva zrcala i leća, te način na koji pomoću njih nastaju slike.

Prvi zakon geometrijske optike jest **zakon o pravocrtnom širenju svjetlosti**. U optički jednolikome i prozirnomo sredstvu zamišljamo da se svjetlost širi u zrakama koje su pravci. Taj je zakon primjenljiv kad su pojave poput ogiba ili difrakcije zanemarive, npr. kada je valna duljina svjetlosti vrlo malena prema dimenzijama optičke naprave. Takvu situaciju imamo pri prolazu svjetlosti kroz leću jer je njezin promjer mnogo puta veći od valne duljine svjetlosti.

Zakonom o pravocrtnom širenju svjetlosti može se naprimjer objasniti (sl. 5.1. i 5.2) kako nastaje slika u tamnoj komori ili kako nastaje sjena predmeta obasjanog *točkastim izvorom*. Sjena na zastoru je geometrijska projekcija predmeta.



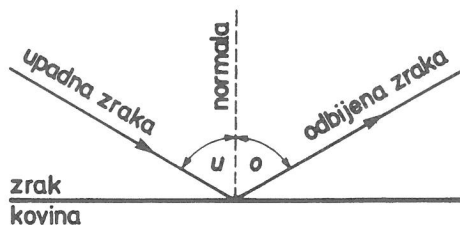
Slika 5.1. Tamna komora



Slika 5.2. Geometrijska sjena

Drugi zakon geometrijske optike jest **zakon odbijanja ili refleksije**. Ako na glatku plohu, napr. na površinu vode ili sjajnu površinu neke kovine, padne zraka svjetlosti, ona se od nje odbije. Upadna zraka, normala na plohu u upadnoj točki i odbijena zraka leže u istoj ravnini (sl. 5.3). Pri tome je kut odbijanja o jednak upadnom kutu u , tj.

$$\sphericalangle u = \sphericalangle o.$$

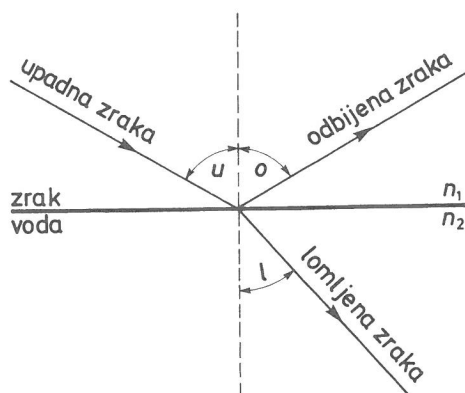


Slika 5.3. Odbijanje ili refleksija svjetlosti

Pod *upadnim kutom* razumijevamo kut što ga *upadna zraka* zatvara s normalom na sjajnoj granici, a *kut odbijanja* je kut što ga zatvara *odbijena zraka* s normalom.

Treći zakon je **zakon loma ili refrakcije**. Ako zraka svjetlosti prelazi iz jednoga sredstva u drugo, ona mijenja smjer. Upadna zraka, normala na granicu u upadnoj točki i lomljena zraka, leže u istoj ravnini zajedno s odbijenom zrakom (sl. 5.4). Upadni kut u i kut loma l povezani su *Snellovim zakonom*:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1},$$



Slika 5.4. Lom ili refrakcija svjetlosti uz djelomično odbijanje

gdje je n_1 indeks loma sredstva u kojemu se upadna zraka širi, a n_2 indeks loma sredstva u kojemu se širi lomljena zraka. Osim lomljene zrake, na granici dvaju prozirnih sredstava nastaje i odbijena zraka, za koju vrijedi zakon odbijanja.

Indeks loma je omjer brzine svjetlosti u vakuumu c i fazne brzine svjetlosti u nekom sredstvu v . Tako je

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{i} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}.$$

Prema definiciji indeksa loma za vakuum, proizlazi da je

$$n_0 = 1.$$

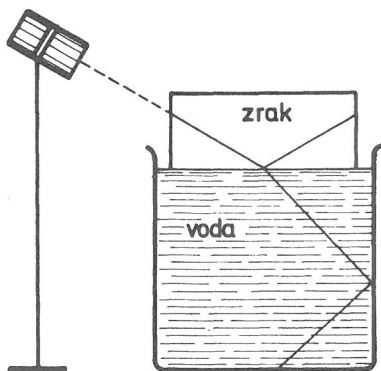
Međutim, indeks loma za zrak neznatno je veći od 1. Pri normalnom tlaku 101325 Pa i temperaturi 20 °C on iznosi

$$n_1 = 1,00028,$$

a za vodu (za žutu svjetlost koju zrači atom natrija)

$$n_2 = 1,333 \doteq \frac{4}{3}.$$

Lom i refleksiju svjetlosti promotrit ćemo pokusom. U staklenoj posudi ravnih stijenka nalazi se voda kojoj je dodano nekoliko kapi fluoresceina otopljenog u alkoholu. On u vodi fluorescira zeleno i omogućuje opažanje svijetlog traga snopa svjetlosti koja prolazi kroz vodu. Iznad same površine vode u vertikalnoj se ravnini nalazi bijelo obojena ploča, pa zrake svjetlosti koje prolaze zrakom »stružu« o ploču i tako ih možemo vidjeti. Uski paralelni snop svjetlosti pod nekim kutom pada na granicu zraka i vode (sl. 5.5). Svjetlost djelomično ulazi u vodu, a djelomično se odbija, što vidimo kao lomljenu i odbijenu zraku svjetlosti.



Slika 5.5. Pokus o odbijanju i lomu svjetlosti na granici zrak – voda

Kako se može odrediti put što ga prijeđe zrak svjetlosti u promatranim sredstvima?

Ako u jednakim vremenskim intervalima u dva različita sredstva val svjetlosti prevaljuje putove s_1 odnosno s_2 , tada, s obzirom na različite brzine širenja svjetlosti u ta dva sredstva, v_1 i v_2 , vrijedi:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

ali vrijedi i da je

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Dakle

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

ili

$$n_1 s_1 = n_2 s_2. \quad (5.1)$$

Pritom je n indeks loma optičkog sredstva, a s udaljenost između dvije točke tog sredstva. Udaljenost koju svjetlo prevaljuje naziva se *geometrijski put* svjetlosti. Umnožak tih dviju veličina, ns , zove se *optički put* vala svjetlosti.

Iz relacije (5.1) proizlazi da svjetlo u dva različita sredstva u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje jednako velike optičke putove.

Vrijeme potrebno da svjetlo prevali put između dvije točke nekog sredstva indeksa loma, n proporcionalno je optičkom putu, tj.

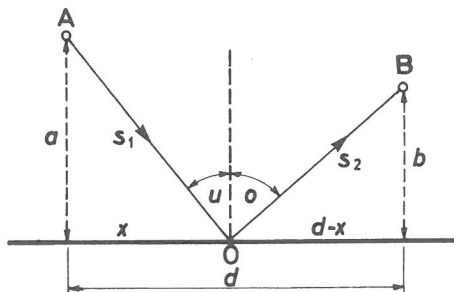
$$t = \frac{s}{v} = \frac{ns}{c}$$

gdje je v brzina svjetlosti u sredstvu a c brzina svjetlosti u vakuumu. Vrijedi formulacija *Fermatova principa* iz 1650 god.: svjetlo koje se lomi i odbija prevaljuje toliki put između dvije točke da pripadni optički put zrake ima ekstremnu vrijednost, odnosno svjetlo prolazi put u ekstremnom vremenu. Obično je taj ekstrem minimum. Prema Fermatovu principu, izvest ćemo zakon odbijanja i zakon loma. U oba slučaja može se dokazati da je ekstrem minimum. a) *Zakon odbijanja*: vrijeme t_s u kojemu svjetlo prijeđe put $s = s_1 + s_2$, označen na slici 5.6, možemo predočiti izrazom:

$$t_s = \frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{v} = \frac{1}{v} (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2}).$$

Uvjet za dobivanje ekstremne vrijednosti zahtijeva da je $\frac{dt_s}{dx} = 0$, tj.:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \sin u - \sin o = 0,$$



Slika 5.6. Uz odbijanje svjetlosti

pri čemu je $\angle u$ upadni kut, a $\angle o$ kut odbijanja. Odatle slijedi:

$$\sin u = \sin o, \text{ ili}$$

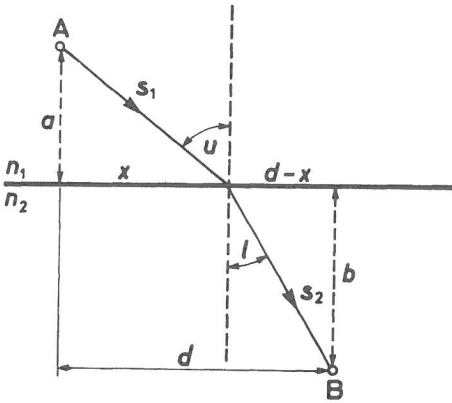
$$\angle u = \angle o,$$

što je poznati zakon refleksije spomenut na strani 197. Može se pokazati da ekstremna vrijednost vremena t_s je minimum.

b) *Zakon loma.* Na slici 5.7 vidi se da je put $s = s_1 + s_2$ što ga zraka svjetlosti prijeđe u vremenu t_s , pa je

$$t_s = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Budući da vrijeme t_s ima ekstremnu vrijednost, dobivamo:



Slika 5.7. Uz lom svjetlosti

$$\frac{dt_s}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \frac{\sin u}{v_1} - \frac{\sin l}{v_2} = 0,$$

pa slijedi:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{v_1}{v_2},$$

ili

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1},$$

što je poznati zakon loma u Snellovu obliku spomenut na strani 199.

I pritom ekstremna vrijednost vremena t_s pokazuje minimum, ili suma $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$ ima minimalnu vrijednost.

Iz toga slijedi: da i suma $\frac{s_1 c}{v_1} + \frac{s_2 c}{v_2}$ također ima minimum pa je takva i konačna vrijednost sume $n_1 s_1 + n_2 s_2$.

Zaključujemo: ako je vrijeme putovanja svjetlosti minimalno, i prijeđeni je pripadni ukupni optički put zrake svjetlosti od točke A do točke B, (sl. 5.7) koja se još pri prolazu iz optičkog sredstva indeksa n_1 u sredstvo indeksa loma n_2 i lomi, minimalan. To je u skladu s Fermatovim principom.

Primjer

Zraka svjetlosti pada na ravnu staklenu ploču indeksa loma $n = 1,5$. Koliko iznosi upadni kut u zrake, ako lomljena zraka s odbijenom zrakom zatvara kut $\Theta = 130^\circ 30' = 0,725 \pi$ rad?

Prema zakonu odbijanja je $u = o$, pa zakon loma pišemo:

$$\sin u = n \sin l.$$

Odbijena i lomljena zraka zatvaraju kut Θ , pa kut loma možemo iskazati kao

$$l = 180^\circ - (u + \Theta)$$

Uvrštavanjem u zakon loma dobivamo:

$$\sin u = n \sin [180^\circ - (u + \Theta)] = n \sin (u + \Theta), \text{ odnosno:}$$

$$\sin u = n (\sin u \cdot \cos \Theta + \cos u \cdot \sin \Theta)$$

Dijeljenjem izraza sa $\cos u$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} u = n (\operatorname{tg} u \cos \Theta + \sin \Theta), \text{ ili}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{n \sin \Theta}{1 - n \cos \Theta}$$

U našem primjeru:

$$\operatorname{tg} u = \frac{1,5 \sin 130,5^\circ}{1 - 1,5 \cos 130,5^\circ}$$

pa je

$$u = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

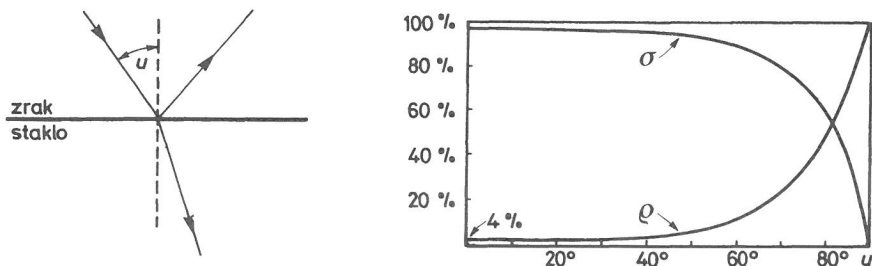
Napomena: Pada li svjetlosni snop intenziteta I_0 (vidi: 7. poglavlje Fotomaterija) na graničnu plohu, on će se djelomično reflektirati, a djelomično lomiti. Intenzitet reflektirane svjetlosti označit ćemo sa I_r , a lomljene sa I_l . Omjer $\varrho = I_r/I_0$ naziva se *faktor refleksije* sredstva, a omjer $\sigma = I_l/I_0$ *faktor transmisije*.

Ako sredstvo ne apsorbira svjetlo, mora biti ispunjen uvjet da je

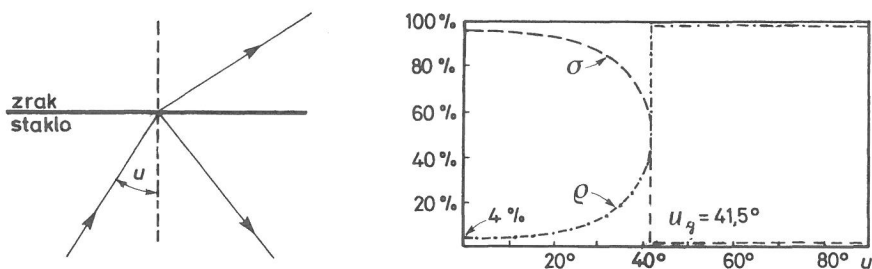
$$\varrho + \sigma = 1.$$

Ako sredstvo graniči sa zrakom ili vakuumom, tada veličine ϱ i σ ovise samo o optičkom svojstvu tog sredstva i upadnom kutu. Kao primjer pokazana je

granica zrak – staklo, i na slici 5.8. svjetlo se lomi prelazeći u staklo, a na slici 5.9. svjetlo se lomi prelazeći u zrak. Uočimo da pri upadnom kutu većem od *graničnog* nastaje *totalna refleksija* (vidi: odjeljak 5.3)



Slika 5.8. Promjena faktora refleksije ρ i transmisije σ svjetlosti zavisno o upadnom kutu na granici zrak – staklo



Slika 5.9. Promjena faktora refleksije ρ i transmisije σ svjetlosti na granici staklo – zrak

5.2. Ravno i sferno zrcalo

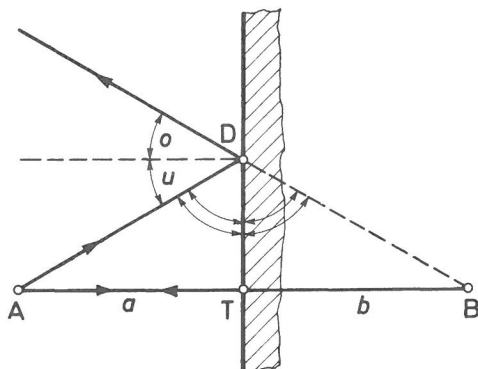
Ravno je zrcalo ravna glatka ploha koja može odbijati zrake svjetlosti prema zakonu odbijanja. Plohe dobrih ogledala su tanki slojevi npr. srebra, naparenog na ravne staklene podloge.

Promotrimo točkasti izvor svjetlosti ispred zrcala u točki A (sl. 5.10). Neke zrake iz izvora odbijaju se na površini ogledala. Produžeci odbijenih zraka prema natrag imaju sjecište u točki B iza ogledala. To je *virtualna slika* realnog predmeta u A. Točke A i B leže na spojnici koja je okomita na ravninu zrcala i pogađa je u točki T. Iz slike se vidi da je pravokutni trokut s vrhovima ADT sukladan trokutu BTD. Ako duljinu AT označimo sa a , BT sa b , tada vrijedi zakon za ravno zrcalo:

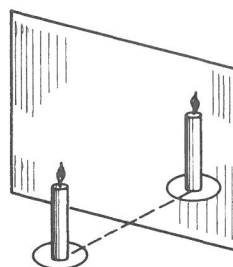
$$a = b,$$

tj. predmetna daljina jednaka je slikovnoj. Ako se ispred zrcala nalazi uspravni svijetli predmet, ravno zrcalo daje virtualnu uspravnu i stigmatičnu sliku.

Stigmatična slika znači da je ogledalo sposobno za točno i oštro odslikavanje predmeta jer zrake koje izlaze iz jedne točke predmeta nakon odbijanja na zrcalu šire se tako kao da izlaze iz jedne točke slike.



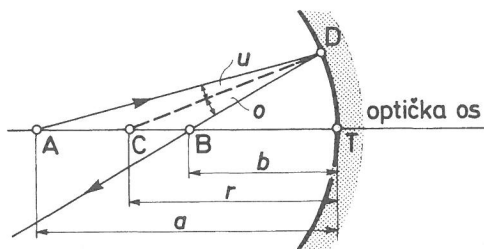
Slika 5.10. Odbijanje svjetlosti na ravnom zrcalu



Slika 5.11. Pokus sa staklenom pločom

Kao što je pokazano na slici 5.11 ispred i iza staklene plohe nalazi se po jedan svijećnjak. Svijećnjaci su jednaki i jednako udaljeni od plohe. U tamnoj se prostoriji upali samo jedna svijeća, ona ispred staklene plohe. Zbog vjerne slike koju stvaraju zrake odbijene na ravnoj staklenoj plohi dobiva se dojam kao da je upaljena i svijeća iza plohe, koju vidimo kroz staklo.

Površina **sfernog zrcala** dio je kugline plohe. Ono može biti *udubljeno* (konkavno) ili *izbočeno* (konveksno). Središnja točka je **tjeme** zrcala i označeno je sa T (sl. 5.12). Pravac na kojemu leži središte zakrivljenosti plohe zrcala C i tjeme T zove se **optička os**. Neka je svijetli točkasti predmet na osi u točki A. Promatrat ćemo zraku svjetlosti koja se širi od predmeta i odbija s površine zrcala u točki D. Ona siječe optičku os u točki B. Pri tom je odbijanju upadni kut jednak kutu odbijanja, a odbijena zraka leži u ravnini određenoj upadnom zrakom i normalom. U tom se slučaju normala podudara s pravcem radijusa kugline plohe.

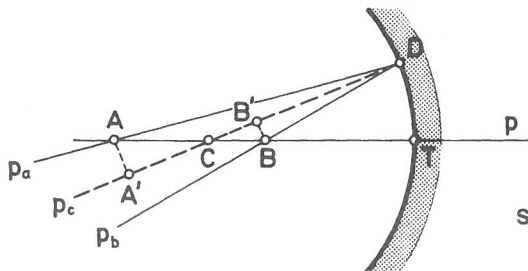


Slika 5.12. Odbijanje svjetlosti na sfernom zrcalu

Promatrana upadna i odbijena zraka svjetlosti pripadaju pravcima p_a i p_b na slici 5.13. Normala na slici prije, odnosno pravac p_c na ovoj slici simetrirala je kuta

što ga zatvaraju zrake, odnosno pravci p_a i p_b . Pravci i simetrala presječeni su pravcem p , koji odgovara optičkoj osi u prethodnoj slici. Sjecišta su točke A, B i C.

Iz točke A na slici spuštена je okomica na simetralu. Njezino je nožište A' .



Slika 5.13. Uz tumačenje jednadžbe za sferno zrcalo

Iz točke B spuštена je također okomica na simetralu. Nožište te okomice je točka B' . Trokut s vrhovima $AA'C$ sličan je trokutu $BB'C$, pa vrijedi razmjer:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BB'}}, \quad (5.1a)$$

Trokuti s vrhovima $AA'D$ i $BB'D$, također su slični, pa vrijedi razmjer:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BB'}}, \quad (5.2)$$

Ako omjer lijevih strana izraza izjednačimo s onim na desnoj, dobit ćemo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}. \quad (5.3)$$

Budući da je u tom izrazu $\overline{AC}$ stalno, općenito slijedi da različitim točkama D na sfernoj plohi odgovaraju različiti položaji točke B, u kojoj odbijena zraka siječe optičku os.

Ako se, međutim, ograničimo samo na zrake koje s optičkom osi zatvaraju mali kut i pogađaju površinu zrcala blizu tjemena, onda one zadovoljavaju tzv. *Gaussove aproksimacije* i daju stigmatičnu sliku svijetlog predmeta. Za te zrake vrijede, naime, ove približne jednakosti:

$$\overline{AD} \doteq \overline{AT} \quad \text{i} \quad \overline{BD} \doteq \overline{BT}$$

Ako smo se, dakle, ograničili na zrake za koje vrijedi Gaussova aproksimacija, jednadžba dobiva oblik:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BT}}. \quad (5.4)$$

Iz te jednadžbe slijedi da je položaj točke B na optičkoj osi nezavisan o mjestu D, s kojeg se zraka odbija sa zrcala. Prema tome, sve zrake svjetlosti koje izlaze iz svijetle točke A i pogađaju zrcalo blizu točke T (tjemena) odbijaju se tako da njihovi pravci prolaze jednom točkom B, a to je onda slika svijetlog predmeta A.

Zato ovdje uvodimo oznake i nazive.

$\overline{AT} = a$, *predmetna daljina*

$\overline{BT} = b$, *slikovna daljina*

$\overline{CT} = r$, *polumjer zakrivljenosti zrcala*

S tim oznakama napisani razmjer (5.4) dobiva oblik:

$$(a - r) : a = (r - b) : b ,$$

$$\text{odnosno} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (5.5)$$

Dobiveni je izraz **jednadžba sfernog zrcala**.

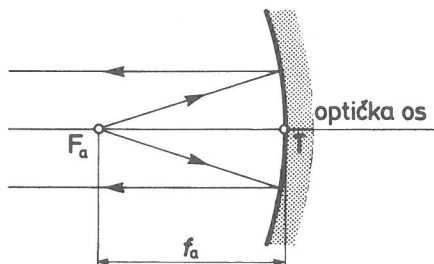
Pri uvrštavanju numeričkih vrijednosti za a , b i r dogovorit ćemo se o predznacima tih veličina.

Ako se zrake svjetlosti šire slijeva nadesno i ako su točke A, B i C lijevo od tjemena T zrcala, slikovna i predmetna udaljenost te polumjer zakrivljenosti **pozitivne** su veličine, tj. $a > 0$, $b > 0$ i $r > 0$. U tim su slučajevima predmet i slika – **realni**, a zrcalo je udubljeno.

Udaljenosti a i b , te polumjer r negativne su veličine ako su točke A, B i C desno od tjemena T. Time su označeni virtualni predmet i slike te izbočeno zrcalo.

Predmetno žarište F_a je točka na optičkoj osi u koju treba staviti svijetli predmet da bi se zrake svjetlosti nakon odbijanja širile **paralelno s optičkom osi** (sl. 5.14). Drugim riječima, slika se dobiva neizmjereno daleko od tjemena zrcala. Razmak $F_a T = f_a$ naziva se *predmetna žarišna daljina*. Njezina se vrijednost može dobiti iz jednadžbe za sferno zrcalo (5.5) ako se uvrsti $a = f_a$ i $b = \infty$. Ona iznosi:

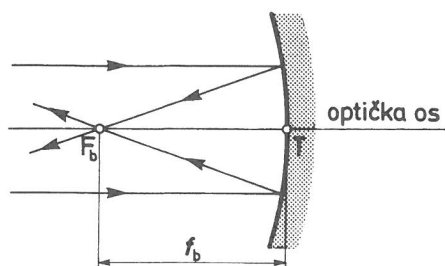
$$f_a = \frac{r}{2}.$$



Slika 5.14. Predmetna žarišna daljina f_a i predmetno žarište F_a sfernog zrcala.

Zrake svjetlosti koje se šire paralelno s optičkom osi nakon refleksije na zrcalu sijeku se na optičkoj osi u točki nazvanoj *slikovno žarište*, F_b . Udaljenost od tjemena do slikovnog žarišta, razmak $F_b T = f_b$, naziva se **slikovna žarišna daljina** (sl. 5.15)

$$f_b = \frac{r}{2},$$



Slika 5.15. Slikovna žarišna daljina f_b i slikovno žarište F_b sfernog zrcala

pa vrijedi:

$$f_a = f_b = f = \frac{r}{2},$$

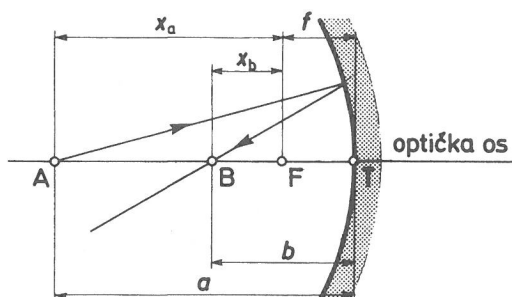
odnosno za sferno je zrcalo predmetno i slikovno žarište ista točka na optičkoj osi, žarište F zrcala.

Uvođenjem žarišne daljine u jednadžbu za sferno zrcalo (5.5) ona dobiva oblik:

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{b} = 1 \quad (5.6)$$

U jednadžbama se razumijeva da su udaljenosti mjerene od tjemena zrcala. Za Newtonov oblik jednadžbe sfernog zrcala, udaljenosti se mjere od žarišta ogledala. Da bismo dobili taj oblik, služit ćemo se posljednjom jednadžbom (5.6) u koju unosimo nove oznake (sl. 5.16). Ako je $\overline{AF} = x_a$ udaljenost predmeta, a $\overline{BF} = x_b$ udaljenost slike od žarišta zrcala, onda je $a = x_a + f$ i $b = x_b + f$, pa jednadžba (5.6) dobiva oblik:

$$\frac{f}{x_a + f} + \frac{f}{x_b + f} = 1, \quad (5.7)$$



Slika 5.16. Uz tumačenje jednadžbe sfernog zrcala

ili, konačno, kad sredimo:

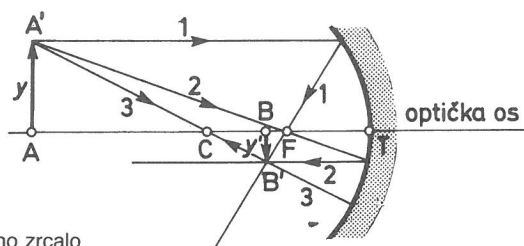
$$\frac{f}{x_a} \cdot \frac{f}{x_b} = 1. \quad (5.8)$$

Neka se na optičkoj osi nalazi predmet veličine y okomit na os. Da bismo konstruirali sliku koju daje sferno zrcalo upotrijebit ćemo *tri karakteristične zrake*. Za konstrukciju je dovoljno ucrtati dvije od tih zraka. Na priloženoj slici 5.17 vide se sve tri zrake koje dolaze iz točke A' predmeta.

Zraka 1 putuje od predmeta paralelno s optičkom osi i nakon refleksije prolazi kroz fokus F .

Zraka 2 putuje od predmeta prolazeći kroz fokus, a nakon refleksije širi se paralelno s optičkom osi.

Zraka 3 prolazi kroz središte zakrivljenosti C zrcala, i reflektira se sama u sebe. Sjecište reflektiranih zraka točka B' slika je točke A' predmeta.



Slika 5.17. Konstrukcija slike koju daje sferno zrcalo

Omjer veličine slike y' i veličine predmeta y naziva se poprečno ili transversalno **povećanje** i označuje se sa m .

$$m = \frac{y'}{y}.$$

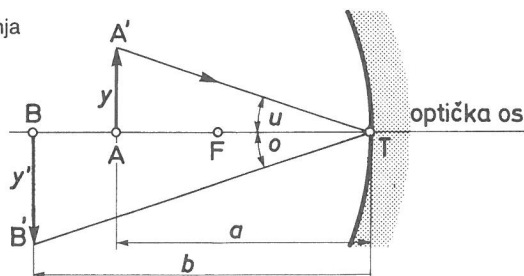
Za sferno zrcalo povećanje je

$$m = -\frac{b}{a}.$$

Do tog izraza možemo doći analizom slike 5.18. Odabrana zraka svjetlosti koja se širi s vrha predmeta, iz točke A' , reflektira se u tjemenu zrcala T i tvori sliku u B' . Točke A , A' i T , te točke B , B' i T vrhovi su dvaju sličnih trokuta. Vrijedi razmjernost:

$$y' : y = b : a,$$

Slika 5.18. Uz tumačenje poprečnog povećanja sfernog zrcala



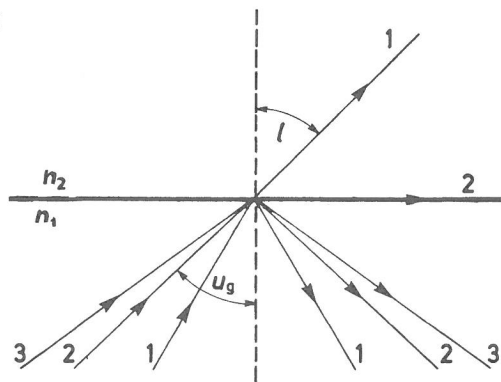
koji određuje apsolutnu vrijednost povećanja. Primijenit ćemo sljedeći dogovor: povećanje je negativan broj ($m < 0$) ako je slika obrnuta prema predmetu, odnosno povećanje je pozitivan broj ($m > 0$) ako slika nije obrnuta prema predmetu.

U pokusu se vidi refleksija paralelnog snopa svjetlosti koji pada na udubljenu, odnosno izbočenu glatku plohu. Paralelni se snop dobiva iz kondenzora lučnice. Pri refleksiji svjetlosti na udubljenoj plohi slika se formira u realnom žarištu ispred zrcala, a pri refleksiji na izbočenoj strani slika je u virtualnom žarištu iza zrcala. U tom slučaju zrake svjetlosti nakon refleksije divergiraju.

5.3. Totalna refleksija i neke njezine primjene

Ako zraka svjetlosti padne na granicu dvaju optički različitih sredstava, dio svjetlosti se odbije, a dio se lomi u drugo sredstvo. To je prikazano zrakom 1 na slici 5.19. Pri širenju svjetlosti iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo kut loma veći je od upadnog kuta. Povećavanjem upadnog kuta, povećava se i kut loma. Za neki granični upadni kut u_g kut loma dosegne vrijednost 90° pa se lomljena zraka širi po samoj granici tih sredstava. To je prikazano zrakom 2 na slici. Sve zrake svjetlosti čiji je upadni kut veći od graničnoga u_g , reflektiraju se potpuno, tj. sva svjetlost koja je pala na granicu odbija se. To se događa s ucrtanom zrakom 3 na slici.

Slika 5.19. Lom i odbijanje svjetlosti na granici dvaju optički različitih sredstava, $n_1 > n_2$



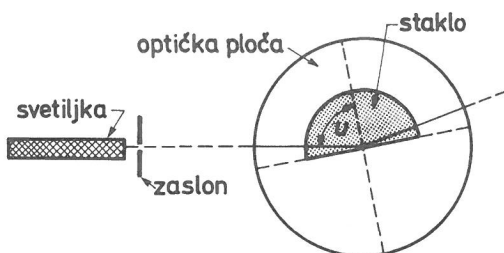
Granični upadni kut u_g može se odrediti iz Snellova zakona loma ako uvrstimo: $\sin l = \sin 90^\circ = 1$. Zakon time dobiva oblik:

$$\sin u_g = \frac{n_2}{n_1},$$

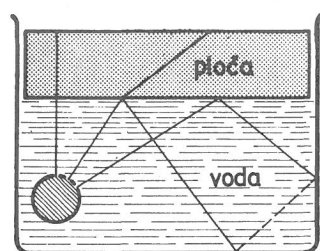
što je moguće ostvariti uz uvjet da je $n_1 > n_2$ a to znači da se upadna zraka širi u sredstvu većeg indeksa loma. Neki primjeri graničnog kuta u_g za lom natrijeve žute svjetlosti (n_D je indeks loma) navedeni su u tablici 5.1.

Tablica 5.1. Indeks loma i granični kutovi za natrijevu žutu svjetlost pri 20 °C (granica sredstvo-vakuum)

Sredstvo	Indeks loma n_D	Granični upadni kut u_g
krunsko staklo	1,5100	41° 28" ili 0,724 rad
teško flintsko staklo	1,7550	34° 44" ili 0,606 rad
voda	1,3330	48° 36" ili 0,848 rad



Slika 5.20. Totalna refleksija svjetlosti na granici staklo – zrak



Slika 5.21. Lom i refleksija svjetlosti na granici voda – zrak ($u_g = 0,848$)

U pokusu s optičkom pločom dokazuje se totalna refleksija i određuje granični upadni kut za granicu staklo – zrak. U središte ploče postavi se staklo u obliku kružnog polucilindra tako da uski paralelni snop svjetlosti iz svjetiljke sa zaslonom dolazi na izbočenu stranu stakla i ulazi u nj uvijek pod kutom 0 rad ako se ploča okreće oko svoje glavne osi simetrije, kako je pokazano na slici 5.20. Za vrijeme zakretanja ploče mijenja se upadni kut u na ravnoj plohi polucilindra. Dok je kut malen, vidi se i lomljeni i odbijeni snop svjetlosti. Postepenim povećanjem upadnog kuta do iznosa graničnog kuta u_g postiže se kut loma $\pi/2$. Za svaki veći upadni kut lomljeni snop iščezne i vidi se samo snop svjetla koji se odbija. Snop svjetlosti koji se u pokusu širi iz izvora »struže« po površini ploče i tako je vidljiv.

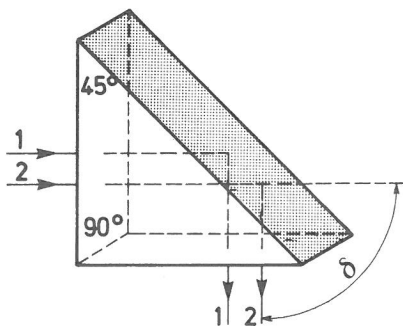
Jednaki pokus na granici voda – zrak pokazuje slika 5.21. Izvor je smješten ispod površine vode, a pomoću zaslona ispred izvora dobiju se snopovi svjetlosti različitih upadnih kutova. Snop svjetlosti je vidljiv zbog raspršenja svjetlosti na česticama fluoresceina u vodi, odnosno po površini ploče smještene u zraku.

Obratit ćemo pažnju na jednu primjenu totalne refleksije.

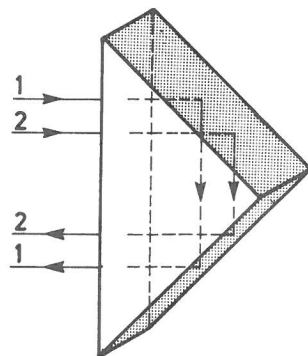
U optičkim instrumentima često se nalaze prizme za totalnu refleksiju. Njihovi su glavni presjeci jednakokračni pravokutni trokuti. Na slici 5.22. prikazana je takva prizma u položaju u kojem upadna i izlazna zraka svjetlosti zatvaraju kut devijacije $\pi/2$. Pri refleksiji na granici staklo-zrak upadni kut $\pi/4$ veći je od graničnog kuta, pa je zraka totalno reflektirana. Tako upotrijebljena prizma zamjenjuje ravno zrcalo.

Na slici 5.23. pokazan je položaj prizme pri kojemu kut devijacije iznosi 180° ili π radijana. Redoslijed izlaznih zraka zamijenjen je prema redoslijedu upadnih

zraka, pa prizma služi za okretanje slike gore – dolje. U tom slučaju prizma zamjenjuje dva ravna zrcala koja stoje pod kutom $\frac{\pi}{2}$.

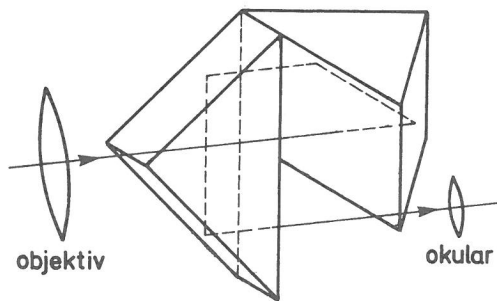


Slika 5.22. Prizma za totalnu refleksiju (kut devijacije $\pi/2$)

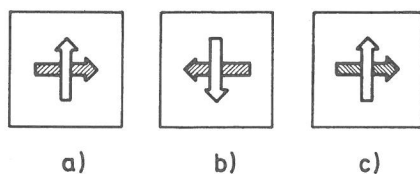


Slika 5.23. Prizma za totalnu refleksiju (kut devijacije π)

Kombinacijom dviju prizmi od kojih se jedna okreće lijevo-desno, a druga gore-dolje izgrađen je *Porro-sustav*. Taj se sustav ugrađuje u terestičke Keplerove dalekozore između objektiv i okulara (sl. 5.24), da bi se gledajući kroz dalekozor slika vidjela uspravna, i da bi ono što je u stvarnosti na lijevoj strani vidjelo lijevo, a ono što je na desnoj strani, desno.



Slika 5.24. Porro-sustav



Slika 5.25. Slike na zastoru u pokusu s Porro-sustavom

Porro-sustav predočujemo pokusom u kojem nam kao svjetli predmet služe dvije strelice postavljene međusobno okomito (sl. 5.25a). Pomoću korigirane leće na zastoru dobivamo ostru sliku predmeta prikazanu na slici b). Na slici c) je slika predmeta nastala kada se zrake svjetlosti lome kroz leću, a na putu prema zastoru prolaze kroz Porro-sustav.

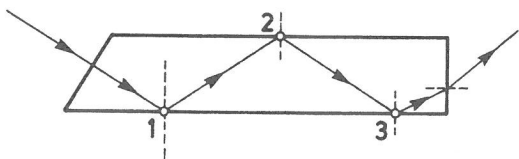
Slika 5.26. Mogućnost upotrebe prizme za totalnu refleksiju za kut devijacije 0 radijana.



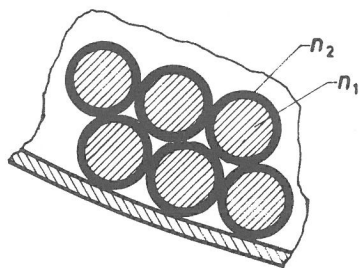
Još jedna mogućnost primjene prizme za totalnu refleksiju dana je na slici 5.26. Upadne zrake svjetlosti paralelne su s bazom, pa je kut devijacije 0° , a mijenja se redoslijed zraka gore-dolje. Ako sliku dobivamo pomoću leće tom se prizmom ona uspravlja. Međutim, ono što je na predmetu lijevo, na slici predmeta je desno, i obrnuto.

Vodič svjetlosti je još jedan primjer primjene totalne refleksije koji spominjemo. Na optičku je ploču postavljen štapić od pleksi-stakla. Zraka svjetlosti koja uđe u staklo i odbije se od granice staklo-zrak u točki 1 uz upadni kut $u > u_g$, ostaje zarobljena u staklu (sl. 5.27). Svjetlost prolazi od jedne do druge točke (2, 3) (uz mali gubitak energije) pomoću totalne refleksije i na kraju izlazi iz štapića.

Na toj osnovi rade vodiči svjetlosti ili *svjetlovodi*. Sastavljeni su od tankih prozirnih vlakna skupljenih u svežanj. Svako vlakno je presvučeno tankim slojem sredstva indeksa loma n_2 manjeg od indeksa loma n_1 vlakna. Budući da su vlakna tanka promjera manjeg od 1 mm, svi su ti vodiči svjetlosti fleksibilni (sl. 5.28). U pokusu je primijenjen vodič svjetlosti »Crofon« od polimetil-metakrilata. Svežanj je sastavljen od 32 vlakna promjera 0,26 mm i proziran je za vidljivu svjetlost. Vodiči od staklenih i kvarcnih vlakana imaju bolju transparentiju.



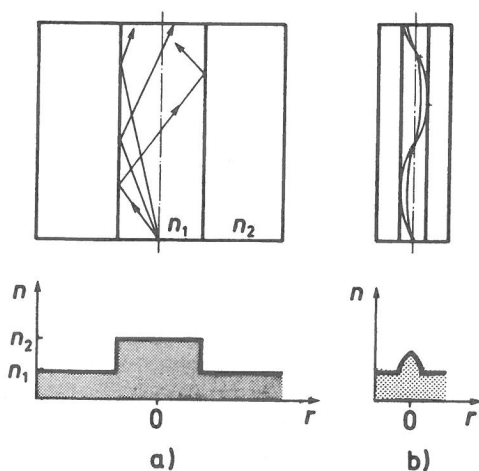
Slika 5.27. Štapić od pleksi-stakla u kojemu nastaje uzastopna totalna refleksija svjetlosti



Slika 5.28. Presjek vodiča svjetlosti

Svjetlost koja uđe kroz osnovku na početku vlakna putuje njime totalno se reflektirajući na površini plašta vlakna. Ta svjetlost može izići iz vlakna tek na njezinu kraju, koji završava osnovkom okomitom na duljinu vlakna. Pritome vlakno svjetlovoda može biti kojekako svinuto.

Vlakno kojim se služimo ima osobinu da se duž njegova promjera R skokovito mijenja indeks loma iz vrijednosti n_1 na vrijednost n_2 (sl. 5.29.a). Vlakno ima nedostatak: ulaze li zrake svjetlosti u vlakno pod različitim upadnim kutovima, njihove će izlomljene staze duž vlakna do njegova kraja biti različito duge, a time će i vremena proleta pojedinih zraka biti različita. Zrake koje ulaze pod većim kutem prolaze veći put nego one koje ulaze pod manjim. Ako je, međutim, vlakno stupnjevanog indeksa loma, kako prikazuje slika 5.29.b, taj se nedostatak ublažava. Naime, vrijeme proleta razmjerno je optičnom putu zrake nl , pri čemu je l duljina geometrijskog puta zrake. Zrake manjega upadnog kuta bliže su osi vlakna, tj. u području su većeg indeksa loma. Tako se mogu približno izjednačiti optički putovi zraka različitih upadnih kutova.



Slika 5.29. Optičko vlakno sa: a) stepenastom promjenom indeksa loma, b) s gradiiranim indeksom loma

U industrijskoj i medicinskoj praksi, te u istraživačkim laboratorijima uvelike se upotrebljavaju različita optička vlakna. Naprimjer, u dojavnoj tehnici koriste se tanka vlakna promjera 10 do 100 μm .

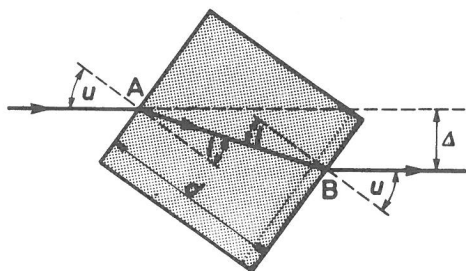
5.4. Prolaz svjetlosti kroz planparalelnu ploču

Zraka svjetlosti koja pada na plohu planparalelne ploče lomi se ulaskom u sredstvo ploče prvi puta, te ponovno pri izlazu iz ploče. Prolaz svjetlosti kroz ploču ne pokazuje promjenu smjera širenja svjetla nego samo paralelan pomak, na slici 5.30. označen sa Δ . Pomak je određen debljinom d ploče, indeksom loma sredstva ploče i upadnim kutom u . Sa slike 5.30 dobivamo:

$$\sin(u - l) = \frac{\Delta}{AB} \quad \overline{AB} = \frac{d}{\cos l},$$

dakle:

$$\Delta = \frac{d \sin(u - l)}{\cos l}.$$



Slika 5.30. Prolaz svjetlosti kroz planparalelnu ploču

Za indeks loma n sredstva ploče prema sredstvu okoline vrijedi zakon loma:

$$\sin l = \frac{\sin u}{n}, \text{ pa je } \cos l = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{n^2}}.$$

Time se dobiva izraz za paralelni pomak Δ :

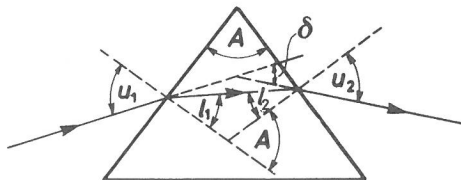
$$\Delta = d \sin u \left(1 - \frac{\cos u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}}\right).$$

Planparalelnom se pločom može mjeriti indeks loma sredstva od kojega je ploča napravljena.

5.5. Prolaz svjetlosti kroz optičku prizmu

Optička je prizma tijelo čiji je glavni presjek trokut. Izrađena je najčešće od stakla, a za posebne namjene može biti od kvarca, slankamena i sl. Dvije plohe prizme dobro su polirane i čine *lomni kut* prizme A (sl. 5.31). Promatrat ćemo put zrake svjetlosti koja prolazi kroz prizmu, uz pretpostavku da je riječ o monokromatskoj svjetlosti. Zraka svjetlosti na ulazu u prizmu zatvara s normalom kut upada u_1 . Ona se lomi i tako lomljena u prizmi zatvara s normalom kut l_1 . Prema tome, lomljena je zraka u prizmi zakrenuta prema upadnoj za kut

$$\delta_1 = u_1 - l_1.$$



Slika 5.31. Prolaz svjetlosti kroz optičku prizmu

To je *devijacija* upadne zrake koju je ona pretrpjela na ulazu u prizmu.

Na izlazu iz prizme zraka se ponovno lomi. Iznimno ćemo upadni kut što ga zraka zatvara s normalom na izlaznu plohu označiti sa l_2 , a kut loma sa u_2 . Dakle, devijacija koju zraka pretrpi u drugom lomu jest:

$$\delta_2 = u_2 - l_2$$

Ukupna devijacija δ zrake pri prolazu kroz prizmu zbroj je tih dviju devijacija $\delta_1 + \delta_2$, dakle

$$\delta = u_1 - l_1 + u_2 - l_2$$

ili

$$\delta = u_1 + u_2 - (l_1 + l_2). \quad (5.9)$$

Iz geometrijskih prilika u prizmi slijedi da je vanjski kut A trokuta što ga lomljena zraka u staklu zatvara s obje normale jednak zbroju $l_1 + l_2$. Dakle;

$$A = l_1 + l_2.$$

Međutim, A je također i vanjski kut četverokuta što ga zatvaraju obje normale i stranice prizme. Budući da su u tom četverokutu dva kuta prava, kut A jednak je lomnom kutu prizme. Dakle, za svaki je upadni kut u_1 ispunjen uvjet

$$l_1 + l_2 = A = \text{konst.}$$

Prema tome, za devijaciju δ dobili smo izraz

$$\delta = u_1 + u_2 - A. \quad (5.10)$$

Ako devijacija ima minimalnu vrijednost (općenito ekstermnu), mora biti ispunjen nužni uvjet

$$\frac{d\delta}{du_1} = 0. \quad (5.11)$$

Dakle, treba naći tu derivaciju i izjednačiti je s nulom.

U sljedećem ćemo razmatranju promatrati sve veličine kao funkcije upadnog kuta u_1 . Traženu derivaciju možemo izraziti pomoću posljednje jednadžbe (5.10) ovako:

$$\frac{d\delta}{du_1} = 1 + \frac{du_2}{du_1}. \quad (5.12)$$

Kut u_2 treba iskazati pomoću kuta u_1 da bismo našli derivaciju u izrazu 5.12. To teče preko veze koju daje zakon loma u Snellovu obliku. Naime, kut l_1 određen je kutom u_1 . Nadalje, kut l_2 vezan je s kutom l_1 u uvjetu koji kaže da je zbroj tih kutova $l_1 + l_2 = A$. Napokon, po Snellovu zakonu upadni kut l_2 određuje kut loma u_2 . Prema tome, da bismo našli derivaciju $\frac{du_2}{du_1}$, upotrijebit ćemo navedene veze,

$$\sin u_1 = n \sin l_1$$

$$l_1 + l_2 = A$$

$$n \sin l_2 = \sin u_2.$$

Svaku tu jednadžbu derivirat ćemo po u_1 . Tako ćemo dobiti:

$$\cos u_1 = n \cos l_1 \frac{dl_1}{du_1} \quad (5.13)$$

$$\frac{dl_1}{du_1} + \frac{dl_2}{du_1} = 0 \quad (5.14)$$

$$n \cos l_2 \frac{dl_2}{du_1} = \cos u_2 \frac{du_2}{du_1}. \quad (5.15)$$

Iz posljednje jednađbe 5.15. možemo izračunati traženu derivaciju:

$$\frac{du_2}{du_1} = n \frac{\cos l_2}{\cos u_2} \frac{dl_2}{du_1}.$$

Ako sada upotrijebimo jednađbu (5.14), možemo eliminirati derivaciju kuta l_2 . Dakle,

$$\frac{du_2}{du_1} = -n \frac{\cos l_2}{\cos u_2} \frac{dl_1}{du_1}.$$

Iz te jednađbe pomoću jednađbe (5.13) možemo eliminirati derivaciju kuta l_1 . Dobit ćemo:

$$\frac{du_2}{du_1} = - \frac{\cos u_1 \cos l_2}{\cos l_1 \cos u_2}. \quad (5.16)$$

Ta jednađba ima općenitu vrijednost. Međutim, u slučaju minimuma devijacije našli smo da je:

$$\frac{d\delta}{du_1} = 0, \text{ ili } \frac{du_2}{du_1} = -1.$$

Prema tome, iz posljednje dvije jednađbe zaključujemo da za ekstrem vrijedi

$$\frac{\cos l_2 \cdot \cos u_1}{\cos u_2 \cdot \cos l_1} = 1. \quad (5.17)$$

To je veza između kuta u_2 i kuta u_1 , koja vrijedi u tom slučaju. Ona je pritom još izražena pomoću kutova l_1 i l_2 . Njih možemo eliminirati pomoću Snellova zakona za prvi odnosno drugi lom. Iz tih formula slijedi

$$\cos l_1 = \sqrt{1 - \sin^2 l_1} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_1}{n^2}},$$

$$\cos l_2 = \sqrt{1 - \sin^2 l_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_2}{n^2}}.$$

Ako to uvrstimo u (5.17) i kvadriramo, dobit ćemo:

$$\frac{\cos^2 u_1}{n^2 - \sin^2 u_1} = \frac{\cos^2 u_2}{n^2 - \sin^2 u_2},$$

ili, samo pomoću funkcije sinus,

$$\frac{1 - \sin^2 u_1}{n^2 - \sin^2 u_1} = \frac{1 - \sin^2 u_2}{n^2 - \sin^2 u_2}.$$

Kad to sredimo, proizlazi:

$$(n^2 - 1) (\sin^2 u_2 - \sin^2 u_1) = 0.$$

Budući da je $n > 1$, zaključujemo:

$$\sin^2 u_2 - \sin^2 u_1 = 0,$$

$$u_2 = u_1.$$

Devijacija prizmom je ekstremna ako je prolaz svjetlosti kroz prizmu simetričan. Da je taj ekstrem minimum, treba biti

$$\frac{d^2 \delta}{du_1^2} > 0,$$

ako u taj posljednji izraz uvrstimo vrijednosti koje pripadaju $\frac{d\delta}{du_1} = 0$. To ćemo pokazati da vrijedi. Našli smo da općenito vrijede jednačbe (5.12.), (5.14.) i (5.16.), tj.:

$$\frac{d\delta}{du_1} = 1 + \frac{du_2}{du_1}, \quad (5.12)$$

$$\frac{dl_1}{du_1} + \frac{dl_2}{du_1} = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{du_2}{du_1} = - \frac{\cos u_1 \cos l_2}{\cos l_1 \cos u_2}. \quad (5.16)$$

Odatle slijedi:

$$\frac{d^2 \delta}{du_1^2} = \frac{d^2 u_2}{du_1^2}.$$

Iz jednačbe (5.16) dobivamo:

$$\frac{du_2}{du_1} \cos l_1 \cos u_2 = - \cos u_1 \cos l_2.$$

Ako tu jednačbu deriviramo po u_1 i uzmemo u obzir jednačbu od (5.14) dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{du_1^2} \cos l_1 \cos u_2 - \frac{du_2}{du_1} \frac{dl_1}{du_1} \sin l_1 \cos u_2 - \left(\frac{du_2}{du_1} \right)^2 \cos l_1 \sin u_2 = \\ = \sin u_1 \cos l_2 - \cos u_1 \sin l_2 \frac{dl_2}{du_1}. \end{aligned}$$

Ustanovili smo da je za vrijednosti koje pripadaju ekstremu

$$\frac{du_2}{du_1} = -1, \quad u_1 = u_2, \quad l_1 = l_2,$$

pa gornji izraz tada glasi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{du_1^2} \cos l_1 \cos u_1 + \frac{dl_1}{du_1} \sin l_1 \cos \mu_1 - \cos l_1 \sin u_1 = \\ = \cos l_1 \sin u_2 - \sin l_1 \cos u_1 \frac{dl_1}{du_1}. \end{aligned}$$

To daje

$$\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = 2 \operatorname{tg} u_1 - 2 \operatorname{tg} l_1 \frac{dl_1}{du_1}.$$

Uz $n > 1$, $0 < u_1 < 90^\circ$, iz Snellova zakona slijedi da je $u_1 > l_1$, pa je također

$$\operatorname{tg} u_1 > \operatorname{tg} l_1.$$

Iz jednadžbe (5.13), tj.:

$$\cos u_1 = n \cos l_1 \frac{dl_1}{du_1},$$

koju smo prije dobili, uz $n > 1$, $u_1 > l_1$, $0 < u_1 < 90^\circ$ slijedi:

$$\frac{dl_1}{du_1} = \frac{1}{n} \frac{\cos u_1}{\cos l_1} < 1.$$

Prema tome, za nađeni je ekstrem

$$\frac{d^2 \delta}{du_1^2} > 0,$$

što znači da devijacija δ ima najmanju vrijednost kad je $u_1 = u_2$, tj. kad je prolaz zrake svjetlosti kroz prizmu *simetričan*. Budući da je simetrični prolaz svjetlosti kroz prizmu spektroskopa (vidi, 5.8) poželjan radi najboljeg iskorištenja prizme, vidimo da se to postiže namještanjem prizme na minimum devijacije.

Određivanje indeksa loma. Kako smo (u prethodnom poglavlju) vidjeli, devijacija zrake svjetlosti lomom u prizmi je minimalna ako je prolaz zrake kroz prizmu simetričan. Dakle, u tom je slučaju

$$\delta_{\min} = 2 u_1 - A$$

$$A = 2 l_1.$$

Iz tih jednadžbi možemo izračunati kutove u_1 odnosno l_1 :

$$u_1 = \frac{1}{2} (\delta_{\min} + A)$$

$$l_1 = \frac{A}{2}.$$

Ako te vrijednosti uvrstimo u Snellov zakon loma, dobit ćemo:

$$n = \frac{\sin u_1}{\sin l_1} = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Lomni kut prizme A i minimalna devijacija $\delta_{\min}$ mogu se vrlo točno izmjeriti goniometrom. Budući da su ti kutovi poznati, iz posljednje formule izračunavamo indeks loma n stakla prizme za svjetlost s kojom smo eksperimentirali.

To je mjerenje prikladno zato što je za istu prizmu A konstantno, pa se indeks loma za razne svjetlosti određuje tako da se redom odrede minimumi devijacije za te svjetlosti.

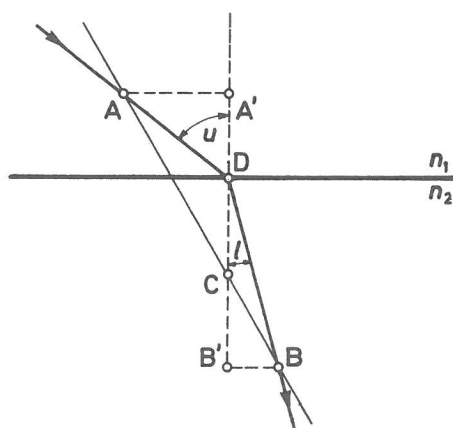
5.6. Lom svjetlosti na sfernoj granici objašnjen Möbiusovim zakonom loma

Promatrat ćemo zrake svjetlosti koje se lome na *sfernoj granici* (dijelu kugline plohe) u kojoj se dotiču dva homogena izotropna sredstva različitih indeksa loma.

Prije nego što započnemo to promatranje prisjetit ćemo se da smo pri uvođenju osnovnih zakona geometrijske optike napisali zakon loma u Snellovu obliku:

$$n_1 \sin u = n_2 \sin l.$$

Sada ćemo taj oblik preinačiti u *Möbiusov oblik*, da bismo ga takvoga mogli upotrijebiti u daljnjem izlaganju.



Slika 5.32. Uz tumačenje zakona loma u Möbiusovu obliku

Stoga ćemo najprije promotriti ravnu granicu dvaju optički različitih prozirnih sredstava indeksa loma n_1 i n_2 (slika 5.32). Upadnu i lomljenu zraku te normalu na granicu presjeći ćemo povoljnim pravcem. Sjecišta su točke A , B , C . Iz točaka A i B spustimo okomice na normalu. Nožišta tih normala su točke A' i B' . Točka loma na slici označena je sa D .

Promotrit ćemo dva slična pravokutna trokuta vrhova $AA'C$ i $BB'C$ za čije stranice vrijedi razmjjer:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BB'}}. \quad (5.18)$$

Također ćemo promotriti pravokutne trokute vrhova AA'D i BB'D. Za prvi trokut vrijedi:

$$\overline{AA'} = \overline{AD} \sin u, \quad (5.19)$$

a za drugi:

$$\overline{BB'} = \overline{BD} \sin l, \quad (5.20)$$

gdje je u upadni kut, a l kut loma. Ako te izraze (5.19) i (5.20) uvrstimo u prvu formulu (5.18) dobit ćemo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD} \sin u} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD} \sin l}. \quad (5.21)$$

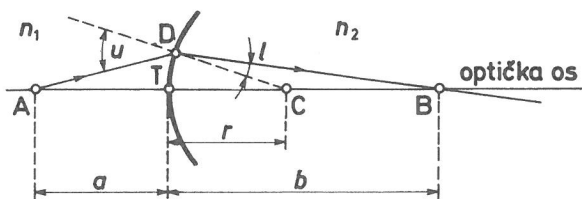
Pomoću zakona loma u Snellovu obliku, $n_1 \sin u = n_2 \sin l$ iz posljednjeg izraza (5.21) dobijemo (množenjem lijevih i desnih strana međusobno):

$$n_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = n_2 \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}, \quad (5.22)$$

a to je **zakon loma svjetlosti u Möbiusovu obliku**.

Izvedimo zakon loma na sfernoj granici koja dijeli dva homogena izotropna sredstva indeksa loma n_1 i n_2 .

Središnja točka sferne granice je tjeme, na slici 5.33. označeno sa T. Na istoj je slici točka C *središte zakrivljenosti sferne granice*, a r polumjer zakrivljenosti. Pravac na kojemu leži tjeme T i središte zakrivljenosti C zove se *optička os sferne granice*.



Slika 5.33. Lom svjetlosti na sfernoj granici

Svijetli točkasti predmet nalazi se na optičkoj osi u točki A. Promatramo zraku svjetlosti koja se od predmeta širi sredstvom indeksa loma n_1 do točke D na sfernoj granici. Upadni kut što ga zraka zatvara s normalom na granicu jest u . Zraka se lomi u sredstvo indeksa loma n_2 zatvarajući s normalom kut l . Promatrana zraka svjetlosti siječe optičku os u točki B.

Na odabranu zraku svjetlosti možemo primijeniti zakon loma u Möbiusovu obliku (5.22). Pritom je pravac koji siječe upadnu i lomljenu zraku te normalu na granicu optička os sferne granice. Uz iste oznake točaka kao prije vrijedi već nađen izraz:

$$n_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = n_2 \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Primjenom Gaussovih aproksimacija ograničujemo se na paraksijalne zrake, tj. na zrake koje s optičkom osi zatvaraju maleni kut pa vrijede ove približnosti:

$$\overline{AD} \doteq \overline{AT}$$

$$\overline{BD} \doteq \overline{BT}$$

$$\overline{CD} \doteq \overline{CT}.$$

Slijedi da je za zrake iz točke A za koje vrijedi Gaussova aproksimacija položaj točke B neovisan o mjestu D na kojemu zraka prolazi iz jednog sredstva u drugo zato što je:

$$n_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = n_2 \frac{\overline{BC}}{\overline{BT}}. \quad (5.23)$$

Sad je izraz (5.23) na lijevoj strani konstantan, pa takav mora biti i onaj na desnoj. Prema tome, sve te zrake nakon loma na sfernoj granici sijeku optičku os u istoj točki B. Ta se točka naziva *slika svjetle točke A*.

Uvest ćemo ove oznake i nazive:

$$\overline{AT} = a, \text{ predmetna daljina}$$

$$\overline{BT} = b, \text{ slikovna daljina}$$

$$\overline{CT} = r, \text{ polumjer zakrivljenosti sferne granice.}$$

Ako ih uvedemo u posljednju formulu (5.23) i uzmemo u obzir da je tada

$$\overline{AC} = a + r, \quad \overline{BC} = b - r,$$

onda dobijemo:

$$n_1 \frac{a + r}{a} = n_2 \frac{b - r}{b}. \quad (5.24)$$

Sređivanjem se uz te jednakosti dobije:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.25)$$

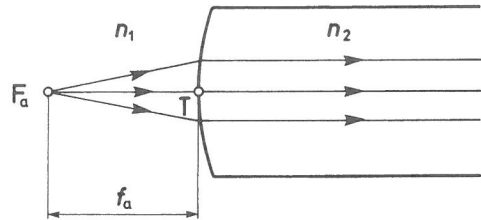
Gornji izraz (5.25) je zakon loma na sfernoj granici. Ako se zrake svjetlosti šire slijeva nadesno, uz taj se zakon primjenjuje slijedeći dogovor o predznacima:

1. Ako je svjetli predmet u točki A **lijevo** od tjemena T, predmetna daljina $a > 0$. Predmet je realan. U protivnome, predmet je virtualan.
2. Ako je slika u točki B **desno** od tjemena T, slikovna daljina $b > 0$. Slika je realna. U protivnome, slika je virtualna.
3. Ako je centar zakrivljenosti C desno od tjemena T, polumjer zakrivljenosti $r > 0$ i sferna je granica konveksna. Za $r < 0$ riječ je o konkavnoj sfernoj granici.

ŽARIŠTA SFERNE GRANICE. Ako se točkasti svijetli predmet nalazi na optičkoj osi tako da se zrake svjetlosti nakon loma na granici šire paralelno s optičkom osi, točka u kojoj se nalazi predmet jest *predmetno žarište* ili predmetni fokus F_a , a udaljenost tog fokusa od tjemena označava predmetnu žarišnu daljinu f_a , tj. $f_a = \overline{F_a T}$. Iz zakona loma na sfernoj granici (5.25) može se odrediti da je:

$$f_a = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r \quad (5.26)$$

pošto smo uvrstili $a = f_a$, $b = \infty$ (sl. 5.34).



Slika 5.34. Predmetna žarišna daljina f_a i predmetno žarište F_a sferne granice

Ako je svijetli predmet na optičkoj osi neizmjereno udaljen ispred tjemena sferne granice, zrake se šire paralelno s optičkom osi. Nakon loma na granici one se sijeku u *točki* koja se naziva slikovni fokus F_b (sl. 5.35). Udaljenost fokusa od tjemena $f_b = \overline{F_b T}$ naziva se slikovna žarišna daljina. Iz zakona za lom (5.25) slijedi za slikovnu žarišnu daljinu izraz:

$$f_b = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \quad (5.27)$$

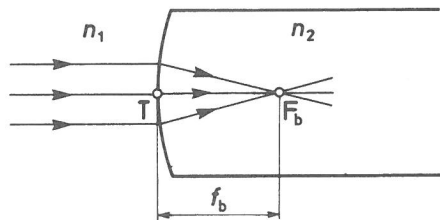
ako uvrstimo $a = \infty$, $b = f_b$.

Iz napisanih izraza (5.26) i (5.27) mogu se naći sljedeće veze između žarišnih daljina:

$$f_b - f_a = r \quad \text{ i } \quad \frac{f_b}{f_a} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Uvrštavanjem napisanih izraza (5.26) i (5.27) u zakon loma na sfernoj granici, dobivamo i novi oblik zakona prikazanog pomoću žarišnih daljina:

$$\frac{f_a}{a} + \frac{f_b}{b} = 1 \quad (5.28)$$



Slika 5.35. Slikovna žarišna daljina f_b i slikovno žarište F_b sferne granice

Svijetli predmet je okrugao otvor obasjan svjetlošću iz lučnice na (sl. 5. 36). Snop svjetlosti iz otvora divergira i pada na izbočenu sfernu granicu, koja je jedna strana okrugle tikvice položene na posudu cilindričnog oblika. I tikvica i posuda ispunjene su vodom u koju je umiješan fluorescein da bi se vidio put svjetlosnih zraka.

Izvor svjetlosti nalazi se sa strane tako da zrake iz njega padaju okomito na optičku os konveksne sferne granice. Totalnom refleksijom na prizmi svjetlo iz izvora zakreće se u optičku os. U tom slučaju prvo sredstvo, zrak, ima indeks loma $n_1 = 1$, a drugo sredstvo, voda, ima indeks loma $n_2 = 4/3$.

Snop svjetlosti nakon loma na granici zrak – voda konvergira i stvara sliku na optičkoj osi, nakon čega divergira. Dok je snop širok, slika nije oštra. Upotrebom zaslona ispred sferne granice slika postaje oštra. Time smo se u pokusu uglavnom ograničili na paraksijalne zrake.

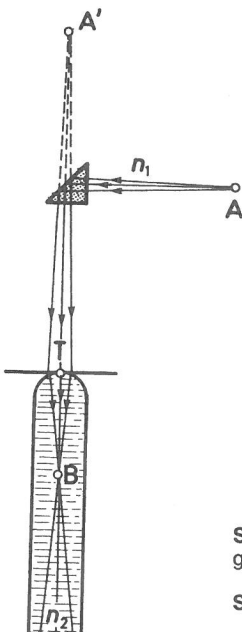
Za promatranu sfernu granicu predmetna žarišna daljina f_a ima vrijednost (prema (5.26))

$$f_a = - \frac{r}{\frac{4}{3} - 1} = 3r,$$

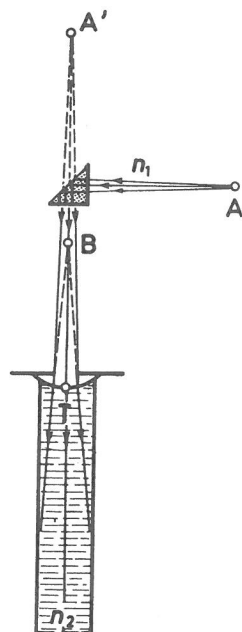
a slikovna je žarišna daljina (prema (5.27))

$$f_b = 4r.$$

Također možemo pokazati lom na udubljenoj sfernoj granici (sl. 5.37) ako tikvicu zamjenimo stakalcem sa sata. Snop svjetlosti nakon loma na sfernoj granici divergira, a slika je virtualna i ispred tjemena T granice.



Slika 5.36. Lom svjetlosti na izbočenoj sfernoj granici



Slika 5.37. Lom svjetlosti na udubljenoj sfernoj granici

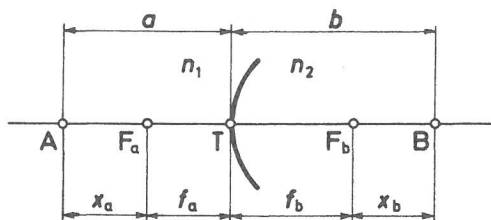
Koristeći se Newtonovim oznakama, tj. određujući položaj predmeta odnosno slike pomoću udaljenosti od predmetnog, slikovnog žarišta dobivamo *Newtonov oblik* zakona loma na sfernoj granici. Iz slike 5.38. vidljivo je da je uz oznaku $a = x_a + f_a$ i $b = x_b + f_b$, pri čemu su x_a odnosno x_b Newtonove oznake za predmetnu odnosno slikovnu udaljenost. Dobivamo prema (5.28):

$$\frac{f_a}{x_a + f_a} + \frac{f_b}{x_b + f_b} = 1,$$

a nakon sređivanja:

$$\frac{f_a}{x_a} \frac{f_b}{x_b} = 1,$$

Slika 5.38. Newtonove oznake za predmetnu (x_a) i slikovnu (x_b) daljinu u zakonu loma svjetlosti na sfernoj granici

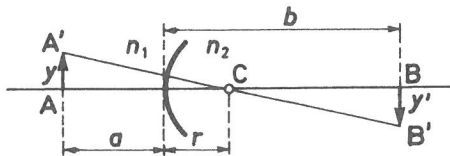


što daje zakon loma na sfernoj granici u Newtonovu obliku.

Uspravni svijetli predmet veličine y smješten je iznad optičke osi (sl. 5.39). Promatramo zraku svjetlosti koja nakon loma prolazi kroz centar zakrivljenosti C sferne granice. Ta zraka pri lomu ne promijeni smjer ($\angle u = 0^\circ$). Nakon loma zrake svjetlosti na sfernoj granici dobiva se slika veličine y' , koja je okomita i ispod optičke osi. Iz dva slična trokuta s vrhovima $AA'C$ i $BB'C$ slijedi razmjernost:

$$\frac{y'}{y} = \frac{b - r}{a + r}.$$

Slika 5.39. Uz tumačenje povećanja pri sfernoj granici



Iz zakona loma na sfernoj granici (5.24) proizlazi da je omjer:

$$\frac{b - r}{a + r} = \frac{n_1}{n_2} \frac{b}{a},$$

pa je povećanje:

$$m = - \frac{n_1}{n_2} \frac{b}{a}.$$

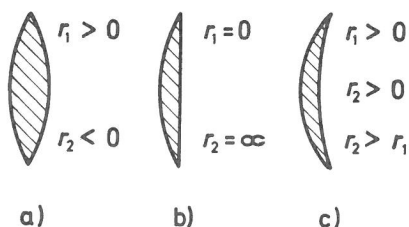
Znak »-« kaže da je slika predmeta obrnuta.

5.7. Tanka leća; greške leće

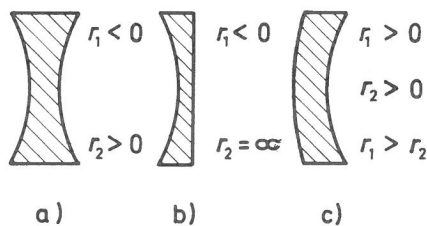
Leća je prozirno optičko tijelo omeđeno dvjema poliranim površinama koje mogu biti ili obje zakrivljene, ili je jedna zakrivljena a druga ravna. Ako su površine sferne, govorimo o *sfernim lećama*. Njih ćemo detaljnije promotriti, a kratko ih nazivamo lećama. Možemo reći da je leća prozirno optičko sredstvo omeđeno dvjema sfernim granicama čiji centri zakrivljenosti leže na zajedničkoj optičkoj osi.

Na priloženim slikama (5.40. i 5.41) pokazane su vrste leća. Oznake r_1 i r_2 polumjeri su zakrivljenosti prve, odnosno druge sferne granice.

Ako je udaljenost između tjemena sfernih granica malena $\overline{T_1T_2} \doteq 0$, govorimo o *tankoj leći*. Nju ćemo proučiti.

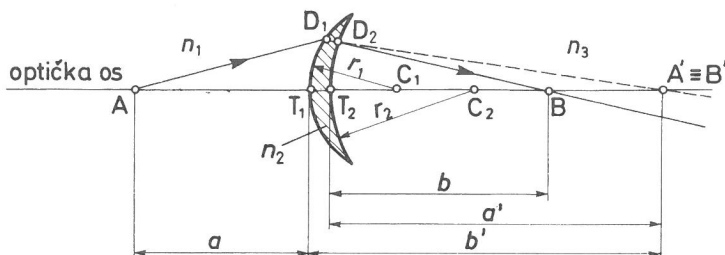


Slika 5.40. Konvergentne staklene leće, leće sabirajuće: a) bikonvexna leća, b) plankonvexna leća, c) konvergentni menisk



Slika 5.41. Divergentne staklene leće, leće rastresajuće: a) bikonkavna leća, b) plankonkavna leća, c) divergentni menisk

Lom svjetlosti kroz tanku leću. Pretpostavimo da je ispred leće sredstvo indeksa loma n_1 , da je leća od materijala indeksa loma n_2 , a iza leće je sredstvo indeksa loma n_3 , kao što je označena na slici 5.42.



Slika 5.42. Lom zrake svjetlosti kroz leću

Oznake T_1 i T_2 znače tjeme prve, odnosno druge sferne granice, a r_1 i r_2 označavaju njihove polumjere zakrivljenosti s centrima zakrivljenosti C_1 i C_2 .

Budući da je leća sustav od dvije sferne granice, provest ćemo izvod za zakon loma svjetlosti za paraksijalne zrake kroz leću promatrajući najprije lom na prvoj sfernoj granici polumjera zakrivljenosti r_1 , a zatim na sfernoj granici polumjera zakrivljenosti r_2 .

Neka se točkasti svijetli predmet nalazi u točki A na optičkoj osi a zraka svjetlosti neka pogađa granicu u točki D₁, nakon čega se lomi u sredstvo indeksa loma n_2 . Kad bi se to sredstvo protezalo dosta daleko nadesno, zrake bi se sastale u B'. To je slika koju bi stvorila prva sferna granica od predmeta u A. Ta je slika, međutim, predmet u A' za drugu sfernu granicu. Dakle, B' = A'.

Zraka se ponovo lomi u točki D₂ u sredstvo indeksa loma n_3 te od virtualnog predmeta u A' daje konačnu sliku na optičkoj osi, u točki B.

Relacije koje opisuju lom na prvoj i drugoj sfernoj granici izgledaju ovako:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (\text{prva granica}), \quad (5.29)$$

$$\frac{n_2}{a'} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (\text{druga granica}), \quad (5.30)$$

Slika u B' je za b' udaljena od tjemena T₁, dok predmet je udaljen za a od istog tjemena. Također je slika u B' svijetli predmet za a' udaljen od tjemena T₂ druge sferne granice. Ta granica stvara sliku u točki B udaljenoj za b od tjemena T₂. Ako je riječ o **tankoj leći**, udaljenosti b' i a' po apsolutnoj su vrijednosti jednake, tj. |b'| = |a'|, gdje je a' udaljenost predmeta za drugu sfernu granicu. Budući da je A' ≡ B' desno od sferne granice, to je a' < 0, b' > 0, pa je a' = -b'. Ako to uvrstimo u relaciju (5.30) dobit ćemo:

$$-\frac{n_2}{b'} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{r_2},$$

gdje b znači udaljenost slike od tjemena T₂, a formira je druga sferna granica. Zbrajanjem prve i treće relacije dobivamo **zakon loma svjetlosti kroz tanku leću**:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (5.31)$$

Kao što smo za lom na sfernoj granici definirali predmetno i slikovno žarište, to činimo i za tanku leću.

Ako je svijetli točkasti predmet, realni ili virtualni, u predmetnom žarištu F_a, zrake svjetlosti nakon loma kroz leću šire se paralelno s optičkom osi, tj. b = ∞. Udaljenost od točke F_a do tjemena leće T je predmetna žarišna daljina f_a. Iz posljednjeg izraza dobivamo izraz kojim se određuje predmetna žarišna daljina. On ima oblik:

$$f_a = \frac{n_1 r_1 r_2}{r_2(n_2 - n_1) + r_1(n_3 - n_2)}.$$

Ako zrake svjetlosti padaju paralelno s optičkom osi i lome se kroz leću, formiraju sliku u slikovnom žarištu F_b koje je od tjemena leće T udaljeno za daljinu f_b , tj. za slikovnu žarišnu daljinu. Ona je određena izrazom:

$$f_b = \frac{n_3 r_1 r_2}{r_2(n_2 - n_1) + r_1(n_3 - n_2)}.$$

Dijeljenjem dvaju posljednjih izraza dobivamo da je:

$$\frac{f_b}{f_a} = \frac{n_3}{n_1}.$$

Uvrstivši izraz za predmetnu i slikovnu daljinu u zakon loma svjetlosti kroz tanku leću (5.31) možemo ga pisati ovako:

$$\frac{f_a}{a} + \frac{f_b}{b} = 1. \quad (5.32)$$

U praksi je često ispunjen uvjet da je $n_1 = n_3$, tj. da se leća nalazi u homogenom sredstvu jednog indeksa loma, npr. u zraku. U tom slučaju zakon loma (5.31) ima jednostavniji oblik:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.33)$$

Slikovna i predmetna žarišna daljina f_b i f_a tanke leće u tom su slučaju jednake, tj. $f_a = f_b$. Recipročna vrijednost žarišne daljine ima, dakle, oblik:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5.34)$$

Ako je žarišna daljina iskazana metrima, njezina recipročna vrijednost određuje **jakost** ili **konvergenciju leće** i izražava se dioptrijama* (znak: dpt), tj.

$$J = \frac{1}{f}.$$

Jakost konvergentnih leća, veća je od nule a jakost divergentnih leća je manja od nule.

Koristeći se izrazom za žarišnu daljinu, za zakon loma svjetlosti kroz tanku leću dobijemo oblik:

* Dioptriya nije mjerna jedinica SI.

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{b} = 1.$$

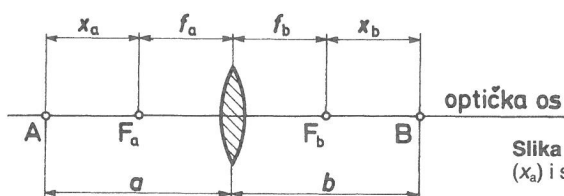
Uzimajući u obzir Newtonove oznake dane na slici 5.43. tj. mjerimo li daljinu predmeta x_a od predmetnog žarišta F_a odnosno daljinu slike x_b od slikovnog žarišta F_b jednačba tanke leće glasi:

$$\frac{f_a}{x_a + f_a} + \frac{f_b}{x_b + f_b} = 1.$$

$$\frac{f_a}{x_a} \frac{f_b}{x_b} = 1,$$

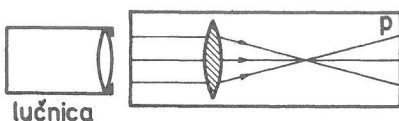
odnosno, ako je $n_1 = n_3$,

$$\frac{f}{x_a} \frac{f}{x_b} = 1.$$



Slika 5.43. Newtonove oznake za predmetnu (x_a) i slikovnu (x_b) daljinu u zakonu loma svjetlosti kroz tanku leću

U pokusu promatramo snop bijele svjetlosti iz kondenzora lučnice paralelan s optičkom osi bikonveksne leće. Snop struže uz neravnu plohu bijele ploče p (sl. 5.44) pa je oku vidljiv. Nakon loma kroz leću snop formira sliku u žarištu F_b leće.



Slika 5.44. Pokus s tankom lećom

Primjer

Dokažite da kod konvergentne leće žarišne daljine f najmanji razmak između predmeta i slike ima vrijednost $s = 4f$.

Razmak između predmeta i slike $s = a + b$ zadovoljava uvjet za minimalnu vrijednost ako je derivacija

$$\frac{d(a+b)}{da} = 0,$$

gdje je a predmetna daljina, a b slikovna daljina. Iz zakona loma svjetlosti kroz tanku leću dobivamo za b izraz:

$$b = \frac{af}{a-f},$$

a time za udaljenost između predmeta i slike dobivamo:

$$\begin{aligned} s &= a + b \\ &= a + \frac{af}{a-f} = \frac{a^2}{a-f} \end{aligned} \quad (5.35)$$

te uvjet za minimum možemo pisati:

$$\frac{d\left(\frac{a^2}{a-f}\right)}{da} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = 0.$$

Iz ovog izraza uz uvjet $a \neq f$, slijedi jednadžba:

$$a^2 - 2af = 0$$

i rješenje

$$a = 2f.$$

Izvede li se druga derivacija možemo se uvjeriti da rješenje $a = 2f$ stvarno jest uvjet da je udaljenost s minimalna. Ovu udaljenost nalazimo ako rješenje za a uvedemo u izraz (5.35) tj.

$$s = a + b = 4f.$$

Da bismo našli izraz za povećanje promotrit ćemo svijetli predmet visine y okomit na optičku os i smješten s njezine gornje, pozitivne strane (sl. 5.45). Formirana slika svijetlog predmeta visine y' okomita je na optičku os i u promatranom slučaju obrnuta prema predmetu. Ako uzmemo upadnu zraku koja prolazi kroz centar

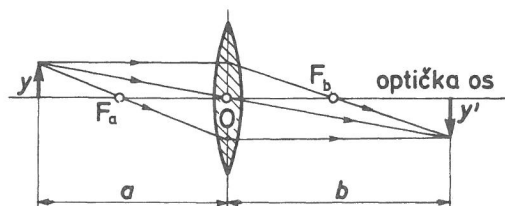
leće te duljinu a i b , iz slike 5.45 vidi se da vrijedi razmjer:

$$\frac{y'}{y} = \frac{b}{a},$$

pa, prema prijašnjem dogovoru, povećanje je prikazano izrazom

$$m = -\frac{b}{a}.$$

Grafička konstrukcija loma svjetlosti na tankim lećama analogna je konstrukciji opisanoj za sferna zrcala. Kako je pokazano na slici 5.45. zraka paralelna s optičkom osi nakon loma kroz leću prolazi kroz fokus. Zraka koja prolazi kroz središte leće O prolazi kroz leću ne promijenivši smjer.

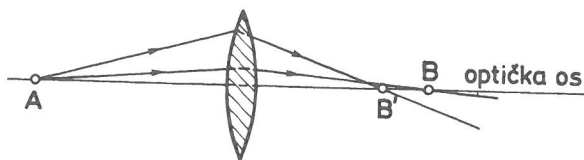


Slika 5.45. Uz tumačenje povećanja kod tanke leće

Sferna aberacija kod leća. Pri izvođenju zakona za lom svjetlosti kroz tanku leću uzimali smo u obzir zrake svjetlosti koje zadovoljavaju Gaussove aproksimacije. Sada ćemo promatrati slučaj *širokog snopa* upadnih zraka svjetlosti s tim da zrake padaju na veliki dio površine leće. Upadni kutovi zraka svjetlosti su različiti i slike dobivene lećom nisu oštre.

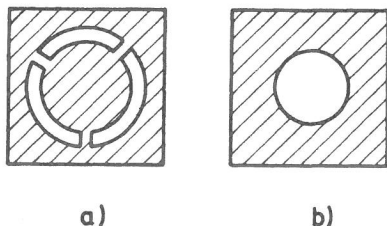
Na slici 5.46. prikazan je točkasti svijetli predmet na optičkoj osi bikonveksne leće. Zrake svjetlosti koje padaju na leću dalje od osi lome se i formiraju sliku bliže leći (točka B'), nego zrake koje se lome blizu osi. One daju sliku svijetlog predmeta dalje od leće, u točki B . Ta se greška naziva **sferna aberacija**.

Pogrešku promatramo u pokusu. Svijetli predmet za koji smatramo da je točkast, jest žarna nit električne žarulje smještene u ravnini okomitoj na optičku



Slika 5.46. Sferna aberacija kod tanke leće

os, sa centralnim dijelom niti u samoj osi. Ispred leće postavljamo različite zaslonе. Zaslonom a) koji propušta samo periferne zrake, na zastoru dobivamo sliku bližu leći, a zaslonom b) skupljamo zrake iz centralnog dijela snopa i dobivamo sliku dalje od leće (sl. 5.47).



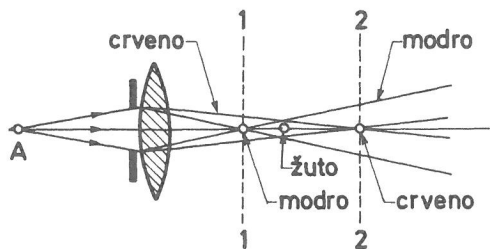
Slika 5.47. Zaslóni upotrijebljeni u pokusu sferne aberacije leće

Jedna od mogućnosti izbjegavanja te vrste greške jest upotreba zaslóna koji ograničuje upadni snop svjetlosti na paraksijalne zrake. Loša strana zaslóna je u tome što se može iskoristiti samo mali dio snopa svjetlosti svijetlog predmeta.

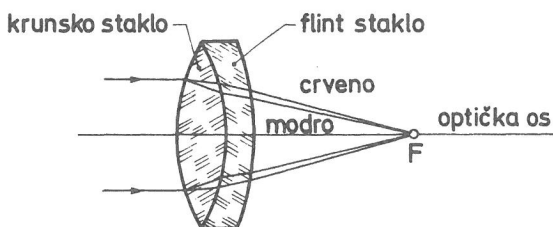
Kromatska aberacija kod leća. Konvergencija ili jakost leće ovisi o indeksu loma leće pa se mijenja s bojom svjetlosti koja prolazi kroz leću. Stoga leća pokazuje grešku poznatu pod nazivom **kromatska aberacija**.

Promotrimo to u slučaju bikonveksne leće kad se na optičkoj osi nalazi točkasti izvor bijele svjetlosti, sl. 5.48. Da bismo izbjegli sfernu aberaciju, uzimamo zaslon malog otvora. Budući da se modra svjetlost lomi jače, na zastoru postavljenom u položaj 11 dobit ćemo sliku od modrog dijela spektra s crvenim nejasnim rubom. Međutim, s obzirom na to da se crvena svjetlost lomi slabije, na zastoru se u položaju 22, koji je sada dalje od leće nego u slučaju 11, dobiva slika od crvenog dijela spektra s nejasnim modrim rubom. Tu pojavu pokazujemo pokusom tako da se ponovo služimo bijelom svjetlosti iz žarne niti žarulje okomite na optičku os.

Kromatska aberacija za dvije boje bijele svjetlosti, crvenu i modru, može se ispraviti pomoću dviju leća iz različitih optičkih stakala, kako je pokazano na slici 5.49. Disperzija (vidi 5.8) u konvergentnoj leći poništi se s onom u divergentnoj. Takav sustav dviju leća poznat je pod imenom **akromat**.



Slika 5.48. Kromatska aberacija



Slika 5.49. Akromat

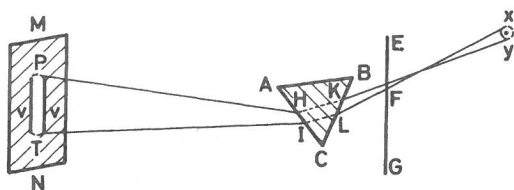
Kombinacijom leća prikladno zakrivljenih ploha i vrsta stakala mogu se uvelike ukloniti i sferna i kromatska aberacija. U tom slučaju izvedeni zakoni za tanku leću, dobiveni za paraksijalne zrake, bit će dobri i za velike otvore leća.

5.8. Disperzija ili rasap svjetlosti

Pokus koji možemo svrstati na granicu između geometrijske i fizikalne optike jest pokus o lomu višebojne svjetlosti kroz prizmu.

Tu je pojavu naročito detaljno promatrao I. Newton. Svojim je originalnim pokusima zaključio da svjetlost Sunca sadrži zrake različite lomljivosti.

Osnovni postav Newtonova pokusa bio je sljedeći: na prozoru tamne sobe načinilo je okrugli otvor širine trećine inča. Kroz taj otvor ulazio je snop Sunčeve svjetlosti i padao na prizmu. Svjetlo se lomilo kroz prizmu i na suprotnom zidu sobe stvaralo obojenu sliku Sunca. Prikaz jednog od niza pokusa vidi se na priloženoj slici (iz Newton; *Opticks*). XY označava Sunce, F otvor na prozoru GE, ABC prizmu, a MN papir na kojemu se vidi razvučena obojena Sunčeva slika ili spektar od P do T. Spektar je obojen. Pri kraju T spektar je crven, postepeno prelazi u žuti, zatim u zeleni pa »modri«, a pri kraju P je ljubičast. Otvor F camere obscure u tome je slučaju stvarao sliku Sunca na zidu u obliku svijetlog kruga. Prizma od bijelog kruga načini niz obojenih krugova koji se djelomično međusobno prekrivaju. Zato taj spektar, kako ga je Newton dobio, nije davao čiste boje.

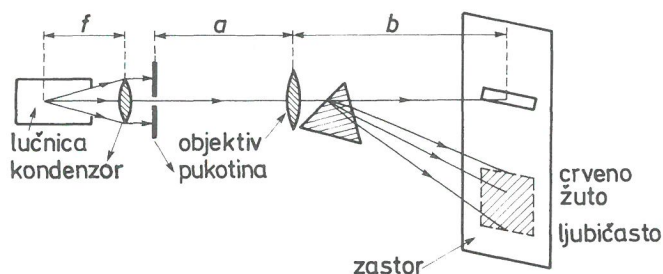


Slika 5.50. Newtonov pokus o disperziji svjetlosti (prema I. Newton, *Opticks*)

Pokus kojim se pokazuje spektar može se izvesti na sljedeći način. Snop bijele svjetlosti iz lučnice (pošto je kondenzorom učinjen paralelnim) obasjava pukotinu, otvor koji je znatno dulji od svoje širine. Na slici 5.51 dužinu pukotine treba zamisliti okomitu na ravninu crteža. Na put svjetlosti koja izlazi iz pukotine postavimo sabirnu leću (objektiv) tako da je rasvijetljena pukotina svijetao predmet za tu leću. Objektiv na zastoru daje realnu sliku pukotine.

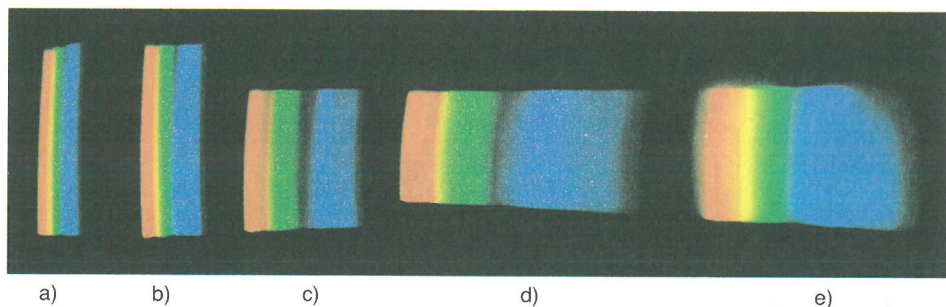
Tada prizmu s presjekom oblika jednakostraničnog trokuta ($A = 60^\circ$) postavimo tik iza leće, na put zraka svjetlosti. Prizma je postavljena tako da je njezin brid paralelan s duljinom pukotine. Na zastoru dobivamo gotovo čisti spektar bijele svjetlosti sastavljen od različito obojenih realnih slika pukotine. U spektru se nižu sastavne boje, monokromatske komponente bijele svjetlosti lučnice. Opisani pokus pokazuje disperziju ili rasap svjetlosti.

Pokusom se može pokazati spektar pomoću prizmi od različitih materijala. Da bismo mogli vidjeti u čemu je razlika među tim spektrima, uvijek ćemo upotrijebiti prizme s lomnim kutom 60° . To je kut između onih dviju ravnih ploha plašta prizme na kojima se lomi svjetlost ulazeći u prizmu i izlazeći iz nje.



Slika 5.51. Pokus o disperziji svjetlosti

Razmotrimo prizmu od vode. Ostvarena je tako da je staklena posuda prizmatičnog oblika napunjena vodom. Crvena se svjetlost otklanja najmanje, a ljubičasta najviše (sl. 5.51.a).



Slika 5.51.a) Spektar dobiven vodenom prizmom, b) prizmom od krunskog stakla, c) prizmom od flintskog stakla, d) prizmom od teškog flintskog stakla i e) prizmom od estera cimetne kiseline

Prizma od laganog optičkog stakla (krunskog stakla) daje jače otklonjen i širi spektar od onoga dobivenog s prizmom od vode. Boje su jače razlučene, sl. b).

S prizmom od laganog flintskog stakla spektar je još širi, sl. c), a teško flintsko staklo daje još veći otklon i veći rasap boja, sl. d). Vrlo širok spektar daje prizmatična posuda napunjena esterom cimetne kiseline (kapljevina silno jakog mirisa), sl. e). Dakle, uz isti lomni kut prizme za različite su materije prizme dobiveni spektri različitog izgleda. Za neke je malo otklonjen od prvotnog smjera bijele zrake i uzak (npr. za vodu), za druge je jače otklonjen i širok. Da bismo izrazili osobine nekog spektra, služimo se dvama podacima: *veličinom otklona* (devijacijom) i *širinom spektra* (disperzijom).

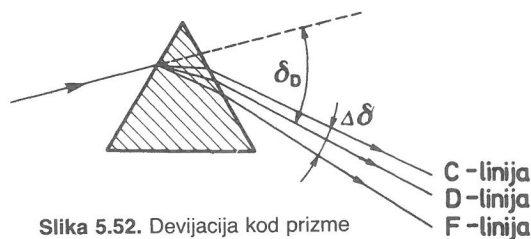
Budući da su različite boje različito otklonjene prizmom, mjerom devijacije smatra se **otklon** koji prizmom dobije (uz simetričan prolaz) žuta natrijeva svjetlost, tzv. D-linija. To je devijacija, a mjeri se kutom δ_D (sl. 5.52).

Širina spektra ili disperzija mjeri se kutem $\Delta\delta$ što ga čine crvena svjetlost i zelenomodra, kakvu daju atomi vodika. To su C-linija i F-linija spektra. Te oznake spektralnih linija potječu od Fraunhofera.

Razmotrimo uvjete za prizmu od vode. Indeks loma D – linije $n_D = 1,336$, a devijacija je $\delta = 23^\circ 38'$. Na zastoru se vidi uzak spektar malog otklona.

Za prizmu od krunskog stakla, tj. silikatnog stakla kombiniranog s natrij i kalij-karbonatom, te kalcijevim oksidom, indeks loma D-linije je $n_D = 1,5175$, a devijacija $\delta = 38^\circ 42'$. Na zastoru se dobije širi spektar većeg otklona nego kod vodene prizme.

Za prizmu od laganog flintskog stakla, gotovo jednakog sastava kao i krunsko staklo samo umjesto kalcij-oksida ima olovo-oksidi, indeks loma $n_D = 1,5760$, a devijacija $\delta = 44^\circ 0'$. Na zastoru se dobije širi spektar na kojemu se lako opaža da su bolje razlučene boje u crvenom dijelu spektra.

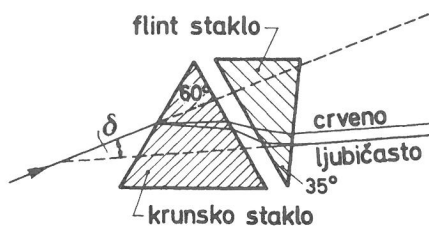


Slika 5.52. Devijacija kod prizme

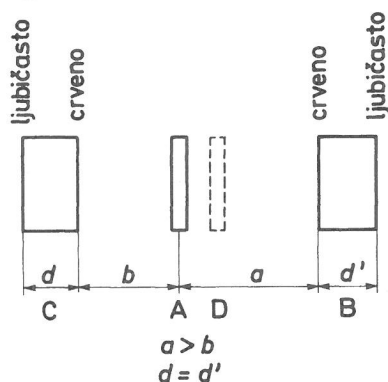
Za prizmu od teškog flintskog stakla indeks loma iznosi $n_D = 1,6214$, a devijacija $\delta = 48^\circ 20'$, pa spektar pokazuje velik otklon i širinu.

S prizmom od posebne kapljavine, tj. estera cimetne kiseline dobiva se široki spektar uz razmjerno malen otklon.

Razmotrimo kakav se spektar dobiva akromatskom prizmom. (sl. 5.53). Ta se prizma može sastaviti od dvije prizme, jedne od krunskoga, a druge od flintskog stakla. Svaka od njih daje jednaku disperziju, jednako širok spektar d na zastoru. Sastavljaju se tako da je baza jedne nasuprot bridu druge prizme, kako je pokazano na slici. Takva kombinacija daje prizmu akromatsku za dvije boje, crvenu i ljubičastu, koje prolaze paralelno tj. nakon prolaza kroz prizme jednako su otklonjene. Na slici 5.54. vide se slike na zastoru.



Slika 5.53. Akromatska prizma



Slika 5.54. Slike na zastoru u pokusu s akromatskom prizmom

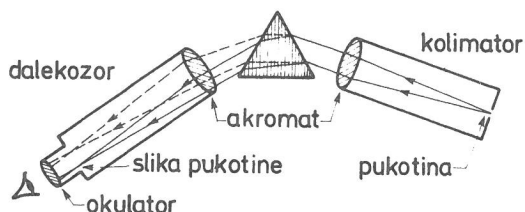
A je slika pukotine bez prizmi. Desno od te slike dobijemo spektar B kad na put zraka svjetlosti postavimo prizmu od krunskog stakla. Lijevo od slike pukotine dobijemo spektar C kad je na put zraka svjetlosti postavimo samo prizmu od flintskog stakla. Na mjestu D vidi se slika pukotine kad svjetlo prolazi kroz obje prizme.

Amicieva prizma (sl. 5.55) jest sustav prizmi od različitih vrsta stakla, ali su kutovi loma pojedinih prizmi odabrani tako da je srednji otklon svake prizme jednak. Dvije susjedne prizme u nizu sustava položene su tako da je baza jedne nasuprot bridu druge. U takvom se položaju svjetlost D-linije neće otkloniti, a druge će boje biti otklonjene. Tom se kombinacijom izgrađuje prizma u direktnom gledanju ili Amicieva prizma. Radi postizanja dovoljno širokog spektra, obično se kombiniraju tri do pet prizmi u nizu. Takve se kombinacije često primjenjuju u spektroskopiji u malim džepnim instrumentima.



Slika 5.55. Amicieva prizma

Spektroskop. U pokusima smo vidjeli kako se prizma može upotrijebiti za razlaganje bijele svjetlosti u boje, od kojih je ova složena. Taj se način razlaganja sastavljene svjetlosti primjenjuje kod (Kirchhoff i Bunsen, 1859) *spektroskopa s prizmom*. (Slika 5.56). Prizma u spektroskopu može biti jednostavna s lomnim kutom od 60° , ili složena kao npr. Rutherfordova prizma (koja se sastoji od tri prizme, dvije od flint stakla, a jedna od krunkog), ili Amicieva prizma.



Slika 5.56. Spektroskop

Osim prizme, u spektroskopu imamo još kolimator i dalekozor. Kolimator je cijev koja na jednom kraju ima pukotinu (duljina pukotine okomita je na ravninu crtnje), a na drugom akromatsku leću koja svjetlost iz pukotine učini paralelnom. Prema tome duljina kolimatora jednaka je žarišnoj daljini akromata.

Svjetlost koja je izašla iz akromata (a to su paralelni snopovi), ulazi u prizmu koja ju razloži u sastavne boje. Prema tome iz prizme izlaze paralelni snopovi svjetlosti koji se nešto razlikuju po smjeru, zavisno o tome kakve su boje.

Svjetlost koja je izašla iz prizme, motri se dalekozorom Keplerovog tipa. U dalekozoru koji je namješten na beskrajnu daljinu, vide se oštre slike pukotine nanizane jedna uz drugu zavisno o boji, dakle vidi se spektar.

Ako je izvor svjetlosti koji rasvjetljuje pukotinu, obična žarulja, spektar je kontinuiran jer se jedna obojena slika pukotine neposredno prislanja na drugu. Međutim ako je pukotina rasvjetljena živinom lučnicom, vidimo samo nekoliko oštarih slika pukotine raznih boja između kojih je tama. Budući da je pukotina uska, to su ove slike poput ravnih poteza: crveni, jaki žuti, zeleni,... To su tzv.

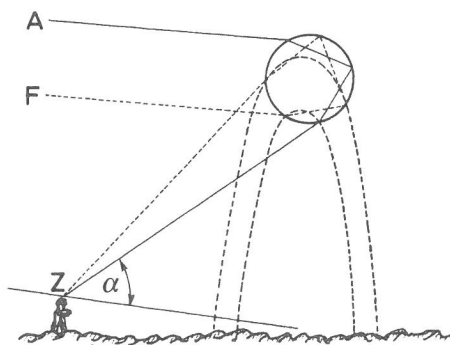
linije spektra. Ovo je primjer *linijskog spektra*. Prema tome linije u spektru jesu *slike pukotine*.

U spektru sunčane svjetlosti vide se crne oštre linije. To znači da ove obojene svjetlosti u sunčanom spektru nedostaju. Te je linije opažao Fraunhofer, pa se zato zovu *Fraunhoferove linije*. On ih je označio velikim slovima počam od crvenog kraja spektra: linije A, B, C, D, E, F,... Tako npr. D-linija upravo je na onom mjestu u spektru, na kojem se pokaže žuta natrijeva svjetlost, kad se pukotina rasvijetli natrijevom lučnicom.

Kod upotrebe prizme u spektroskopu važno je da se čim veći dio lomne plohe prizme upotrijebi za dobivanje spektra. Kako kroz prizmu prolaze paralelni snopovi to se postiže onda ako je prolaz svjetlosti kroz prizmu simetričan, tj. upadni kut na ulazu u prizmu treba biti jednak kutu loma na izlazu iz prizme. To može biti ispunjeno točno za jednu boju, a za druge približno.

Da bismo prizmu u spektrometru namjestili tako da prolaz svjetlosti bude simetričan, koristimo se vezom između simetrije prolaza i veličine otklona (devijacije), koju zraka svjetlosti pretrpi prolazom kroz prizmu. U odjeljku 5.5. računski smo pokazali da je devijacija minimalna ako je prolaz svjetlosti simetričan.

Duga. Ta se prirodna pojava dugo kojekako tumačila. U sedamnaestom stoljeću Descartes je izveo račun kojim je odredio *vidni kut* α duge, a pojavu boja objasnio je Newton. Donosimo Descartov crtež 5.57. Na njemu su lukovima



Slika 5.57. Descartesov crtež u kojemu je označen vidni kut alfa-duge prema W. F. Magie; *A Source Book on Physics*

označene primarna i sekundarna duga, koje se opažaju na nebeskom svodu.* Na crtežu se vidi sunčana zraka koja prolazi točkom A, reflektira se na dnu kapi i dalje širi prema točki Z, gdje se nalazi opažač. Ona pripada primarnoj dugi, a zraka koja prolazi točkom F i nakon dvostrukog odbijanja u kapi putuje do Z pripada sekundarnoj dugi.

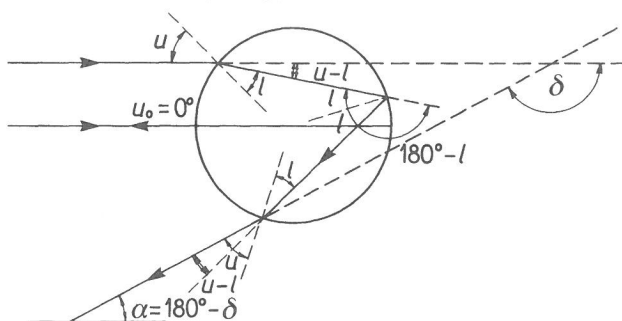
Vidni kutovi, koje ćemo označavati sa α , jesu kutovi pod kojima opažač primjećuje snažno odbijene zrake spektra bijele svjetlosti. Taj kut mjerimo od pravca koji prolazi Suncem i okom opažača. Točan se proračun izvodi promatranjem zrake svjetlosti i jedne kapi.

* Problemom tumačenja kako nastaje duga bavio se i Marko Antonie de Dominis, naš učenjak (1560 – 1624).

Najprije pogledajmo nastanak primarne duge. Kako se vidi na sljedećoj slici zraka svjetlosti koja upada na površinu kapi pod kutom $u_0 = 0^\circ$ djelomično prolazi kroz kap, a djelomično se na dnu kapi odbija sama u sebe. Pripadni kut devijacije je $\delta_D = 180^\circ$. Zrake čiji je upadni kut u primarnoj dugi veći od 0° ulaze u kap kiše na gornjoj, a izlaze iz nje na donjoj strani. Kut devijacije sastavljen je od kuta devijacije pri lomu zrake na ulazu u kap, pri refleksiji na dnu kapi te pri lomu zrake u zrak. Prema oznakama na slici 5.58:

$$\delta = (u - l) + (180^\circ - 2l) + (u - l)$$

$$\delta = 180^\circ + 2u - 4l.$$



Slika 5.58. Prolaz svjetlosne zrake kroz kišnu kap pri stvaranju primarne duge

Descartes je izračunao kutove devijacije za velik broj zraka svjetlosti uz različite upadne kutove. Tako je ustanovio da se kut devijacije naprije smanjuje, zatim stagnira i ponovo raste kad u raste od 0° do 90° . Ako računamo devijaciju crvene svjetlosti u kapljici vode, dobit ćemo rezultate prikazane u tablici. Indeks loma na prijelazu iz zraka u vodu za promatranu crvenu svjetlost iznosi 1,3311.

U drugoj su tablici dane vrijednosti devijacije za jednu ljubičastu svjetlost.

Tablica 5.2. Devijacija crvene svjetlosti pri indeksu loma $n_c = 1,3311$

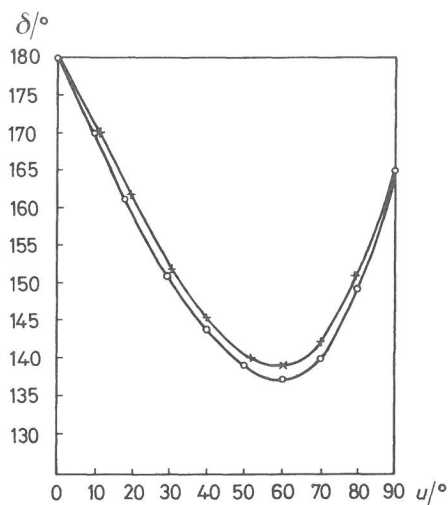
$u/^\circ$	δ_c	$u/^\circ$	δ_c
0	$180^\circ 0'$	50	$139^\circ 28'$
10	$170^\circ 1'$	60	$137^\circ 39'$
20	$160^\circ 27'$	70	$140^\circ 22'$
30	$151^\circ 45'$	80	$149^\circ 8'$
40	$144^\circ 30'$	90	$165^\circ 12'$

Tablica 5.3. Devijacija ljubičaste svjetlosti pri indeksu loma za tu svjetlost $n_l = 1,3371$

$u/^\circ$	δ_l	$u/^\circ$	δ_l
0	180°	50	$140^\circ 11'$
10	$170^\circ 9'$	60	$138^\circ 32'$
20	$160^\circ 43'$	70	$141^\circ 24'$
30	$152^\circ 10'$	80	$150^\circ 15'$
40	$145^\circ 4'$	90	$166^\circ 22'$

Vrijednosti iz tablica mogu se grafički prikazati (sl. 5.59).

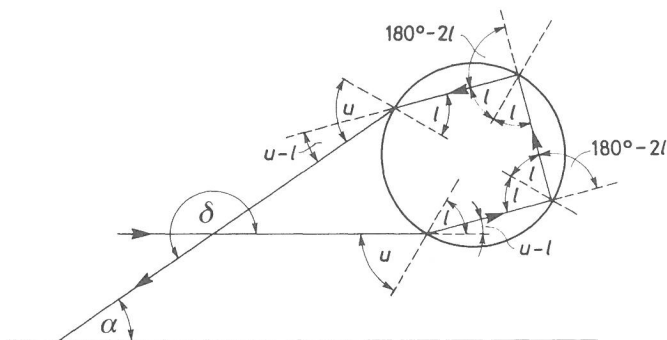
Iz tih rezultata slijedi da je minimalna devijacija za crvenu svjetlost manja nego za ljubičastu. Ti su kutovi za minimum devijacije važni zato što u tim smjerovima kapljica odbija mnogo svjetlosti, pa kapljica u tom smjeru najjače sjaji. Pripadni kut α pod kojim oko vidi kap jest $180^\circ - \delta_{\min}$. Ako je, dakle, kapljica na takvoj visini da je za motrioča $\alpha = 180^\circ - \delta_{\min}$, ta će kapljica za njega biti crvena, ako je $\delta_{\min}$ minimalna devijacija za crvenu svjetlost, odnosno ljubičasta, ako je $\delta_{\min}$ za ljubičastu. Budući da je $\delta_{\min}$ crvene manji od $\delta_{\min}$ ljubičaste, kut α za crvene kapi veći je nego onaj za ljubičaste. Zato je gornji rub primarne duge crven.



Slika 5.59. Ovisnost kuta devijacije δ o upadnom kutu u svjetlosti u kišnu kap

Pri nastajanju sekundarne duge zrake svjetlosti ulaze u kap na donjoj strani, a napuštaju je na njezinoj gornjoj strani. Odabrana zraka svjetlosti pokazana je na slici (5.60). Kut devijacije u tom se slučaju određuje izrazom:

$$\delta = 360^\circ + 2u - 6l.$$



Slika 5.60. Prolaz zrake svjetlosti kroz kišnu kap pri nastanku sekundarne duge

Ako se koristimo računom za određivanje ekstrema funkcije prema višoj analizi, iz izraza za devijacije možemo direktno odrediti točne vrijednosti tih kutova.

Važan uvjet za minimum devijacije glasi:

$$\frac{d\delta}{du} = 0.$$

Za primarnu dugu to vodi na

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{2}, \quad (5.36)$$

a za sekundarnu na

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{3}. \quad (5.37)$$

Funkcijska veza između upadnog kuta i kuta loma, obično označenih sa u i l , dana je Snellovim zakonom loma,

$$\sin u = n \sin l, \quad (5.38)$$

gdje je n indeks loma vode prema zraku. Diferenciranjem izraza (5.38) dobiva se:

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l}. \quad (5.39)$$

Napisani izraz (5.39) dobiven deriviranjem Snellova zakona vrijedi općenito. Ako, međutim, tu vrijednost uvrstimo u uvjete za minimum devijacije, za primarnu odnosno sekundarnu dugu dobijemo.

$$\frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l} = \frac{1}{2}, \text{ odnosno } \frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l} = \frac{1}{3}.$$

Ako te izraze kvadriramo, dobit ćemo

$$4 \cos^2 u = n^2 \cos^2 l, \text{ odnosno } 9 \cos^2 u = n^2 \cos^2 l.$$

Odatle dalje

$$4 \cos^2 u = n^2 - n^2 \sin^2 l, \text{ odnosno } 9 \cos^2 u = n^2 - n^2 \sin^2 l.$$

Budući da je po Snellovu zakonu

$$n^2 \sin^2 l = \sin^2 u = 1 - \cos^2 u,$$

slijedi da je

$$4 \cos^2 u = n^2 - 1 + \cos^2 u, \text{ odnosno } 9 \cos^2 u = n^2 - 1 + \cos^2 u.$$

Odatle za primarnu dugu proizlazi izraz

$$\cos^2 u = \frac{n^2 - 1}{3},$$

odnosno, za sekundarnu,

$$\cos^2 u = \frac{n^2 - 1}{8},$$

Time su određeni kutovi u pod kojima svjetlost treba da upada u kapljicu da bi se dobila minimalna devijacija za primarnu odnosno sekundarnu dugu.

Budući da je riječ o ekstremu, gotovo jednako veliku devijaciju pretrpe i zrake koje upadaju u kapljicu pod malo većim ili malo manjim kutom u od onoga koji je određen gornjim uvjetima za ekstrem. To je razlog što kapljica u tom smjeru sabere dosta svjetlosti.

Pomoću tih izraza možemo odrediti kut ekstremne devijacije $\delta_{\min}$ za primarnu, odnosno sekundarnu dugu.

Da bismo dokazali da je dobiveni ekstrem devijacije doista minimalan, za vrijednosti varijabla za koje dobivamo ekstrem, druga derivacija devijacije δ mora biti pozitivna. Dokazat ćemo da je taj uvjet ispunjen.

Za primarnu dugu općenito je vrijedilo;

$$\frac{d\delta}{du} = 2 - 4 \frac{dl}{du},$$

a za sekundarnu:

$$\frac{d\delta}{du} = 2 - 6 \frac{dl}{du}.$$

Odavle za drugu derivaciju dobijemo:

$$\text{za primarnu dugu } \frac{d^2\delta}{du^2} = -4 \frac{d^2l}{du^2}, \text{ a za sekundarnu } \frac{d^2\delta}{du^2} = -6 \frac{d^2l}{du^2}.$$

Prema tome, da bi te derivacije bile minimalne, kad se uvrsti upadni kut u , koji daje ekstrem za primarnu odnosno sekundarnu dugu, mora biti

$$\frac{d^2l}{du^2} < 0.$$

Iz Snellova zakona (5.38.) slijedi

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l},$$

a odatle

$$\frac{d^2l}{du^2} = \frac{-\sin u \cos l + \cos u \sin l \frac{dl}{du}}{n \cos^2 l}.$$

Za ekstrem smo dobili

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l} = \frac{1}{2}, \text{ odnosno } \frac{dl}{du} = \frac{1}{n} \frac{\cos u}{\cos l} = \frac{1}{3}.$$

Ako to uvrstimo u izraz za drugu derivaciju kuta l po kutu u , za primarnu ćemo dugu dobiti:

$$\frac{d^2l}{du^2} = \left(\frac{-\sin u \cdot \frac{2}{n} \cos u + \cos u \cdot \frac{1}{n} \sin u \cdot \frac{1}{2}}{n \cos^2 l} \right) = -\frac{3 \sin u \cos u}{2 n^2 \cos^2 l} < 0,$$

a za sekundarnu

$$\frac{d^2l}{du^2} = \left(\frac{-\sin u \cdot \frac{3}{n} \cos u + \cos u \cdot \frac{1}{n} \sin u \cdot \frac{1}{3}}{n \cos^2 l} \right) = -\frac{8 \sin u \cos u}{3 n^2 \cos^2 l} < 0.$$

Odatle slijedi da je u oba slučaja

$$\left(\frac{d^2\delta}{du^2} \right)_{\text{ekst}} > 0,$$

što znači da su kutovi $\delta_{\min}$ kutovi minimalnih devijacija pri primarnoj odnosno sekundarnoj dugi. Pripadni vidni kutovi određuju se iz sljedećih izraza:

vidni kut primarne duge $\alpha_{1m} = 180^\circ - \delta_{1m}$, te

vidni kut sekundarne duge $\alpha_{2m} = \delta_{2m} - 180^\circ$.

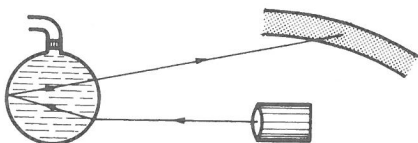
Iz toga zaključujemo da je slijed boja u sekundarnoj dugi obrnut od onoga u primarnoj. Za granične valne duljine vidljive svjetlosti u vodi nađeni kutovi imaju vrijednosti iz tablice 5.4.

Tablica 5.4. Vidni kutovi za primarnu i sekundarnu dugu za granične valne duljine crvene i ljubičaste svjetlosti i kutovi minimuma devijacije.

Indeks loma	Primarna duga		Sekundarna duga	
	$\delta_{\min}$	α	$\delta_{\min}$	α
$n_{\text{crveno}}(653 \text{ nm}) = 1,3311$	137°39'	42°21'	230°23'	50°23'
$n_{\text{ljubičasto}}(486 \text{ nm}) = 1,3371$	138°31'	41°29'	231°58'	51°58'

Kako je vidni kut veći za crvenu nego za ljubičastu boju, primarna će duga biti izvana crvena, a iznutra ljubičasta. Sekundarnoj dugi zbog dvaju unutrašnjih odbijanja odgovara manji vidni kut za crveno nego za ljubičasto, pa će sekundarna duga biti izvana ljubičasta, a iznutra crvena.

Disperziju svjetlosti možemo promatrati pomoću kuglaste tikvice tankih stijenki ispunjene vodom koja djeluje poput »kišne kapi« (sl. 5.61). Dio unutrašnje



Slika 5.61. Model duge – pokus

stijenke takve tikvice je posrebnjen da bi se pojačalo odbijanje zraka. Paralelni snop bijele svjetlosti iz lučnice lomi se u tikvicu i odbija na njezinu suprotnom kraju, pa na sobnom zidu tvori dugu.

PITANJA I ZADACI

1. Što se u optici može objasniti osnovnim zakonima geometrijske optike?
2. Napišite jednadžbu za ravno i sferno zrcalo.
3. Zraka svjetlosti koja se odbija od ravnog zrcala s upadnom zrakom zatvara kut 60° . Ako zrcalo okrenemo tako da odbijena zraka s istom upadnom zrakom zatvara kut 20° , za koliki smo kut zakrenuli zrcalo?
4. Konkavno zrcalo polumjera 40 cm daje realnu i obrnutu sliku povećanja $-\frac{1}{2}$. Odredite položaj predmeta i slike.
5. Konveksno zrcalo ima polumjer 60 cm. Na udaljenosti 10 cm ispred zrcala nalazi se predmet visok 2 cm. Odredite položaj i visinu slike. Konstruirajte sliku.
6. Koji je osnovni uvjet nastajanja totalne refleksije?
7. Staklo ima indeks loma 1,52. Odredite granični kut totalne refleksije za granice:
 - a) staklo – zrak, b) voda – zrak, c) staklo – voda.
8. Šireći se kroz terpentinu zraka svjetlosti dolazi na granicu terpentina i zraka. Za taj sistem granični kut totalne refleksije iznosi $42,38^\circ$. Kolika je brzina svjetlosti u terpentinu?
9. Uski paralelni snop svjetlosti pada na kuglastu bocu punu vode. Na kojoj se udaljenosti od druge granice sijeku zrake koje su se na toj granici odbile natrag u vodu ako je polumjer boce 6 cm?
10. Odredite sumu predmetne i slikovne žarišne daljine sferne granice.
11. Kakva je geometrijska razlika između sabirnih i rastresnih leća?
12. Odredite žarišne daljine sljedećih leća: bikonveksna leća, $r_1 = 15$ cm i $r_2 = -25$ cm, b) plankonveksna leća, $r_1 = 15$ cm i $r_2 = \infty$, c) konvergentni menisk, $r_1 = 15$ cm i $r_2 = 25$ cm, d) bikonveksna leća, $r_1 = -15$ cm i $r_2 = 25$ cm, e) plankonveksna leća, $r_1 = -15$ cm i $r_2 = \infty$, f) divergentni menisk, $r_1 = 25$ cm i $r_2 = 15$ cm. Indeks loma stakla leće je $n = 1,5$.
13. Paralelne zrake bijele svjetlosti padaju okomito na plohu prizme. Kut prizme je 40° . Koliki kut zatvaraju crvena i ljubičasta zraka nakon loma, pri izlazu iz prizme, ako je indeks loma za crvenu svjetlost 1,37, a za ljubičastu 1,42?
14. Kolika je razlika između vidnog kuta ljubičaste i vidnog kuta crvene boje u primarnoj dugi?

6. Fizikalna optika

6.1. Uvod

U dosadašnjem promatranju svjetlosnih pojava svjetlost smo predočavali zrakama koje izlaze iz izvora svjetlosti, prolaze homogenim prozirnim sredstvom kao pravci, lome se na granici dvaju prozirnih sredstava, odbijaju na zrcalima, te savijaju u sredstvu u kojemu su fizikalna svojstva postepeno mijenjaju. Služeći se modelom zrake svjetlosti i zakonima pravocrtnog širenja, odnosno odbijanja i loma svjetlosti, mogli smo protumačiti djelovanje zrcala, prizme i leće, a time i funkcioniranje mnogih optičkih naprava. Bila je to geometrijska optika.

Ima, međutim, optičkih pojava koje se ne mogu protumačiti jednostavnim pojmom – modelom zrake svjetlosti. To su pojave difrakcije ili ogiba, interferencije i polarizacije svjetlosti. Za tumačenje tih pojava valja stvoriti pretpostavke o prirodi svjetlosti, a to znači pripisati svjetlosti određena svojstva. Taj dio optike koji uzima u obzir prirodu svjetlosti naziva se *fizikalna optika*.

Ima dvije pomisli o naravi svjetlosti koje su se već u Newtonovo doba jedna drugoj suprotstavljale kao da jedna drugu isključuju. To je pomisao da je svjetlost struja čestica (korpuskularna teorija) i druga pomisao, da je svjetlost valna pojava (undulatorna teorija).

Prema korpuskularnoj teoriji svjetlosti čestice svjetlosti izlijeću iz izvora i zatim silnom brzinom putuju kroz prozirna sredstva. Zbog velike brzine gibanja staze su pravci – zrake svjetlosti. Te se čestice na zrcalima odbijaju, na prijelazu iz jednog sredstva u drugo njihov se smjer gibanja naglo mijenja, lomi. Tim se korpuskulama mogu pripisati još neka svojstva. Tako je Newton zamišljao da čestice svjetlosti na svom putu mijenjaju »sklonost« odbijanju na granici dvaju sredstava, odnosno da prođu kroz granicu. Newton je ta svoja razmišljanja iznio u dodatku svom djelu *Opticks*, naslovom *Queries* (pitanja, problemi). Da je Newton zamišljao svjetlost kao struju čestica, vidi se iz pisama koje je pisao H. Oldenburgu, tadašnjem tajniku učenog društva Royal Society u Londonu.

Newtonov stariji suvremenik R. Hooke (1635 – 1703) i član društva Royal Society bio je pristalica valne teorije svjetlosti.* Tu je teoriju počeo razvijati Ch.

* Kad je Newton proveo svoje pokuse s prizmama o rasapu svjetlosti, o tome je pismeno obavijestio Royal Society. Referat o Newtonovu radu podnio je Hooke i tom prigodom dao neke kritičke primjedbe. To je bio početak svade između Newtona i Hookea. Kako je Newton bio vrlo osjetljiv, da bi izbjegao daljnje prigovore i rasprave, dugo nije htio objavljivati svoje optičke radove, pa je svoje djelo *Opticks* štampao tek 1704. godine, naime poslije Hookeove smrti.

Huygens (1629 – 1695), koji je pomoću pretpostavke da se svjetlost prostire kao val kroz neko sredstvo koje ispunja sav prostor protumačio, među ostalim, i pojavu dvoloma u islandskom dvolomcu, kalcitu, CaCO_3 . Prema Huygensu, točka koja svijetli potresa sredstvo kojim se nakon toga šire valovi svjetlosti. To širenje valova Huygens zamišlja tako da je svaka točka u fronti vala izvor novog valića (elementarnog vala) koji se širi u smjeru napredovanja vala. Nova fronta vala nastaje kao ovojnica (anvelopa) elementarnih valića. Huygens je zamišljao da u kalcitu iz svake točke u koju stigne fronta vala svjetlosti izlaze dva elementarna vala, jedan u obliku kugle, a drugi u obliku rotacionog elipsoida, i tako protumačio dvolom. Pomoću elementarnih valova Huygens je lako objasnio obični lom i odbijanje svjetlosti.

Zbog velikog Newtonova ugleda valna je teorija u 18. stoljeću zaboravljena, isto kao i Newtonova razmišljanja o promjenljivim sklonostima korpuskula svjetlosti. Međutim, već je Newton u svojoj knjizi *Opticks* vrlo detaljno opisao i izmjerio pojavu koja se vidi pomoću tzv. Newtonovih stakala. Ta pojava nije se mogla protumačiti ni jednostavnom korpuskularnom teorijom, a ni predodžbom o valovima kakvu je imao Huygens. Valnu teoriju usavršio je T. Young (1773–1829) pretpostavkom da pobude u valu svjetlosti slijede jedna drugu u pravilnim razmacima, onako kako se na površini vode izmjenjuju brijeg i dol vala. Razmak između dva susjedna brijega je valna duljina. Tako se i o valnoj duljini svjetlosti može govoriti kao o razmaku između dva susjedna istovrsna stanja. Služeći se tako pojmom vala u kojemu se u pravilnim razmacima izmjenjuju »brijeg« i »dol«, Young je mogao protumačiti pojavu na Newtonovim staklima i iz Newtonovih podataka o dimenzijama stakala odrediti valnu duljinu svjetlosti. Valovi svjetlosti izišli su, začudo, sitni i manji od tisućinke milimetra.

Valnu teoriju svjetlosti potvrđuje i pojava ogiba. Zbog ogiba svjetlost ipak može »obići ugao«. Takve je pojave već opazio Leonardo da Vinci (1452 – 1519), a neke su opisane u Grimaldijevoj knjizi iz 1665. god. Međutim, valnu je teoriju svjetlosti znatno unaprijedio A. J. Fresnel (1788 – 1827), koji je toj teoriji dao matematičku formulaciju.

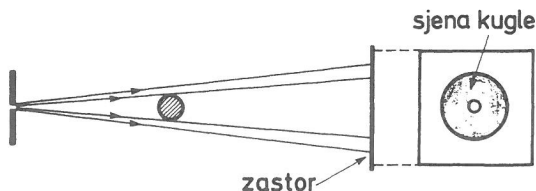
Kad je Fresnel objavio svoju matematički razrađenu valnu teoriju svjetlosti, bilo je još mnogo vrlo poznatih fizičara koji su zastupali korpuskularnu teoriju. Među njima je bio i S. D. Poisson (1781 – 1840), osobito jak teoretičar. Primjenjujući Fresnelovu teoriju, Poisson je izračunao da bi se u sredini sjene koju baca neprozirna kugla kad je rasvijetlimo svjetlošću iz točkastog izvora trebala pojaviti svijetla točka. Poissonu se taj rezultat činio apsurdnim.

D. F. Arago (1786–1853) izveo je pokus prema Poissonovoj zamisli i doista se u sredini kugline sjene vidjela svijetla točka, točno onako kako je Poisson predvidio. Slična je opažanja već stoljeće prije njega proveo Maraldi, no ona su bila zaboravljena.

Mi ćemo razmotriti pokus kakav je izveo Arago. Običnim ćemo okom motriti ogib svjetlosti. Pojava ogiba karakteristična je za sve valove, pa je, prema tome, taj pokus eksperimentalni dokaz valova svjetlosti.

Kao okrugli neprozirni predmet poslužiti će nam metalna kuglica. Nekoliko kuglica različitih promjera, od približno 5 do 6 mm, objesimo na bakrene žice. Te

predmete uranjamo u divergentni snop svjetlosti koji izlazi iz »točkastog« izvora, iz okruglog otvora promjera manjeg od 1 mm. Taj je otvor s druge strane obasjan jarkom svjetlosti lučnice. Izvor je udaljen od kuglica 4 m. Na gotovo jednakoj udaljenosti od kuglica postavljeno je mutno staklo na koje također pada isti divergentni snop svjetlosti. Skica uređaja vidi se na slici 6.1.



Slika 6.1. Ogib svjetlosti na kugli

Ako promatrač stane iza stakla i gleda u smjeru normale na središte geometrijske sjene jedne kuglice, zamijetit će malu okruglu svijetlu mrlju. Rubovi sjene također nisu oštri, vide se svijetli šareni prstenovi. Budući da se i žica na koju je obješena kuglica nalazi u snopu svjetlosti, vidi se i njezina sjena. Lako se opaža da je središnji dio sjene svijetao, a na rubovima se vide šarene pruge.

Taj se pokus još jednostavnije izvodi u monokromatskoj crvenoj svjetlosti He-Ne lasera. Uski snop svjetlosti iz izvora proširuje se lećom i u taj se prošireni snop uranjaju zapreke. Zbog koherentnosti laserske svjetlosti (vidi 6.2.3.) zapreke nije potrebno postavljati u snop na velikoj udaljenosti od izvora. Ogibne se pojave promatraju na neprozirnom zastoru. S obzirom na to da se pokus izvodi u monokromatskoj svjetlosti, prsteni i pruge na rubovima nisu šarene već samo svijetle.

Pokus je poznat pod nazivom *Poissonova svijetla mrlja*. Njime je potvrđena valna priroda svjetlosti.

Tumačenjima u sljedećem tekstu bit će obrađena valna osobina svjetlosti. Njezina se korpuskularna osobina iskorištava u atomskoj i nuklearnoj fizici.

6.2. Interferencija valova svjetlosti

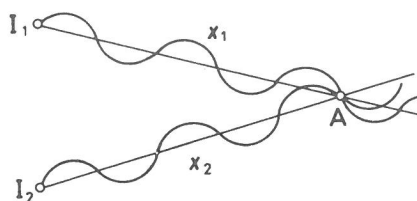
6.2.1. Interferencija sinusnih valova svjetlosti

Dosada još ništa nismo rekli o zakonitostima titranja u valovima svjetlosti. J.B.J. Fourier (1768–1830) pokazao je da se svako valovito gibanje može prikazati kao superpozicija sinusnih valova. Sinusni val je matematička tvorevina i u stvarnosti samo **jedan** takav val **se ne može ostvariti** jer bi morao biti beskrajan, a, prema tome, i vječan. Ono što ostvarujemo uvijek je skup sinusnih valova koji se u velikoj daljini ponište, pa stoga i ne mogu trajno prolaziti jednim mjestom. Budući da se mogu ostvariti dugačke grupe valova koje se dobro aproksimiraju sinusnim valom, ipak je razložno promatrati interferenciju sinusnih valova jer su oni matematički najjednostavniji.

Pod pojmom interferencije valova razumijevali smo slaganje, tj. superponiranje dvaju ili više valova. Tu ćemo pojavu promotriti u slučaju kad se valovi šire iz dva točkasta izvora, I_1 i I_2 (sl. 6.2.) koji jednostavno titraju amplitudama a_1 i a_2 i frekvencijom ω tako da se trenutna elongacija y_1 jednoga i y_2 drugog izvora mijenja kao funkcija sinus;

$$y_1 = a_1 \sin \omega t$$

$$y_2 = a_2 \sin \omega t,$$



Slika 6.2. Slaganje dvaju valova u točki A, koji su izašli iz izvora I_1 i I_2

gdje je t vrijeme. Valovi se iz izvora šire na sve strane. Odaberimo točku A u kojoj nastaje slaganje valova iz oba izvora. Ta odabrana točka udaljena je od prvog izvora za $x_1 = \overline{I_1 A}$, a od drugoga za $x_2 = \overline{I_2 A}$ (sl. 6.2.).

Val koji stiže od prvog izvora u točku A ima elongaciju:

$$y_1 = a_1 \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right),$$

a val koji stiže od drugog izvora u točku A ima elongaciju:

$$y_2 = a_2 \sin \omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right),$$

pri čemu je v brzina rasprostiranja valova.

Ako je riječ o valovima svjetlosti, tj. o elektromagnetskim valovima, $v = \frac{c}{n}$, gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu a n indeks loma sredstva kojim se širi svjetlost valne duljine λ , pa izrazi poprimaju oblike:

$$E_1 = E_{10} \sin \omega \left(t - \frac{n x_1}{c} \right)$$

$$E_2 = E_{20} \sin \omega \left(t - \frac{n x_2}{c} \right).$$

Oznake E znače vektor **jakosti električnog polja** elektromagnetskog vala, tj. vala svjetlosti.

Njihova superpozicija daje iznos elongacije E_A u točki A (sl. 6.2.). Možemo je odrediti pomoću jedne od osnovnih trigonometrijskih formula:

$$\left(\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

$$\text{Uz } E_{10} = E_{20} = E_0,$$

$$E_A = 2E_0 \cos \frac{\omega}{2c} (nx_2 - nx_1) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{2} \frac{n}{c} (x_1 + x_2) \right],$$

$$\text{i uz zamjenu za } \frac{\omega}{c} (nx_1 - nx_2) = \varphi \text{ i za } \frac{\omega}{2} \frac{n}{c} (x_1 + x_2) = \alpha,$$

$$E_A = 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2} \sin (\omega t - \alpha) = E_{012} \sin (\omega t - \alpha), \text{ gdje je iznos amplitude u točki A:}$$

$$E_{012} = 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (6.1)$$

Iz dobivenog izraza vidimo da se u točki A događa titranje čija amplituda ovisi o položaju točke prema izvorima. Ta je ovisnost iskazana argumentom funkcije kosinus. Titranje se zbiva na isti način kao i titranje izvora, jednakom frekvencijom i kao funkcija sinus, samo je pomaknuto u fazi za α .

Ako je argument funkcije kosinus takav da funkcija poprima maksimalnu vrijednost, u točki A je svjetlo, tj. uvjet za svjetlo glasi:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\omega}{2c} (nx_2 - nx_1) = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (k-1)\pi,$$

a uvjet za tamu glasi:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\omega}{2c} (nx_2 - nx_1) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad \left(\frac{2k-1}{2} \right) \pi.$$

Budući da je pulzacija $\omega = 2\pi f$, gdje je f frekvencija, a osnovna formula o valnom širenju glasi: $\lambda f = c$, uz zamjenu

$$\frac{\omega}{2c} = \frac{\pi}{\lambda},$$

uvjet za **svjetlo** imat će oblik

$$nx_2 - nx_1 = (k-1)\lambda,$$

a uvjet za **tamu**

$$nx_2 - nx_1 = \frac{2k-1}{2} \lambda,$$

pri čemu k poprima vrijednost $k = 1, 2, 3, \dots$

Razlika $nx_2 - nx_1$ naziva se optička razlika u hodu, a razlika $x_2 - x_1$ označava geometrijsku razliku u hodu. S tim smo se pojmovima već sreli.

Iznos rezultirajuće amplitude električnog vektora E_{012} u točki A, dan u izrazu (6.1), može se odrediti i postupkom rotirajućeg vektora. Amplituda prvog vala je vektor $\vec{E}_{10}$, a elongacija ima fazni kut

$$\omega t + \varphi_1 = \omega \left(t - \frac{nx_1}{c} \right).$$

Vektor amplitude drugog vala je $\vec{E}_{20}$, a pripadni fazni kut

$$\omega t + \varphi_2 = \omega \left(t - \frac{nx_2}{c} \right),$$

kako je pokazano na slici 6.3. Vektor jakosti rezultirajućeg polja E_{012} određuje se pomoću izraza:

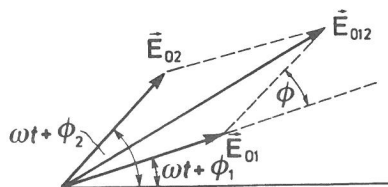
$$E_{012}^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos\varphi.$$

Za $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, te uz $E_{10} = E_{20} = E_0$,

$$E_{012}^2 = 2E_0^2(1 + \cos\varphi) = 4E_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

odnosno

$$E_{012} = 2E_0\cos\frac{\varphi}{2}.$$



Slika 6.3. Određivanje amplitude rezultantnoga električnog vektora pomoću rotirajućih vektora

To je u izrazu (6.1) također označeno kao amplituda rezultirajućeg vala u točki A.

Kako znamo, srednja vrijenost Poyntingova vektora (str. 186) pri širenju svjetlosti u vakuumu iznosi:

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{012}^2,$$

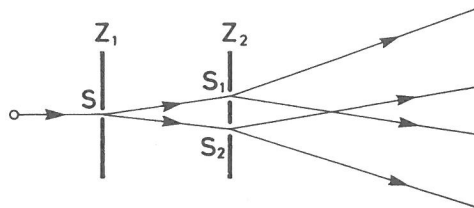
pa za promatrani slučaj, uz $E_{10} = E_{20} = E_0$, slijedi:

$$P = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Tu veličinu mjerimo radiometrom kada detektorom prolazimo točkama polja u kojemu se javljaju interferencijske pojave.

6.2.2. Youngov pokus i Fresnelova biprizma

U dosadašnjim je promatranjima pretpostavljeno kontinuirano i skladno titranje dvaju monohromatskih izvora, što je u praksi teško postići. Emisija svjetlosti je statistički događaj vezan za deekscitaciju atoma. Uvjet za nastavak interferencije valova svjetlosti u točki A, kako je opisano prethodnim izrazom, jest **koherencija**, skladnost titranja izvora. U optici su poznati načini na koje se to



Slika 6.4. Youngov pokus

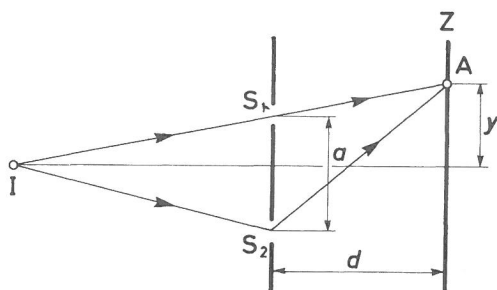
postiže: tako se zrake koje mogu interferirati dobivaju se cijepanjem iste početne zrake.

Najraniji eksperimentalni uređaj za demonstraciju interferencije svjetla načinio je Th. Young (1773–1820).

Svjetlo iz monokromatskog izvora pada na prvi zaslon Z_1 s malim okruglim otvorom rupicom. Taj je otvor ujedno točkasti izvor svjetlosti. Svjetlo iz tog izvora pada na drugi zaslon Z_2 s dvije rupice, S_1 i S_2 , na malom razmaku. Otvori S_1 i S_2 djeluju kao sekundarni monokromatski točkasti izvori koji su koherentni. Iza zaslona nastaje prekrivanje snopova svjetlosti koji se šire od tih izvora, pa se javlja interferencija. Međutim, pojava je bila jedva zamjetna. Bolje je rezultate dobio kad je kružne otvore zamijenio trima paralelno postavljenim uskim pukotinama.

U Youngovu pokusu na zastoru se vide tamne i svijetle pruge interferencije. Dvije zrake koje interferiraju na zastoru Z u točki A na slici 6.5. imaju razliku u hodu:

$$\Delta = \sqrt{d^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2},$$



Slika 6.5. Uz Youngov pokus

gdje je d udaljenost od pukotina do zastora, y položaj točke A mjereno od sredine zastora, a a udaljenost između pukotina. Budući je ispunjen uvjet da je $d \gg y + \frac{a}{2}$, razvojem u binomni red, prema izrazu:

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2},$$

dobiva se razlika u hodu:

$$\Delta = d \left[1 + \frac{\left(y + \frac{a}{2}\right)^2}{2d^2} - 1 - \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{2d^2} \right].$$

odnosno:

$$\Delta = \frac{ay}{d}.$$

Na zastoru se pojavljuje svjetlo ako je razlika hoda cjelobrojni višekratnik valnih duljina svjetlosti, tj.

$$\Delta = k \lambda.$$

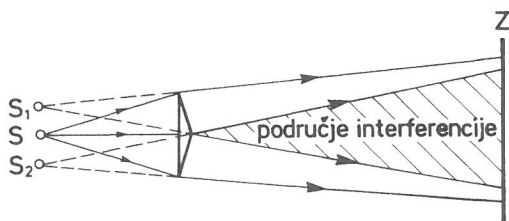
Udaljenost maksimuma svjetlosti od središta zastora je prema tome:

$$y = k \frac{d \lambda}{a} \quad (6.2)$$

Ako izvor šalje bijelu svjetlost, centralna pruga na zastoru je bijela, a ostale su svijetle pruge šarene, prema izrazu (6.2).

Tim smo pokusom pokazali jedan način dobivanja interferencije. S obzirom na to da ta pojava nastaje svuda u prostoru gdje se šire koherentni valovi, govorimo o *nelokaliziranim prugama interferencije*.

U pokusu ćemo interferenciju pokazati pomoću **Fresnelove biprizme**. Biprizma je sastavljena od dvije jednake prizme malih lomnih kutova, smještene zajedno, bazom do baze (sl. 6.6). Snop svjetlosti iz uske pukotine S, paralelne s lomnim



Slika 6.6. Pokus sa Fresnelovom biprizmom

bridovima, biprizmom je podijeljen na dva snopa koja se djelomično prekrivaju. Biprizma tako daje dvije virtualne slike, S_1 i S_2 , od pukotine S. Te su slike izvori iz kojih se šire koherentni valovi. Kad zastor postavimo okomito na ravninu crtnje i optičku os, bilo gdje u području preklapanja snopova, vidjet ćemo pruge interferencije. Kada je pukotina S obasjana bijelom svjetlosti lučnice, na zastoru se vide tamne i svijetle pruge, pri čemu su svijetle pruge šare, osim središnje koja je bijela. Ako upotrijebimo zeleni i crveni filter na zastoru vidimo tamne i svijetle pruge jer se koristimo samo uskim pojasom valnih duljina svjetlosti u zelenome, odnosno crvenom dijelu spektra koje filteri propuštaju. S monokromatskom svjetlosti lasera He–Ne na zastoru vidimo oštre tamne i svijetle pruge.

6.2.3. Uvjeti koherencije

Emisija svjetlosti je statistička pojava. Atom ostaje u pobuđenom stanju prosječno u toku vremenskog intervala $\tau = 10^{-8}$ s, odnosno emisija svjetlosti iz atoma događa se u tom vremenskom intervalu. Drugim riječima, atom pri deekscitaciji emitira valni paket koji se u vakuumu širi brzinom $c \doteq 3 \cdot 10^8$ m/s, pa valni paket ima duljinu $\Lambda = c \tau \doteq 3$ m. Ta se duljina naziva koherentna duljina i karakteristična je za vrstu izvora. Ona, međutim, za živinu lučnicu iznosi samo oko

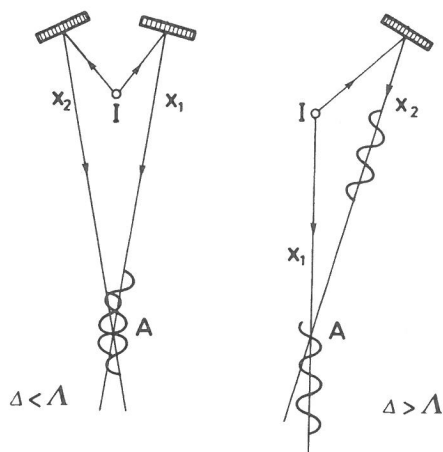
3 cm. Općenito skraćenje nastaje zbog Dopplerova proširenja spektralnih linija i zbog proširenja linija uzrokovanih tlakom plina u izbojnoj cijevi. Međutim, zbog stimulirane emisije koherentna je duljina za He-Ne laser mnogo veća.

Iz opisane pojave slijedi uvjet koherencije koji nosi naziv *uvjet koinkidencije*. Možemo ga objasniti ovako:

kada se slažu tj. kad dva koherentna valna paketa interferiraju, osim ustanovljene razlike u hodu Δ mora biti ispunjen i uvjet da je ta razlika manja od koherentne duljine Λ , tj.

$$\Delta < \Lambda.$$

Na slikama 6.7 a) i b) vidi se što znači taj uvjet. Na slici 6.7a) interferencija je ostvarena jer je taj uvjet ispunjen, a na slici 6.7b) interferencija ne nastaje jer je $\Delta > \Lambda$, tj. valni se paketi ne pokrivaju.



Slika 6.7. a) Valni paketi koji interferiraju, b) valni paketi koji ne interferiraju

Sljedeći uvjet koherencije proizlazi iz toga što praktično izvori nikada nisu točkasti nego su *konačnih dimenzija*. Što to znači? Svaki djelić izvora neovisno emitira svjetlost. Radi jednostavnosti, promatrat ćemo izvor koji ima duljinu y (sl. 6.8). i emisiju svjetlosti iz dviju krajnjih točaka A i B izvora. Izvor osvjetljava dva otvora, I_1 i I_2 , na zastoru.

Kada će svjetlosti iz ta dva otvora biti koherentne i u točki P na zastoru davati interferencijsku sliku?

Iz točke A izvora, kao i iz točke B, svjetlo pada na oba otvora. Razlika u hodu između zraka svjetlosti koje padaju na otvor I_1 odnosno I_2 a izlaze iz točke A jest: $\Delta = l_2 - l_1$, a razlika u hodu zraka iz točke B iznosi $\Delta' = l'_2 - l'_1$ (sl. 6.8).

Svjetlo iz I_1 i I_2 formirat će jednaku interferencijsku sliku u P ako je zadovoljen uvjet da je razlika između obje razlike u hodu mnogo manja od valne duljine svjetlosti koju emitira izvor, tj.

$$\Delta - \Delta' = (l_2 - l_1) - (l'_2 - l'_1) \ll \lambda \quad (6.3)$$

pri čemu $l_1 = l'_1 - \Delta l$, a $l_2 = l'_2 + \Delta l$. Iz slike 6.8 izlazi da je:

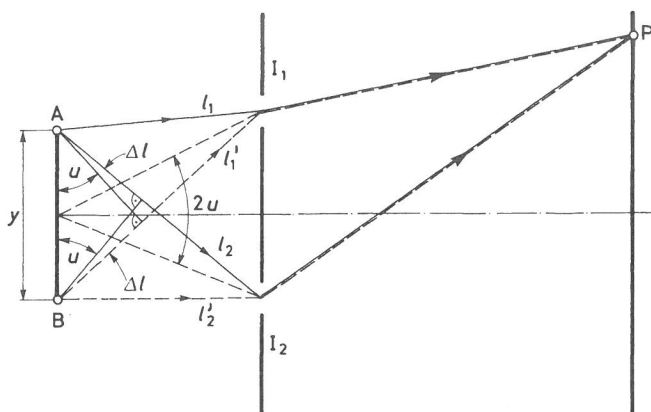
$$\Delta l = y \sin u,$$

gdje je kut u kut otvora. Razlika tada iznosi:

$$\Delta - \Delta' = 2\Delta l = 2y \sin u.$$

Stoga uvjet koherencije (6.3) glasi:

$$2y \sin u \leq \lambda.$$



Slika 6.8. Uz interferenciju svjetlosti iz izvora duljine y

Zaključujemo: ako je izvor uzak, a kut otvora malen, tada će svjetlo iz točaka izvora koje neovisno emitiraju svjetlost obasjavati otvore I_1 i I_2 , a svjetlo iz njih formirat će na zastoru u točki P stacionarnu interferencijsku sliku.

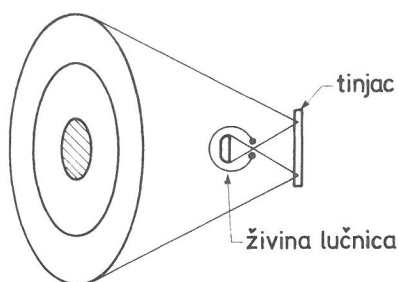
Iz netom napisanog uvjeta jasno je naprimjer zbog čega se u pokusu *Poissonova mrlja* služimo izvorom malih dimenzija i velikim udaljenostima od nekoliko metara između izvora i zapreke na kojoj se pojavljuje ogib svjetlosti. Imajmo na umu da je laserski snop svjetlosti praktično paralelan, pa je u svim točkama presjeka snop gotovo koherentan, i zbog toga se može koristiti veliki kut otvora pomoću leća za proširenje snopa.

6.2.4. Pohlov pokus o interferenciji svjetlosti

R. W. Pohl proveo je vrlo jednostavan pokus u kojemu je pokazao interferenciju svjetlosti (oko 1930. god.). Taj je pokus postao moguć kad su pronađeni snažni izvori svjetlosti praktički samo jedne valne duljine, npr. natrijeva lučnica, ili malog broja različitih valnih duljina, npr. živina lučnica.

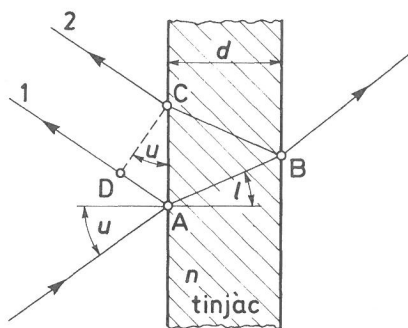
Živina se lučnica nalazi u neprozirnoj kutiji koja ima na prednjoj strani okrugli otvor promjera oko 3 cm (sl. 6.9). Na daljini od 15 do 20 cm ispred otvora

smještena je tanka ploča od tinjca, koja je dovoljno velika da se od nje može odbiti svjetlost iz lučnice i zatim uhvatiti na nekoliko metara dalekoj stijeni. Oko sjenke kutije vide se kružni lukovi, izmjenično svijetli i tamni, boja živina luka. Ti lukovi nastaju interferencijom svjetlosti koja se odbila na prednjoj odnosno stražnjoj površini ploče tinjca. Nastanak tih interferencija promotrit ćemo služeći se ponovo Youngovim principom prema kojemu se dva istovrsna vala svjetlosti, kad se sastanu na nekome mjestu prostora, mogu trajno pojačavati ili oslabljivati ovisno o tome koliko su »bregovi« jednog vala pomaknuti prema »bregovima« drugog vala.



Slika 6.9. Pohlov pokus o interferenciji svjetla

Zraka svjetlosti upada na ploču u točki A (sl.6.10), djelomično se reflektira, i to je zraka 1, a djelomično lomi u tinjac. Lomljena se zraka djelomično reflektira u točki B i tako nastaje zraka 2 koja nakon izlaza iz tinjca putuje paralelno sa zrakom 1. Svjetlost koja kod B izlazi u zrak prigušimo tamnim zaslonom. Zrake 1 i 2 sadrže istovrsne valove svjetlosti jer su nastale iz iste upadne zrake. One su koherentne i zato mogu dati interferenciju koja se na nekome mjestu prostora ne mijenja s vremenom. Te zrake na udaljenoj stijeni daju svjetlo odnosno tamu, ovisno o tome sastaje li se »brijeg« iz zrake 1 s »brijegom« iz zrake 2 ili s »dolom« iz zrake 2. Što će se dogoditi ovisi o *optičkoj razlici u hodu*.



Slika 6.10. Lom i odbijanje svjetlosti na tinjcu

Najprije ćemo odrediti *geometrijsku* razliku u hodu. Ona iznosi $2 \overline{AB} - \overline{AD}$.

Zrake 1 i 2 nastale su cijepanjem upadne zrake. Možemo, dakle, zamisliti da do točke A one putuju zajedno, a tada se razdijele. Zraka 2 prevali u tinjcu put $2 \overline{AB}$, koji zraka 1 ne mora prevaliti. Međutim na putu do daleke stijene zraka 1 ima za $\overline{AD}$ dulji put kroz zrak.

Nadimo sada optičku razliku u njihovu hodu. Refleksija u točki A je na optički gušćem sredstvu, a to je kao da se val zrake 1 pomaknuo u smjeru gibanja za polovinu valne dužine. Dakle, pri proračunu optičke razlike u hodu umjesto $\overline{AD}$ treba pisati $\overline{AD} + \frac{\lambda}{2}$. Pritom je λ valna duljina svjetlosti u zraku.

Promotrimo sada put zrake 2 u tinjcu. Prema valnoj teoriji, pri prijelazu u gušće sredstvo valovi svjetlosti postaju kraći (i zato se zraka lomi prema okomici). Skraćenje je srazmjerno indeksu loma n . Ako, dakle, u zraku valovi imaju duljinu λ , onda u tinjcu imaju $\frac{\lambda}{n}$. Prema tome, duljina puta $2\overline{AB}$ u tinjcu sadrži toliko valova koliko bi sadržavala duljina puta $2n\overline{AB}$ u zraku. Za interferencijske je pojave važno koliko valnih duljina val 2 zaostaje za valom 1.

U ovom je primjeru *optička razlika* u hodu između zrake 2 i zrake 1

$$\Delta = 2n\overline{AB} - \left(\overline{AD} + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ izrazit ćemo pomoću debljine d ploče tinjca. Iz slike vidimo da je

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{d}{\cos l} \\ \overline{AD} &= \overline{AC} \sin u = 2d \operatorname{tg} l \sin u\end{aligned}$$

Budući da je po Snellovu zakonu

$$\sin u = n \sin l,$$

slijedi:

$$\overline{AD} = \frac{2nd \sin^2 l}{\cos l}.$$

Ako nađemo izraze za $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ uvrstimo u izraz za optičku razliku u hodu, dobit ćemo:

$$\Delta = 2nd \frac{1 - \sin^2 l}{\cos l} - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = 2nd \cos l - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 u} - \frac{\lambda}{2}.$$

Zid nije u neizmjernosti, ali je ipak dovoljno udaljen od tinjca da će se zrake 1 i 2 na njemu inteferencijom pojačavati ako je

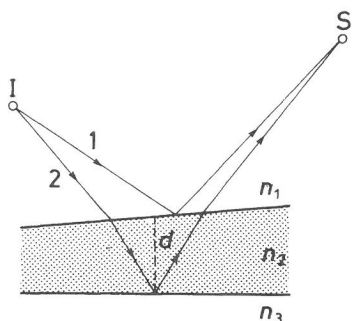
$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 u} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

gdje je k cio broj. Pojava je ovisila o kutu loma l (koji je određen kutom upada u). Razlika u hodu je manja ako su kutovi l veći (veći su i kutovi u). Može se reći da sve zrake koje padaju na pločicu tinjca pod jednakim kutom u na zidu daju jednaku interferencijsku sliku.

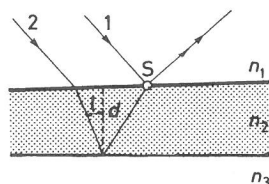
6.2.5. Interferencija svjetlosti na tankim filmovima

Interferencija se može promatrati na prozirnim tankim filmovima s ravnim plohama koje nisu nužno paralelne već međusobno zatvaraju mali kut. Promotrimo najprije upotrebu monohromatskoga točkastog izvora svjetlosti u sredstvu indeksa loma n_1 sl. 6.11. Dvije zrake iz izvora I padaju na gornju površinu filma. Zraka 1 reflektira se na toj površini, a zraka 2 lomi se u film indeksa loma n_2 i reflektira na njegovoj donjoj površini koja graniči sa sredstvom indeksa loma n_3 , a onda se ponovno lomi u prvo sredstvo. Na mjestu gdje se sijeku dvije zrake (točka S) pojavljuje se interferencija. Točkastim se izvorom postižu *nelokalizirane interferencije*. Ako pritom odredimo optičku razliku u hodu za zrake 1 i 2, mogli bismo zaključiti da ona u promatranoj točki S ovisi o debljini filma d i upadnom kutu.

Slično smo pokazali za planparalelni sloj u Pohlovu pokusu, samo se u ovom slučaju debljina filma mijenja ovisno o mjestu refleksije zraka svjetlosti. Stoga se pri proširenom izvoru svjetlosti neće vidjeti pruge interferencije. One se vide samo u posebnom slučaju, kad točka S padne u sam film. Tim je okolnostima debljina filma praktički nepromijenjena za sve parove zraka iz izvora koje stižu u točku S. Slučaj s paralelnim zrakama dan je na slici 6.12. Budući da se pruge zapažaju u



Slika 6.11. Interferencija svjetla na tankom filmu iz točkastog izvora



Slika 6.12. Interferencija svjetla paralelnih upadnih zraka na tankom filmu

samom filmu, riječ je o lokaliziranim prugama interferencije. Promatranjem sličnim onome za planparalelni sloj optička razlika u hodu za zrake koje inteferiraju u S dana je izrazom

$$\Delta = 2n_2 d \overline{\cos l} + \delta,$$

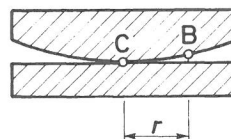
gdje δ može biti 0, odnosno $\frac{\lambda}{2}$, zavisno o indeksima loma n_1 , n_2 , n_3 , a $\overline{\cos l}$ srednja je vrijednost od $\cos l$ za zrake iz izvora koje mogu pridonositi interferenciji u točki S.

Često se tako dobivena interferencija naziva pruge jednake debljine, jer su za stalno $\overline{\cos l}$ pruge smještene u točkama filma jednake optičke debljine. Takve se pruge promatraju okom, ako je ono na njih akomodirano, ili se pomoću leće promatra njihova slika na zastoru.

6.2.6. Newtonova stakla

Vrlo poznati eksperiment kojim se pokazuju *lokalizirane pruge interferencije* jesu Newtonova stakla. To je eksperiment koji je T. Youngu omogućio određivanje valne duljine svjetlosti vidljivog područja.

Newtonova se stakla sastoje od planparalelne staklene ploče i na nju položene plankonveksne leće (sl. 6.13). Plankonveksna leća položena je na planparalelnu ploču tako da je dodiruje svojom izbočenom stranom. U točki dodira C sferne plohe leće i ploče razmak između stakala jednak je nuli. Ako promatramo mjesto B u daljini r od točke C (u nekom smjeru koji pada u ravninu ploče), onda je razmak između stakala d . To je debljina sloja zraka između stakala na promatranome mjestu. Mjesta jednake debljine d leže u kružnici radijusa r opisanoj oko točke C.



Slika 6.13. Newtonova stakla

Budući da je za optički efekt koji ćemo motriti na staklima debljina sloja zraka d bitna tu ćemo debljinu izračunati.

Polumjer zakrivljenosti R sferne plohe leće Newtonovih stakala vrlo je velik, nekoliko desetaka metara. Zato je debljina sloja d u omjeru prema R neznatna. To će nam pomoći pri računanju.

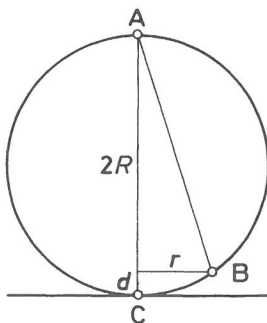
U točki C podignimo okomicu na ravninu ploče s kojom se dodiruje leća (sl. 6.14). Na toj se okomici u daljini R nalazi središte zakrivljenosti sferne plohe leće. U daljini r od točke C sloj zraka ima debljinu d . U promatranom trokutu ABC daljina r je srednja geometrijska proporcionalna između duljina d i $(2R - d)$. Dakle,

$$d:r = r:(2R - d).$$

Odatle slijedi:

$$d = \frac{r^2}{2R - d} \doteq \frac{r^2}{2R}.$$

Budući da je $2R$ milijune puta veće od d , mogli smo d u nazivniku zanemariti.



Slika 6.14. Uz proračun za određivanje debljine sloja d

Promatrajmo sada optičku pojavu na Newtonovim staklima. Stakla su u okviru pa je osiguran dodir stakala u točki C. Ako stakla motrimo pod bijelom svjetlosti koja dolazi iz širokog izvora, kao što je npr. bijeli oblak, ili svjetlost koja dolazi od bijelog stropa, onda u točki C vidimo tamnu kružnu mrlju kojoj rubovi postaju postepeno svjetliji i tako prelaze u prvi svijetli kolobar sa središtem u C. Slijedi tamni kolobar, a onda šareni kolobari, svi sa središtem u C. To su **Newtonovi kolobari**. Što smo dalje od C, kolobari su bljedi. Ako, međutim, gledamo kroz crveni filter, oko tamnog središta C vidjet ćemo crvene kolobare sve do ruba stakala. Zamijenimo li crveni filter zelenim, opet se po cijelim staklima vide kolobari, no ti zeleni gušće pokrivaju stakla. Numeriramo li kolobare počevši od sredine, crveni će kolobari nekoga rednog broja imati veći polumjer r od zelenog kolobara istoga rednog broja.*

Ako svjetlo pada gotovo okomito na površinu Newtonovih stakala, objašnjenje pokusa svodi se na slučaj pruga jednake debljine, uz upadni kut u približno jednak 0, pa, za razliku hoda reflektiranih zraka na staklima, vrijedi izraz:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2},$$

gdje je d debljina sloja zraka.

Prema Youngovu tumačenju mi ćemo vidjeti svjetlost ako je optička razlika u hodu jednaka cijelom broju valnih duljina, a tamu ako je ta razlika jednaka neparnome mnogokratniku od $\lambda/2$.

Dakle,

svjetlo za $\Delta = \lambda, 2\lambda, \dots, k\lambda, \dots$

tama za $\Delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots, \frac{(2k+1)\lambda}{2}, \dots$

Općenito, svjetlo vidimo ako je

$$k\lambda = 2d_s + \frac{\lambda}{2}$$

$$d_s = \frac{2k-1}{4}\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

a tamu ako je

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = 2d_t + \frac{\lambda}{2}$$

$$d_t = \frac{k}{2}\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

* Tu je pojavu Newton detaljno opisao navodeći velik broj nijansa šarenih kolobara, njihove polumjere i polumjere zakrivljenosti sferne plohe leće. (Newton je svoje leće sam brusio.) Iz tih Newtonovih podataka T. Young je mogao izračunati (1804) duljinu valova svjetlosti.

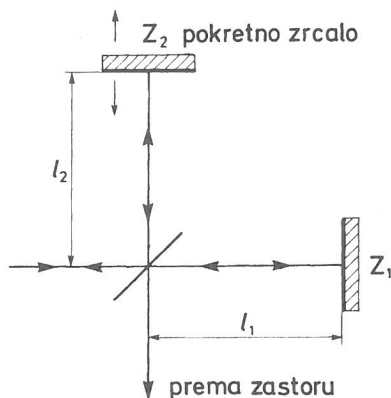
Budući da se razmak između d stakala može izračunati iz polumjera r kolobara (a to su mjesta iste debljine sloja zraka d) i radijusa zakrivljenosti R leće, proizlazi da se pritom može odrediti valna duljina svjetlosti. Potrebno je samo odrediti k , tj. redni broj kolobara. Za svijetle pruge to i radimo tako da brojimo od tamne sredine: prvi, drugi, ..., k -ti, ... Za tamne je kolobare središnja tamna mrlja nulti kolobar, a zatim slijede ostali. Naprimjer, za žutu svjetlost kojom svijetli plinski plamenik, ako u nj stavimo kuhinjske soli, proizlazi

$$\lambda = 0,000\,59\text{ mm}.$$

To je, dakle, duljina valova u zraku za svjetlost kojom svijetle atomi natrija.

6.2.7. Michelsonov interferometar

Michelsonov interferometar je uređaj kojim se može promatrati interferencija dvaju svjetlosnih snopova. Na slici 6.15 je prikazan pojednostavnjeni oblik tog uređaja s kojim izvodimo pokus. Izvor svjetlosti je monokromatski. Iz lasera He-Ne snop najprije prolazi kroz dvije leće. Prva proširuje snop, a druga ga kolimira. Svjetlo zatim pada na polupropusnu pločicu, djelatelj snopa. Pločica je postavljena tako da s površinom zrcala Z_1 odnosno Z_2 zatvara kut od $\pi/4$. Dio svjetlosnog vala prenosi se do zrcala Z_1 , a dio se reflektira na pločici i putuje prema zrcalu Z_2 . Napareni sloj na pločici izveden je tako da su dva dijela snopa svjetlosti jednakih amplituda. Svjetlo se reflektira na zrcalu Z_1 , odnosno Z_2 i vraća prema pločici, gdje se prosječno polovina energije širi prema zastoru, a druga se polovina širi natrag prema izvoru. Na zastoru se promatra interferencijska pojava. Ako zrcala leže u međusobno okomitim ravninama, na zastoru se naizmjenično dobivaju tamni i svijetli koncentrični prstenovi.



Slika 6.15. Michelsonov interferometar

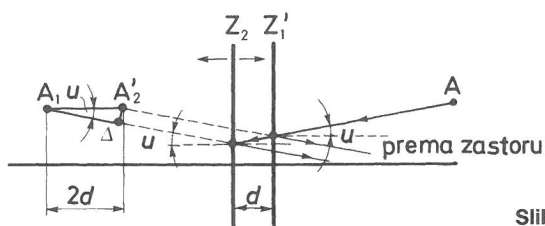
Polupropusna pločica može dati virtualnu sliku Z'_1 zrcala Z_1 (sl. 6.15), tako da je slika paralelna sa zrcalom Z_2 .

Moguće je promatrati i obrnut slučaj – kada polupropusna pločica daje virtualnu sliku Z'_2 od Z_2 , paralelnu sa Z_1 .

Na slici je odabran prvi slučaj. Zrcalo Z_2 i slika Z'_1 su paralelni, pa se objašnjenje interferencije svodi na interferenciju svjetlosti na planparalelnom sloju kakvu smo upoznali u Pohlovu pokusu (6.2.4) uz uvjet da u formuli za optičku razliku u hodu kut upada u bude jednak kutu loma l i indeks loma n (zrak) $\doteq 1$. Ako zraka svjetlosti normalno pada na sloj, razlika u hodu reflektiranih zraka iznosi $\Delta = 2(l_2 - l_1) = 2d$.

Ako na sloj pada konvergentni snop svjetlosti čije zrake s normalom na sloj zatvaraju upadni kut $u \neq 0$, za zraku iz snopa iz bilo koje točke izvora A razlika u hodu iznosi (sl. 6.16):

$$\Delta = 2(l_2 - l_1) \cos u = 2d \cos u.$$



Slika 6.16. Zraka svjetlosti koja u Michelsonovu interferometru pada pod kutom $u=0$

U točkama A_1 i A'_2 zrcala formiraju virtualne slike. Ako je ispunjeno:

$$2(l_2 - l_1) \cos u = m\lambda,$$

pri čemu je m cio broj, rezultat interferencije je maksimum svjetla.

Uz stalnu razliku $l_2 - l_1$ samo kut u određuje vrijednost broja m , tj. red interferencije.

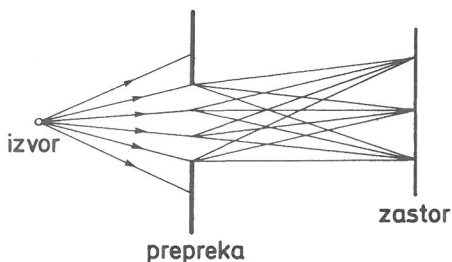
Interferencijska je slika osno-simetrična. Zrake upadnog kuta u , koje zadovoljavaju uvjet za dobivanje određenog maksimuma, pri interferenciji tvore odgovarajući svijetli prsten. Za prvi red u interferencijskoj slici, $m = 1$, kut u je velik, praktično $\pi/2$. To znači da prvi red interferencije ima vrlo velik polumjer, gotovo beskonačno velik. S povećanjem reda smanjuju se polumjeri prstenova. S povećanjem razlike u duljini krakova interferometra gustoća interferencijskih prstenova se povećava.

6.3. Ogib ili difrakcija valova svjetlosti na pukotinama

6.3.1. Uvod

Spomenut je primjer ogiba valova svjetlosti u uvodnom dijelu ovog poglavlja. Bio je to pokus nazvan *Poissonova svijetla mrlja*. U ovom ćemo se dijelu zadržati na pojavama ogiba na *pukotinama*. Pojave su očitije što je širina pukotine bliža redu veličine valne duljine.

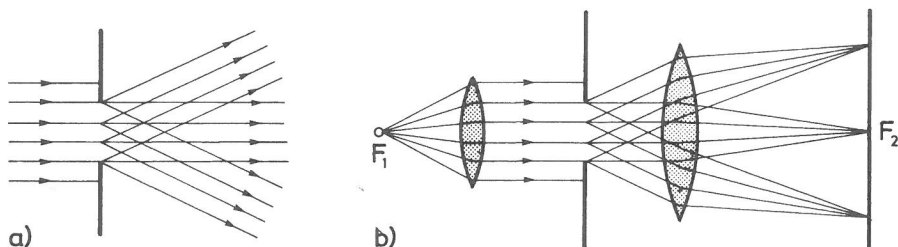
Kada govorimo o optičkoj ogibnoj pojavi, razlikujemo dvije vrste ogiba. Tako je poznat **Fresnelov ogib** koji nastaje kad je izvor ili mjesto promatranja ogiba, ili su oboje, konačno udaljeni od zapreke na kojoj nastaje ogib (sl. 6.17). Pritom se susreću zakrivljene valne plohe, tj. snopovi zraka su divergentni i konvergentni. Ta vrsta ogiba dobiva se bez pomoći leća. Međutim, matematička analiza nije jednostavna.



Slika 6.17. Fresnelov ogib

Posebna vrsta Fresnelova ogiba jest ogib poznat pod nazivom **Fraunhoferov ogib**. Taj se ogib matematički lakše objašnjava, a postiže se kada su izvor svjetlosti i mjesto promatranja ogibne pojave beskonačno udaljeni od zapreke (sl. 6.18).

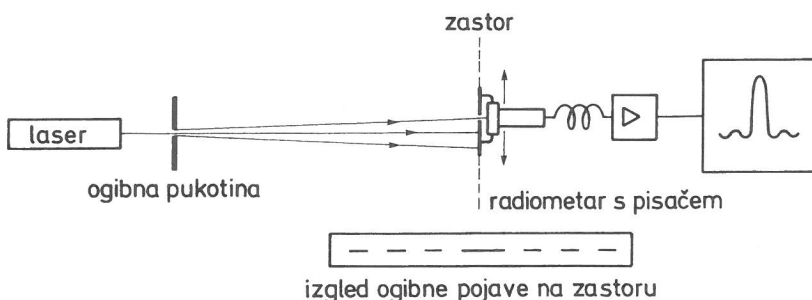
Za praktičnu provedbu obično se upotrebljavaju dvije konvergentne leće. Izvor svjetlosti nalazi se u žarištu prve leće, a ogibna se pojava promatra na žarišnoj daljini druge leće.



Slika 6.18. Fraunhoferov ogib: a) izvor i ogibna pojava nalaze se u neizmjernosti; b) izvor i ogibna pojava nalaze se u žarišnim ravninama leća

6.3.2. Fraunhoferov ogib na pukotini

U pokusu koji izvodimo iz He–Ne-laserskog izvora paralelni snop koherentne monokromatske svjetlosti pada na pukotinu. Ogibnu pojavu direktno promatramo na udaljenom zastoru ili je ispitujemo radiometrom. Radiometar je uređaj koji se sastoji od zaslona s malim otvorom. Njime se pokretnim mehanizmom prolazi kroz ogibnu pojavu (sl. 6.19). Zaslون je učvršćen ispred PIN-diode osjetljive na snagu monokromatskog zračenja iz izvora. Dioda pretvara svjetlosni signal u električni.

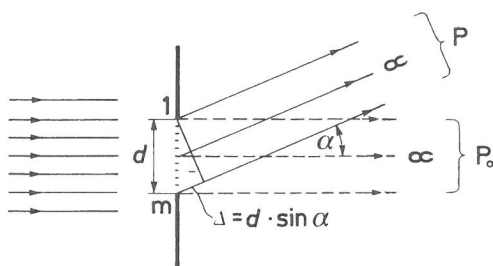


Slika 6.19. Uređaj za promatranje ogibnih pojava

Elektroničko ga pojačalo pojačava, a tako pojačan signal zapisuje se pisačem. Ako je pukotina široka nekoliko valnih duljina upotrijebljene svjetlosti, detektorom se mogu dobro zabilježiti ogibne pojave. Svjetla područja (maksimumi) su široka. Povećanjem širine pukotine maksimumi postaju sve uži, sve dok ogibna pojava posve iščezne.

Za analitičko objašnjenje pojave poslužit ćemo se metodom rotirajućih vektora. Širinu pukotine d (sl. 6.20) podijelit ćemo na m dijelova, gdje je m veliki cijeli broj. U ravni crtnje iz svakog dijela pukotine pod kutom α prema upadnom smjeru izlazi elementarni val amplitude veličine E_0 . Kut α može poprimiti vrijednost od 0 do $\pm \pi/2$ rad. Rezultujuća amplituda $E(\alpha)$ u smjeru α dobiva se u točki u beskonačnosti zbrajanjem svih amplituda valova koji imaju ogib za kut α . Zrake 1 i m sa slike imaju razliku u hodu

$$\Delta = d \sin \alpha \text{ i faznu razliku } \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha.$$



Slika 6.20. Uz tumačenje ogiba na pukotini

Dvije susjedne zrake ogibnog kuta α imaju razliku u hodu

$$\delta = \frac{\Delta}{m} = \frac{d}{m} \sin \alpha, \text{ i time razliku u fazi } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{m} \sin \alpha.$$

Služeći se metodom rotirajućeg vektora svaku ćemo amplitudu vala na slici 6.21 predložiti vektorom E_0 . Vektori dviju susjednih amplituda zatvaraju kut φ . Iz

ili kraće pisano

$$E(\alpha) = E(0) \frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}}. \quad (6.6)$$

Budući da je intenzitet svjetlosti proporcionalan kvadratu amplitude vala, tj. $I \sim E^2$, dobiva se intenzitet $I(\alpha)$ za smjer α :

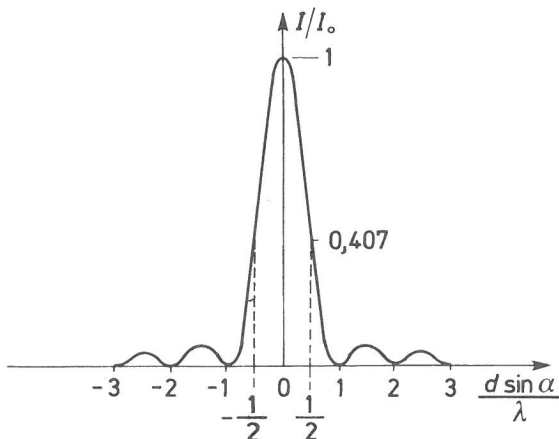
$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)^2}, \quad (6.7)$$

ili, kraće pisano:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\left(\frac{\Phi}{2} \right)^2}.$$

Interferencijski minimum, tj. intenzitet jednak je nuli kada je $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha = k\pi$ (sl. 6.22), odnosno dobivamo **uvjet za minimum**:

$$d \sin \alpha = k \lambda, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



Slika 6.22. Promjena intenziteta difraktirane svjetlosti računom

Vrijednosti $k=0$ odgovara kut $\alpha=0$, tj. $\Phi/2=0$. Pritome u formuli za ukupnu amplitudu (6.6) faktor

$$\left(\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \right)_{\frac{\Phi}{2}=0} = 1.$$

Tom uvjetu odgovara najveći, glavni maksimum intenziteta I_0 , koji leži u sredini ogibne slike. Između minimuma u ogibnoj slici, simetrično lijevo i desno od glavnog maksimuma slijede pokrajni maksimumi. Njihov se položaj određuje iz nužnog uvjeta da je prva derivacija intenziteta svjetlosti (6.7) jednaka nuli, tj.

$$\frac{dI}{d\frac{\Phi}{2}} = 0.$$

Provedeni račun daje **uvjet za pokrajni maksimum**:

$$d \sin \alpha = \frac{2k \pm 1}{2} \lambda.$$

Intenziteti pokrajnjih maksimuma maleni su u suporedbi s glavnim maksimumom I_0 i smanjuju se povećanjem broja k prema izrazu

$$I = \frac{I_0}{\left(k \pm \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2},$$

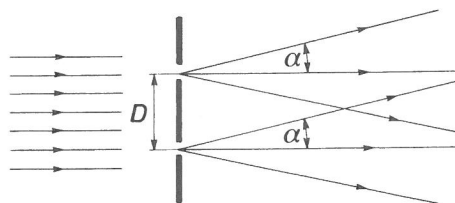
pa se za $k = \pm 1, \pm 2$ i ± 3 dobiva:

$$I = 0,045 I_0; 0,016 I_0; \text{ i } 0,008 I_0,$$

što se pokusom također potvrđuje.

6.3.3. Fraunhoferov ogib na dvije pukotine

Ako u eksperimentalnom uređaju za ogib na pukotini, umjesto jedne pukotine postavimo dvije, na zastoru ćemo zamijetiti da se u područjima maksimuma, tj. u području svjetla pojavljuju tamna mjesta, minimumi (sl. 6.23).



Slika 6.23. Uz tumačenje ogiba na dvije pukotine

Ta pojava nastaje zato što svaka pukotina daje ogibnu sliku, a obje te slike padaju zajedno. K tome još odgovarajući par zraka, svaka iz jedne pukotine, međusobno interferiraju.

Pretpostavimo da su pukotine jednako široke. Širinu pukotine označit ćemo sa d , a razmak između pukotina s D , tako da je $D > d$ (sl. 6.23).

Amplituda ognute svjetlosti iz jednostruke pukotine je $E(\alpha)$ prema (6.5). Valovi iz smjera α iz obje pukotine međusobno se slažu, uz razliku u hodu

$\Delta = D \sin \alpha$, odnosno razliku u fazi $\varphi = \frac{2\pi D}{\lambda} \sin \alpha$. Ukupna amplituda $E_D(\alpha)$ u

smjeru α grafički se dobije sumiranjem pomoću rotirajućih vektora prema slici (6.24):

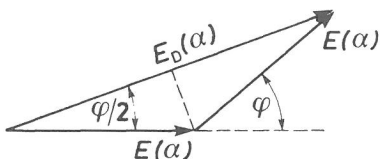
$$E_D(\alpha) = 2E(\alpha) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Zamjenom:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

posljednji izraz možemo pisati ovako:

$$E_D(\alpha) = E(\alpha) \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$



Slika 6.24. Izračunavanje amplitude ognute svjetlosti na dvije pukotine

Budući da je $E(\alpha)$ vrijednost amplitude ogiba na jednoj pukotini, amplituda u točki P u smjeru α iznosi (6.5).

$$E_D(\alpha) = E(0) \frac{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha} \frac{\sin \left(\frac{2\pi D}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \alpha \right)}. \quad (6.8)$$

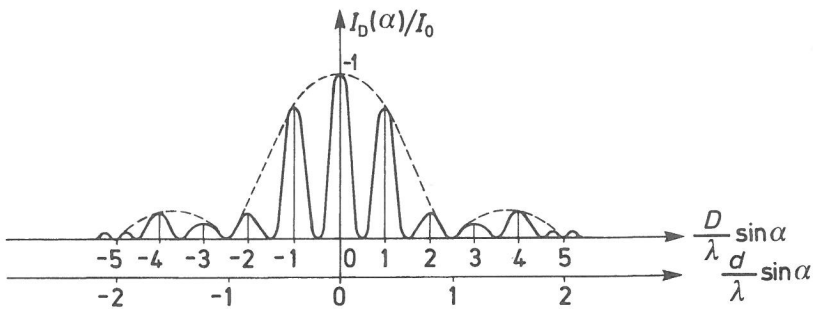
Intenzitet svjetla u točki P na zastoru proporcionalan je kvadratu amplitude, tj. $I_D(\alpha) \sim E_D^2(\alpha)$, pa za nj vrijedi prema (6.8) konačni izraz:

$$I_D(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi D}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \alpha \right)} \right]^2. \quad (6.9)$$

Prvi član izraza opisuje ogib na jednoj pukotini, a drugi član daje interferenciju odgovarajuće ognute svjetlosti pod kutom α iz dviju pukotina. Za minimum i maksimum svjetlosti vrijede sljedeći uvjeti:

	minimum:	maksimum:
interferencijska slika prvog reda (pukotina)	$d \sin \alpha = k \lambda$ $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$	$d \sin \alpha = \left(2k \pm 1\right) \frac{\lambda}{2}$ i $\alpha = 0$
interferencijska slika drugog reda (unutar pojava od pukotine)	$D \sin \alpha = \left(2k' \pm 1\right) \frac{\lambda}{2}$ $k' = 0, \pm 1, \pm 2$	$D \sin \alpha = k' \lambda$

Na slici 6.25 dan je omjer intenziteta $I_D(\alpha)/I_0$. prema nađenom izrazu. Taj se omjer u pokusu zapisuje pisačem.

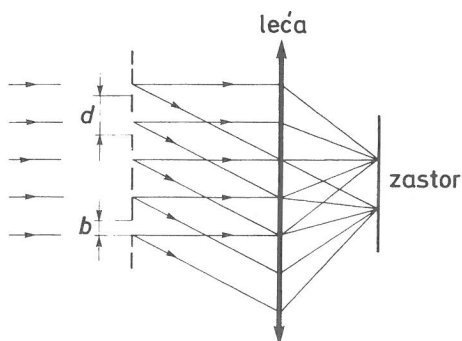


Slika 6.25. Računski dobivena promjena intenziteta ognute svjetlosti na dvije pukotine

6.3.4. Optička rešetka

Ako umjesto dvije pukotine ogib promatramo s više pukotina u jednakome eksperimentalnom uređaju kao prije, opažamo sljedeću pojavu: u području maksimuma svjetla pri ogibu na pukotini pojavljuju se novi maksimumi i minimumi svjetlosti zbog dodatnih interferencija zraka iz više pukotina. Ako je broj pukotina N velik, riječ je o optičkoj rešetci (slika 6.26). U tom je slučaju intenzitet svjetla opisan izrazom s dva faktora, poput izraza za ogib na dvije pukotine. U drugom je faktoru broj 2 u brojniku zamijenjen sa N , tj. brojem pukotina. Za intenzitet svjetla ognutog pod kutom α dobivamo izraz:

$$I(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi N d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)} \right]^2.$$



Slika 6.26. Optička rešetka. U žarišnoj ravnini leće promatra se rezultat ogiba i interferencije svjetlosti

Prvi faktor izraza određuje ogib na pukotini, a drugi modulaciju uzrokovanu interferencijom ognute svjetlosti iz svih pukotina. Svaki faktor posebno zadovoljava uvjete za dobivanje ekstremnih intenziteta uzimajući za kut α vrijednosti od 0 do $\pi/2$.

Prvi faktor,

$$\text{maksimum svjetla: } b \sin \alpha = \left(2k' + 1\right) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{i } \alpha = 0$$

$$\text{minimum svjetla: } b \sin \alpha = k' \lambda \quad \text{za } k' = 1, 2, 3, \dots,$$

gdje je b širina pukotine, sl. 6.26.

Drugi faktor,

$$\text{maksimum svjetla: } d \sin \alpha = k \lambda \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje je d udaljenost između pukotina, *konstanta rešetke*. Ti se maksimumi nazivaju *glavni maksimumi*.

Između dva glavna maksimuma nalazi se $N-1$ minimuma, tamnih mjesta, a između dva susjedna minimuma smješten je jedan pokrajni maksimum. Njegov je intenzitet samo malen dio intenziteta glavnog maksimuma i smanjuje se s povećanjem broja pukotina. Stoga za uvjet tame za drugi faktor izraza vrijedi:

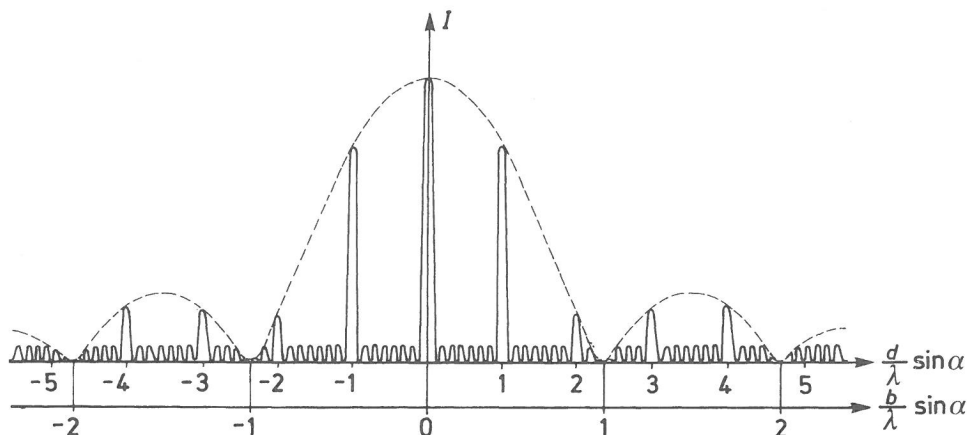
$$d \sin \alpha = \left(k + \frac{m}{N}\right) \lambda \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{i } m = 1, 2, 3, \dots, (N-1).$$

Primjer omjera maksimuma $I(\alpha)/I_0$ za slučaj $N = 8$ prikazani su slikom 6.27.

Prve optičke rešetke konstruirao je J. Fraunhofer (1787 – 1826) i o svojim pokusima izvijestio 1823. Rešetka je bila skup tankih usporednih žica napetih u istoj ravnini na jednakim razmacima. Jednolikost razmaka između žica Fraunhofer je postigao tako da je žice namotavao tako da su ulazile u zareze dvaju jednakih finih paralelnih učvršćenih vijaka. Visina nareza vijaka bila je jednaka razmaku susjednih žica, i to je bila konstanta d te optičke rešetke.

Prostori između žica činili su *pukotine* rešetke. Razmak između susjednih žica očito je bio i razmak između susjednih pukotina, kroz koje je mogla prolaziti svjetlost.



Slika 6.27. Promjena intenziteta svjetlosti u ogibu na osam pukotina

Na drugi je način Fraunhofer načinio optičku rešetku tako da je na površini ravne staklene pločice dijamantom urezao niz ravni, paralelnih poteza na jednolikim razmacima. Urezani potez za svjetlost bio je neproziran, a neoštećena površina stakla između dva susjedna poteza činila je pukotinu kroz koju je svjetlost mogla prolaziti. Pritom je razmak od sredine poteza do sredine susjednog poteza bio *konstanta rešetke*.

Mi ćemo razmotriti nekoliko optičkih rešetki. Prve dvije načinjene su tako da je šrafura nacrtana na bijelom papiru fotografirana kamerom tipa *Leica*. Prva je snimka umanjena toliko da na jednome milimetru ima 15 poteza, a na drugoj je snimci 30 poteza na milimetru. Veće smanjivanje slike ne vodi do nekog rezultata jer je zrno fotografskog filma pregrubo. Prema tome, konstanta tih rešetki iznosi

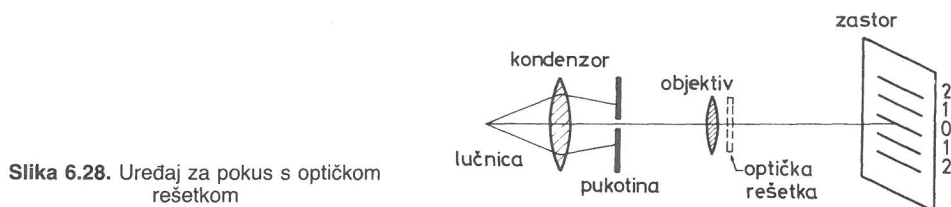
$$d_1 = \frac{1}{15} \text{ mm}, \quad \text{odnosno} \quad d_2 = \frac{1}{30} \text{ mm}.$$

Te su konstante još uvijek vrlo velike prema duljini vala vidljive svjetlosti, no i s tim se rešetkama lijepo vidi ogib i interferencija. Sljedeća optička rešetka koju ćemo razmotriti kopija je Rowlandove rešetke. Rowland je, naime, bio veliki majstor u pravljenju optičkih rešetki urezivanjem poteza na površini stakla. Uspio je načiniti dobre rešetke (koje po cijeloj širini imaju istu konstantu d i tako fine da je na njima bilo 500 do 800 crta na milimetru. Kopije tih rešetki prave se »štampanjem« pomoću originalne rešetke. Naša kopija Rowlandove rešetke ima 530 crta/mm, pa je prema tome njezina konstanta

$$d = \frac{1}{530} \text{ mm}.$$

Ta je konstanta oko triput veća od valne duljine svjetlosti. Kako ćemo malo kasnije pokazati, konstanta rešetke mora biti veća od valne duljine svjetlosti koja se njome ispituje. Električnom lučnicom jarko se rasvijetli pukotina čija je dužina okomita na ravninu crte. Da bismo skupili više svjetlosti na pukotinu, između lučnice i pukotine stavimo sabirnu leću (kondenzor). Iz pukotine izlazi slabo divergentan snop svjetlosti. Pomoću objektiva od pukotine načinimo sliku na udaljenom zastoru (sl. 6.28).

Ako tek iza objektiva umetnemo optičku rešetku tako da njezini potezi budu paralelni s duljinom pukotine u našem optičkom uređaju a ravnina rešetke okomita na središnju zraku, iznad i ispod bijele slike pukotine pojave se na zastoru paralelne slike pukotine u raznim bojama. S prvom rešetkom, sa $d = \frac{1}{15}$ mm, te su obojene slike guste, jedna uz drugu. Drugom rešetkom, sa $d = \frac{1}{30}$ mm, razmak je veći, pa se vidi da u obojenih slika susjednih središnjoj bijeloj slici modra slika pukotine leži bliže bijeloj slici nego što leži crvena. Boje se redaju od sredine dalje: ljubičasta, modra, zelena, žuta, crvena, pa zatim opet ljubičasta, modra, ... Prva grupa obojenih slika pukotine čini spektar prvog reda, zatim slijedi spektar drugog reda ... Ako je svjetlost izvora bijela, spektri drugoga, trećeg i viših redova isprepliću se i prekrivaju.



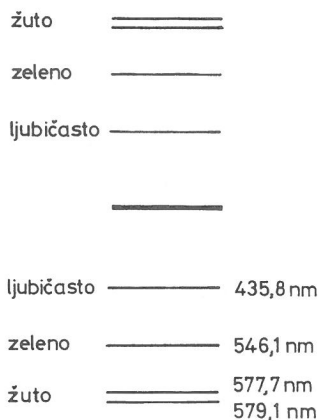
Slika 6.28. Uređaj za pokus s optičkom rešetkom

U pokusu s rešetkom poput Rowlandove vide se samo spektri prvog reda, jedan s jedne strane bijele slike pukotine (koja je spektar »nultog« reda), a drugi s druge njezine strane. U tim su spektrima boje toliko različito otklonjene da se spektar vidi kao dugačka obojena vrpca koja ima ljubičasti kraj prema sredini, a crveni najviše otklonjen. U njima se početak ljubičastog kraja spektra drugog reda samo nazire. U spektru drugog reda svjetlost je slaba i jako otklonjena od smjera središnje zrake. Spektra trećeg reda nema.

Ako lučnicu s ugljenim elektrodama (koja daje bijelo svjetlo) zamijenimo živinom lučnicom, na zastoru se pojave oštre slike pukotine u žutoj, zelenoj i ljubičastoj boji. Ako dodemo bliže zastoru i pažljivije promotrimo te slike pukotine (spektralne linije), opazit ćemo da je žuta linija dvostruka (sl. 6.29).

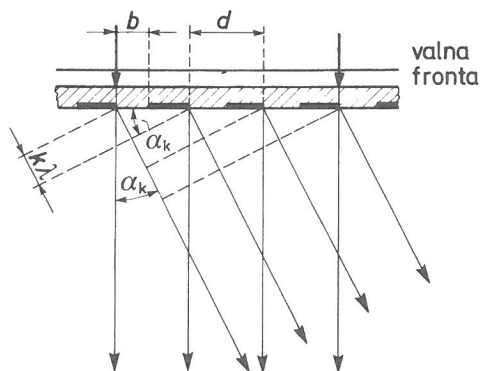
Optička se rešetka primjenjuje za spektralnu analizu tako da se ispituju glavni maksimumi. Kvaliteta rešetke određena je njezinom *moći razlučivanja* i *disperzijom spektra*. Pokušat ćemo rastumačiti takvo funkcioniranje optičke rešetke služeći se Huygensovom idejom o elementarnim valovima i Youngovim načelom o interferenciji.

Neka ravni val svjetlosti (snop paralelne svjetlosti) pada smjerom okomice na ravninu rešetke. Prema Huygensovu načelu, svaki prozirni dio rešetke između poteza izvor je elementarnog vala koji se širi u raznim smjerovima prema naprijed. Prema tome, tih elementarnih valova ima koliko i otvora na rešetki, dakle na tisuće ili više. Svi su ti valići istovrsni jer nastaju pobudom iz istoga upadnog vala. Oni su koherentni i mogu interferirati. (Objektiv ima zadatak da ih na dalekom zastoru skupi na isto mjesto i ondje će se vidjeti rezultat te interferencije.) Pogledajmo dobivanje glavnih maksimuma.



Slika 6.29. Spektral žive dobiven optičkom rešetkom

Svjetlost koja u elementarnim valovima putuje u prvotnom smjeru upadnoga ravnog vala od svakog otvora rešetke do zastora prevali jednaki put, pa se zato ti valovi međusobno pojačavaju bez obzira na to kolika je bila valna duljina upadne svjetlosti. U tom će, dakle, smjeru uvijek biti svjetlosti ili, drugim riječima, spektral *nultog reda* mješavina je svih svjetlosti upadnog vala.



Slika 6.30. Uz tumačenje glavnih maksimuma optičke rešetke

Promotrit ćemo što se događa sa svjetlošću koja u elementarnim valovima putuje u nekome kosom smjeru koji s prvotnim zatvara kut α . Ti valovi stižu na zastor različito dugim putovima. Iz slike 6.30 vidi se da je razlika u hodu između dva susjedna elementarna vala

$$d \sin \alpha,$$

gdje je d konstanta rešetke. Očito je da će se te svjetlosti međusobno pojačavati ako je ta razlika u hodu jednaka cijelom broju valne duljine, što je ispunjeno ako je kut $\alpha = \alpha_k$. Dakle, ako je

$$d \sin \alpha_k = k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Ako je $k = 0$, dobije se spektar nultog reda, za $k = 1$ spektar prvog reda itd. To vrijedi za odklon α_k na jednu i drugu stranu od smjera $\alpha = 0$. Pojava je simetrična s obzirom na spektar nultog reda. Budući da je $\sin \alpha$ uzlazna funkcija, većemu α pripada veći λ , ili, drugim riječima, crvena svjetlost ima veću valnu duljinu od žute, žuta od zelene, zelena od modre, a modra od ljubičaste.

Da bi se dobio spektar, mora biti $d > \lambda$, jer je $\sin \alpha < 1$.

Ako je ispunjen uvjet da dvije svjetlosti iz susjednih otvora rešetke zaostaju **točno** za cijeli broj k valnih duljina jedna iza druge, tada je zaostajanje prve svjetlosti iza one iz trećeg otvora $2k$ valnih duljina, a iza one iz četvrtog za $3k$ valnih duljina itd. Prema tome, sve se te svjetlosti na zastoru podupiru. Dakle, ako je za smjer α_k zaostajanje u hodu između svjetlosti koje izlaze iz dva susjedna otvora rešetke **točno** cijeli broj valnih duljina, na zastoru se interferencijom pojačavaju sve svjetlosti koje izlaze iz pojedinih otvora optičke rešetke.

Promotrit ćemo što se događa sa svjetlostima koje putuju u smjeru $(\alpha_k + \delta)$, vrlo bliskom smjeru α_k . (Kut δ je vrlo malen.) Svjetlost ćemo promatrati iz dva susjedna otvora rešetke, npr. prvoga i drugoga. Razlika u hodu između tih svjetlosti iznosi

$$k \lambda + \varepsilon = d \sin (\alpha_k + \delta)$$

Budući da se kut α povećao za δ porasla je i razlika u hodu za ε . Po pretpostavci, δ je maleno, pa je i ε maleno prema valnoj duljini λ . Te se svjetlosti opet pojačavaju, no ne tako dobro kao kad bi bilo ε jednako nuli.

Razlika u hodu između prve i treće zrake je dvostruka i iznosi

$$2(k \lambda + \varepsilon) = 2k \lambda + 2\varepsilon.$$

Raskorak u slaganju tih valova je veći i iznosi 2ε . Ti se valovi slabije pojačavaju. Možemo promatrati svjetlosti iz odnosa koji slijede u nizu, a optička ih rešetka ima na tisuće! Konačno razlika u hodu između svjetlosti iz prvoga i otvora $(K + 1)$ u smjeru $\alpha_k + \delta$ iznosi

$$K(k \lambda + \varepsilon) = K k \lambda + K \varepsilon.$$

Ako je

$$K \varepsilon = \frac{\lambda}{2},$$

tada se svjetlosti valne duljine λ koje izlaze iz prvog otvora i iz $(K + 1)$ -og međusobno ponište. Tada se i svjetlost iz drugog otvora poništi s onom iz otvora

iz $(K + 2)$ itd. U pregledu to za poništavanje izgleda ovako

1. otvor	i	$(K + 1)$	otvor
2. otvor	i	$(K + 2)$	otvor
$(K - 1)$ otvor	i	$(2K - 1)$	otvor
K otvor	i	$2K$	otvor.

Ako rešetka ima ukupno $N = 2K$ otvora, tada se u smjeru $\alpha_k + \delta$ sve svjetlosti koje izlaze iz pojedinih otvora međusobno ponište. Dakle, ako za svjetlost valne duljine λ u spektru k -tog reda za kut α_k imamo svjetlost, onda već za samo malo veći kut $\alpha_k + \gamma$ vidimo tamu.

Izračunat ćemo to povećanje kuta δ koje daje tamu. Prisjetimo se tih formula:

$$\begin{aligned} k \lambda &= d \sin \alpha_k \\ k \lambda + \varepsilon &= d \sin (\alpha_k + \delta) \\ K \varepsilon &= \frac{\lambda}{2} \\ N &= 2K. \end{aligned}$$

Ako sinus u drugoj formuli razvijamo i uzmemo u obzir da je δ maleno prema α_k , možemo pisati:

$$\begin{aligned} \sin (\alpha_k + \delta) &= \sin \alpha_k \cos \delta + \cos \alpha_k \sin \delta \\ &= \sin \alpha_k + \delta \cos \alpha_k. \end{aligned}$$

Prema tome je

$$\varepsilon = d \cdot \delta \cdot \cos \alpha_k$$

i dalje

$$\delta = \frac{\lambda}{N d \cos \alpha_k}.$$

Ako kutu α_k odgovara svijetla linija valne duljine λ , onda se uz povećanje (ili smanjenje) kuta α_k za veličinu δ svjetlosti valne duljine λ poništavaju. Prema tome, ako u upadnom valu postoji svjetlost valne duljine λ' koja je toliko dulja od λ da je za nju

$$\alpha_k' \geq \alpha_k + \delta,$$

tu ćemo drugu svjetlost vidjeti odvojeno od prve. Granica razlučivanja je za

$$\alpha_k' = \alpha_k + \delta.$$

Budući da je u tom slučaju

$$\begin{aligned} k \lambda &= d \sin \alpha_k, \\ k \lambda' &= d \sin (\alpha_k + \delta), \end{aligned}$$

slijedi:

$$k(\lambda' - \lambda) = d \delta \cos \alpha,$$

$$k(\lambda' - \lambda) = \frac{\lambda}{N}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{k N}.$$

Moć razlučivanja rešetke je to veća što je viši red k spektra u kojemu svjetlost motrimo i što je veći broj otvora rešetke N . Smatramo da je moć razlučivanja to veća što su postotne razlike u valnoj duljini koje možemo ustanoviti manje.

Na sličan se način može ocijeniti i moć razlučivanja nekih optičkih uređaja kojima se mogu rastaviti valovi svjetlosti čije se valne duljine vrlo neznatno razlikuju. Takvim se uređajima motri *fina struktura* pojedinih spektralnih linija. Tako u spektru dobivenom optičkom rešetkom zelena linija žive izgleda jednostavna, no pomoću interferencijskih uređaja kao što su *Michelsonove stube*, *Lummer-Gehrckeova ploča*, ili *Fabry-Perotov interferometar* može se pokazati struktura te linije. Ti se uređaji uglavnom koriste velikim k , tj. visokim redom spektra da bi imali veliku moć razlučivanja.

Važan podatak za rešetku jest i mjera koja daje *razvučenost* ili disperziju spektra. Ta se disperzija mjeri diferencijalnim kvocijentom $\frac{d\alpha}{d\lambda}$, koji govori kako brzo raste kut odklona α ako se valna duljina λ povećava. Diferenciranjem osnovne formule za optičku rešetku dobivamo

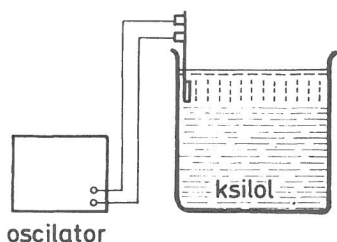
$$k d \lambda = d \cos \alpha \cdot d \alpha,$$

ili

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \alpha}.$$

Disperzija ili razvučenost spektra dobivenog optičkom rešetkom to je veća što je veći red spektra k , što je veći odklon α , i što je manja konstanta rešetke d . Disperziju ne treba miješati s moći razlučivanja rešetke.

Ultrazvučna rešetka. Prvi put su ultrazvučne valove koji se rasprostiru u kapljevinama iskoristili kao rešetku oko 1930. godine Debye i Sears te, neovisno o njima, Lucas i Buquard. U pokusu kao izvor valova služi kvarcna pločica pobuđena na titranje piezoelektričnim efektom u izmjeničnome električnom polju. Učvršćena je na jednom kraju staklene kivete ispunjene ksilolom (sl. 6.31).



Slika 6.31. Uređaj za dobivanje stojnih ultrazvučnih valova

Dimenzije kivete su takve da se u njoj uspostavi ultrazvučni stojni val kada je frekvencija titranja električnog polja bliska vlastitoj frekvenciji titranja kvarcne pločice. Kiveta se postavlja u optičku os uređaja za dobivanje spektra optičkom rešetkom. Zrake svjetlosti padaju okomito na pravac kojim putuje ultrazvučni val. Ultrazvučni val djeluje kao optička rešetka čija je konstanta jednaka duljini ultrazvučnog vala u ksilolu (nekoliko desetinki milimetra), pa na zastoru vidimo slabo razlučene spektre bijele svjetlosti.

Primjer:

Na optičku rešetku sa 400 zareza na milimetar pada normalno ravni val kontinuirane svjetlosti vidljivog područja. To se područje proteže od valne duljine $\lambda_{lj} = 400 \text{ nm}$ do valne duljine $\lambda_c = 700 \text{ nm}$. Treba odrediti širinu spektra drugog i trećeg reda (u stupnjevima) i dokazati da se ti spektri prekrivaju.

Formula za dobivanje glavnih maksimuma (6.10) kod optičke rešetke je $d \sin \alpha_k = k \lambda$. Konstanta rešetke je

$$d = \frac{1}{400 \text{ mm}^{-1}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Kut difrakcije za ljubičastu svjetlost u spektru drugog reda je

$$\sin \alpha_{z, lj} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}},$$

$$\alpha_{z, lj} = 18,66^\circ$$

Kut difrakcije za crvenu svjetlost u spektru drugog reda je

$$\sin \alpha_{z, c} = \frac{2 \cdot 700 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}},$$

$$\alpha_{z, c} = 34,06^\circ.$$

Širina spektra drugog reda je $\alpha_{z, c} - \alpha_{z, lj} = 34,06^\circ - 18,66^\circ = 15,40^\circ$.

Jednakim postupkom odredimo kut difrakcije ljubičaste i crvene svjetlosti u spektru trećeg reda. Kut difrakcije za ljubičastu svjetlost je $\alpha_{3, lj} = 28,69^\circ$, a za crvenu svjetlost $\alpha_{3, c} = 57,14^\circ$. Tako je širina spektra trećeg reda $57,14^\circ - 28,69^\circ = 28,45^\circ$. Budući da je kut difrakcije ljubičaste svjetlosti u spektru trećeg reda manji od kuta difrakcije crvenog svjetla u spektru drugog reda, tj.:

$$\alpha_{3, lj} < \alpha_{z, c},$$

spektri drugoga i trećega reda djelomice se prekrivaju i to ljubičaste svjetlosti trećeg reda prekriva spektar crvene svjetlosti drugog reda.

6.3.5. Holografija

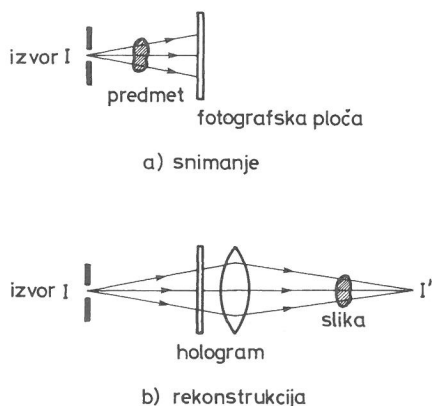
Slika predmeta kao što je slika dobivena pomoću leća fotografskog aparata odraz je zacrnjenja fotografske emulzije koja odgovara intenzitetu svjetlosti proporcionalnom amplitudi vala koji dolazi sa svijetlog predmeta. *Holografijom*

je, međutim, postignuto da promatrač u procesu rekonstrukcije vidi val kakav se rasprostire sa svijetlog predmeta, kao da predmet stoji ispred njega. To je moguće jer su holografskim procesom snimanja na fotografskoj ploči zabilježeni ne samo podaci o *amplitudi*, nego i podaci o *fazi vala*.

Holografija je metoda slikanja koju je prvi otkrio Dennis Gabor 1948. godine. Tada ju je nazvao metoda *dvostepenoga optičkog slikanja*. Pomoću nje nastojao je poboljšati moć razlučivanja elektronskog mikroskopa.

U prvom koraku svoje metode polupropusni je predmet pri slikanju rasvijetlio koherentnim elektronskim valom ili koherentnim izvorom svjetlosti. Veći dio vala prolazio je nesmetano, a dio vala se ogibao. Interferenciju tih dvaju dijelova vala snimio je na *fotografsku ploču*. Nakon prikladne obrade ploče u drugom je koraku ploču, *hologram*, postavio u prvotni položaj i rasvijetlio valom iz izvora svjetlosti ali tada predmet nije bio prisutan. Val koji se ogibao kroz snimljenu ploču sadržavao je informaciju o originalnom predmetu. Ona se mogla izdvojiti optičkim putem. Ako je snimanje obavljeno elektronskim valom, teorijski bi se trebao vidjeti kroz hologram predmet uvećan za iznos kvocijenta svjetlosne valne duljine prema elektronskoj ili za oko 1 000 000 puta.

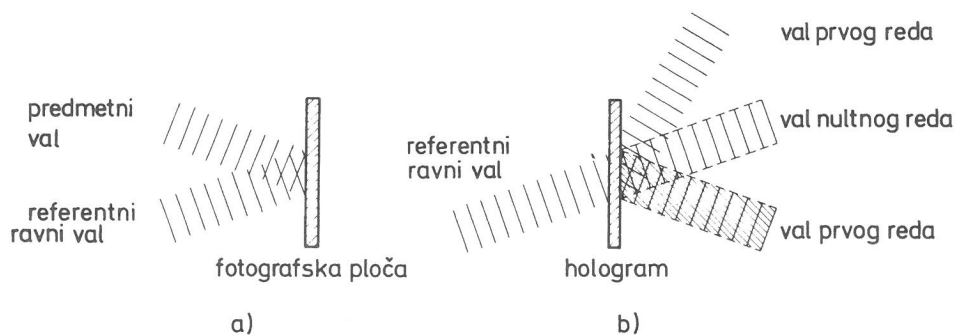
Na slikama (6.32a i b) prikazano je snimanje i rekonstrukcija holograma Gaborovom metodom.



Slika 6.32. Metoda dvostepenoga optičkog slikanja prema D. Gaboru

Holografija se nije primjenjivala do pojave lasera. Kad su se pojavili prvi laseri, Leith i Upatnicks prvi su ih upotrijebili u holografiji. Osim toga, uveli su i poboljšanu metodu snimanja i rekonstrukcije holograma. Oni su 1962. godine uveli metodu *izvanosne holografije*. Snimanje izvanosnog holograma najjednostavnije možemo opisati ako pretpostavimo da je svijetli predmet u vrlo velikoj daljini. U tom je slučaju val svjetlosti koji se širi s predmeta ravni val, a usmjeren je tako da na fotografsku ploču pada pod kutom različitim od 0° , kako je naznačeno na slici 6.33. To je *predmetni val*. Pod kutom prema predmetnom valu na ploču pada i *referentni ravni val* dobiven odvajanjem iz vala kojim se rasvjetljuje predmet. Uz uvjet da su oba ta vala koherentna, a to je ispunjeno, njihovim će se slaganjem pojaviti pruge interferencije na fotografskoj emulziji.

Na fotografskoj se ploči može dobiti velik broj zapisa na jednom milimetru i njihov broj je ograničen veličinom zrna emulzije.



Slika 6.33. Hologram pomoću ravnog vala: a) snimanje holograma, b) rekonstrukcija holograma

Zapisane su pruge naizmjenično prozirne i neprozirne i imaju oblik rešetke. Kad se snimljeni hologram rasvijetli *jednakim ravnim referentnim valom* koji pada na nj pod jednakim kutom kao i pri snimanju, svjetlo koje prođe kroz hologram djelomično prolazi bez ogiba, kao val nultog reda, a djelomično se ogiba i formira valove prvog reda (slika 6.33b). Viši se redovi ne vide. Jedan se val prvog reda rasprostire u istom smjeru kao i val predmeta. Zato promatrač koji gleda prema hologramu približno u tom smjeru ima dojam da gleda na svijetli predmet kroz okvir holograma. Tom su metodom sva tri vala dobro odvojena, a val predmeta rasprostire se samostalno. U prvoj, Gaborovoj metodi tri opisana vala nisu bila razlučena i to je stvaralo mnogo muke.

U matematičkoj obradi procesa snimanja i rekonstrukcije holograma elongacije vala svjetlosti prikazane su u općenitom obliku:

$$E = a(x, y, z) \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} + \Phi(x, y, z) \right], \quad (6.11)$$

gdje je $a(x, y, z)$ amplituda, a $\Phi(x, y, z)$ faza vala. U primjeru ravnoga vala amplituda je stalna, a faza je linearna funkcija od (x, y, z) . Ako se val širi samo po osi x , faza je $\frac{2\pi}{\lambda}x$.

Prema napisanom izrazu (6.11) elongacije vala predmeta u ravnini holograma pokazane su u izrazu:

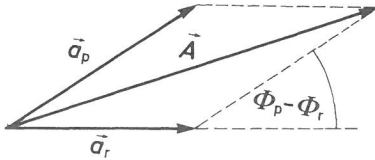
$$E_p = a_p(y, z) \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} + \Phi_p(y, z) \right],$$

a elongacije referentnog vala u istoj ravnini jesu:

$$E_r = a_r(y, z) \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} + \Phi_r(y, z) \right],$$

Točke s koordinatama y i z leže u ravnini holograma. U toj je ravnini intenzitet svjetla proporcionalan kvadratu rezultirajuće amplitude A , tj. prema priloženoj slici 6.34 s rotirajućim vektorima, dolazimo do izraza:

$$I(y, z) \sim a_p^2 + a_r^2 + 2a_p a_r \cos 2\pi (\Phi_p - \Phi_r).$$

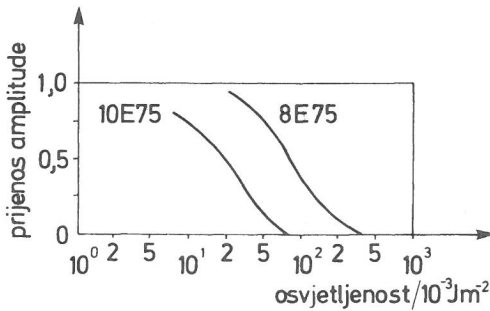


Slika 6.34. Rezultirajuća amplituda vala svjetlosti određena rotirajućim vektorima

Veličine a_p^2 i a_r^2 proporcionalne su intenzitetu vala predmeta i referentnog vala, a treći pribrojnik na desnoj strani izraza potječe od slaganja valova i određuje pruge interferencije.

Pri snimanju holograma intenzitet svjetla $I(y, z)$ zacrnjuje fotografsku ploču. Osobina fotografske ploče jest veličina nazvana *prijenos amplitude*, tj. omjer amplitude svjetla prenesene hologramom prema amplitudi upadnog vala. Na priloženoj slici 6.35, vidi se npr. ovisnost prijenosa amplitude o osvjetljenju za ploče Agfa-Gevaert za valnu duljinu od 633 nm He-Ne lasera. Neka je približno da je prijenos amplitude t proporcionalan upadnom intenzitetu I , tj.:

$$t(y, z) \sim I(y, z).$$



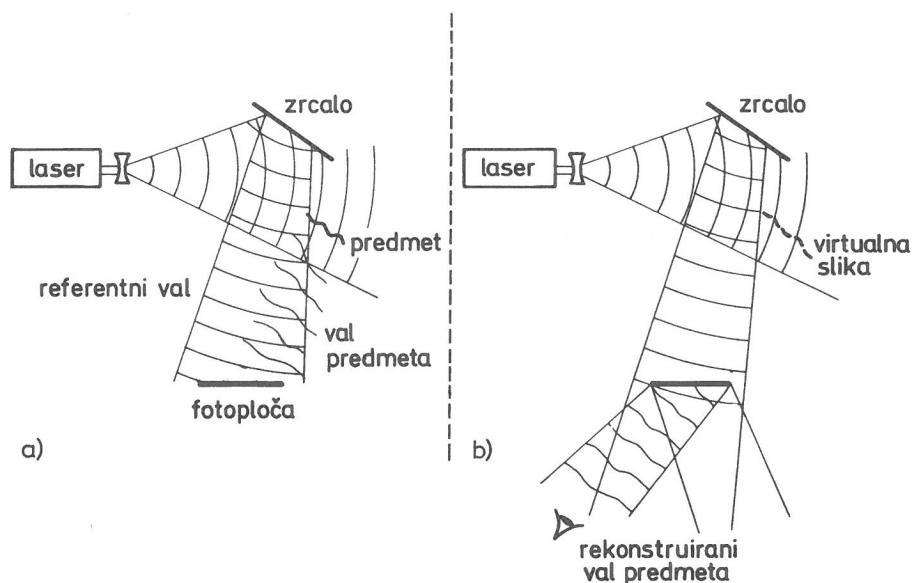
Slika 6.35. Ovisnost prijenosa amplitude o osvjetljenosti za fotografske ploče Agfa-Gevaert pri valnoj duljini od 633 nm He-Ne-Lasera

Osvjetljena se fotografska ploča na propisani način razvije i pri rekonstrukciji holograma postavi na isto mjesto kao pri snimanju pruga interferencija. Zatim se ponovno rasvijetli jednakim referentnim valom. Tada je iza holograma elongacija vala svjetlosti proporcionalna umnošku prijenosa amplitude i elongacije referentnog vala, tj.:

$$E(y, z, t) = t(y, z) E_r(y, z, t) \\ \sim a_r (a_p^2 + a_r^2) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi_r \right) + a_p a_r^2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi_p \right) + a_p a_r^2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \Phi_p + 2\Phi_r \right). \quad (6.12)$$

Prvi član na desnoj strani izraza (6.12) opisuje referentni val pomnožen faktorom ($a_p^2 + a_r^2$). Drugi član je val predmeta pomnožen faktorom a_r^2 , a treći član se naziva konjugirani val a prenosi »sliku blizanca«. Drugi član izraza pokazuje da se pri rekonstrukciji holograma dobiva val predmeta koji se razlikuje od originalnog vala za faktor a_r^2 . Metodom izvanosne holografije on se izdvaja od ostala dva vala.

Na sljedeće dvije slike 6.36 pokazana je uobičajena shema uređaja za snimanje i rekonstrukciju holograma. Svjetlo se iza leće postavljene ispred lasera dijeli u dva snopa. Jedan snop služi za dobivanje referentnog vala, a drugi rasvjetljava predmet s kojeg se zatim rasprostire predmetni val. Na fotografskoj se ploči snimaju pruge interferencije. Rekonstrukcija je pokazana na slici b.



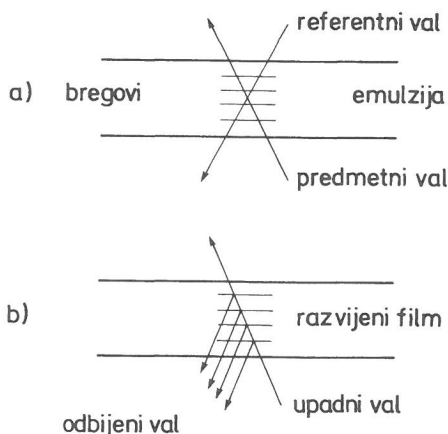
Slika 6.36. a) Uobičajena shema uređaja za snimanje, b) rekonstrukcija holograma

Kolor-holografija dobiva se posebnim postupkom pomoću crno-bijelog filma. Hologram se snima sa tri primarne boje. Obično su to modra, zelena i crvena, što je dovoljno da ljudsko oko dobije potpuni dojam obojenosti predmeta. Pri snimanju tog holograma referentni i predmetni valovi padaju sa suprotnih strana na emulziju filma (sl. 6.37a) i valovi u emulziji tvore stojne valove. Bregovi stojnog vala smješteni su na razmacima pola valne duljine i formiraju slojeve (nakupine) zrnaca emulzije.

Kada se razvijena ploča-hologram – osvjetli bijelom svjetlosti (sl. 6.37b) samo valne duljine kojima odgovara razmak snimljenih slojeva daju konstruktivnu interferenciju i one su reflektirane. Sa tri sloja reflektirane su slike triju boja.

Važno je istaknuti da pri rekonstrukciji holograma nije potrebno lasersko svjetlo. Nekoherentno bijelo svjetlo je dovoljno jer hologram refleksijom izdvaja valne duljine iz kontinuiranoga upadnog spektra. Takvi se hologrami mogu

montirati u okvire i objesiti na zid poput slika. Iako izdaleka izgledaju kao sive plohe, kada promatrač odabere pravi položaj prema bijelom svjetlu, snimljenu scenu vidi u tri dimenzije udubljenu u zidu.



Slika 6.37. Uz kolor-holografiju: a) snimanje, b) rekonstrukcija holograma

Holografija ima široku primjenu u znanosti, tehnici i medicini. Ona ne mora biti vezana isključivo za valove svjetlosti. Tako se hologram formira pomoću radarskih ili ultrazvučnih valova, a rekonstruira vidljivom svjetlosti, pa se predmeti mogu direktno promatrati.

Valja napomenuti da je dobro zazvijena holografška interferometrija. Osniva se na sljedećemu: nakon snimanja holograma predmet ostaje na istome mjestu, ali doživi deformaciju tako da mu se dimenzije neznatno promijene. Ako tada razvijenu fotografsku ploču, hologram, postavimo u prvotni položaj i obasjamo istim izvorom svjetlosti koji se nalazi u istom položaju kao pri snimanju holograma, možemo zamijetiti pruge interferencije na predmetu koji promatramo kroz hologram. To je posljedica interferencije vala svjetlosti sa stvarnog predmeta i rekonstruiranog vala predmeta. (Na dijapozitivu pokazujemo pruge interferencije na metalnom predmetu snimljenom pri sobnoj temperaturi, a poslije zagrijanom za nekoliko stupnjeva i promatranom u svjetlu argonskog lasera.) Interferencijska je hologragija postala standardna u mehaničkim ispitivanjima i analizi vibracija.

6.4. Brzina svjetlosti

6.4.1. Brzina svjetlosti u valnoj teoriji

Galileo Galilei pokušao je izmjeriti brzinu svjetlosti tako da je u noći postavio dva opažača na velikom razmaku. Svaki je od njih imao upaljenu svjetiljku. Čim je jedan opažač primijetio da je onaj drugi otkrio svjetiljku, i on je morao otkriti svoju.

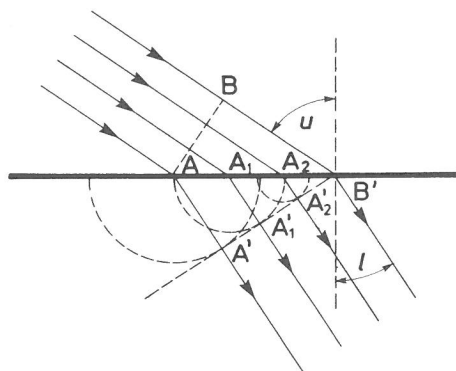
Prvi je opažač morao iz vremenskog intervala od trenutka kad je otkrio svoju

svjetiljku do opažanja svjetla od drugoga opažača izračunati brzinu svjetlosti pod uvjetom da mu je razmak među njima poznat. Očito je da se brzina svjetlosti ne može tako izmjeriti.

Prvi je brzinu svjetlosti odredio Olaf Römer (1644–1710) iz astronomskih opažanja, a svoj je rezultat priopćio Pariškoj akademiji 1675. god. Pedeset godina kasnije (1725) J. Bradley je izmjerio brzinu svjetlosti drukčijom astronomskom metodom. Nakon toga se proširilo mišljenje da brzina svjetlosti ipak nije beskonačno velika.

Huygens je zamišljao da se valovi svjetlosti u različitim sredstvima šire različito brzo, i da je to razlog što se svjetlost pri prijelazu iz jednog sredstva u drugo lomi. Prema tome za valnu teoriju **konačna** brzina svjetlosti ima osnovno značenje.

Sada ćemo izložiti kako valna teorija povezuje lom svjetlosti s brzinom rasprostiranja svjetlosti. Neka na granicu dvaju prozirnih sredstva pada paralelan snop svjetlosti smjerom koji s okomicom na granicu zatvara kut u sl. 6.38. Fronta vala je ravna i okomita na smjer rasprostiranja valova. Nacrtajmo frontu $\overline{AB}$ koja je upravo stigla do granice. U svim točkama fronte stanje titranja je jednako, na primjer u svim je točkama fronte »brijeg« vala.



Slika 6.38. Lom svjetlosti

Pošto je fronta vala stigla do granice prozirnih sredstava, ona počinje prelaziti u drugo sredstvo. Elementarni se val počinje širiti iz točke A na granici. Malo kasnije počne se širiti iz točke A_1 , kad u nju stigne fronta, pa nakon toga iz A_2 , te konačno iz B' , pošto fronta kroz prvo sredstvo prevali put $\overline{BB'}$.

Za isto vrijeme t za koje je svjetlost trebala da prevali put $\overline{BB'}$ proširio se u drugom sredstvu elementarni val od A do A' . Elementarni val iz A_1 stigao je do A_1' itd., pa se u drugom sredstvu formirala fronta vala $\overline{A'B'}$. Za situaciju na slici pretpostavili smo da se svjetlost u drugom sredstvu širi polaganije nego u prvome. Naime, putovi $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ prevaljeni su za isto vrijeme t . Budući da je

$$\overline{BB'} > \overline{AA'},$$

pošto te puteve podijelimo vremenom t u kojem su prevaljeni, slijedi

$$v_1 > v_2,$$

gdje je v_1 brzina valova svjetlosti u prvom sredstvu, a v_2 u drugome.

Prema valnoj teoriji svjetlosti, pri prijelazu svjetlosti iz jednoga prozirnog sredstva u drugo smjer rasprostiranja lomi se prema okomici ako je valna brzina u drugom sredstvu manja nego u prvome.

Iz slike dalje slijedi

$$\sin u = \overline{BB'} : \overline{AB'}$$

$$\sin l = \overline{AA'} : \overline{AB'}$$

Iz toga dijeljenjem dobivamo

$$\sin u : \sin l = \overline{BB'} : \overline{AA'}$$

$$= v_1 : v_2.$$

Prema Snellovu zakonu imamo

$$\sin u : \sin l = n_2 : n_1.$$

Vidimo, dakle, da su valne brzine svjetlosti u prozirnim sredstvima obrnuto razmjerne indeksima loma

$$v_1 : v_2 = n_2 : n_1.$$

Označimo li sa c brzinu svjetlosti u vakuumu, općenito vrijedi:

$$c : v = n : 1.$$

Odatle slijedi:

$$v = \frac{c}{n}$$

pri čemu je v brzina svjetlosti u prozirnem sredstvu indeksa loma n .

6.4.2. Mjerenje brzine svjetlosti

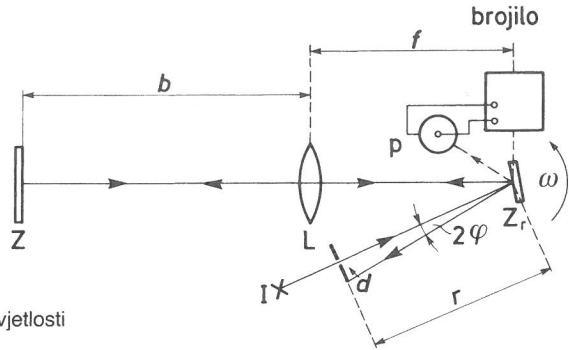
Iz tumačenja loma svjetlosti, kako ga daje valna teorija, slijedi da bi mjerenje brzine svjetlosti u raznim sredstvima moglo potvrditi te zaključke. Prvo mjerenje brzine svjetlosti u zraku obavio je H. Fizeau (1819 – 1896) godine 1849. Njegov rezultat za tu brzinu $\left(313\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ naveo je Maxwella da iznese hipotezu da je svjetlost *elektromagnetski val*.

Drugom je metodom brzinu svjetlosti izmjerio L. Foucault (1819 – 1868) godine 1862. To je metoda rotirajućeg zrcala.

Evo kako može biti složen školski uređaj za Foucaultovu metodu (sl 6.39). Nije precizan ali ipak omogućuje mjerenje te ogromne brzine s točnošću $\pm 3,3\%$.

Izvorom svjetlosti I rasvijetljena je pukotina iz koje svjetlost pada na malo zrcalo učvršćeno na osovini vrlo brzog elektromotora. Os rotacije okomita je na

ravninu crtnje. Kad zrcalo rotira, smjer odbijene zrake vrti se u ravnini crtnje. Najprije neka zrcalo Z_r miruje u takvom položaju da na njemu odbijena svjetlost pada na sabirnu leću L (koja ima veliku žarišnu daljinu, oko 5 m). Ta leća smještena je tako da se zrcalo Z_r nalazi u njezinu žarištu. Dakle, daljina od L do Z_r jednaka je žarišnoj daljini f . Pukotina je smještena u daljini r od zrcala Z_r tako da leća L načini od pukotine oštru sliku na ravnom zrcalu Z . Zrake koje se na tom zrcalu odbiju vraćaju se same u sebe i dok zrcalo Z_r miruje ponovo padaju na pukotinu iz koje su izišle.



Slika 6.39. Uređaj za mjerenje brzine svjetlosti Foucaultovom metodom

Ako tada stavimo zrcalo Z_r u vrtnju, zraka svjetlosti koja se na njemu odbila, prošla kroz leću L i odbila se na ravnom zrcalu Z , na svom povratku ne nađe više na zrcalo Z_r u istom položaju. Svjetlosti je bilo potrebno vrijeme t da prevali put $(f + b)$ onamo i natrag, dakle dvaput. U tom vremenu t rotirajuće se zrcalo zakrenulo za kut φ , pa se prema tome vraćena zraka odbije na njemu u smjer koji s pravcem upadne zrake iz pukotine čini kut 2φ . Zato je slika pukotine za d pomaknuta od same pukotine. Iz toga je očito da je brzina svjetlosti

$$v = \frac{2(f + b)}{t}. \quad (6.13)$$

Ako je ω kutna brzina kojom se Z_r vrti, tada je

$$\varphi = \omega t \quad (6.14)$$

$$2\varphi = \frac{d}{r}. \quad (6.15)$$

Iz formula (6.14) i (6.15) slijedi

$$\omega t = \frac{d}{2r},$$

te, konačno

$$v = \frac{4(f + b) r \omega}{d}. \quad (6.16)$$

U toj formuli sve veličine na desnoj strani možemo mjeriti, pa je prema tome određena i brzina svjetlosti v . Daljine $(f + b)$ i r izmjerimo čeličnom vrpcom, a pomak d motreći kroz lupu milimetarsko mjerilo.

Kako se mjeri kutnu brzinu ω ? Za tu svrhu služi fotostanica P i brojilo električnih impulsa. Kad zrcalo Z_r dođe u pogodan položaj, zraka svjetlosti padne na fotostanicu P i brojilo registrira jedan impuls. Budući da je zrcalo s obje strane posrebreno, u svakom okretu zrcala na fotostanicu padnu dva bljeska svjetlosti. Tako iz mjernog podatka za vrijeme T u kojemu je registrirano N bljeskova izračunamo **kutnu** brzinu ω pomoću izraza

$$\omega = 2\pi \frac{N}{2T}.$$

Brojilo treba biti takvo, da se broj bljeskova N može planirati i zadati, da brojilo pokrene i zaustavi zapornu uru koja pokazuje pripadno vrijeme T . Zada li se da je $N = 10^4$, računat ćemo prema formuli za kutnu brzinu

$$\omega = \frac{10^4 \pi}{T},$$

pa će konačna formula za brzinu svjetlosti tako podešene aparature biti

$$v = \frac{4\pi \cdot 10^4 \cdot r(f+b)}{d \cdot T}. \quad (6.17)$$

Primjer

Neka su naprimjer, izmjerene ove vrijednosti:

$$r = 4,77 \text{ m}$$

$$f + b = 14,13 \text{ m}$$

$$d = 2,9 \text{ mm}$$

$$T = 9,5 \text{ s}.$$

Uvrstimo li ih u posljednju formulu (6.17) dobit ćemo brzinu svjetlosti:

$$v = 3,07 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

U takvome mjerenju najnesigurniji podatak je pomak d . Pogrešku procjenjujemo na $\pm 0,1 \text{ mm}$, što je 3%. Greška u mjerenju daljine r odnosno $(f+b)$ neka iznosi $\pm 1 \text{ cm}$, to za r daje grešku 0,2%, a za $(f+b)$ grešku 0,07%. Pogreška u mjerenju vremena kreće se oko $\pm 0,05 \text{ s}$, a to je 0,05%. Budući da se te veličine u izrazu za brzinu v dolaze u prvoj potenciji, maksimalna se greška za v dobije zbrajanjem tih pojedinih grešaka

$$p = 3\% + 0,2\% + 0,07\% + 0,05\%,$$

$$p = 3,3\%.$$

Rezultat mjerenja je

$$v = (3,07 \pm 0,10) \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Metodu rotirajućeg zrcala je usavršio A. A. Michelson (1852 – 1931). U njegovim je mjerenjima staza koju je svjetlost trebala dvaput prevaliti bila duga

35,4 km. Michelson je dobio rezultat preračunat na zrakoprazni prostor

$$c = (299796 \pm 4) \text{ km/s.}$$

Michelsonova mjerenja, zajedno s mjerenjima ostalih za brzinu svjetlosti u vakuumu daju vrijednost

$$c = (299792,5 \pm 0,3) \text{ km/s.}$$

U posljednjih petnaestak godina obavljena su vrlo točna mjerenja brzine svjetlosti pomoću lasera. Uz utvrđenu valnu duljinu i frekvenciju brzina svjetlosti dobiva se kao njihov umnožak, tj. $c = \lambda f$. Tako je 1974. godine preporučena vrijednost

$$c = (299\,792\,458 \pm 1) \text{ m/s.}$$

Na 17. zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere u Parizu u listopadu 1984. dana je nova definicija metra koja glasi: metar je duljina puta što ga svjetlost prevari u vakuumu za vrijeme jednog 299 792 458-og dijela sekunde.

Budući da je put l što ga svjetlost prijeđe u vakuumu za vrijeme t iskazan formulom:

$$l = c t,$$

uvrštavanjem vrijednosti iz definicije metra slijedi:

$$m = c \cdot \frac{1 \text{ s}}{299\,792\,458}.$$

Odatle dobivamo:

$$c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}.$$

Zaključujemo da je brojčana vrijednost ili iznos brzine svjetlosti prema definiciji matematički točna. Proizlazi da netočnost nije rezultat nepoznavanja iznosa prirodne konstante c nego nesigurnosti mjerenja metra i sekunde kojima se ona iskazuje.

To ima sljedeće posljedice koje usput spominjemo. Poznati Maxwelllov izraz glasi:

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1,$$

gdje je μ_0 apsolutna permeabilnost vakuuma, a ε_0 apsolutna dielektrična konstanta vakuuma. Pri definiranju mjerne jedinice ampera u SI-mjernim jedinicama uzima se $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$, tj. brojčana vrijednost od μ_0 matematički je točna. Kako je i brojčana vrijednost tj. iznos brzine svjetlosti matematički točna, to slijedi nakon odluke iz 1984. godine da je i iznos ε_0 također matematički točan $((8,854\,187\,817 \dots) \cdot 10^{-12})$.

A što je s mjerenjem brzine svjetlosti u nekom sredstvu?

Brzinu svjetlosti u vodi izmjerio je Foucault. Ustanovio da ona iznosi tri četvrtine brzine svjetlosti u zraku. Taj je rezultat protumačeni kao daljnja potvrda valne teorije jer je indeks loma vode

$$n \doteq \frac{4}{3}.$$

Michelson je Foucaultovom metodom izmjerio brzinu svjetlosti u sumpor-ugljiku, CS_2 , kapljevini velikog indeksa loma $n = 1,64$. Michelsonovo je mjerenje kao rezultat za brzinu svjetlosti u sumpor-ugljiku dalo iznenađujući rezultat:

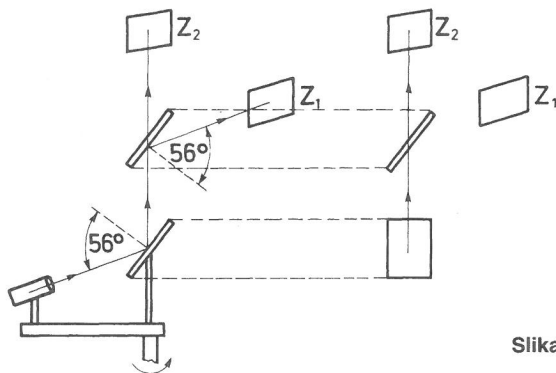
$$v = \frac{c}{1,77}.$$

Razliku između 1,64 i 1,77 protumačio je Lord Rayleigh (J. W. Strutt) (1842–1919) teorijom o brzini valne grupe (vidi 4.9).

6.5. Polarizacija valova svjetlosti

6.5.1. Polarizacija svjetlosti refleksijom

Promatrane pojave interferencije i ogiba svjetlosti pokazuju valna obilježja svjetlosti. Shema uređaja pokazana na slici 6.40 omogućuje promatranje snopa svjetlosti koji se reflektira na staklenoj ploči.



Slika 6.40. Uređaj za promatranje polarizacije svjetlosti refleksijom

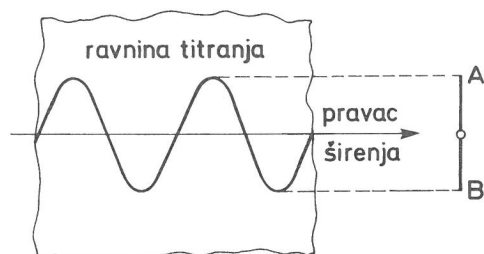
Motka se može okretati oko vertikalne osi. U toj osi leži učvršćenje ravne ploče od krunskog stakla s donje strane zatamnjena. Snop paralelnih zraka svjetlosti iz kolimatora svjetiljke pada na ploču pod kutom približno 56° . Snop se reflektira pod jednakim kutom u os vrtnje motke. Iznad staklene ploče, kako se vidi na slici, učvršćena je druga, s njom paralelna staklena ploča. Prozirna je, pa se snop svjetlosti koji pada na tu ploču pod jednakim upadnim kutom kao i na prvu djelomično reflektira, a djelomično prolazi kroz ploču. Reflektirani i prolazni snop svjetlosti zapažamo kao svijetlu mrlju na zastoru Z_1 odnosno Z_2 .

Zakreće li se motka oko vertikalne osi, intenzitet svjetla na zastoru **1** slabi, a na zastoru Z_2 nema promjene. Kad ukupni zakret iznosi 90° (druga slika), svjetlo se uopće ne reflektira s gornje staklene ploče i na zastoru **1** je tama. Daljnjim zakretanjem intenzitet svjetla na zastoru ponovno se pojačava i dosegne svoju

maksimalnu vrijednost pri ukupnom zakretu 180° . Tako se manifestira polarizacija svjetlosti. Naime, okretanjem donjeg dijela aparata, okrećemo zraku odbijenu vertikalno prema gore. Budući da se ona reflektira od gornjeg zrcala različito, ovisno o zakretu, slijedi da ta zraka nije poput okruglog štapa nego više poput pljosnate vrpce.

Kako to možemo protumačiti?

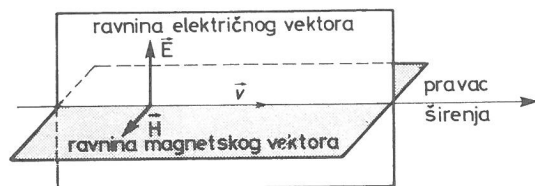
Transverzalni valovi mogu biti *polarizirani*, a to znači da možemo postići da se njihovo titranje zbiva samo u jednoj ravnini (sl. 6.41). U toj je ravnini i pravac



Slika 6.41. Širenje polariziranog vala

širenja vala. Budući da tako polarizirani val titra u samo jednoj ravnini taj se val naziva i *ravno* polarizirani val. Presječemo li pravac širenja vala okomitom ravninom, titranje ravno polariziranog vala projicira se u dužinu AB, čija orijentacija ne ovisi o mjestu presjeka i času promatranja. Zato se ravno polarizirani val zove i *linearno polarizirani val*. Longitudinalni se valovi ne mogu polarizirati. Tako se pokusom dokazuje da je svjetlosni val koji se odbio na staklenoj ploči polariziran. Naime, kad se motka okreće, okreće se odbijena zraka oko vertikalnog pravca u kojemu se nakon odbijanja širi. Kad bi svjetlosni val bio longitudinalan, to ne bi utjecalo na odbijanje zrake na gornjoj ploči. Međutim, pokusom se pokazuje da utječe. Ako *ravnina refleksije* donje ploče s ravninom refleksije gornje ploče čini kut $\pi/2$, na gornjoj ploči nema odbijene svjetlosti; postoji samo svjetlost koja kroz nju prolazi.

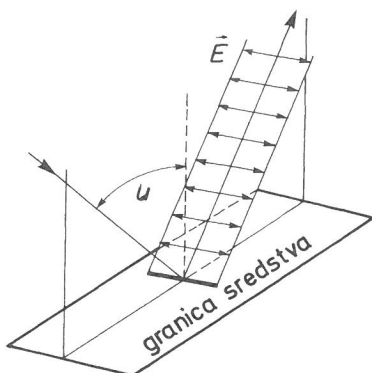
Zaključimo: svjetlost koja se reflektirala na donjoj ploči pokazuje da je polarizirana. Prema tome, svjetlosni su valovi **transverzalni**.



Slika 6.42. Ravnina titranja vektora E i H elektromagnetskog vala u izolatoru

Prema Maxwellovoj elektromagnetskoj teoriji valovi električnoga i magnetskog polja u izolatoru jesu transverzalni. Pritom električni vektor $\vec{E}$ titra u ravnini okomitoj na ravninu u kojoj titra magnetski vektor $\vec{H}$. Obje te ravnine sadrže pravac širenja elektromagnetskog vala (Sl. 6.42).

Budući da svjetlost smatramo elektromagnetskim valom, opravdano se pitati kako je u linearno polariziranoj svjetlosti orijentiran električni odnosno magnetski vektor. Nacrtajmo granicu između zraka i stakla (Sl. 6.43) (ili nekoga drugog sredstva) u perspektivi. Na upadnome mjestu podignimo okomicu. Neka, upadna zraka dolazi neposredno iz izvora. To je tzv. prirodna svjetlost. Neka je odbijena svjetlost linearno polarizirana. Pokusi s takvom svjetlosti pokazali su (J. Klemenčić, 1853 – 1901) da električni vektor u njoj titra *okomito* na ravninu refleksije.



Slika 6.43. Ravnina titranja vektora električnog polja linearno polarizirane svjetlosti dobivene refleksijom prirodne upadne svjetlosti

U linearno polariziranoj zraci dobivenoj refleksijom ravnina refleksije naziva se i *ravnina polarizacije*. Prema tome, u takvoj zraci električni vektor titra okomito na ravninu polarizacije.

Da bi u odbijenoj zraci električni vektor titrao samo okomito na ravninu refleksije, mora biti zadovoljen uvjet *Brewsterova zakona*. Tada je, naime, odbijena zraka potpuno polarizirana. D. Brewster (1781 – 1868) mjerio je kutove polarizacije za velik broj prozirnih sredstava i ustanovio sljedeću zakonitost.

Monokromatska zraka svjetlosti koja se širi sredstvom indeksa loma n_1 pada na granicu prozirnog sredstva indeksa loma n_2 pod kutom u . Ona se djelomično lomi pod kutom l , a djelomično se reflektira. Reflektirana je zraka potpuno linearno polarizirana ako vrijedi uvjet da je suma kutova

$$u + l = 90^\circ,$$

pa, primjenom zakona loma u Snellovu obliku, dobivamo:

$$n_1 \sin u = n_2 \cos u,$$

odnosno

$$\operatorname{tg} u = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.13)$$

Napisani je izraz *Brewsterov zakon* za određivanje kuta polarizacije. Taj kut ovisi o valnoj duljini upadne svjetlosti. Stoga pri upotrebi bijele svjetlosti nije moguće postići potpunu polarizaciju. Kut polarizacije naprimjer krunskog stakla, indeksa loma 1,5076, za natrijevu D-liniju iznosi $56^\circ 26'$.

Polarizirana odbijena zraka ima svojstvo da vektor električnog polja titra okomito na ravninu refleksije. U pokusu o polarizaciji svjetlosti refleksijom nećemo dobiti reflektiranu zraku s druge ploče ako ravnine refleksije tih ploča čine kut 90° . Svijetla mrlja na zastoru Z_1 bit će najintenzivnija ako se ravnine refleksije obaju stakala podudaraju.

Intenzitet svjetla na zastoru Z_1 mijenja se prema Malusovu zakonu

$$I_\varphi = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (6.14)$$

gdje je kut φ između ravnina refleksije prve i druge ploče, a I_0 intenzitet zrake odbijene na drugoj ploči kad je $\varphi = 0$. Ploča na kojoj se događa prva refleksija zove se polarizator, a druga je ploča analizator.

Polarizaciju refleksijom otkrio je Malus (1775 – 1812), kad je kroz dvolomac motrio prozore jedne palače u Parizu obasjane večernjim suncem (1808).

Primjer

Koliki kut mora zatvoriti zraka svjetlosti s mirnom površinom vode da bi nakon refleksije bila potpuno linearно polarizirana?

Upadni kut u zrake, koja je nakon refleksije potpuno linearно polarizirana određen je Brewstonovim zakonom (6.13):

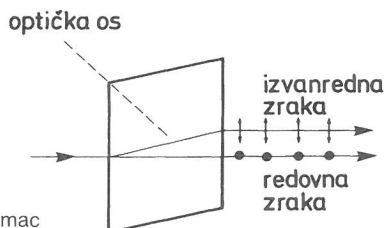
$$u = \arctg n = \arctg 1,33 = 56,12^\circ.$$

Kut što ga zraka zatvara s površinom vode je komplementaran upadnom kutu i iznosi

$$90^\circ - u = 90^\circ - 56,12^\circ = 33,88^\circ.$$

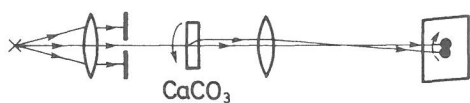
6.5.2. Polarizacija svjetlosti prolaskom kroz kristale

U radu od 1669. godine E. Bartholinus (1625 – 1698) opisao je prolaz svjetla kroz kristal kalcita, kalcij-karbonata (CaCO_3). Opazio je da se svjetlost pri prolazu kroz taj kristal lomi u dvije zasebne zrake. Kasnije je ustanovljeno da to svojstvo dvoloma imaju mnogi kristali i neke prozirne supstancije. Na slici 6.44 vidimo zraku svjetlosti koja normalno pada na površinu kristala (kristalizira u obliku romboedra). Kad zraka svjetlosti ulazi u kalcit, cijepa se u dvije zrake: **redovnu**, koja se lomi po Snellovu zakonu i **izvanrednu**, za koju vrijedi drugi zakon.



Slika 6.44. Prolaz svjetla kroz kristal kalcita, islandski dvolomac

Paralelni snop iz kondenzora ograničen je zaslonom okruglog otvora. Taj svijetli okrugli otvor je predmet na optičkoj osi leće kojom dobivamo oštru sliku otvora na zastoru. Ako na put zraka svjetlosti stavimo kristal kalcita, islandski dvolomac (sl. 6.45) tako da svjetlost upada pravcem normale na plohu kristala, na zastoru će se pojaviti udvostručena slika predmeta. Zakretanjem kristala oko pravca upadne zrake zakretat će se slika dobivena od izvanrednih zraka oko mirne slike nastale pomoću redovnih zraka jer pravac redovne zrake nije promijenio smjer. Umetanjem analizatora između kalcita i objektiva dokazuje se da su zrake međusobno okomito polarizirane, kako je označeno na prethodnoj slici, na kojoj je nacrtan električni vektor.



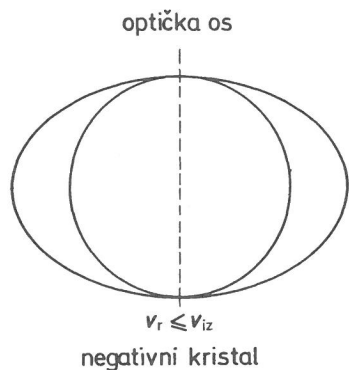
Slika 6.45. Pokus s kristalom kalcita

Ravnina polarizacije izvanredne zrake okomita je na »glavni presjek« kristala (to je ravnina u kojoj leži optička os kristala i pravci lomljenih zraka). Dakle, u izvanrednoj zraci električni vektor titra u glavnom presjeku.

Za redovnu zraku glavni je presjek ravnina polarizacije, pa prema tome u redovnoj zraci električni vektor titra okomito na glavni presjek.

Optički izotropni kristali ne uzrokuju polarizaciju prirodne svjetlosti. Kristali poput kalcita, turmalina, kvarca ili leda pokazuju dvolom i polarizaciju svjetlosti, pa valne brzine redovne i izvanredne zrake nisu jednake osim u jednom smjeru, koji je optička os kristala. Takvi se kristali nazivaju **jednoosni kristali**. Ako postoje dva smjera duž kojih su te brzine jednake, govorimo o **dvoosnim kristalima**.

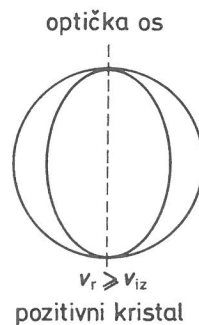
Pojavu dvoloma prvi je objasnio Ch. Huygens pomoću valnih fronta. U slučaju kalcita riječ je o negativnome jednoosnom kristalu čija valna fronta izvanredne zrake ima oblik spljoštenoga rotacionog elipsoida opisanog valnoj fronti redovne zrake oblika kugle (sl. 6.46).



Slika 6.46. Valne fronte negativnoga jednoosnog kristala

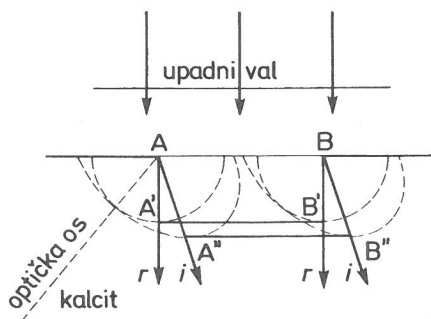
kugle. Primjer kristal kvarca (kristalizirani kremen, SiO_2) na slici 6.47.

Evo kako je Huygens protumačio dvolom na kalcitu kada svjetlost pada na prirodnu plohu kristala u smjeru normale. U našoj ravnini crtnje leže normala,



Slika 6.47. Valne fronte pozitivnoga jednoosnog kristala

optička os kristala i trag plohe kristala (sl. 6.48). Neka je dio od A do B na toj plohi slobodan, a ostalo prekriveno zaslonom. Na plohu kristala odozgo dolazi ravni val čija je fronta paralelna s plohom kristala (upadanje pravcem okomice). Kad val stigne do kristala, u nj se počnu širiti elementarni valovi iz središta smještenih na području od A do B. Ti su valovi za redovnu zraku kugle, a za izvanrednu spljošteni elipsoidi čiji pravac osi leži u optičkoj osi kristala. Os elipsoida jednaka je promjeru kugle. Nacrtajmo te valove koji su se proširili iz krajnjih točaka A i B.



Slika 6.48. Huygensovo tumačenje dvoloma na kalcitu

Fronta vala redovne zrake *anvelopa je kugala* elementarnih valova i proširi se u vremenu t do $A'B'$.

Fronta vala izvanredne zrake *anvelopa je elipsoida* i ona se u isto vrijeme proširi do $A''B''$. Smjer prostiranja izvanredne zrake je slomljen u odnosu prema redovnoj zraci.

Dvolom u kristalima, koji se lede u oblicima rompskoga, monoklinskog i triklinskog sustava teorijski je obradio i protumačio Fresnel (1821). To su dvoosni kristali. Valna ploha tih kristala predložena je jednadžbom četvrtog stupnja, (*Fresnelova valna ploha*). Nijedna se zraka u tim kristalima ne ponaša po Snellovu zakonu. Mogli bismo reći da su obje zrake »izvanredne«. Međutim, one su na

izlazu iz takvog kristala potpuno linearno polarizirane i njihove su ravnine polarizacije međusobno okomite.

Jednoosni kristali matematskom obradom postaju specijalni slučaj dvoosnih kristala, kad te dvije osi padnu jedna na drugu, a Fresnelova valna ploha degenerira i raspadne se u kuglu i rotacioni elipsoid.

6.5.3. Polarizatori

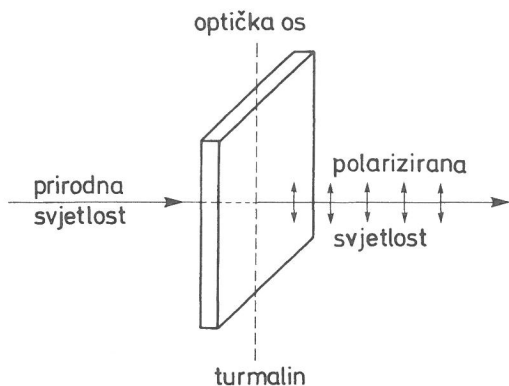
Polarizator je uređaj pomoću kojega dobivamo *linearno polariziranu svjetlost*. Staklena ploča može poslužiti kao polarizator ako se svjetlost na njoj odbija pod kutom određenim Brewsterovim zakonom.

Savršeno polariziranu svjetlost daju dvolomni kristali. Oni zapravo prirodnu svjetlost rascijepu u dva snopa polarizirane svjetlosti na taj način da su ravnine polarizacije u tim snopovima međusobno okomite.

Pomoću kristala načinjeni su polarizatori tako da je jedna od tih zraka uklonjena, npr. redovna, a druga zraka, potpuno polarizirana, izlazi iz kristala. Od islandskog je dvolomca W. Nicol (1768 – 1851) napravio jedan takav uređaj (1841) poznat pod nazivom *Nicolova prizma*. U toj je prizmi zgodnom dosjetkom uklonjena redovna zraka.

Drugi način na koji se pomoću dvolomnog kristala dobije polarizirana svjetlost jest taj da se od kristala koji ima svojstvo dihiroizma* izbrusi ploča prikladne debljine.

Turmalin je dihiroitičan kristal. Ako se iz njega izbrusi ploča kojoj su ravnine paralelne s optičkom osi i koja je toliko tanka da još propušta svjetlost (zelenu ili smeđu, ovisno o vrsti turmalina) tada je ta svjetlost polarizirana (sl. 6.49). Tako priređena turmalinska ploča u optičkim uređajima služi kao *polarizator*, tj. za



Slika 6.49. Prolaz svjetlosti kroz turmalin

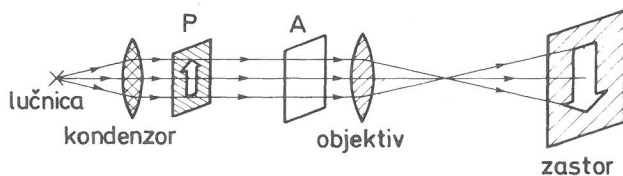
* Dihroitični kristali su oni u kojima postoje razlike u apsorpciji između redovne i izvanredne zrake. Takvi kristali nisu potpuno prozirni poput kalcita ili kvarca jer se u njima svjetlost pri prolazu prigušuje.

dobivanje polarizirane svjetlosti. Može poslužiti i kao *analizator*, tj. njome se ispituje je li neka svjetlost linearno polarizirana.

Polaroidi. Vrlo prikladni polarizatori velikih dimenzija prave se pomoću sintetičkih kristalića herapatita (W. B. Herapath, 1852). U plastičnu foliju uloženi se kristalići herapatita prikladnim postupkom (dok je folija još mekana) usmjere tako da su svi jednako orijentirani (1936). Takva folija koja sadrži dihiroitični herapatit propušta polariziranu svjetlost sivkastozelene boje. Polarizatore nači-njene od takve folije nalazimo u prodaji i pod nazivom *herotar* i *polaroid*.

Naši polaroidi imaju oblik kvadratične plohe stranice duge 10 cm.

U uređaju (sl. 6.50) za pokuse s polaroidima svjetlost se dobiva električnim lukom, izvorom bijele svjetlosti. Kondenzor snop svjetlosti čini paralelnim. Svjetlost iz kondenzora, koja je još »prirodna« (jer sadrži sve smjerove titranja električnog vektora okomite na pravac zrake), prolazi u paralelnom snopu kroz prvi polaroid P, koji propušta svjetlost čiji električni vektor titra u smjeru što je na polaroidu označen strelicom. (Na polaroidu P nalazi se maska koja ima otvor u obliku strelice). Polaroid P služi kao polarizator svjetlosti.



Slika 6.50. Pokus sa dva polaroida

Polariziranu svjetlost koja prođe kroz prvi polaroid P ispituujemo analizatorom A. To je drugi polaroid kroz koji svjetlost prolazi i zatim ulazi u objektiv koji od strelice na polarizatoru daje ostru sliku na udaljenom zastoru. U tom pokusu promatramo polaroide u paralelnom snopu svjetlosti.

Koliko će svjetlosti stići na zastor, ovisi o tome u kakvom je položaju smjer titranja što ga polarizator propušta prema smjeru titranja koji propušta analizator.

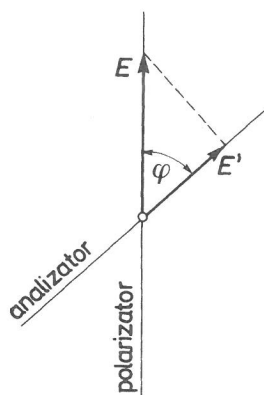
Taj međusobni položaj smjerova titranja može se mijenjati zakretanjem polarizatora oko optičke osi uređaja. (Može se zakretati i analizator, jer sve ovisi o njihovu međusobnu položaju.)

Ako je pravac titranja polarizatora paralelan s pravcem titranja analizatora, na zastoru je svjetlost najintenzivnija. Ukoliko nakon toga polako polarizator zakrećemo (a to se vidi jer se zakreće slika strelice), sjaj naše slike pomalo slabi i ona konačno potamni kad sa smjerom titranja analizatora čini kut $\pi/2$. Tada je položaj polarizatora i analizatora ukršten. Dakle, maksimalno propuštanje svjetlosti događa se u njihovu međusobno paralelnom položaju, a tama u ukrštenom.

Ako zanemarimo apsorpciju svjetlosti u polaroidima, rezultate tog pokusa možemo pokazati pomoću amplitude električnog vektora E vala svjetlosti koji je izišao iz polarizatora (sl. 6.51). Pokazat ćemo taj vektor u ravnini okomitoj na pravac zrake svjetlosti. U tom će se prikazu zraka svjetlosti projicirati u jednu točku. Nju odaberimo kao početak vektora E . Smjer analizatora za električni

vektor neka zatvara kut φ sa smjerom vektora E . Tada iz analizatora izlazi val polarizirane svjetlosti u kojoj električni vektor ima amplitudu E' . Veličina te amplitude je projekcija vektora E u pravac titranja u analizatoru. Analizator propušta samo onu komponentu vektora E koja je paralelna sa smjerom titranja električnog vektora u analizatoru. U formuli to je prikazano ovako:

$$E' = E \cos \varphi.$$



Slika 6.51. Električni vektor na izlazu iz analizatora

Formula slijedi iz Malusova zakona jer je intenzitet svjetlosti razmjernan kvadratu amplitude vala svjetlosti. U tablici 6.1 su dane neke vrijednosti od E , ovisne o kutu φ .

Tablica 6.1. Ovisnost amplitude električnog vektora o kutu zakreta analizatora

φ/rad	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	...
E'	E	$\frac{E}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{E}{\sqrt{2}}$	$-E$	...

Budući da okom procjenjujemo intenzitet svjetlosti na zastoru, svejedno je da li je amplituda vala pozitivna ili negativna. Bitno je kolika je. Zato će slika na zastoru biti jednako sjajna za $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots$. Općenito: ako je I intenzitet svjetlosti koji analizator propušta za neki kut φ između polarizatora i analizatora, tada ćemo jednak intenzitet dobiti i za kut $-\varphi$. (Kut $\varphi + \pi$ ne treba razlikovati od kuta φ). Dakle, neki intenzitet između tame i najjačeg svjetla dobijemo za dva položaja (kuta φ), a tamu i najjače svjetlo za jedan. (Zakret analizatora za π ne mijenja uvjete pokusa.)

Primjer

Polarizator i analizator su orijentirani tako da kroz analizator prođe maksimalni intenzitet svjetlosti I_0 . Koliki se dio od maksimalnog intenziteta pojavi iza analizatora ako se on zakrene za kut φ redom 30° , 45° i 60° .

Malusov zakon (6.19) određuje intenzitet svjetlosti I koji prođe kroz analizator;

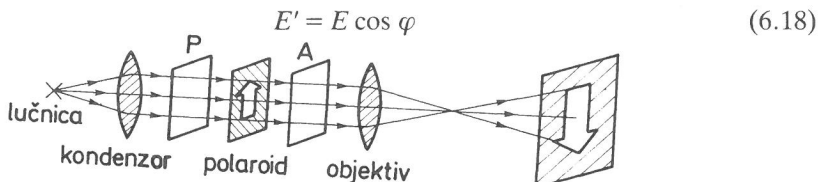
$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Tražene vrijednosti $\frac{I}{I_0} = \cos^2 \varphi$ jesu redom 0,75, 0,5 i 0,25.

Svjetlost iz lučnice pada na kondenzor koji snop svjetlosti čini paralelnim. Zatim redom prolazi kroz polarizator P, polaroid s maskom u obliku strelice, analizator i objektiv. Objektiv je u takvom položaju da od strelice na polaroidu, umetnutom između polarizatora i analizatora, na zastoru načini oštru obrnutu sliku (sl. 6.52).

U radu sa tri polaroida analiziramo dvije mogućnosti: prva je kad su polarizator i analizator *paralelni* a druga kad su *ukršteni*.

Promotrit ćemo prvi slučaj (sl. 6.53.a). Polarizator i analizator su paralelni. Neka je E amplituda u valu koji izlazi iz polarizatora. Pravac titranja u umetnutom polaroidu neka s pravcem titranja polarizatora (odnosno analizatora) zatvara kut φ . Iz umetnutog polaroida izlazi val kojemu je amplituda E' projekcija u pravac titranja tog polaroida. Dakle,



Slika 6.52. Pokus sa tri polaroida

Taj val pada na analizator i on od amplitude E' propušta komponentu E'' koja pada u njegov pravac titranja. Dakle,

$$E'' = E' \cos \varphi. \quad (6.19)$$

Izrazi (6.18) i (6.19) daju

$$E'' = E \cos^2 \varphi.$$

Najveće svjetlo dobijemo za $\varphi = 0^\circ$, odnosno za $\varphi = \pi$ (što je jednako, a tamu za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\frac{3\pi}{2}$. Za φ i $-\varphi$ intenziteti su jednaki. Naglasimo da se pritom amplituda mijenja s kvadratom kosinusa, a intenzitet sa četvrtom potencijom.

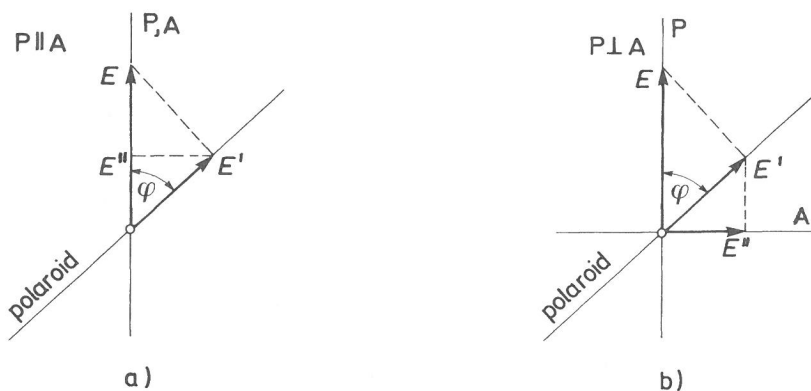
Drugi je slučaj kad su polarizator i analizador ukršteni. Na slici 6.53.b vide se njihovi pravci titranja. Vidno polje na zastoru u tom je slučaju tamno. Kad umetnemo treći polaroid, na zastoru se pojavi svjetlo. Neka pravac titranja umetnutog polaroida zatvara kut φ s pravcem titranja polarizatora. Amplitudu E' koja izlazi iz umetnutog polaroida dobijemo ako E projiciramo u pravac titranja polaroida. Od vala koji je izišao iz umetnutog polaroida analizador propušta samo komponentu koja pada u njegov pravac titranja, dakle komponentu E'' .

Iz slike 6.53.b vidimo da vrijedi:

$$E' = E \cos \varphi$$

$$E'' = E' \sin \varphi$$

$$E'' = E \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} E \sin 2\varphi$$



Slika 6.53. Električni vektori svjetlosti pri prolazu kroz tri polaroida: a) polarizator i analizador su paralelni, b) polarizator i analizador su ukršteni

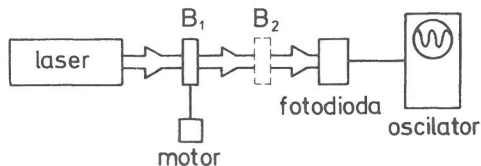
Ta formula pokazuje da se neki izlazni intenzitet dobije za četiri vrijednosti kuta φ . To su: φ , $-\varphi$, $\varphi + \frac{\pi}{2}$, $-\varphi - \frac{\pi}{2}$. Tama se dobije za dva položaja: 0 i $\frac{\pi}{2}$, a svjetlo za $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, dakle također za dva položaja.

Modulacija laserskog snopa pomoću polaroida. Opisani pokusi s polaroidima mogu se izvesti s monokromatorskom svjetlosti valne duljine 632,8 nm iz lasera He-Ne. Za taj je izvor svjetlosti karakteristično da njegov izlazni snop ima malu divergenciju pa u pokusu nije potreban kondenzor. Usto, to je izvor linearno polarizirane svjetlosti.

Svjetlo koje se širi duž optičke osi prolazi kroz polaroid B_1 (sl. 6.54) kojim analiziramo upadni snop, ali tako da se polaroid pomoću elektromotora zakreće oko optičke osi stalnom kutnom brzinom ω . Nakon toga svjetlo pada na fotodiodu. Električni signal s fotodiode odvodi se na otklonske pločice osciloskopa. Vertikalni otklon vidljiv na ekranu osciloskopa, mjera je intenziteta svjetlosnog snopa koji

se pojavljuje iza analizatora B_1 . Kako smo ranije utvrdili, amplituda električnog vektora mijenja se po zakonu $E' = E \cos \varphi$. Supstitucijom $\varphi = \omega t$, pri čemu je t vrijeme, dobivamo:

$$E' = E \cos \omega t.$$



Slika 6.54. Pokus s polaroidima i laserskim snopom

Krivulja koju elektronski snop crta po ekranu osciloskopa odgovara promjeni intenziteta prema Malusovu zakonu, tj.:

$$I' = I_0 \cos^2 \omega t,$$

gdje je I_0 intenzitet na izlazu iz lasera. Zanimariti ćemo gubitke snage zbog refleksije i apsorpcije. Time je postignuta modulacija intenziteta laserskog snopa prema napisanom zakonu.

Umetanjem još jednog polaroida B_2 iza polaroida B_1 promotrit ćemo modulaciju snage kada su ravnina u kojoj titra električni vektor polarizirane svjetlosti na izlazu iz lasera i smjer propuštanja polaroida B_2 paralelni.

To odgovara prijašnjem slučaju $P \parallel A$ pri umetanju trećeg polaroida u pokusu s bijelom svjetlosti. Kada se polaroid B_1 okreće oko optičke osi kutnom brzinom ω amplituda električnog vektora na izlazu iz polaroida B_2 periodički se mijenja

$$E'' = E \cos^2 \omega t,$$

pa se s vremenom mijenja i intenzitet prema jednadžbi

$$I'' = I_0 \cos^4 \omega t.$$

Konačno polaroid B_2 namjestimo tako da se na njegovu izlazu pojavljuje tama, što odgovara prijašnjem za $P \perp A$. Zatim ispred njega umetnemo polaroid B_1 , koji se okreće. Budući da tada amplituda električnog vektora iznosi

$$E'' = \frac{1}{2} E \sin 2\omega t,$$

intenzitet se mijenja po zakonu

$$I'' = \frac{1}{4} I_0 \sin^2 2\omega t.$$

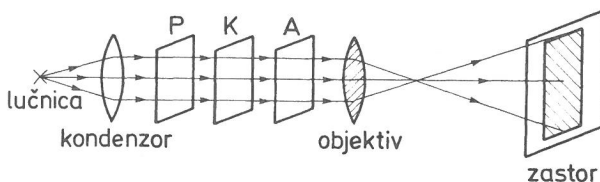
U tom se pokusu frekvencija modulacije udvostručila u odnosu prema prvome i drugom načinu moduliranja.

6.5.4. Dvolomni kristali u polariziranoj svjetlosti

Analizirat ćemo pojave u kojima treba uzeti u obzir polarizaciju, i interferenciju svjetlosti.

Promatrat ćemo dva slučaja. U prvom su polarizator i analizator paralelni, a u drugom ukršteni, kada se među njih umeće kristal koji želimo ispitivati u snopu polarizirane svjetlosti.

Svjetlost lučnice čini se paralelnom pomoću kondenzora, zatim se polarizira polaroidom P, nakon toga slijedi kristal K koji ispitujemo, a potom svjetlost prolazi kroz polaroid koji ima ulogu analizatora A. Objektiv napravi od kristala oštru sliku na zastoru (sl. 6.55).



Slika 6.55. Pokus s dvolomnim kristalom

Prvi slučaj. Polarizator i analizator su paralelni. Valovi koje oni propuštaju titraju u istom smjeru.

Na slici 6.56. taj je pravac vertikalalan. Amplituda vala svjetlosti koja izlazi iz polarizatora neka je E . Ako između polarizatora i analizatora nema ničega, ta svjetlost nepromijenjena prolazi kroz analizator i vidno je polje na zastoru svijetlo. Na apsorpciju svjetlosti u analizatoru nećemo se obazirati. Ako nakon toga u snop polarizirane svjetlosti umetnemo planparalelnu ploču od dvolomnog kristala, upadni se val iz polarizatora u kristalu rascijepi u redovnu i izvanrednu zraku. Uvjet da u kristalu nastanu obje te zrake jest da amplituda E ima komponente u smjerovima titranja za te zrake. Ti su pravci u svakom dvolomnom kristalu međusobno okomiti. Neka pravac titranja redovne zrake s pravcem polarizatora zatvara kut φ . Prema tome, amplituda vala redovne zrake na izlazu iz kristala je E'_r i ona s pravcem titranja analizatora također zatvara kut φ . Analizator propušta samo komponentu E''_r . Iz slike vidimo da je:

$$E'_r = E \cos \varphi$$

$$E''_r = E'_r \cos \varphi.$$

Iz toga slijedi

$$E''_r = E \cos^2 \varphi.$$

To je amplituda vala koji izlazi iz analizatora i koji je kroz kristal prošao kao redovna zraka.

Na sličan način promatramo prolaz vala koji putuje kroz kristal kao izvanredna zraka. Amplituda u kristalu je E'_i , a komponenta koja izlazi iz analizatora iznosi E''_i . Iz slike vidimo da je:

$$E'_i = E \sin \varphi$$

$$E''_i = E'_i \sin \varphi.$$

Iz toga slijedi:

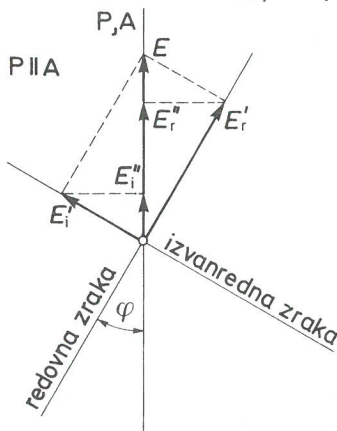
$$E''_i = E \sin^2 \varphi.$$

Tako smo na izlazu iz analizatora dobili amplitudu vala svjetlosti koja je kroz kristal putovala kao izvanredna zraka.

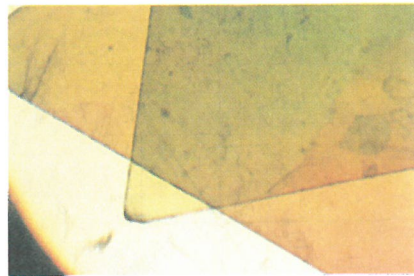
Na izlazu iz analizatora oba vala, i onaj redovne i onaj izvanredne zrake, titraju u istom smjeru; nastali su iz iste ulazne zrake, pa i titraju na isti način. Ove zrake, dakle, mogu interferirati.

Kad bi optički putovi za redovnu i izvanrednu zraku u kristalu bili jednako dugi ili bi se razlikovali za cjelobrojni mnogokratnik valne duljine λ , onda obje zrake izlaze iz kristala s istom fazom; ako je na izlazu iz kristala brijeg vala u redovnoj zraci, u ovom je slučaju također brijeg vala i u izvanrednoj zraci itd. Ako je taj uvjet ispunjen, amplitude valova na izlazu iz analizatora naprosto se zbroje. Dakle,

$$E''_r + E''_i = E \cos^2 \varphi + E \sin^2 \varphi = E.$$



Slika 6.56.a. Električni vektor u pokusu s dvolomnim kristalom kada su polarizator i analizator paralelni, PIIA



Slika 6.56.b. Slika šara na zastoru kad su polarizator i analizator paralelni

Svjetlost te valne duljine prošla je kroz kristal djelomično kao redovna a djelomično kao izvanredna zraka neoslabljenog intenziteta.

U općenitom slučaju na izlazu iz kristala postojat će razlika u fazi α između vala redovne zrake i vala izvanredne zrake. Ako je ta razlika u fazi π , što odgovara razlici u hodu između redovne i izvanredne zrake u kristalu, za neparni mnogokratnik od $\frac{\lambda}{2}$, te svjetlosti na izlazu iz analizatora titraju sa suprotnom fazom: brijeg

dolazi na dol i obrnuto. One se međusobno oslabljuju a amplituda izlaznog vala iznosi:

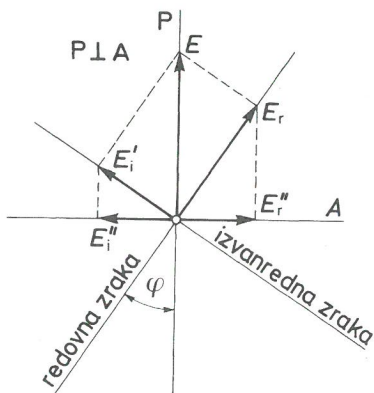
$$E_r'' - E_i'' = E \cos^2 \varphi - E \sin^2 \varphi = E \cos 2\varphi.$$

U tom je primjeru amplituda jednaka nuli, ako je $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tj. ako je intenzitet redovne i izvanredne zrake jednak. Tada je poništavanje najočitije.

Kako smo već vidjeli, ako je razlika u fazi nula, valovi se pojačavaju i prolaze neovisno o φ . Međutim, slabljenje valova je najjače za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, zato će i pojava na zastoru za takav položaj kristala bili najintenzivniji. Tada će se neke svjetlosne boje interferencijom posve poništiti i slika kristala bit će obojena. To se lijepo vidi ako između polarizatora i analizatora umetnemo ploču od tinjca. Mjesta različite debljine različito su obojena. Najjasnije šare dobijemo za $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Za $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$ nema šara, vidno je polje bijelo.

Celofanska je folija također dvolomna. U našem uređaju ona pokazuje šare. Ako foliju preklopimo dvostruko, trostruko itd. šare se mijenjaju jer se promijeni debljina, pa time i razlika u hodu između redovne i izvanredne zrake. Druge se svjetlosne boje dokidaju, a druge prolaze.

Dvolom pokazuje i prenapregnuto staklo zbog unutrašnjih naprezanja, razni prozirni predmeti od plastike (trokuti za crtanje, okviri naočala, itd.). U pleksi-staklu također možemo izazvati dvolom ako ga napregnemo. Iz jednako obojenih krivulja možemo zaključiti kakvo je naprezanje. Cijela jedna znanstvena disciplina koja se time bavi je **elastooptika**. U njezinu se sklopu eksperimentalno istražuju naprezanja na modelima od pleksi-stakla.



Slika 6.57.a. Električni vektor u pokusu s dvolomnim kristalom kada su polarizator i analizator ukršteni, PLA



Slika 6.57.b. Slika komplementarnih šara na zastoru kada su polarizator i analizator ukršteni

Sada ćemo promatrati *drugi slučaj*. Dvolomni kristal umetnemo između polarizatora i analizatora u ukrštenom položaju. Neka je smjer titranja u polarizatoru vertikalna, a u analizatoru horizontalna (sl. 6.57).

Neka je amplituda vala koji izlazi iz polarizatora E . Smjer titranja redovne zrake zatvara s pravcem titranja polarizatora kut φ . Izračunajmo amplitude izlaznih zraka.

Redovna zraka na izlazu iz kristala ima amplitudu E'_r i taj val na izlazu iz analizatora daje amplitudu E''_r . Iz slike dobivamo redom:

$$\begin{aligned} E'_r &= E \cos \varphi \\ E''_r &= E'_r \sin \varphi \\ \hline E''_r &= E \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} E \sin 2 \varphi. \end{aligned}$$

Za izvanrednu zraku imamo redom: na ulazu u kristal E , a na izlazu iz analizatora E''_i .

Međutim, treba istaknuti da je komponenta E'_i nalijevo zakrenuta prema E za kut $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, a komponenta E''_i prema E'_i za φ nalijevo. Prema tome, komponenta E''_i zakrenuta je nalijevo prema E za, $\frac{\pi}{2}$, dakle za pravi kut. To je protivno zakretu komponente E''_r nastale od redovne zrake. Prema tome, ako E''_r računamo kao pozitivnu, onda je E''_i negativna veličina. Za veličinu komponente E''_i iz slike imamo:

$$\begin{aligned} E_i &= E \sin \varphi \\ E'_i &= E'_i \cos \varphi \\ \hline E''_i &= E \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} E \sin 2 \varphi. \end{aligned}$$

U ukrštenom položaju oba su vala uvijek jednakog intenziteta. Međutim, amplitude pri računanju treba uzeti sa suprotnim predznakom a to znači: ako je razlika u hodu između redovne i izvanredne zrake cijeli broj valnih duljina, tada se svjetlosti na izlazu iz analizatora ponište, a ako je ta razlika neparni mnogokratnik od $\frac{\lambda}{2}$, tada se pojačavaju.

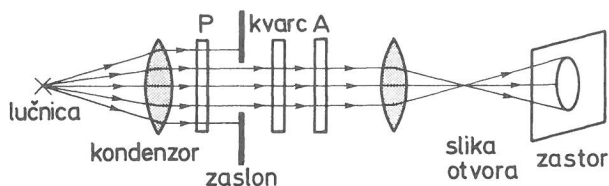
To je suprotno onome za paralelni položaj polarizatora i analizatora. Prijelazom iz paralelnoga u ukršteni položaj šare u kojima vidimo kristal prijeđu u komplementarne.

U ukrštenom položaju za svaki φ šare su jednake, mijenja se samo njihov intenzitet ako se mijenja kut φ . Maksimum intenziteta je za $\varphi = \frac{\pi}{4}$. U paralelnom položaju šare su najjasnije također za $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Za ostale položaje postaju sve slabije i miješa se sve više bijeloga, pa šare blijede.

6.5.5. Vrtanja ravnine polarizacije u kristalu kvarca

Ako između ukrštenog polarizatora i analizatora stavimo planparalelnu pločicu izbrušenu od kvarca tako da je ravnina pločice okomita na optičku os kvarca, vidno će se polje rasvijetliti (sl. 6. 58). Nacrtat ćemo shemu našeg ekperimentalnog uređaja. Iz lučnice dolazi bijela svjetlost. Kondenzor pretvori snop u paralelni. Zatim slijedi polarizator, kvarcova pločica, analizator i objektiv.

Iza polarizatora postavljen je zaslon s okruglim otvorom. Objektiv je na takvoj udaljenosti da od otvora na zastoru oblikuje oštru sliku.



Slika 6.58. Vrtanja ravnine polarizacije u kvarcu

Dok još nema kvarcne pločice, vidno je polje tamno ako su polarizatori i analizator ukršteni. Kad pločicu od kvarca umetnemo u snop polarizirane svjetlosti, svjetlost putuje pravcem optičke osi kristala. U jednoosnim kristalima, kao što je i kvarc u tom smjeru jednako brzo putuju redovna i izvanredna zraka. No kvarc u tom smjeru pokazuje posebno svojstvo. Polarizirana svjetlost koja putuje u smjeru optičke osi **postepeno** zakreće svoju ravninu polarizacije. Kad, dakle, zraka prođe kroz takvu kvarcnu pločicu, ravnina polarizacije nema više položaj kakav je imala u zruci na ulazu. Zato se tada vidno polje rasvijetli premda je analizator u ukrštenom položaju.

To **zakretanje ravnine polarizacije** ima neka svojstva koja ćemo redom opisati. Kut zakreta ovisi o debljini pločice. Zakret je, dakle, razmjern debljini: dvaput deblja pločica daje dvostruk zakret, itd. Zakret također ovisi o valnoj duljini svjetlosti. Na milimetar puta kroz kvarc ravnina polarizacije se zakrene u vidljivom području prema tablici:

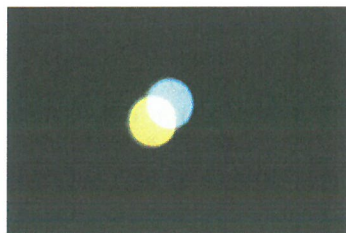
crvena svjetlost najveće valne duljine	11°
natrijeva žuta svjetlost	21,76°
modra svjetlost	33°
ljubičasta svjetlost najkraće valne duljine	49°

Konačno, ako gledamo od zastora prema analizatoru, smjer zakreta ravnine polarizacije može biti jednak smjeru kazaljke sata, dakle nadesno. Tako je u »desnom« kvarcu. No taj zakret može imati i suprotan smjer od smjera kazaljke sata, dakle nalijevo. To se događa ako u uređaj stavimo »lijevi« kvarc.

Desni i lijevi kvarc nalazimo u prirodi i oni se u svom kristalnom obliku razlikuju kao predmet i njegova slika u zrcalu.

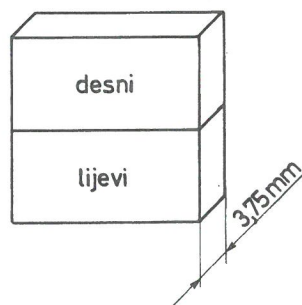
Ako su polarizator i analizator paralelni, pa među njih umetnemo kvarcnu pločicu brušenu okomito na optičku os i debelu 3 mm, tada će se ravnina polarizacije za modru svjetlost zakrenuti za 99° . Prema tome, analizator će praktički ugasiti **modrozelenu** šaru. Vidno će polje svijetliti u ostatku spektra crveno. Ako analizator zakrenemo za 90° , propuštati će **modrozelenu** šaru a gasiti ostatak. Šara vidnog polja prijeći će u komplementarnu.

Ako na mjesto analizatora umetnemo dvolomac, na zastoru će se pojaviti dvije slike (sl. 6. 59.) jedna od redovne, a druga od izvanredne zrake. Budući da su ravnine polarizacije u tim zrakama međusobno okomite te ako jedna slika odgovara jednom položaju analizatora, druga će odgovarati položaju analizatora zakrenutog za 90° . Šare u slikama su komplementarne. Ondje gdje se slike prekrivaju vidimo bijelo. Ako dvolomac malo zakrenemo, crveno priđe u žuto, a zeleno u modro. Za svaki položaj dvolomca slike su komplementarno obojene. Na mjestima gdje se prekrivaju uvijek vidimo bijelo. To je jedan od Aragoovih pokusa.



Slika 6.59. Slika na zastoru u pokusu s kvarcom i kristalom kalcita (dvolomac) kao analizatorom

Osim kvarca, ima i drugih tvari koje zakreću ravninu polarizacije. To su **optički aktivne tvari**. Takva je npr. i dekstroza rastopljena u vodi. Osobito veliku moć zakretanja ravnine polarizacije imaju tzv. **tekući kristali**. Tu su kapljevine koje uz određene uvjete pokazuju kristalična svojstva.



Slika 6.60. Soleilova pločica

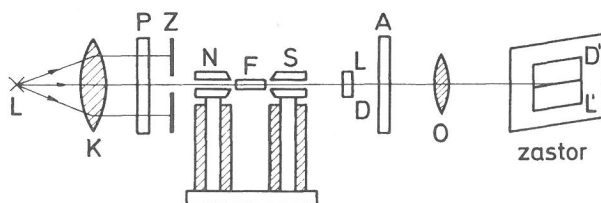
Na pojavi zakretanja ravnine polarizacije u kvarcu osniva se djelovanje pločice koju je načinio N. Soleil (1798 – 1878). Ta se pločica sastoji od dva dijela, jedan je polovina od desnog kvarca, a druga od lijevoga. Oba su dijela jednako debela – 3,75 mm i točno u sredini pločice sastavljena (sl. 6. 60). Obje su pločice toliko debele da natrijevu žutu svjetlost zakrenu za $80^\circ 36'$, a zelenkastožutu za točno 90° . Jedna polovina pločice zakrene tu boju za 90° nadesno, a druga za 90° nalijevo. Prema tome, ako pločicu uložimo između točno paralelnog polarizatora

i analizatora, obje će polovine pločice pokazivati jednaku grimiznu šaru. Ta je šara vrlo osjetljiva na malenu promjenu smjera titranja upadne zrake. Ako se taj smjer malo zakrene, jedna se polovina pločice vidi kao modra, a druga kao crvena. Ako je zakrenemo na drugu stranu, modro i crveno zamijene mjesta. Grimizna šara pločice zove se »**osjetljiva šara**« (teint sensible). Ta Soleilova pločica služi kao indikator malog zakreta ravnine polarizacije u nekim optičkim uređajima.

6.5.6. Faradayev efekt

Soleilovu ćemo pločicu upotrijebiti u uređaju za demonstraciju Faradayeva efekta. M. Faraday (1791 – 1867), poznat po svojim fundamentalnim otkrićima u elektromagnetizmu, slutio je da između elektriciteta i svjetlosti postoji neka veza. Nakon mnogih pokušaja uspjelo mu je da 1845. eksperimentalno pokaže da se magnetskim poljem može utjecati na svjetlost. Opisat ćemo uređaj za demonstraciju te Faradayeve pojave.

Svjetlost iz lučnice pada na kondenzor K, koji čini snop svjetlosti paralelnim (sl. 6. 61), zatim dolazi polaroid kao polarizator, P. Zaslon Z ima okrugli otvor koji propušta suženi snop svjetlosti. Iza njega se nalazi elektromagnet s polovima N i S, koji su probušeni tako da svjetlost može prolaziti kroz njih. Između polova elektromagneta nalazi se prizmatični komad tzv. Faradayeva stakla, kroz koje svjetlost mora proći na putu između polova elektromagneta. Faradayevo staklo sadrži olovni silikat i prikladno je za ovaj pokus.



Slika 6.61. Faradayev efekt, predložen pomoću Soleilove pločice

Pošto svjetlost izide iz elektromagneta, ona prolazi kroz Soleilovu pločicu LD, zatim kroz analizator A te, konačno, kroz objektiv O, koji načini oštru sliku Soleilove pločice na zastoru.

Dok još nema magnetskog polja, analizator A namjesti se u paralelan položaj s polarizatorom P. Tada se oba polja Soleilove pločice vide u jednakoj grimiznoj šari. U projekciji su polja slike pločice jednako obojena. Razabire se i granica između lijevoga L' i desnog D' kvarca.

Ako se tada pobudi magnetsko polje elektromagneta, svjetlost putuje kroz Faradayevo staklo u smjeru magnetskih silnica i, kako pokus pokazuje, polja Soleilove pločice promijene boju. Polje D', koje je slika desnog kvarca, postane

crvenkasto, a polje L' , koje je slika lijevog kvarca, dobije modri ton. To znači da se ravnina polarizacije u Faradayevu staklu zakrenula nalijevo (u smjeru suprotnom smjeru kazaljke sata kad gledamo od zastora prema analizatoru).

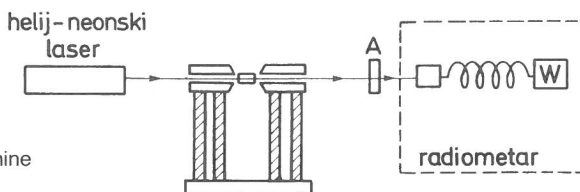
Da je ravnina polarizacije u Faradayevu staklu zakrenuta nalijevo, zaključujemo stoga što je lijevi kvarc dobio modri ton, što znači da analizator od svjetlosti koja je prošla kroza nj gasi neku žutu boju manje zakrenutu od žutozelene, koja daje osjetljivu šaru. Kod desnog je kvarca obrnuto. U ovom slučaju zbog zakreta ravnine polarizacije nalijevo, analizator gasi boju koja je kraće valne duljine od žutozelene, pa je komplementarna boja crvenkasta.

Jednako pokazujemo efekt pomoću snopa svjetlosti iz He-Ne lasera. Umjesto lučnice laser postavimo tako da uski snop gotovo paralelnih zraka iz njega putuje optičkom osi opisanog uređaja u kojemu pritom nema zaslona objektiva. Svjetlost upotrijebljenog lasera je polarizirana, pa nije potreban polarizator. Neposredno iz izvora svjetlost ulazi u magnetsko polje i prolazi kroz Faradayevo staklo na analizator. Ako prije pobude magnetskog polja analizator postavimo u ukršteni položaj, na zastoru nema svjetlosti. Ako magnetsko polje postoji, na zastoru se pojavi svijetla mrlja zbog svjetlosti koja je prošla kroz analizator. Zakretanje analizatora ulijevo (ako gledamo u smjeru širenja svjetlosti i magnetskog polja) do ponovne tame na zastoru govori o smjeru zakretanja ravnine polarizacije u Faradayevu staklu ulijevo, što smo već odredili pomoću Soleillove pločice.

Umjesto na zastor, pustimo svjetlost da pada na ulaz radiometra, uređaja za mjerenje snage zračenja. Sastavljen je od fotodiode priključene na vatmetar. Uređaj je baždaren tako da mjeri snagu valne duljine zračenja iz He-Ne lasera, dakle snage zračenja određene valne duljine. Shematski prikaz pokusa dan je na slici (6. 62). Snaga W koju mjeri radiometar mijenja se po zakonu:

$$W = W_0 \cos^2 \varphi \quad (6.19)$$

gdje je W_0 snaga u slučaju kada su ravnina u kojoj titra vektor električnog polja svjetlosti što upada na analizator A i pravac propuštanja analizatora paralelni, tj. kad je $\varphi = 0$.



Slika 6.62. Mjerenje kuta zakreta ravnine polarizacije u Faradayevu efektu

Analizator se zakreće bez prisutnosti magnetskog polja, tako dugo dok snaga svjetlosti padne na nulu. Tada je $\varphi = \pi/2$. Uključivanjem magnetskog polja radiometar pokazuje snagu različitu od nule, jer se ravnina polarizacije u magnetskom polju zakrenula. Iz izraza (6. 19) određujemo kut φ , pa je zakret ravnine polarizacije

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Eksperimentalno je utvrđeno da je zakret za kut α razmjeran umnošku jakosti magnetskog polja H i duljine izotropnog sredstva l , tj.

$$\alpha = V H l,$$

gdje je V konstanta proporcionalnosti, nazvana *Verdetova konstanta*.

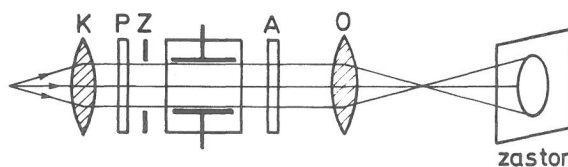
U Faradayevu staklu ravnina polarizacije svjetlosti koja putuje pravcem magnetskih silnica zakreće se u smjeru u kojemu mora teći električna struja u zavojnici da bi proizvela to polje.

Faradayev je efekt nađen i u drugim tvarima, npr. u kapljevitom sumporu zatim u sumpor-ugljiku. U tim se tvarima ravnina polarizacije zakreće u istom smislu kao i u Faradayevu staklu. Međutim, vodena otopina željezo-klorida vrti ravninu polarizacije na suprotnu stranu. Osobito jak Faradayev efekt pokazuju tanki, još prozirni slojevi feromagnetičkih tvari (A. Kundt, 1884). Faradayeva pojava važna je zato što je to prvi eksperimentalni dokaz da se magnetskim poljem može djelovati na svjetlost.

6.5.7. Kerrov efekt

Efekt što ga je 1875. godine otkrio J. Kerr primjer je djelovanja električnog polja na rasprostiranje svjetlosti u nekom prozirnom sredstvu.

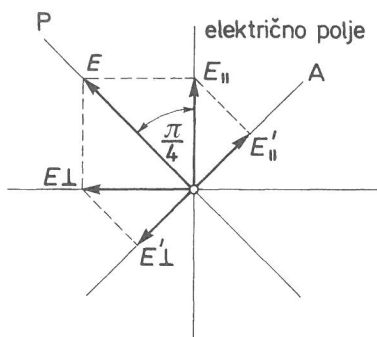
Svjetlost lučnice prolazi kroz kondenzor K, polarizator, P, zaslon Z, staklenu kivetu punu nitrobenzena, zatim kroz polarizator P i, konačno kroz objektiv O, koji na zastoru čini sliku otvora na zaslonu (sl. 6. 63)



Slika 6.63. Kerrova pojava – pokus

U nitrobenzen, $C_6H_5 \cdot NO_2$, koji je otrovna kapljevina, uronjene su dvije elektrode između kojih se može uspostaviti jako električno polje u smjeru okomitom na smjer prolaza svjetlosti kroz nitrobenzen. Polarizator je namješten tako da pravac titranja u valu svjetlosti zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ s pravcem u kojemu se pobuđuje električno polje. To je pokazano slikom (6. 64). Smjer električnog polja je vertikalalan. Smjer titranja u polarizatoru P zakrenut je nalijevo za $\frac{\pi}{4}$. Neka je analizator A zakrenut za $\frac{\pi}{4}$ nadesno. Prema tome, polarizator i analizator su ukršteni. Ako je E amplituda titranja u valu svjetlosti koja izlazi

iz polarizatora, onda tu amplitudu možemo rastaviti u dvije komponente: jednu koja pada u pravac električnog polja, to je $E_{\parallel}$, i drugu, okomitu na pravac električnog polja, to je $E_{\perp}$. U pravcu analizatora komponenta od $E_{\parallel}$ a to je $E'_{\parallel}$, jednako je velika kao i $E'_{\perp}$, koja je komponenta od $E_{\perp}$. To su komponente u analizatoru usmjerene na suprotne strane i, ako nema razlike u hodu između svjetlosti čije je titranje paralelno s pravcem električnog polja i svjetlosti kojoj je titranje okomito na električno polje, te se dvije svjetlosti u analizatoru ponište. To se događa dok električno polje još nije pobuđeno, dok nitrobenzen između elektoda nije električki polariziran. Prema tome, vidno je polje na zastoru tamno.



Slika 6.64. Električno polje i rasprostiranje svjetlosti

Ako se tada između elektroda u nitrobenzenu pobudi jako električno polje, na zastoru se pojavi svjetlo. Električni polariziran nitrobenzen postane dvoloman i između zrake $E_{\parallel}$ i zrake $E_{\perp}$ na putu kroz nitrobenzen nastane razlika u hodu. Zato se te zrake u analizatoru više ne poništavaju. Zaključak je u tom slučaju jednak onome za dvolomne kristale. Kako su pokusi pokazali, razlika u hodu između zrake $E_{\parallel}$ i zrake $E_{\perp}$ razmjerna je kvadratu jakosti električnog polja pobuđenog u nitrobenzenu i duljini puta zrake svjetlosti kroz to polje.

Nitrobenzen je tvar u kojoj je Kerrov efekt jak. To je zato jer ta kapljevina ima električki polarizirane molekule koje se u električnom polju orijentiraju kao električni dipoli. Suprotno tome djeluje toplinsko gibanje u kapljevini. Ono ne dopušta savršenu orijentaciju. No orijentacija je to potpunija što je električno polje jače. Odatle potječe ovisnost tog »električnog« dvoloma o jakosti električnog polja.

Kerrov efekt srećemo i kod drugih prozirnih tvari. Tu je pojavu H. Kerr prvi put otkrio na staklu.

Električnim i magnetskim poljima može se djelovati i na izvor svjetlosti tako da se to djelovanje opaža na svjetlu koju šalje izvor. Naročito su poznate Zeemanova pojava (1896), za utjecaj magnetskog polja, i Starkova pojava (1913), za utjecaj električnog polja na emisiju svjetlosti. Ti efekti, međutim, pripadaju fizici atoma, u kojoj se objašnjava nastanak svjetlosti.

6.6. Apsorpcija svjetlosti

U kiveti sa stijenkama od optičkog stakla nalazi se nigrozin otopljen u vodi. S jedne strane u kivetu ulazi uzak snop monokromatske svjetlosti sa He-Ne laserom intenziteta I_0 i prolazi kroz otopinu. Na izlazu iz otopine, na drugoj strani kivete, nalazi se detektor kojim se mjeri intenzitet I izlazne svjetlosti (sl. 6. 65). Duljina puta koju svjetlo prijeđe kroz kapljevinu je l . Nalazimo da je intenzitet svjetlosti na izlazu oslabljen, prema zakonu:

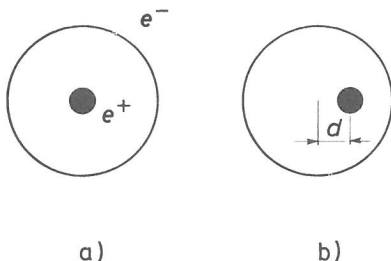
$$I = I_0 e^{-al}$$



Slika 6.65. Pokus o apsorpciji svjetlosti

gdje je a *koeficijent apsorpcije* (apsorpcijski koeficijent). Intenzitet svjetlosti se smanjuje zbog apsorpcije u otopini, ali se može smanjiti i zbog raspršenja svjetlosti, što ovisi o izboru tvari kroz koju je propuštamo. Nigrozin otopljen u vodi je sredstvo u kojemu se raspršenje svjetlosti može zanemariti.

Apsorpcijski koeficijent vrlo je različit, ovisno o vrsti materijala. Tako je u staklu vrlo malen, oko 10^{-5} cm^{-1} . U zasićenoj je otopini bakar (II)-sulfata za crvenu svjetlost velik i iznosi oko 4 cm^{-1} . Osim toga, materijali mogu biti dobri apsorberi svjetlosti neke valne duljine, a slabo upijati svjetlost neke druge valne duljine. Tako je bakar (II)-sulfat jak apsorber za valnu duljinu 700 nm, a transparentan je za 350 nm.



Slika 6.66. Uz Lorentzov model atoma

Apsorpcija se može objasniti jednostavnim Lorentzovim modelom atoma. U tom se modelu pretpostavlja da centri pozitivnog i negativnog naboja u atomu padaju zajedno (sl. 6.66.a). Zbog utjecaja vanjske pobude naboji se pomaknu iz ravnotežnog položaja i javlja se elastična sila oblika $F(x) = -kx$, gdje je x pomak iz položaja ravnoteže, dok je $F(0) = 0$ (sl. 6. 66.b). Posljedica djelovanja pobude je titranje naboja.

Sljedeća je pretpostavka da je to titranje naboja prigušeno i da s vremenom zamre zbog djelovanja dodatne sile F_p , koja je razmjerna brzini, tj.:

$$F_p = -m\gamma \frac{dx}{dt}.$$

Kada električno polje jakosti E svjetlosnog vala djeluje na atom, naboji se zbog utjecaja električne sile $F_e = eE$ razmaknu.

Jednadžba gibanja atoma zbog utjecaja spomenutih sila, prema drugom Newtonovu aksiomu, glasi:

$$ma = \Sigma F, \text{ ili}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = eE.$$

(Napisana je jednadžba poznata kao jednadžba prisilnog titranja, spomenuta u (1.5).

Promotrit ćemo rješenje diferencijalne jednadžbe ako vanjsko električno polje vala svjetlosti ima amplitudu E_0 i pulzaciju ω . Tada ga možemo odrediti izrazom:

$$E = E_0 e^{i\omega t}.$$

Uz pretpostavku da pomak x slijedi vanjsko polje, rješenje koje zadovoljava napisanu jednadžbu gibanja ima oblik:

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

Uvrstivši napisano rješenje i veličinu vanjskoga električnog polja u jednadžbu gibanja, dobit ćemo:

$$(-m\omega^2 x_0 + im\gamma\omega x_0 + kx_0) e^{i\omega t} = eE_0 e^{i\omega t}.$$

zamjenom $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, gdje je ω_0 vlastita pulzacija atoma, za amplitudu titranja dobivamo izraz:

$$x_0 = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}.$$

Pri razmaku x središta električnih naboja atomu se pripisuje dipolni moment p (odjeljak 4.9) definiran izrazom: $p = ex$. Dipolni je moment razmjernan narinutom polju, tj.:

$$p = \alpha E,$$

pri čemu je α koeficijent polarizacije. Iz dva posljednja izraza dobivamo:

$$\alpha = \frac{ex}{E}.$$

Uz definiciju dipolnog momenta jediničnog volumena

$$P = Np,$$

gdje je N broj atoma u jedinici volumena, te uz

$$P = \varepsilon_0 \chi E, \quad (6.21)$$

gdje je χ susceptibilnost, slijedi veza:

$$\chi = \varepsilon_0 N \alpha.$$

Iz Maxwellovih jednačbi poznat je izraz za brzinu širenja vala v u sredstvu permitivnosti ε i permeabilnosti μ , tj.:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

pri čemu je $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ i $\mu = \mu_0 \mu_r$ (odjeljak 4.6).

U vakuumu je brzina širenja vala $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, pa je indeks loma:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Za većinu materijala $\mu_r \doteq 1$, pa je:

$$n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi.$$

Tada za Lorentzov model atoma vrijedi:

$$n^2 - 1 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)}.$$

Iz napisanog izraza zaključujemo da se indeks loma nekog sredstva može podijeliti na realni dio, n_r , i imaginarni dio, n_i , pa je

$$n = n_r + i n_i.$$

Jakost električnog polja u elektromagnetskom valu koji se po osi z širi kroz sredstvo indeksa loma n dana je izrazom:

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} n z - \omega t\right)},$$

pri čemu je λ valna duljina u vakuumu, a λ/n odgovarajuća valna duljina u sredstvu kojim se val širi.

Rastavljanjem indeksa loma na n_r i n_i jakost električnog polja određena je izrazom:

$$E = E_0 e^{-\frac{2\pi n_i}{\lambda} z} e^{i\left(\frac{2\pi n_r}{\lambda} z - \omega t\right)},$$

a realna, fizikalna jakost polja ima oblik:

$$E(\text{real.}) = E_0 e^{-\frac{2\pi n_i}{\lambda} z} \cos\left(\frac{2\pi n_r}{\lambda} z - \omega t\right),$$

Realni dio indeksa loma opisuje brzinu širenja elektromagnetskog vala.

Imaginarni dio indeksa loma sadržan je u članu $e^{-\frac{2\pi n_i}{\lambda} z}$, koji odgovara smanjenju amplitude električnog polja po eksponencijalnom zakonu dok se val širi duž osi z . Drugim riječima, taj član opisuje apsorpciju jer je intenzitet razmjeran kvadratu amplitude, izraz za apsorpcijski koeficijent, spomenut u izrazu (6.20) dobivenom pokusom, ima oblik:

$$a = \frac{4\pi n_i}{\lambda}. \quad (6.22)$$

Primjer

U pokusu s nigrozinom otopljenim u vodi koncentracije $0,009 \text{ kg/m}^3$ za valnu duljinu svjetlosti $632,8 \text{ nm}$ izmjeren je koeficijent apsorpcije $a = 26,5 \text{ m}^{-1}$. Izračunat ćemo imaginarni dio indeksa loma prema izrazu (6.22):

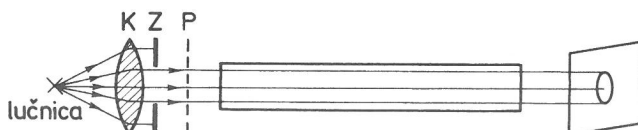
$$\begin{aligned} n_i &= \frac{a\lambda}{4\pi} \\ n_i &= \frac{26,5 \text{ m}^{-1} \cdot 632,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{4\pi} \\ n_i &= 1,33 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

6.7. Tyndallov efekt

Ako se prozirno sredstvo zamuti finim česticama, pri prolazu svjetlosti kroza nj nastaje *raspršavanje* svjetlosti na tim česticama. Tako se svjetlost raspršuje na česticama magle u zraku česticama dima i prašine. I voda se može zamutiti sitnim djelićima neke tvari. Raspršavanje je djelomično odbijanje svjetlosti na finim česticama, a djelomično ogib. Najprozirnije sredstvo je zrakoprazni prostor, praznina. Molekule plina mogu se pritom smatrati česticama koje su »zamutile« vakuum. I na njima nastaje raspršivanje. Međutim, pod pojavom što ju je otkrio J. Tyndall (1820–1893) (koji je na profesorskoj dužnosti 1853. naslijedio M. Faradaya) razumijevamo raspršavanje svjetlosti na finim česticama nekoga prozirnog sredstva, npr. dima u zraku.

Pokazat ćemo Tyndallovo raspršavanje na česticama mastiksa suspendiranim u vodi. Mastiks je svjetložuta smola koja se otapa u alkoholu, ali ne u vodi. Ako, dakle, malo alkoholne otopine mastiksa kapnemo u čistu vodu, mastiks se odmah izluči u obliku submikroskopskih čestica koje poput oblačića lebde u vodi. Tako vodu možemo po volji zamutiti. Zamućenom vodom napunimo ravnu staklenu cijev koja je na krajevima zatvorena staklenim pločama tako da kroz vodu u cijevi

možemo poslati snop svjetlosti iz lučnice kao izvora bijele svjetlosti (sl. 6. 67). Kondenzor K čini snop paralelnim. Nakon toga svjetlost pada na zaslon Z s okruglim otvorom, koji suzi snop svjetlosti. Na mjestu P može se umetnuti polarizator, kojega na početku pokusa nema. Iza toga se nalazi oko metar duga staklena cijev puna vode u kojoj je suspendiran mastiks i, nakraju bijeli zastor na koji padaju zrake što su prošle kroz vodu.

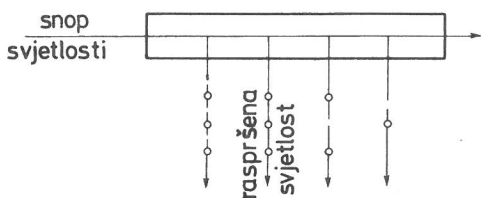


Slika 6.67. Uređaj za promatranje Tyndallovog efekta

Put snopa svjetlosti kroz vodu vidljiv je zato što se svjetlost raspršuje na česticama mastiksa. Na ulazu u cijev raspršena svjetlost iz snopa je modrikasta, zatim postepeno prelazi u žućkastu i crvenkastu. Na zastoru se vidi crvena mrlja, slična boji neba pri zalazu sunca. Na česticama mastiksa jače se raspršuje modra nego crvena boja. Zato kroz cijev prođe više crvene svjetlosti.

Lord Rayleigh teorijski je pokazao da se na česticama kojima su linearne dimenzije malene prema valnoj duljini svjetlost to jače raspršuje, što je valna duljina svjetlosti kraća, i to po zakonu prema kojemu je intenzitet raspršene svjetlosti obrnuto razmjeran četvrtoj potenciji valne duljine svjetlosti.

Valja istaknuti još jednu činjenicu važnu za Tyndallovu pojavu: raspršena je svjetlost polarizirana. Ako raspršenu svjetlost motrimo iz smjera koji sa snopom u cijevi zatvara pravi kut, onda električni vektor u raspršenoj svjetlosti titra okomito na ravninu određenu pravcem snopa i pravcem promatranja. To je na slici 6. 68. pokazano razmakom točkica u zrakama raspršene svjetlosti. Točkice su

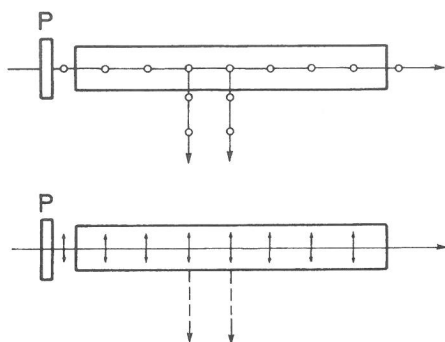


Slika 6.68. Polarizirana raspršena svjetlost u Tyndallovu efektu

jače razmaknute što smo dalje od ulaza svjetlosti u cijev. Time se želi naglasiti da raspršena svjetlost ima (prosječno) sve veću valnu duljinu što smo dalje nadesno zato je snop pri kraju cijevi već veoma osiromašen modrom (kraćevalnom) svjetlošću zbog raspršenja pri početku cijevi, a u skladu s Rayleighovim rezultatom.

Da je svjetlost doista tako polarizirana, može se vidjeti ako cijev motrimo kroz analizator. Međutim, to se može dokazati i tako da pri ulazu u cijev

umetnemo polarizator (sl. 6. 69). Tada je snop svjetlosti koji putuje kroz cijev polariziran. Ako je smjer titraja u snopu okomit na ravninu određenu pravcem snopa i pravcem motrenja, onda u pravcu motrenja ima raspršene svjetlosti (čiji je smjer titranja također okomit na tu ravninu). Ako, međutim, polarizator zakrenemo da smjer titranja u snopu svjetlosti padne u ravninu određenu snopom i pravcem motrenja, onda u pravcu motrenja nema raspršene svjetlosti. To je dano skicom na kojoj je P polaroid, kojim se polarizira snop svjetlosti na ulazu u cijev s vodom.



Slika 6.69. Analiza polarizirane svjetlosti u Tyndallovu efektu

Vedro je nebo modro jer se sunčana svjetlost raspršuje na molekulama zraka, i to kratkovalni dio spektra jače nego dugovalni (crveni). Na većim nadmorskim visinama nebo je tamnije jer je svjetlost na putu prema Zemlji susrela manje molekula. Astronauti u svemirskom brodu lete kroz zrakoprazni prostor. Njima je nebo crno. Takvo je i gledano s Mjeseca. Sunčana je svjetlost u velikim gradovima siromašna ultraljubičastom komponentom jer je atmosfera puna dima i drugih sitnih čestica koji rasprše ultraljubičasto zračenje. Ultraljubičasto zračenje jače je u sunčevoj svjetlosti na većim visinama atmosfere.

Napomenut ćemo da se opažena pojava može tumačiti pretpostavivši da upadna Sunčeva svjetlost svojom električnom komponentom polja polarizira molekule plinova u zraku stvarajući tako Hertzove dipole. Dipol zrači energiju kao antena, zadovoljavajući opisane karakteristike raspršenja Sunčeve svjetlosti.

6.8. Nelinearna optika

Kao što smo već ranije napomenuli u rasprostiranju svjetlosti kroz prozirno izotropno sredstvo opaža se utjecaj električnog polja E vala svjetlosti na elastično povezane elektrone u atomu. Pod utjecajem električne sile elektroni titraju i ponašaju se kao dipoli. Suma svih dipolnih momenata sredstva u jedinici volumena je električna polarizacija P koja ima oblik:

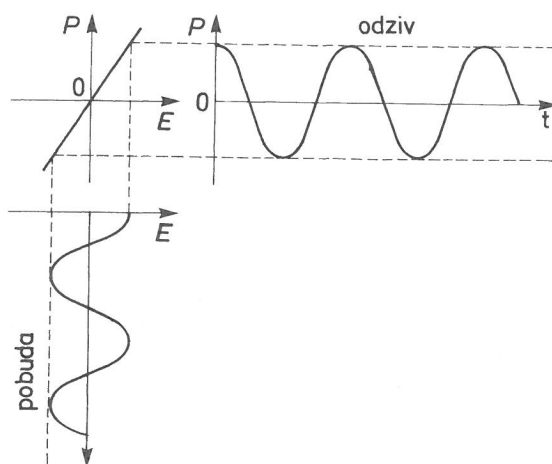
$$P = \epsilon_0 \chi E,$$

$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, a χ susceptibilnost izotropnog materijala.

U rasprostiranju svjetlosti u tzv. području linearne optike (npr. raspršivanje svjetlosti na molekulama u atmosferi), val svjetlosti s poljem E širi sredstvom inducirajući polarizirajući val P jednake frekvencije, koja zrači novo električno polje frekvencije upadnog vala (sl. 6.70).

Obični izvori svjetlosti odašilju valove tipične jakosti električnog polja $E = 100 \text{ V/m}$. Ako je električno polje jako, kao što može biti pri upotrebi intenzivnog laserskog zračenja, jednostavna proporcionalnost između polarizacije P i upadne jakosti električnog polja E (6.71) ne postoji. Tada je polarizacija komplicirana funkcija jakosti polja, a razvijena u red dobiva oblik

$$P = \varepsilon_0(\chi E + \chi' E^2 + \chi'' E^3 + \dots).$$



Slika 6.70. Pri proporcionalnosti između polarizacije P i jakosti električnog polja E na elektron djeluje vanjsko električno polje čija se jakost mijenja prema zakonu funkcije sinus s pulsacijom ω . Elektron jednostavno harmonijski titra jednakom pulsacijom. Polarizacija se u skladu s tim mijenja.

Taj izraz povezuje P i E i tako napisanog treba ga simbolički shvatiti. Red veličina konstanti čvrstih materijala u izrazu izgleda ovako:

$$\chi \approx 1, \chi' \approx 10^{-12} \text{ m/V}, \chi'' \approx 10^{-21} \text{ m}^2/\text{V}^2,$$

pa se viši članovi nelinearnog dijela vrlo brzo smanjuju. Ako se jakost električnog polja E mijenja po zakonu funkcije sinus:

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

polarizacija opisana samo prvim dvama članovima reda ima oblik:

$$P = \varepsilon_0(\chi E_0 \sin \omega t + \chi' E_0^2 \sin^2 \omega t).$$

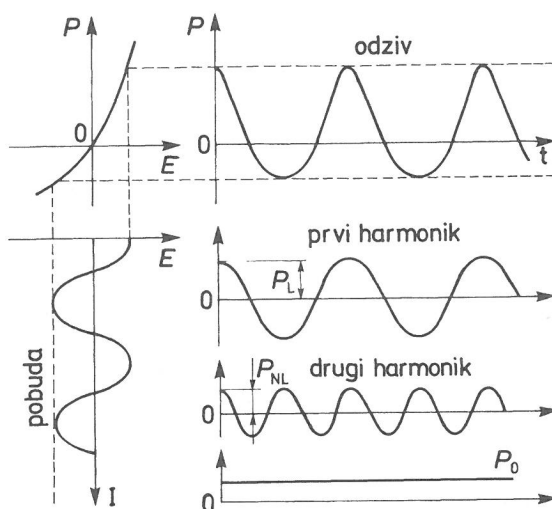
Upotrebom trigonometrijskih formula izraz se može pisati ovako:

$$P = \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} \chi' E_0^2 + \chi E_0 \sin \omega t - \frac{1}{2} \chi' E_0^2 \cos(2\omega t) \right],$$

ili, skraćeno:

$$P = P_0(0) + P_L(\omega) + P_{NL}(2\omega).$$

Polarizacija je sastavljena od jednoga konstantnog člana, člana osnovnog vala, te člana dvostruko veće frekvencije koji je označen kao nelinearna polarizacija $P_{NL}(2\omega)$ (sl. 6.71).

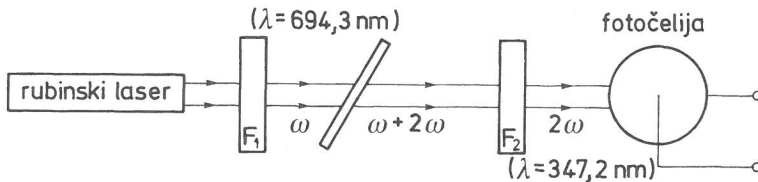


Slika 6.71. Na elektron djeluje vanjsko električno polje čija se jakost mijenja po zakonu funkcije sinus s pulsacijom ω . Veza između električnog polja i pulsacije je nelinearna. Elektron neharmonijski titra i s tim u vezi mijenja se polarizacija. Neharmonijsko titranje rastavljeno je na članove Fourierova reda: konstantni član $P_0(0)$, prvi harmonik – osnovni val $P_L(\omega)$ i drugi harmonik $P_{NL}(2\omega)$.

Polarizacijski valovi pulsacija ω i 2ω zrače električno polje, tj, svjetlost upadne frekvencije, ali i svjetlost dvaput veće frekvencije, drugi harmonik. Prvi puta je taj efekt opažen 1961. godine, kada je P.A. Franken sa suradnicima na kristal kvarca fokusirao impulsno svjetlo iz rubinskog lasera velike snage 3 kW i valne duljine 694,3 nm. Tada je iz kristala dobivena svjetlost osnovne frekvencije ali s malom efikasnošću i svjetlost drugog harmonika tj. svjetlost valne duljine 347,1 nm (sl. 6.72). Kasnije su upotrijebljene prikladnije tvari, najčešće KDP-kristali, (kalij, hidrogen-fosfat) veće efikasnosti zračenja višeg harmonika.

Opažena je pojava otvorila nove mogućnosti istraživanja u optici. Ta se istraživanja svrstavaju u područje nelinearne optike. U predlaserskom periodu

izvori svjetlosti generirali su slaba električna polja u usporedbi s atomskim električnim poljima jakosti 10^9 do 10^{12} V/m.



Slika 6.72. Shema uređaja za detekciju generiranog drugog harmonika svjetlosti. F_1 i F_2 su filteri između kojih je postavljen kristal kvarca.

Laserom se mogu generirati električna polja jakosti $10^7 - 10^{11}$ V/m. Ona mogu utjecati na atomska polja, a time i na optičke parametre materijala kroz koji se svjetlo širi.

Spomenut ćemo jednu pojavu iz područja nelinearne optike. Postavlja se pitanje mogućnosti pojave fotoelektričnog efekta izazvane frekvencijom ν upadnog vala, koja je manja od frekvencije praga ν_0 . Fotoelektrični efekt objašnjen je u 8. poglavlju. On nastaje kad je ispunjen uvjet da je $h\nu > W$. Time je za frekvenciju praga ν_0 formuliran izraz: $\nu_0 = W/h$, pri čemu je W izlazni rad potreban da se elektron oslobodi s površine, a h Planckova konstanta.

Teorija fotoelektričnog efekta pretpostavlja da elektron može apsorbirati samo jedan foton. Ta je pretpostavka potpuno suglasna s pokusima iz predlaserske optike. Ona se, međutim, mijenja ako snopovi svjetla ili svjetlosni impulsi postižu ekstremno velike intenzitete. Gustoće fotona u takvim snopovima ili impulsima toliko su velike da elektron istodobno može apsorbirati dva ili više fotona. Dakle, elektron može apsorbirati N fotona, svaki energije $h\nu$, pa se izgled zakona za fotoelektrični efekt mijenja u oblik:

$$\frac{m v^2}{2} = N h \nu - W.$$

Time se razumijeva da se fotoelektrični efekt opaža pri uvjetu:

$$h \nu \geq \frac{W}{N},$$

pa je frekvencija praga:

$$\nu_0(N) = \frac{W}{N h}.$$

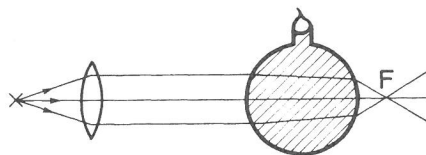
Dakle, veći svjetlosni intenzitet, tj. veće N , daje nižu frekvenciju praga. S otkrićem lasera otvorena je nova stranica u povijesti foto-električnog efekta. Moguće je opaziti tzv. **višequantni fotoelektrični efekt**. Taj efekt potpuno pripada području nelinearne optike. U osnovi je ovisan o intenzitetu upadnog vala, što je suprotno iskustvu dobivenom pri radu s malim intenzitetima (poglavlja 8).

6.9. Spektar elektromagnetskih valova

Svjetlost (vidljivo područje elektromagnetskog zračenja) ima valne duljine od 0,0004 mm, za krajnje ljubičastu svjetlost, do 0,0008 mm, za krajnje crvenu. Međutim, već je rano ustanovljeno da se taj dio spektra nastavlja u nevidljivi i prema većim i prema manjim valnim duljinama. Ako načinimo spektar svjetlosti električne lučnice, pri ljubičastom kraju spektra, gdje naše oko ne osjeća nikakve svjetlosti, možemo dobiti fluorescenciju, ako na to mjesto stavimo zastor prepariran nekim prikladnim tvarima. Ta je fluorescencija izazvana ultraljubičastim zračenjem valne duljine kraće od ljubičaste svjetlosti.

Na crveni kraj spektra nastavlja se područje infracrvenog zračenja. To zračenje ima valne duljine veće od duljine crvene svjetlosti. Nazivamo je toplinskim zračenjem. Ono, naime, na našoj koži izaziva samo osjet topline.

U pokusu s toplinskim zračenjem (sl. 6.73), snop svjetlosti iz lučnice pomoću kondenzozra učinimo paralelnim. U taj snop umetnemo bocu kuglastog oblika napunjenu otopinom joda u sumpor-ugljiku. Sumpor-ugljik je neugodna mirisa, pa je boca zataljena. Ta otopina joda neprozirna je našem oku. Prema tome, kroz nju ne prolazi svjetlost. Međutim, ako iza boce, na mjesto F, stavimo komad crnog papira, on se počinje pušiti i konačno plane. Na mjestu F iza boce koncentrirano je toplinsko zračenje koje zapali papir. Bijeli papir neće planuti.



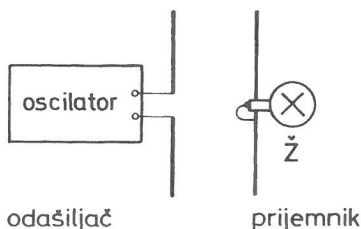
Slika 6.73. Uz pokus s toplinskim zračenjem

Razvijeni su *termovizijski* uređaji za snimanje pomoću infracrvenog zračenja što ga zrače snimani predmeti. Kamera ima detektor osjetljiv na to zračenje. To može biti indij-antimonid (InSb) hlađen tekućim dušikom. Fotonaponskom se pojavom s detektora dobiva signal koji se prevodi u videosignal. Na televizijskom se ekranu promatra slika predmeta. Zacrtnjenja raspoređena po ekranu odgovaraju intenzitetima toplinskog zračenja s raznih dijelova površine snimanog predmeta. Takvim se uređajima mogu promatrati izolacijska svojstva građevinskog materijala, a služe i kao diagnostička metoda u medicini i sl.

Ultrakratki elektromagnetski valovi kakvi se mogu proizvesti elektronskim cijevima pokazuju svojstva slična svojstvima valova svjetlosti. Polarizirani su, odbijaju se na reflektorima, mogu međusobno interferirati.* Zrači ih dipol od kovine približno jedan metar dug, napajan oscilatorom (sl. 6.74a).

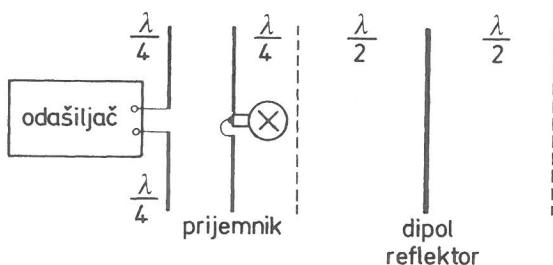
* S ultrakratkim valovima prvi je eksperimentirao H. Hertz (1857 – 1894) 1888. god. To su prvi eksperimentalno dobiveni i istraživani elektromagnetski valovi, oni valovi koje je Maxwell najavio u svom teorijskom radu iz 1862. god. Hertzov oscilator radio je s električnom iskom, kao i detektor. Oba su, međutim, imala oblik dipola. Hertz je u svojim pokusima dokazao odbijanje, lom i interferenciju elektromagnetskih valova i tako potvrdio Maxwellova predviđanja te utemeljio buduću primjenu tih valova.

Ako blizu dipola koji isijava ultrakratke valove stavimo drugi kovni dipol jednake duljine, koji je u sredini prekinut i premošten žaruljicom, žaruljica će svijetliti ako su dipoli paralelni, a neće svijetliti ako dipole ukrstimo (polarizacija).



Slika 6.74.a. Detekcija zračenja dipola

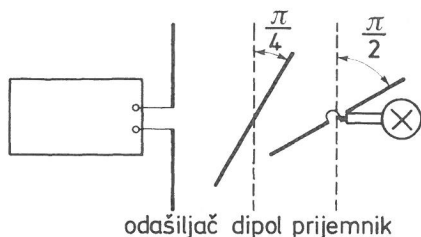
Postavimo li dipol sa žaruljicom u položaj paralelno s dipolom odašiljača, sjaj žaruljice možemo pojačati ako iza dipola sa žaruljicom stavimo drugi dipol (bez žaruljice, neprekinuti kovni štap) (sl. 6. 74b). Sjaj žaruljice će se pojačati ako je dodani dipol paralelan i na prikladnoj daljini (četvrtini valne duljine).



Slika 6.74.a. Detekcija zračenja dipola

Ako dodani dipol odmičemo tako da ostaje paralelan s dipolom sa žaruljicom, onda sjaj žaruljice periodički postaje jači ili slabiji. Valovi iz odašiljača i valovi odbijeni na dodanom dipolu interferiraju, pa se pojačavaju odnosno slabe.

S tim ultrakratkim valovima može se napraviti i pokus analogan onome u kojemu je između ukrštenog polarizatora i analizatora umetnut polaroid (sl. 6.74c). U ovom slučaju dipol odašiljača služi kao polarizator jer iz njega izlaze polarizirani valovi. Prijemni dipol sa žaruljicom postavi se u ukršteni položaj.



Slika 6.74.c. Dipol između odašiljača i prijemnika

Žaruljica ne svijetli. Ako nakon toga između odašiljača i prijemnika umetnemo dipol tako da s pravcem dipola odašiljača zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ radijana, žaruljica prijemnika će zasvijetliti. U tom položaju dipola sjaj žaruljice je najjači.

Iza ultraljubičastog područja, koje se neposredno nadovezuje na vidljivi spektar, slijede još kraći elektromagnetski valovi koje atmosfera apsorbira. Zato se s tim zračenjem eksperimentira u spektrografima iz kojih je isisan zrak, dakle u vakuumu. Još kraću valnu duljinu ima rendgensko zračenje. Na nj se nadovezuje elektromagnetsko zračenje iz atoma radioaktivnih elemenata, gama-zračenje, a iz svemira dopire zračenje koje je još »tvrde« od rendgenskoga, čija je valna duljina još kraća. To je kozmičko zračenje.

Cijeli ćemo spektar elektromagnetskih valova prikazati pregledno počevši od velikih valnih duljina prema manjima.

Tablica 6.2. Spektar elektromagnetskih valova

	Valna duljina/m			
Područje izmjenične struje	od	∞	do	$3 \cdot 10^4$
radiovalovi	od	$3 \cdot 10^4$	do	10^{-2}
mikrovalovi i toplinsko zračenje	od	10^{-2}	do	$0,8 \cdot 10^{-6}$
svjetlost	od	$0,8 \cdot 10^{-6}$	do	$0,4 \cdot 10^{-6}$
ultraljubičasto zračenje	od	$0,4 \cdot 10^{-6}$	do	$0,5 \cdot 10^{-7}$
rendgensko zračenje	od	$0,5 \cdot 10^{-7}$	do	10^{-11}
gama-zračenje	od	10^{-11}	do	10^{-13}
				i manje.

Navedene su granice približne. Pojedina se područja prekrivaju, napr. mikrovalovi i toplinsko zračenje ultraljubičasto i rendgensko zračenje i tvrdo rendgensko i gama-zračenje.

PITANJA I ZADACI

- Što se dokazuje pokusom poznatim pod nazivom Poissonova *svijetla mrlja*?
- U Youngovu eksperimentu otvori su osvijetljeni monokromatskom svjetlošću valne duljine $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m. Udaljenost otvora je 1 mm, a udaljenost otvora do zastora 3 m. Nađite položaj prvih triju pruga interferencije.
- Koliko se puta poveća razmak između susjednih pruga interferencije na zastoru u Youngovu pokusu ako se zeleni filtar ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m) zamijeni crvenim ($\lambda' = 6,5 \cdot 10^{-7}$ m)?
- Objasnite uvjete koherencije.
- U čemu se očituje jednostavnost Pohlva pokusa o interferenciji svjetlosti prema ostalim opisanim pokusima?
- Riječ je o Newtonovim kolobarima u reflektiranom svjetlu. Monokromatsko svjetlo valne duljine 600 nm pada na stakla u smjeru normale. Kolika je debljina sloja među staklima na mjestu četvrtog tamnog kolobara? (Uputa: $\Delta = 9 \frac{\lambda}{2}$.)
- Razmak između prvoga i dvadeset petoga Newtonova kolobara je 9 mm. Polumjer zakrivljenosti leće je 15 m. Svjetlo pada okomito na stakla, a kolobari se gledaju u reflektiranom svjetlu. Nađite valnu duljinu svjetlosti.
- U pokusu s Michelsonovim interferometrom potrebno je povećati udaljenost zrcala za 0,161 mm da bi se interferencijskoj slici pomaklo 500 krugova. Odredite valnu duljinu upadne svjetlosti.
- Okomito na otvor optičke pukotine pada paralelni snop monokromatske svjetlosti valne duljine λ . Širina pukotine je 6 λ . Pod kojim se kutom dobiva treći minimum?

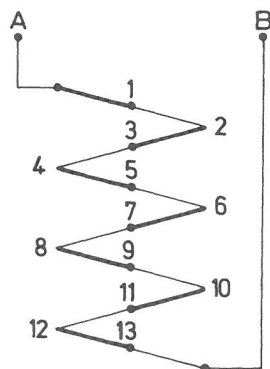
10. Koliko pukotina na jednom milimetru duljine ima optička rešetka ako se zelena Hg-linija ($\lambda = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$) vidi u spektru prvog reda pod kutom od $19^\circ 8'$?
11. Svjetlosni snop paralelnih zraka iz izbojne cijevi pada okomito na optičku rešetku. Izračunajte konstantu rešetke ako u smjeru kuta od 41° zajedno padaju maksimumi dviju valnih duljina, i to $\lambda_1 = 6,563 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ i $\lambda_2 = 4,102 \cdot 10^{-7} \text{ m}$?
12. Ravni val pada okomito na optičku rešetku. U spektru trećeg reda za kut difrakcije α okom promatramo prugu koja pripada svjetlosti valne duljine $4,4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$. Može li se pod jednakim kutom difrakcije α promatrati neka druga valna duljina ako je oko osjetljivo na valno područje od $4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ do $7 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$?
13. Za snimanje holografske rešetke upotrebljava se svjetlost lasera, koje se optičkim putem razdijeli i proširi u dva ravna vala što se presijecaju pod kutom 2Θ . U područje interferencije valova poprijeko se postavi fotografska ploča. Za konstantu rešetke d vrijedi izraz $d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sin \Theta}$.
Ako se rešetka snima pomoću He-Ne svjetlosti lasera valne duljine $632,8 \text{ nm}$, izračunajte broj zareza na milimetru holografske rešetke pri kutu presijecanja zraka 60° .
14. Koji kut s horizontalnom površinom jezera mora zatvarati snop zraka Sunčeve svjetlosti da reflektirana svjetlost bude potpuno polarizirana?
15. Zraka svjetlosti pada na površinu sredstva indeksa loma n pod kutom u . Nadite vezu između kuta u i indeksa loma n ako odbijena i lomljena zraka zatvaraju pravi kut.
16. Koliki kut zatvaraju smjerovi propuštanja polarizatora i analizatora (polaroidi) ako je intenzitet svjetla koje je prošlo kroz polarizator i analizator samo četvrtina intenziteta upadnog svjetla. ApSORpcija svjetlosti je zanemariva.

7. Fotometrija

7.1. Uvodne napomene o fotometrijskim mjerenjima

Fotometrija se bavi mjerenjem svjetlosti, i to svjetlosti »u užem smislu«. Riječ je o elektromagnetskom zračenju na koje je naše oko osjetljivo i koje uzrokuje osjet vida. To je zračenje sadržano u području valnih duljina od približno 0,0004 mm do 0,0008 mm. Oči različitih ljudi pokazuju razlike u osjetljivosti, sposobnosti oštrog vida, razabiranju boja, a u iste se osobe sposobnosti oka sa starošću mijenjaju. Pri izlaganju fotometrijskih odnosa mislimo na zdravo oko, tzv. normalno oko.

Zračenje koje dolazi iz nekog izvora ima i energijska svojstva. Energija zračenja može se mjeriti tako da se mjere njezini toplinski učinci. Ako je riječ o svjetlosnom zračenju koje može izazvati i osjet vida, za mjerenje snage zračenja naročito dobro mogu poslužiti *termoelektrični stup* i *bolometar*.



Slika 7.1. Termoelektrični stup

Termoelektrični stup sastoji se od dvadesetak, sićušnih termoelemenata serijski spojenih tako da im neparna spojišta leže na istom pravcu. Kao kovine termoelemenata mogu se upotrijebiti željezo, konstantan, zatim manganin i konstantan, ili neke druge. Na našoj shemi (sl. 7.1) termostupa jedna je kovina prikazana debljim potezom, a druga tanjim. Spojišta 1, 3, ... 13 leže jedno pored drugoga i mogu se izložiti djelovanju zračenja, npr. jedne spektralne linije nekog spektra. Parna su spojišta zaštićena kućištem termostupa.

Zračenje koje pada na neparna spojišta termostupa povisi temperaturu tih spojišta i između stezaljki A i B nastane električni napon. On je funkcija

povišenja temperature, i mjeri se osjetljivim voltmetrom. Spojišta koja se izlažu zračenju pocrne se čađom tako da apsorbiraju svu energiju zračenja. To je totalni receptor za zračenje i njime se mjeri snaga zračenja koja se u receptoru potpuno pretvara u toplinu. Termostup je načinio i tako primijenio H. Rubens (1865–1922).

Suvremeni postupak proizvodnje tankih slojeva omogućuje izradu termoelektričnog stupa velike pouzdanosti i velike osjetljivosti, do 100 V/W. Općenito ti se detektori primjenjuju u cijelome vidljivom spektralnom području pa do približno 30 μm .

Snaga zračenja može se mjeriti i bolometrom. Apsorbirano zračenje povisuje temperaturu prijemnika detektora za iznos $T - T_0$, zbog čega se mijenja njegov otpor R . Za metale promjena otpora s temperaturom može se opisati izrazom:

$$R(T) = R(T_0) [1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2] \quad (7.1)$$

Veličine α i β temperaturni su koeficijenti, ali s obzirom na to da je $\beta \ll \alpha$, za ne preveliko temperaturno područje mogu se iskoristiti samo prva dva člana napisanog izraza. Za metale je koeficijent $\alpha > 0$, jer se povišenjem temperature metalna kristalna rešetka pobuđuje na sve življe titranje, pa se povećava raspršenje slobodnih elektrona, a time otpor postaje veći.

Moderni metalni bolometri uglavnom su napareni tanki slojevi zlata, platine ili nikla. Upotrebljavaju se i poluvodiči zbog njihovog većeg temperaturnog koeficijenta. Tom vrstom bolometara postiže se veća osjetljivost. U tom slučaju temperaturni koeficijent nije linearan i negativan je, jer s porastom temperature sve više elektrona prelazi u vodljivu vrpcu. Bolometar je osjetljiv pri izrazito niskim temperaturama. Tako su razvijeni bolometri koji s visokom osjetljivošću rade na temperaturi 4,2 K i nižoj.

Bolometrima se koristimo za mjerenja zračenja u vidljivom spektralnom području do onih u mikrovalnom području. Najnoviji razvoj bolometara proširuje njihovu upotrebu i u vakuumskome ultraljubičastom i mekom x-području. Vrijeme odziva detektora je između 50 ms i 15 μs .

Iako je piroelektrična pojava otprije poznata, mjerenje zračenja pomoću nje uvedeno je tek nedavno. Prijemnici tih detektora obično su feroelektrični kristali ili keramike koje zbog svoje kristalne strukture imaju dipolni karakter, pa i permanentnu električnu polarizaciju P_e . Zbog zagrijavanja kristal se širi pa se time mijenja njegova polarizacija, što se odražava na piroelektrični koeficijent $p(T)$ pri temperaturi T , tj.:

$$p(T) = \frac{dP_e}{dT}.$$

Promjena električne polarizacije može se jednostavno izmjeriti tako da se kristal upotrijebi kao dielektrik kondenzatora. Ako je površina presjeka kondenzatora označena sa A , polarizacija na pločama kondenzatora inducira električni naboj,

$$Q_e = P_e A,$$

a pri promjeni polarizacije teče struja:

$$I = \frac{dQ_e}{dt} = A \frac{dP_e}{dT} \frac{dT}{dt} = p(T) A \frac{dT}{dt}.$$

Materijali koji se za te svrhe upotrebljavaju u prijemnicima jesu npr. *TGS* (triglycinsulfat), LiTaO_3 te keramika od olovo-cirkonij-titanata ili barij-stroncij-niobata.

Piroelektrični detektori u infracrvenome spektralnom području imaju veću osjetljivost od bilo kojeg drugog nehladenog detektora. Primjenjuju se kao uređaji za mjerenje energije impulsnog zračenja (impulsni laseri) u području valnih duljina, od 1 nm do 1 mm.

Opisani detektori reagiraju i na vidljiva, i na nevidljiva zračenja. Oko, međutim, reagira samo na vidljiva zračenja, na svjetlost. Prema tome, normalno je oko standardni receptor za svjetlost, tj. za fotometrijska mjerenja.

Između *snage zračenja* i *svjetlosnog toka* koji ulazi u naše oko postoji veza. To ćemo promotriti na jednom primjeru. Neka je živina lučnica opremljena zelenim filtrom koji propušta samo zelenu liniju živina spektra ($\lambda = 546 \text{ nm}$). Ako na nekoj udaljenosti tu svjetlost primamo termostupom, onda on mjeri snagu zračenja na mjestu gdje se on nalazi. Zamijenimo li termostup okom, osjet vida ovisi o toku svjetlosti koji ulazi u oko.

Tada zeleni filtar zamijenimo sa žutim, koji propušta samo žutu živinu svjetlost (dvije bliske spektralne linije valnih duljina $\lambda_1 = 577 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 579 \text{ nm}$). Tada okom možemo potražiti takvu udaljenost da se lučnica u žutoj svjetlosti vidi jednako svijetlo kao prije. Time smo postigli da je žuti svjetlosni tok jednako jak kao i zeleni. Međutim, ako oko nadomjestimo termostupom, on će pri toj svjetlosti izmjeriti veću snagu zračenja od one pri zelenoj svjetlosti.

Da bi osjet vida registrirao neki intenzitet, pri žutoj je svjetlosti veća snaga zračenja nego pri zelenoj. Oko je manje osjetljivo za živino žuto, nego za živino zeleno svjetlo.

Navedeni primjer pokazuje razliku između energijskog i fotometrijskog mjerenja nekog zračenja. Termostupom mjerimo *snagu zračenja* koje na nj pada, dakle energiju u jedinici vremena.

Okom ocijenimo *tok svjetlosti* koji u oku izaziva osjet vida. Dva su toka svjetlosti jednako jaka ako ocijenimo da su osjeti vida jednaki. Dakle, za svaku veličinu pri mjerenju zračenja postoje energijska i fotometrijska mjera.

U sljedećem ćemo tekstu najprije obraditi fotometrijske veličine, dakle one za koje je naše oko normalan receptor. Zatim ćemo se pozabaviti energijskim veličinama i vezom ovih veličina s fotometrijskima.

U mnogim se fotometrijskim mjerenjima oko zamjenjuje fotostanicom opremljenom prikladnim filtrima tako da ta fotostanica ima krivulju osjetljivosti ovisnu o valnoj duljini zračenja, poput normalnog oka.

Krivulja osjetljivosti normalnog oka dobivena je mjerenjima na većem broju zdravih osoba. Ta se krivulja dobije tako da se bijela svjetlost koja sadrži sve boje spektra razloži prizmom. Iz tog se spektra odabere područje (λ , $\lambda + d\lambda$) i blizu njega drugo područje (λ' , $\lambda' + d\lambda'$). Ovi intervali valnih duljina zračenja ne smiju

biti predaleko jedan od drugoga jer je teško okom ocijeniti intenzitete različitih svjetlosnih boja. Tada se tok svjetlosti iz jednoga i iz drugog intervala namjestite tako da ih oko ocijeni jednakima.

Ako tada termostupom izmjerimo snage zračenja tih fototerijski jednakih svjetlosnih tokova, ustanovit ćemo da se te snage razlikuju.

Neka je za svjetlost intervala $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ izmjerena snaga $d^2P(\lambda)$, a u intervalu $(\lambda', \lambda' + d\lambda')$ snaga zračenja $d^2P(\lambda')$. Te snage zračenja (po pravilu različite) pripadaju jednakim svjetlosnim tokovima. Kažemo da **oko ima veću osjetljivost za zračenje za koje je potrebna manja snaga zračenja da se dobije jednako jak osjet vida, tj. jednak tok svjetlosti**. Prema tome, u ovom primjeru, u kojemu su svjetlosni tokovi jednaki, pripadne se osjetljivosti oka na promatrana zračenja odnose obrnuto od snaga zračenja (mjerene termostupom). Imamo, dakle

$$V(\lambda) : V(\lambda') = d^2P(\lambda') : d^2P(\lambda) \quad (7.2)$$

Pritom je $V(\lambda)$ osjetljivost oka na zračenje valne duljine λ .

Napisana formula (7.2) definira omjer osjetljivosti oka. Mjerenja su pokazala da je pri svjetlosti dovoljne jakosti oko najosjetljivije na zeleno valno područje. Smatra se da je valna duljina λ_0 zelene svjetlosti na koju je oko najosjetljivije

$$\lambda_0 = 555 \text{ nm.}$$

Za određeni osjet vida pri toj svjetlosti za normalno oko potrebna je najmanja snaga zračenja.

Ako se u izrazu za omjer osjetljivosti oka (7.2) uvrsti da je osjetljivost oka za svjetlost valne duljine $\lambda' = \lambda_0 = 555 \text{ nm}$ jednaka jedinici, dakle

$$V(\lambda') = V(\lambda_0) = 1,$$

dobije se funkcija koja se naziva **osjetljivost oka**.

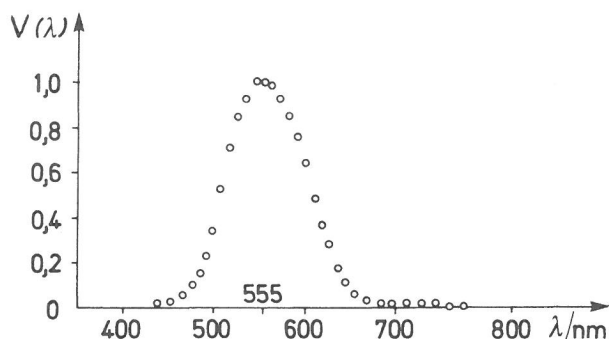
Vrijednosti te funkcije određuju se mjerenjem za veći broj osoba normalnog vida i te su vrijednosti međunarodno prihvaćene kao veličine *standardnoga* fotometrijskog opažача (sl.7.2. i tablica 7.1).

Tablica 7.1. Osjetljivost oka na »danje gledanje«

λ/nm	$V(\lambda)$	λ/nm	$V(\lambda)$
400	0,0004	560	0,995
450	0,0038	580	0,870
500	0,323	600	0,631
520	0,710	650	0,107
540	0,954	700	0,004
550	0,995	750	0,0001
555	1,000	800	0,0000

Osjetljivost oka $V(\lambda)$ ima maksimalnu vrijednost za $\lambda_0 = 555 \text{ nm}$, a za veće i manje valne duljine osjetljivost se smanjuje. Konačno praktički padne na nulu za $\lambda \geq 770 \text{ nm}$ i za $\lambda \leq 380 \text{ nm}$.

Ta krivulja osjetljivosti oka vrijedi ako je svjetlost dovoljno jaka. Tada oko može dobro **razlikovati** boje. To je tzv. *danje gledanje*. Međutim, ako svjetlost postaje sve slabija, maksimum osjetljivosti oka pomiče se prema modrome, a oko prestaje razlikovati boje. To je »*noćno gledanje*« jer tako vidimo predmete npr. pri mjesecini (»Noću su sve mačke sive«). Za noćno gledanje maksimum osjetljivosti je za svjetlost valne duljine $\lambda_0 = 507 \text{ nm}$.



Slika 7.2. Krivulja osjetljivosti oka na svjetlosti različitih valnih duljina

7.2. O fotometrijskim veličinama

7.2.1. Fotometrijske veličine za točkasti izvor svjetlosti

Neka je izvor svjetlosti toliko malen da se može smatrati **točkastim** ako ga motrimo s dovoljne daljine. Hoćemo li neki izvor smatrati točkastim ili ne, ovisi, dakle, o tome iz koje ga daljine motrimo. Tako su zvijezde golemo tjelesa, a za nas su kao izvori svjetlosti na nebu zapravo točkasti.

U pokusima se služimo električnom lučnicom. Kad lučnica gori, uglavnom sva svjetlost (85%) dolazi iz »kratera« na pozitivnoj ugljenoj elektrodi. To je svijetla mrlja promjera 2 do 3 mm koja jarko svijetli bijelom svjetlošću. Temperatura u krateru doseže 4 000 °C. Taj krater nije samo izvor vrlo jake bijele svjetlosti, nego on daje infracrveno i ultraljubičasto svjetlo. U električni je luk opasno gledati nezaštićenim okom.

Lučnicu, dakle, možemo smatrati točkastim izvorom svjetlosti. Međutim, danas laserom možemo dobiti najfiniju »točku« svjetlosti. Ta je točka toliko malena da je koncentracija svjetlosti u njoj vrlo velika, pa i najkraći pogled nezaštićenim okom može izazvati trajno oštećenje oka.

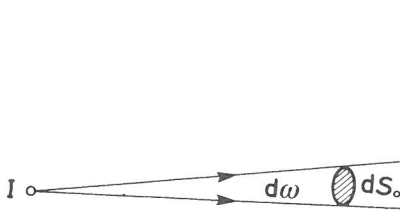
Ako promatramo točkasti izvor svjetlosti, u naše oko stiže dio svjetlosnog toka $d\Phi$ ukupnog toka Φ što ga taj izvor zrači u prostor. Veličina toka svjetlosti $d\Phi$ ovisi o svjetlosnoj *jakosti* I u promatranom smjeru, te o širini snopa svjetlosti koji stiže u naše oko. Širinu snopa mjerimo *prostornim kutom* $d\omega$, koji ima vrh u izvoru a određen je širinom receptora dS_0 , npr. širinom zjenice oka, ako izvor

motrimo neposredno, ili širinom objektiva dalekozora kroz koji motrimo izvor (sl. 7.3)

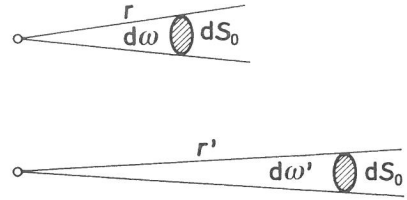
Možemo, dakle, pisati:

$$d\Phi = I \cdot d\omega.$$

Ako bilo kojom plohom presiječemo snop svjetlosti koji ispunjava prostorni čunj otvora $d\omega$ a plašt mu čine zrake što prolaze rubom plohe dS_0 , onda je tok svjetlosti kroz svaki tako dobiven presjek $d\Phi$ uvijek jednak. To možemo reći i ovako: jakost svjetlosti I u snopu širine $d\omega$ stalna je veličina. Naime, pretpostavimo da se svjetlost širi kroz savršeno prozirno sredstvo u kojemu nema slabljenja svjetlosti.



Slika 7.3. Točkasti izvor svjetlosti



Slika 7.4. Uz objašnjenje toka svjetlosti

Ako svjetlost primamo receptorom stalne širine dS_0 , koji postavljamo okomito na pravac upadnih zraka (sl. 7.4), onda širina snopa $d\omega$ ovisi o daljini r receptora od izvora svjetlosti. Iz geometrijskih odnosa slijedi:

$$dS_0 = r^2 d\omega$$

i

$$dS_0 = r'^2 \cdot d\omega',$$

a odavde izvodimo:

$$d\omega' : d\omega = r^2 : r'^2.$$

Uz stalnu širinu receptora dS_0 , uhvaćeni svjetlosni tok (širina snopa) obrnuto je razmjeran kvadratu udaljenosti receptora od točkastog izvora.

Prema tome, ako se s receptorom stalne širine dS_0 odmičemo od točkastog izvora svjetlosti, uhvaćeni se tok svjetlosti $d\Phi$ smanjuje s kvadratom daljine r . Imamo, naime:

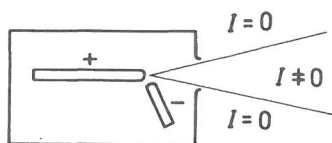
$$d\Phi = I \cdot d\omega$$

$$d\Phi' = I \cdot d\omega' = I \frac{r^2 \cdot d\omega}{r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} \cdot d\Phi.$$

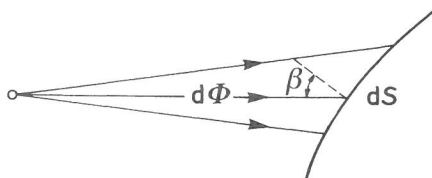
To vrijedi uz pretpostavku da jakost svjetlosti I u snopu uvijek jednaka.

Iz definicije svjetlosnog toka $d\Phi$ slijedi da on ovisi o jakosti svjetlosti I .

Za dani izvor svjetlosti jakost svjetlosti ovisi o smjeru iz kojega gledamo izvor. Ako je npr. izvor električna lučnica, jakost svjetlosti I velika je u smjeru iz kojega se vidi pozitivni krater, a malena iz nekoga drugog smjera. Ako izvor stavimo u kućište (svjetiljku), ono će i dalje mijenjati jakost svjetlosti u raznim smjerovima. Naprimjer, lučnica u crnom kućištu s okruglim otvorom kroz koji svjetlost izlazi od pozitivnog kratera unutar tako dobivenog snopa ima jakost svjetlosti I različitu od nule, a svuda uokolo je $I = 0$ (sl. 7.5).



Slika 7.5. Jakost svjetlosti iz lučnice



Slika 7.6. Točkasti izvor rasvjetljava površinu

Jakost svjetlosti I nije vlastito svojstvo izvora svjetlosti, već ta jakost ovisi i o smjeru motrenja.

Ako svjetlosni tok $d\Phi$ pada na površinu nekog predmeta pod kutom β , taj svjetlosni tok *osvjetljava* tu površinu (sl. 7.6). Dio površine dS najbolje je osvijetljen ako je kut upadanja β na tu površinu jednak nuli. Prema tome, osvijetljenje E površine dS može se ovako definirati:

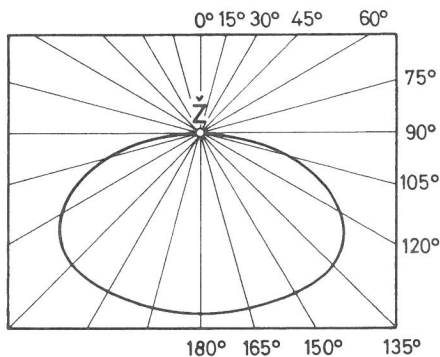
$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi}{dS_0} \cos \beta.$$

U tom je izrazu dS_0 normalni presjek čunja svjetlosti na mjestu gdje se nalazi djelić površine dS . Kvocijent $d\Phi/dS_0$ daje gustoću svjetlosnog toka na mjestu gdje ta svjetlost osvjetljava površinu dS . Ona se podudara s osvijetljenjem ako snop upada na osvijetljenu površinu pravcem normale, tj. ako je kut $\beta = 0$.

Izraz koji daje osvijetljenje neke površine E možemo ovako iskazati riječima: osvijetljenje neke površine usmjerenom svjetlošću razmjerna je kosinusu kuta pod kojim svjetlosni snop upada na površinu, a koeficijent razmjernosti daje gustoću svjetlosnog toka na mjestu gdje se nalazi površina. To je prvi »kosinusni zakon« J. H. Lamberta (1728–1777).

Točkasti izvor svjetlosti isijava svjetlost u prostor, no u raznim smjerovima i različite jakosti. Ako zamislimo da je izvor u ishodištu polarnoga koordinatnog sustava pa iz njega nanosimo radijus-vektore kojima je duljina razmjerna jakosti svjetlosti u smjeru radijus-vektora, vrhovi tih radijus-vektora leže na plohi koju nazivamo **plohom svijetljenja**. Ako je ta ploha aksijalno simetrična, dovoljno je poznavati samo njezin presjek s jednom ravninom koja prolazi osi simetrije. Naprimjer, jedna žarulja sa staklenim balonom okrenutim prema dolje svijetli u prostor simetrično s obzirom na vertikalni pravac kroz sredinu žarulje. Dovoljno je nacrtati presjek plohe svijetljenja s jednom vertikalnom ravninom kroz os. Tako

ćemo dobiti *krivulju svijetljenja*. Uvis, jakost svjetlosti jednaka je nuli. Sva se svjetlost isijava u smjerovima prema dolje (sl. 7.7).



Slika 7.7. Krivulja svijetljenja električne žarulje

Ako znamo kutnu raspodjelu svjetlosne jakosti nekog izvora, onda možemo izračunati ukupni tok svjetlosti Φ što ga daje taj izvor.

$$\Phi = \oint_{4\pi} I d\omega.$$

Integraciju treba obaviti preko cijeloga prostornog kuta, dakle preko 4π izraženom u steradianima (sr).

Ukupni svjetlosni tok nekog izvora mjeri se *Ulbrichtovim* integralnim fotometrom. Ako se odredi Φ , srednju jakost svjetlosti I_s definira izraz:

$$I_s = \frac{\Phi}{4\pi}$$

To je svjetlosna jakost iz idealnoga točkastog izvora koji svijetli na sve strane jednako i koji daje jednak ukupni svjetlosni tok Φ kao i promatrani izvor svjetlosti.

7.2.2. Fotometrijske veličine za plošni izvor svjetlosti

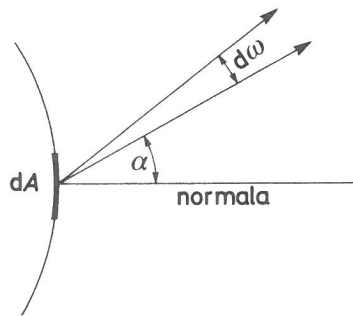
Točkasti je izvor svjetlosti matematička apstrakcija. U stvarnosti svjetlost dolazi iz protežnih tijela, pa ih vidimo pomoću svjetlosti koja izlazi iz njihove površine. Opravdano je, dakle, promatrati *plošne izvore svjetlosti*. U sljedećem ćemo tekstu definirati fotometrijske veličine za plošni izvor svjetlosti.

Promatrat ćemo dio površine dA tijela koje svijetli (sl. 7.8). Taj dio površine šalje u smjer koji s normalom na površinu zatvara kut α svjetlosni tok $d^2\Phi$. Taj je tok razmjeren veličini površine dA , kosinusu kuta α i širini prostornog kuta $d\omega$:

$$d^2\Phi = L(\alpha, \varphi) \cdot dA \cdot d\omega \cdot \cos\alpha \quad (7.3)$$

Upotrijebili smo kosinus kuta α zato što se iz promatranog smjera čini da ploha dA ima veličinu $dA \cdot \cos\alpha$.

Konstanta razmjernosti $L(\alpha, \varphi)$ u izrazu (7.3) za svjetlosni tok $d^2\Phi$ naziva se *luminancija*. To je gustoća svjetlosne jakosti površine dA u točno određenom smjeru promatranja. Smjer promatranja određen je kutom α , tzv. daljinom od pola, i meridionalnim kutom φ , koji daje zakret ravnine promatranja oko normale (kut φ nije nacrtan).



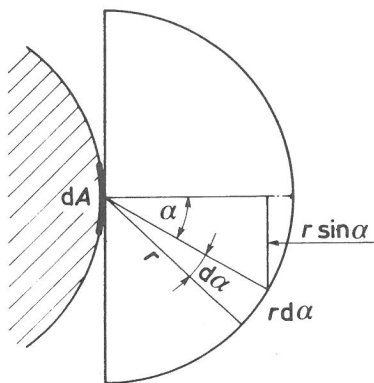
Slika 7.8. Svjetlo s dijela površine dA tijela

Ako napisani izraz za svjetlosni tok plošnog elementa usporedimo s izrazom za svjetlosni tok točkastog izvora, onda je jakost svjetlosti u smjeru (α, φ) :

$$dI = L(\alpha, \varphi) \cdot dA \cos \alpha$$

Ta jakost svjetlosti plošnog elementa ovisi o kutu α , koji je eksplicitno pod znakom kosinusa, no može ovisiti i o kutu φ , ako o njemu ovisi luminancija $L(\alpha, \varphi)$.

Elementom površine dA tijela koje svijetli (sl. 7.9) određena je tangencijalna ravnina na mjestu gdje se nalazi taj element. Ukupno isijavanje svjetlosti iz dA izlazi u poluprostor na onoj strani tangencijalne ravnine gdje uz dA nema tijela. Izračunat ćemo ukupni tok svjetlosti koji izlazi iz dA u slobodni poluprostor.



Slika 7.9. Svjetlo s dijela površine dA tijela u poluprostor

Oko elementa svijetleće površine dA opišimo polukuglu bilo kojega polumjera r . Na toj ćemo polukugli ograničiti mali pravokutnik stranica $r \cdot d\alpha$, te $r \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi$. Nacrtana je samo stranica $r \cdot d\alpha$, a nije nacrtana stranica $r \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi$,

koja je okomita na ravninu crtnje. Ta je stranica opisana polumjerom $r \cdot \sin \alpha$, sa središtem na normali. Površina tog pravokutnika na polukugli je:

$$d^2 S_0 = r^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi,$$

a prostorni kut pod kojim se on vidi iz mjesta gdje je dA dan, izrazom:

$$d\omega = \frac{d^2 S_0}{r^2} = \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi.$$

Kroz element dS_0 polukugle prolazi tok svjetlosti:

$$d^2 \Phi = L(\alpha, \varphi) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dA \cdot d\alpha \cdot d\varphi$$

Kroz cijelu polukuglu, tj. u poluprstor, element dA šalje svjetlosni tok:

$$d\Phi = dA \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L(\alpha, \varphi) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi.$$

Veličina plošnog elementa dA konstanta je, pa je pišemo ispred znaka integrala.

Podijelimo li ukupni tok svjetlosti $d\Phi$ što ga šalje element dA površinom tog elementa, dobit ćemo veličinu:

$$M = \frac{d\Phi}{dA} = \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L(\alpha, \varphi) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi \quad (7.4)$$

koja se naziva *svijetljenje* (svjetlosna egzitancija) površine izvora na mjestu elementa dA .

Napisani izraz za svijetljenje M (7.4.) sasvim je općenit jer luminancija L po bilo kojem zakonu može ovisiti o smjeru (α, φ) . Međutim, ima površina za koje je luminancija L konstanta. Dakle,

$$L(\alpha, \varphi) = L_0,$$

gdje je L_0 luminancija u smjeru normale. Takve površine difuzno svijetle na sve strane u poluprstor. Za takvu je površinu tok svjetlosti što ga površina dA šalje u prostorni kut $d\omega$ određen izrazom:

$$d^2 \Phi = L_0 \cdot dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha,$$

a svjetlosna jakost u promatranom smjeru ima vrijednost:

$$dI = \frac{d^2 \Phi}{d\omega} = L_0 \cdot dA \cdot \cos \alpha.$$

Za takvu je plohu svjetlosna jakost dI koja izlazi iz dA , razmjerna kosinusu kuta α ,

$$dI = dI_0 \cdot \cos \alpha \quad (7.5)$$

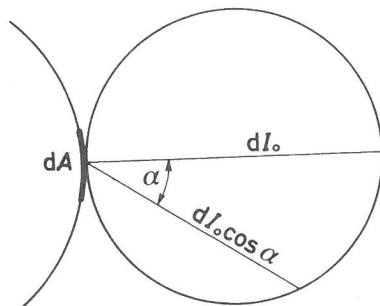
U posljednjem izrazu (7.5) dI_0 je svjetlosna jakost u smjeru normale na dA . U tom je slučaju ploha svijetljenja elementa dA kugla promjera kojeg predočuje

dI_0 i koja dira element dA (sl. 7.10). Bilo koja tetiva te kugle, povučena iz dA ima duljinu $dI_0 \cos \alpha$, pa prema tome predočuje svjetlosnu jakost dI od plošnog elementa dA u tom smjeru.

Ploha dA svijetli u poluprstor razmjerno sa $\cos \alpha$. To je *drugi Lambertov kosinusni zakon*.

Budući da je luminancija L za plohu za koju vrijedi drugi Lambertov zakon konstantna, u ovom slučaju možemo izračunati svijetljenje M takve plohe. Prema definiciji, svijetljenje M je ovako prikazano:

$$M = \frac{d\Phi}{dA} = \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi$$



Slika 7.10 Uz objašnjenje plohe svijetljenja elementa difuzne površine dA

Budući da prema pretpostavci ploha svijetli po drugome Lambertovu zakonu, tada je:

$$L = L_0,$$

pa slijedi:

$$M = L_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

$$M = L_0 2\pi \frac{1}{4} \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha d(2\alpha)$$

$$M = \pi L_0.$$

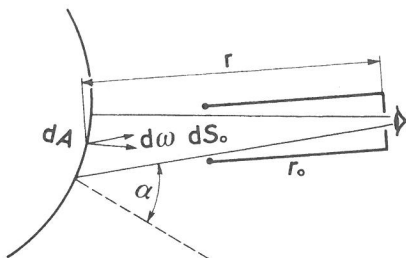
To je svijetljenje plohe koja svijetli po Lambertovu zakonu. Taj podatak određuje *plošnu gustoću ukupnog toka svjetlosti* u poluprstor.

Kako se može eksperimentalno ustanoviti svijetli li neka ploha po drugome Lambertovu zakonu?

Tijelo koje svijetli treba motriti kroz odulju cijev, čija je unutrašnja stijenka zacrnjena. Time sprečavamo ulazak svjetlosti odbijene na unutrašnjoj stijenki u oko. Taj se uvjet može zadovoljiti i tako da se u cijev smjeste prikladni zasloni (sl. 7.11).

Širina otvora dS_0 na početku cijevi, duljina cijevi r_0 , udaljenost oka od svijetle plohe r te, konačno, kut motrenja α određuju veličinu područja dA koje se okom vidi kroz cijev:

$$dA = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{dS_0}{\cos \alpha} \quad (7.6)$$



Slika 7.11. Eksperimentalno provjeravanje da li neka ploha svijetli difuzno

Nadalje, prostorni kut $d\omega$ snopa svjetlosti koji dolazi u oko iz dA određen je širinom zjenice i udaljenošću r oka od plohe. Kad bi cijev bila postavljena tik do svijetle plohe tada bi bilo $r = r_0$, a širina snopa $d\omega_0$. Za nacrtane prilike, međutim, vrijedi:

$$d\omega = \frac{r_0^2}{r^2} d\omega_0 \quad (7.7)$$

Svjetlosni tok koji kroz cijev dolazi u oko potječe iz plohe dA i ovako je određen.

$$d^2\Phi = L(\alpha, \varphi) dA \cdot \cos \alpha d\omega.$$

Uvrstimo li vrijednosti za dA , $d\omega$, prema (7.6) i (7.7) dobit ćemo

$$d^2\Phi = L(\alpha, \varphi) dS_0 d\omega_0.$$

Ako smjer motrenja (α, φ) održavamo stalnim, taj tok ne mijenja vrijednosti. On ne ovisi o daljini r . Sve dok pogled kroz cijev pada samo na svijetlu plohu iz smjera (α, φ) , plohu vidimo jednako svijetlom. Vidno polje otvora cijevi dS_0 jednako je osvijetljeno, neovisno o r .

Ako pokus s nekom plohom pokaže da se ta ploha vidi jednako svijetla gledali je kroz cijev iz bilo kojeg smjera (α, φ) , proizlazi da je:

$$d^2\Phi = L(\alpha, \varphi) dS_0 d\omega_0 = \text{konst.}$$

a iz toga slijedi:

$$\frac{d^2\Phi}{dS_0 \cdot d\omega_0} = L(\alpha, \varphi) = L_0 = \text{konst.}$$

Za takvu je plohu luminancija konstantna. Ploha difuzno svijetli po drugome Lambertovu kosinusnom zakonu.

Takvo je svijetljenje kugle od mliječnog stakla u koju je smješten izvor svjetlosti (električna žarulja), tako svijetli i opalizirana žarulja, površina rastaljene kovine, sunčanom svjetlošću obasjan bijeli papir bez sjaja, površina Sunca, »crno tijelo«.

7.2.3. Mjerne jedinice u fotometriji

U Međunarodnom sustavu mjera SI osnovna je fotometrijska jedinica **kandela**, dogovorenog znaka cd , a njome se izražava svjetlosna jakost I .

U našem dopunjenom Zakonu o mjernim jedinicama i mjerilima iz 1984. god. kandela je definirana ovako:

»Kandela je svjetlosna jakost u danom pravcu izvora koji emitira monokromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ herca i čija je energetska jakost u tom pravcu $1/683$ vata po steradianu.«

Ta je mjerna jedinica svjetlosne jakosti zamijenila razne »svijeće« koje su se prije upotrebljavale kao mjerne jedinice jakosti svjetlosti.

Budući da je svjetlosni tok $d\Phi$ definiran izrazom

$$d\Phi = I \cdot d\omega.$$

Jedinica svjetlosnog toka je:

$$[\Phi]_{\text{SI}} = \text{cd} \cdot \text{sr} = \text{lm}.$$

Ta jedinica ima i posebno ime – **lumen** – i međunarodno propisan znak lm .

Osvjetljenje (iluminancija) E neke površine definirana je izrazom

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (7.8)$$

pa je jedinica osvjetljenja

$$[E]_{\text{SI}} = \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx}.$$

Mjerna jedinica osvjetljenja ima i poseban naziv – **luks** – i znak lx .

Istom se jedinicom iskazuje i gustoća svjetlosnog toka, tj. svijetljenje (svjetlosna egzitancija) površine izvora.

Luminancija L (sjaj, svjetlina površine) definirana je jednadžbom

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega \cdot dA \cos\alpha},$$

pa je jedinica luminancije kandela po četvornom metru*:

$$[L]_{\text{SI}} = \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

* Mjerna jedinica za luminanciju nekada je imala poseban naziv – *nit* i znak nt .

Tom se jedinicom iskazuje svijetljenje ili svjetlosna egzitancija, neke površine (u određenom smjeru), bez obzira na to svijetli li ta površina samostalno, vlastitom svjetlošću, ili svijetli odraženom svjetlošću.

Svijetljenje M elementa površine dA definira se kao

$$M = \frac{d\Phi}{dA},$$

pa je jedinica svijetljenja, svjetlosne egzitancije

$$[M]_{SI} = \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}.$$

Primjer

U projekcionom aparatu nalazi se žarulja ukupnog svjetlosnog toka $\Phi_n = 4800 \text{ lm}$. Pri projekciji, površina pravokutnog oblika sa stranicama $a = 2 \text{ m}$ i $b = 1,5 \text{ m}$, jednoliko je osvijetljena. Osvjetljenje iznosi $E = 4 \text{ lx}$. Treba odrediti koji dio ukupnog svjetlosnog toka osvijetljava zadanu površinu.

Prema definicijskoj formuli za osvijetljenje (7.8), svjetlosni tok $d\Phi$ koji pada na površinu dS je:

$$d\Phi = E dS,$$

pa je na ukupnoj površini $S = a \cdot b$, tok:

$$\Phi = \int_S E dS \quad (7.9)$$

Kako je rasvjeta po cijeloj površini S konstantna, to integral ima vrijednost:

$$\Phi = ES.$$

Od ukupnog svjetlosnog toka žarulje Φ_n na osvijetljavanu plohu otpada:

$$u = \frac{\Phi}{\Phi_n} \quad (7.10)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u (7.10) dobivamo:

$$u = \frac{4 \text{ lx} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m}}{4800 \text{ lm}} = 0,0025$$

odnosno 0,25%.

7.3. Svjetlosne boje

U Aragovu pokusu kad smo linearno polariziranu svjetlost koja je kroz kvarcnu pločicu prošla smjerom optičke osi analizirali islandskim dvolomcem, vidjeli smo *komplementarne* svjetlosne boje. Vidno polje na zastoru rasvijetljeno

redovnom zrakom sadržavalo je jedan dio spektra svjetlosti lučnice, a vidno polje rasvijetljeno izvanrednom zrakom sastojalo se od preostalog dijela svjetlosti iz spektra. Na mjestu prekrivanja tih dvaju polja, zastor je uvijek svijetlio bijelo, a nepokriveni su dijelovi vidnog polja bili redom

žut i modar
crven i modrozelen
purpuran i zelen

U tom je pokusu spektar svjetlosnih boja bio razdijeljen u dvije skupine boja. Kad je jedna od njih izazivala osjet »žutoga«, ostatak je izazivao osjet »modroga«. Naše oko ne osjeća boje od kojih je sastavljena neka svjetlost nego cijelu grupu boja osjeća kao jednu šaru.

Šara koju vidimo može biti jednaka nekoj svjetlosnoj boji iz spektra. Naprimjer, ako se crvenoj boji doda zelena, tako nastalu šaru vidimo žuto, upravo kao jednu žutu boju spektra. U ovom slučaju naše oko ne razlikuje žutu šaru od žute boje. Međutim, ako svjetlost tako sastavljene žute šare prizmom rastavimo na boje, žute uopće neće biti, dok se žuta boja prizmom ne može dalje rastaviti, uvijek ostaje žuta. Dakle, okom ne možemo ocijeniti je li neka svjetlost šara ili boja. Osjet šare je jednostavan. Oko ne može analizirati šare onako kako uho može rastaviti suzvučnik na tonove od kojih je sastavljen.

Šara ima beskrajno mnogo. Samo neke od njih izazivaju u oku jednak osjet kao čiste boje spektra sunčane svjetlosti. Sunčani spektar koji sadrži sve boje, siromašan je u svojoj raznolikosti kad se usporedi s mnoštvom šara. Tako u spektru nema ružičastoga, purpurnog, maslinastozelenog, smeđeg ni bezbroj drugih šara.

Nauku o bojama znanstveno je obradio I. Newton (1642–1727). Svoje pokuse o rastavljanju sunčane svjetlosti prizmom, o ovisnosti indeksa loma o boji, o nepromjenljivosti boje pri prolazu kroz prizmu opisao je u svojoj knjizi *Opticks*.

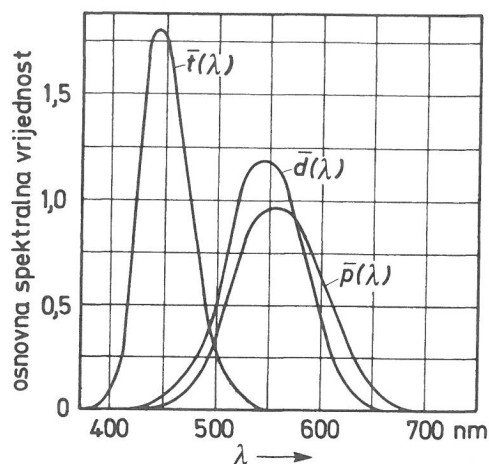
NAPOMENA

Ljudsko oko u načelu djeluje kao kamera. Svjetlo s predmeta ulazi kroz rožnicu i nakon prolaska kroz leću pada na mrežnicu (retinu), na kojoj se formira oštra slika predmeta. Mrežnica je sastavljena od vidnih stanica – »štapića« i »čunjića« te pripadajućih živčanih elemenata. Ako oko reagira samo štapićima, adaptirano je na tamu (»noćno gledanje«), jer štapići mogu označiti razlike u osvijetljenosti promatranog predmeta, a nisu osjetljivi na boju svjetlosti.

Nasuprot štapićima čunjići su trobojni i razlikuju se po svojoj *spektralnoj osjetljivosti*. Ako oko reagira samo čunjićima, ono je adaptirano na »svjetlo«. Na slici 7.12. vide se krivulje spektralne osjetljivosti prema Juddu za oko normalno osjetljivo na boje. Navest ćemo jedan primjer interpretacije boje: žuta svjetlost valne duljine 580 nm podražuje crvene čunjiće (krivulja $\bar{p}$) snagom podražaja 95 % maksimalne stimulacije (maksimum krivulje), zelene čunjiće (krivulja $\bar{d}$) do 78 % maksimalne stimulacije, a modre (krivulja $\bar{t}$) uopće ne podražuje. Dakle, omjer podraživanja, triju vrsta čunjića je 0,95:0,78:0. Živčani sustav interpretira taj omjer podražaja kao osjet žutoga. Kada su svi čunjići približno jednako podraženi, nastaje osjet bijeloga.

(Spomenuli smo samo neke Newtonove mnogobrojne optičke pokuse.) Ono što smo nazvali svjetlosnom bojom Newton naziva »homogenim svjetlom«, a pod *bojom* (colour) razumijeva *kvalitetu osjeta vida* koju opisujemo pridjevima žut, zelen, smeđ, itd. Imajući to na umu, u njegovoj knjizi čitamo: »Boje se mogu proizvesti sastavom koji će biti poput boje homogenog svjetla, što se tiče izgleda

boje, ali ne što se tiče nepromjenljivosti boje i satojaka svjetla.« Zatim, malo dalje: »Bjelina i sve sive boje između bijeloga i crnoga mogu se sastaviti od boja, a bjelina sunčanog svjetla sastavljena je od svih primarnih boja pomiješanih u valjanom omjeru.« Zatim: »U smjesi primarnih boja, ako je dana količina i vrsta svake od njih, određena je boja smjese.« Konačno: »Sve boje u svjetlu, koje su načinjene svjetlošću i ne zavise o moći imaginacije, ili su boje homogenog svjetla, ili su složene od ovih...« Te je svoje tvrdnje Newton dokazao vrlo brojnim pokusima koje je izveo i detaljno opisao.



Slika 7.12. Krivulje spektralne osjetljivosti $\bar{p}(\lambda)$, $\bar{d}(\lambda)$ i $\bar{f}(\lambda)$ za tri vrste čunjića prema Juddu

T. Young je opazio da se *osjet vida* izazvan bilo kojom svjetlosnom bojom ili šarom može izazvati prikladnim miješanjem samo triju boja, tzv. primarnih boja ili *primara*. Dodajući u određenom intenzitetu te primare međusobno, može se dobiti osjet vida koji tako sastavljenu šaru ne razlikuje od šare s kojom se uspoređuje. Ako bismo, međutim, te dvije, za naše oko jednake šare analizirali prizmom, posve je nevjerojatno, da bismo dobili iste boje od kojih su one sastavljene.

Detaljne kvantitativne pokuse sastavljanja šara od triju primara napravio je J.C. Maxwell. Kao primare uzeo je ove boje: crvenu ($\lambda_1 = 631,1 \text{ nm}$), zelenu ($\lambda_2 = 518,8 \text{ nm}$) i modru ($\lambda_3 = 465,4 \text{ nm}$). Ako se počne sa crvenom, pa joj se postepeno dodaje zelena tako da se crvena oslabljuje za onoliko koliko se zelene dodalo šara koju vidimo izaziva osjete vida koji odgovaraju spektralnim bojama od crvene do zelene. Pošto tako dobijemo čistu zelenu i nakon toga joj na opisani način dodajemo modru, dobivene će šare imati izgled boja od zelene do modre. Ako se tada modroj dodaje crvena, dobivaju se tonovi purpurne, koje u spektru nema. Pomiješamo li sve tri boje u jednakom omjeru, dobit ćemo sivu, koja se ovisno o jakosti svjetlosti primara, kreće od tamnosive do bijele. Bilo koja dva primara pomiješana u jednakim količinama daju komplementarnu šaru za treći

primar. Tako crvena i zelena daju žutu, koja je komplementarna modrom primaru.

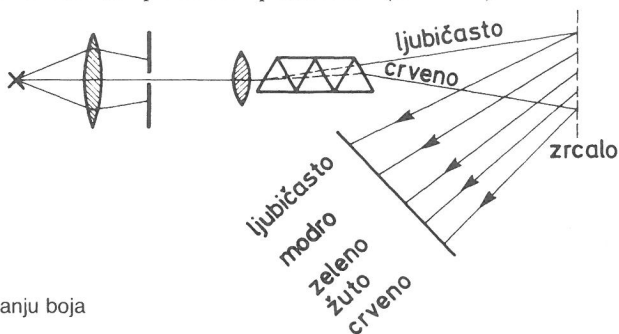
To miješanje boja provodi se *dodavanjem* jedne boje drugoj, npr. tako da se bijeli zastor *istodobno* i na istom mjestu osvjetli svjetlošću triju primara. Zbog tromosti osjeta vida boje možemo dodavati i *uzastopno*, tj. tako da isto mjesto zastora uzastopno osvjetljavamo brzim slijedom primara.

Kako se takvim *aditivnim* miješanjem svih boja spektra dobije bijelo, Newton je pokazao u više pokusa. Jedan od njih je i pokus u kojemu se pojedini dijelovi okrugle ploče boje redom crveno, narančasto, žuto, zeleno, modro i ljubičasto. Kad se ploča dovoljno brzo vrti, vidimo je kao svjetlosivu (Newtonov zvrk).

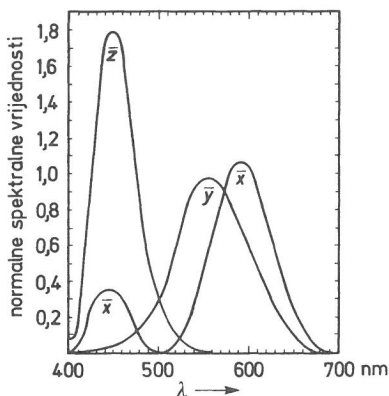
Sastavljanje šara aditivnim miješanjem triju primara danas ima veliku važnost za televiziju u boji. Na ekranu prijemnika postoje tri *fosfora*, fluorescentna primara koji, pobuđeni udaranjem elektrona, daju tri primara: crveni, zeleni i modri. Svaki se fosfor pobuđuje na svijetljenje svojim posebnim snopom elektrona. Dakle, u katodnoj su cijevi prijemnika tri snopa. O intenzitetu tih snopova u nekom trenutku i na nekom mjestu ekrana ovisi kakvu ćemo šaru vidjeti.

Prema normama CIE (*Comission Internationale d'Éclairage*), primarima se smatraju crvena ($\lambda_1 = 700,0 \text{ nm}$), zelena ($\lambda_2 = 546,1 \text{ nm}$), i modra boja ($\lambda_3 = 435,8 \text{ nm}$).

Aditivno slaganje boja može se pokazati pokusom (sl. 7.13). Pomoću



Slika 7.13. Pokus o aditivnom slaganju boja



$$\bar{x}(500 \text{ nm}) = 0,0049, \bar{y}(500 \text{ nm}) = 0,3230 \text{ i } \bar{z}(500 \text{ nm}) = 0,720.$$

Slika 7.14. Standardne krivulje miješanja boja prema međunarodnom dogovoru iz 1931. godine

* Prema međunarodnom dogovoru iz 1931. godine ustanovljene su standardne krivulje miješanja boja pokazane na slici 7.14). Ovisno o valnim duljinama od 40 do 700 nm, ordinate su svjetlosni tokovi u slobodnim jedinicama, pa su površine ispod sve tri krivulje jednake. Simboli $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ i $\bar{z}(\lambda)$ ordinate su neke valne duljine. Tako se npr. dobivaju vrijednosti ordinata za zeleno svjetlo valne duljine 500 nm:

Budući da boju određuju tri broja, potreban je trodimenzionalni diagram kojim bi se boje mogle grafički predočiti. To nije praktično pa se boje predočavaju dvodimenzionalnim dijagramom uvođenjem novih triju veličina $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ i $z(\lambda)$. Tako vrijedi:

$$x(\lambda) = \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}}, \quad y(\lambda) = \frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}}, \quad z(\lambda) = \frac{\bar{z}}{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}}.$$

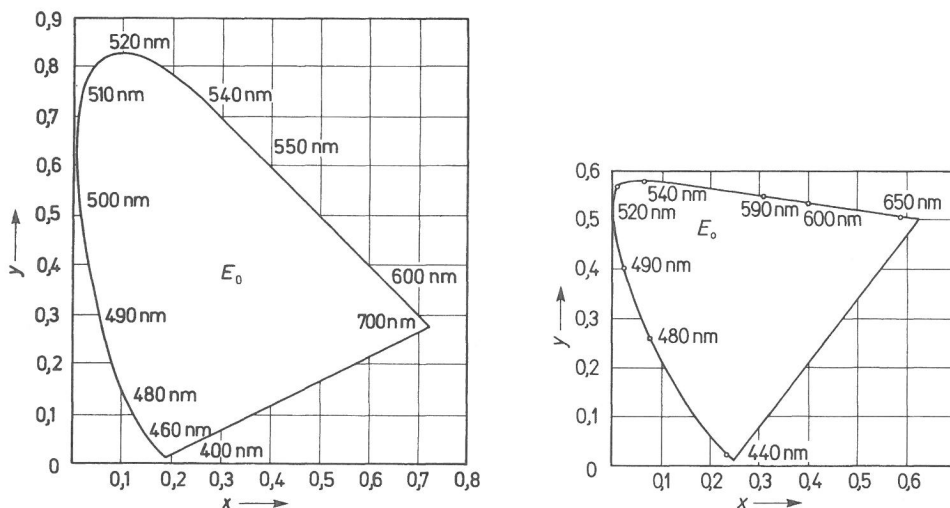
Navedene veličine $\bar{x}$, $\bar{y}$ i $\bar{z}$ nazivaju se *trikromatski koeficijenti*. Definirani su tako da je ispunjen uvjet:

$$x + y + z = 1.$$

Uz zadani su uvjet u grafičkom prikazu dovoljna samo dva koeficijenta boja. U odabranom primjeru zelene boje valne duljine 500 nm koeficijenti su sljedeći:

$$x = \frac{0,0049}{0,5999} = 0,0082, \quad y = \frac{0,3230}{0,5999} = 0,5384, \quad z = \frac{0,2720}{0,5999} = 0,4534.$$

Boja se može predočiti kao točka u dvodimenzionalnome koordinatnom sustavu s međusobno okomitim osima x i y (sl. 7.15.a). Koordinate točke u grafičkom prikazu jesu: $x = 0,0082$ i $y = 0,5384$. Jednaki se proračun može izvesti i za ostale boje i šare, a dijagram je prikazan u priloženoj slici. Točka E na slici ima koordinate $E(0,333; 0,333)$, što znači da su sva tri koeficijenta jednaka. To je »bijela« točka. Godine 1975. predložene su nove norme prikazane na slici 7.15.b.



Slika 7.15.a. Grafičko predočavanje boja i šara prema CIE-normama iz 1931. x i y su kromatski koeficijenti

Amicieve prizme napravimo spektar svjetlosti lučnice na slogu ravnih zrcala koja se mogu okretati oko osi okomitih na crtnju. Na svako zrcalo pada samo uski dio spektra. Tako na prvo pada ljubičasti, zatim modri, i tako do crvenog. Svjetlost odbijena na zrcalima hvata se na ploču od mutnog stakla. Uz prikladan smještaj zrcala, na zastoru vidimo paralelne pruge raznih boja. Okretanjem pojedinih zrcala možemo postići prekrivanje bilo kojih boja, čime dobivamo razne šare.

7.4. O kolorimetriji

Nauka o sastavljanju i mjerenju svjetlosnih boja naziva se *kolorimetrija*. U prethodnom smo odjeljku upoznali neke činjenice s tog područja. Sada ćemo definirati funkciju razdiobe jakosti svjetlosti nekog izvora u ovisnosti o valnoj duljini svjetlosti.

Neka je I jakost svjetlosti za točkasti izvor u odabranom smjeru. Ta se svjetlost može rastaviti na svjetlosne boje. U nekom intervalu $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ valnih duljina te svjetlosti jakost je

$$dI = i(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Funkcija $i(\lambda)$ funkcija je razdiobe svjetlosne jakosti. Ukupnu jakost I dobijemo, ako sve te jakosti zbrojimo. Zbrajanje se provodi na cijelom vidljivom spektru, dakle praktički od $\lambda_1 = 300$ nm do $\lambda_2 = 800$ nm, bez obzira na to što smo odabrali granice širokog intervala jer je $i(\lambda) = 0$ za nevidljivo zračenje. Dakle,

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Budući da je svjetlosni tok

$$d\Phi = I d\omega,$$

dio toka kojemu pripadaju valne duljine iz intervala $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ prikazan je ovako:

$$d^2\Phi = i(\lambda) d\lambda d\omega,$$

a ukupni tok u prostornom kutu $d\omega$ iznosi:

$$d\Phi = d\omega \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda) \cdot d\lambda.$$

To se odnosilo na točkasti izvor svjetlosti. Međutim, ako je izvor plošno raspoređen, definicije raznih veličina odnose se na plošni element dA svijetleće površine. Luminancija L ukupna je gustoća svjetlosne jakosti površine dA . Ta se luminancija može spektralno analizirati i porazdijeliti po valnim duljinama. Neka je $l(\lambda)$ funkcija razdiobe. Tada je luminancija za valno područje $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ dana izrazom:

$$dL = l(\lambda) \cdot d\lambda,$$

a ukupna luminacija integralom:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} l(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Svjetlosni tok iz plošnog elementa dA za valno područje $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ dan je izrazom:

$$d^3 \Phi = l(\lambda) d\lambda \cdot dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha,$$

a svjetlosni tok u svim valnim duljinama iz plošnog elementa dA iznosi:

$$d^2 \Phi = dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} l(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Pritom je α kut što ga smjer motrenja zatvara s normalom na element dA .

U kakvoj ćemo boji odnosno šari vidjeti neki izvor svjetlosti, ovisi o funkcijama razdiobe $i(\lambda)$ odnosno $l(\lambda)$.

Svakoj funkciji razdiobe pripada određeni *osjet vida*. Međutim, jednakom se osjetu vida može pridružiti mnoštvo različitih funkcija razdiobe zato što naše oko različite sastave boja osjeća jednako.

Za linijske spektre funkcije razdiobe u uskim područjima valnih duljina u koja padaju linije imaju vrijednost različitu od nule, inače su jednake nuli. U kontinuiranom spektru lučnice funkcija razdiobe je kontinuirana i postepeno se mijenja.

Zračenje izvora svjetlosti možemo istraživati i energijskim receptorom npr. *termocupom*. Neka je ukupna snaga zračenja u prostorni kut $d\omega$ za točkasti izvor

$$dP = J \cdot d\omega.$$

Pritom je J jakost zračenja u promatranom smjeru onakva kakvu je registrirao totalni receptor.

I u ovom slučaju tu jakost zračenja možemo promatrati razdijeljenu po valnim duljinama. Tu razdiobu određuju funkcija $j(\lambda)$, pa je za interval valnih duljina elektromagnetskog zračenja $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

$$dJ = j(\lambda) \cdot d\lambda,$$

a za cijelo područje:

$$J = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} j(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Pritom područje integracije treba odabrati šire nego za analognu veličinu, jakost svjetlosti I , u fotometriji jer receptor reagira i na zračenja za koja je osjetljivost jednaka nuli.

Prema tome, snaga zračenja što ga točkasti izvor isijava u valnom području $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ određena je jednakošću:

$$d^2 P(\lambda) = j(\lambda) \cdot d\lambda \cdot d\omega,$$

a ukupna se snaga zračenja dobije zbrajanjem prema pojedinim valnim duljinama. Dakle,

$$dP = d\omega \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} j(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Te definicijske formule vrijede za *točkasti* izvor zračenja.

Međutim, ako je izvor plošno raspoređen, definicije se odnose na plošni element dA izvora zračenja. Neka je L_e radijancija ili gustoća jakosti zračenja površine dA u odabranom smjeru za cijelo valno područje. Tu gustoću L_e možemo analizirati po valnim duljinama, a rezultat je dan funkcijom razdiobe $L_e(\lambda)$:

$$dL_e = l_e(\lambda) \cdot d\lambda$$

Pritom je dL_e radijancija gustoća jakosti zračenja valnih duljina iz intervala $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Ukupna radijancija L_e tada je ovako prikazana:

$$L_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} l_e(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Granice integracije valja uzeti dovoljno široke tako da se obuhvati cijelo područje u kojemu je $l_e(\lambda) \neq 0$.

Snaga zračenja d^3P koju element površine dA isijava u smjeru (α, Φ) u prostorni kut $d\omega$ te unutar valnog područja $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ iznosi:

$$d^3P(\lambda) = l_e(\lambda) d\lambda \cdot dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha,$$

gdje je α kut što ga smjer isijavanja zatvara s normalom na dA . Snaga zračenja zbrojena po svim valnim duljinama iznosi:

$$\begin{aligned} d^2P &= dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} l_e(\lambda) \cdot d\lambda, \\ &= L_e \cdot dA \cdot d\omega \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

7.4.1. Mjerne jedinice za neke energijske veličine zračenja

Snaga zračenja P definira se energijom koju to zračenje prenese u jedinici vremena. Dakle, vrijedi:

$$[P]_{SI} = m^2 \cdot s^{-3} \cdot kg = W.$$

Iz veze između snage zračenja P i jakosti zračenja J ,

$$dP = J \cdot d\omega,$$

slijedi jedinica jakosti zračenja:

$$[J] = \text{W} \cdot \text{sr}^{-1}.$$

Budući da je

$$J = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} j(\lambda) \cdot d\lambda,$$

Jedinica za funkciju razdiobe $j(\lambda)$ jakosti zračenja je:

$$[j(\lambda)]_{\text{SI}} = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}.$$

Formula koja povezuje snagu zračenja d^3P i funkciju razdiobe gustoće zračenja $l_e(\lambda)$ plošnog elementa dA vodi mjernoj jedinici funkcije razdiobe $l_e(\lambda)$:

$$[l_e(\lambda)]_{\text{SI}} = \text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sr}^{-1}.$$

Odatle slijedi da je mjerna jedinica radijancije, gustoće zračenja L_e uzeta preko svih valnih duljina dana izrazom:

$$[L_e]_{\text{SI}} = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}.$$

Navedene mjerne jedinice pripadaju Međunarodnom sustavu (SI). Osim tih jedinica ima i drugih izvedenih iz nekih drugih polaznih jedinica. Međutim, definicijske jednadžbe koje povezuju fizikalne veličine vrijede bez obzira na to, kojim se mjernim jedinicama pojedine veličine iskazuju.

7.4.2. Veza fotometrijskih i energijskih veličina

Jakost svjetlosti I iskazujemo djelovanjem te svjetlosti na oko i njezinim uspoređivanjem s jakošću svjetlosti za koju smo dogovorno prihvatili da iznosi jedna kandela (cd). Tako je ta jakost svjetlosti izmjerena u fotometrijskoj mjeri – kandela.

Međutim, svjetlost jakosti I na koju oko reagira jest zračenje jakosti J . Tu jakost zračenja izmjerimo totalnim receptorom, npr. termostupom, a jedinica te veličine je vat po steradianu, $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$. Tako je zračenje koje izaziva osjet vida izmjereno i energijskom mjernom jedinicom.

Ovakva dva sustava jedinica ne mogu se uspoređivati neposredno i bez poznavanja valnog sastava tog zračenja. Stoga ćemo radi jednostavnosti uspoređivati fotometrijsko mjerenje jakosti svjetlosti s energijskim mjerenjem jakosti zračenja za sasvim usko područje valnih duljina u intervalu $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Dakle, ograničavamo se praktički na jednu boju, na monokromatsku svjetlost, odnosno na monokromatsko zračenje.

Jakost svjetlosti promatrane boje valne duljine λ iznosi:

$$dI = i(\lambda) \cdot d\lambda \quad (7.11)$$

a jakost zračenja te iste radijacije:

$$dJ = j(\lambda) \cdot d\lambda \quad (7.12)$$

Između tih dviju veličina postoji veza. Uz odabrano λ , jakost svjetlosti dI razmjerna je jakosti zračenja dJ unutar širokih granica. Mislimo, naime, na »danje gledanje«, pa zračenje na neki način ne smije biti preslabo da se ne bi javili uvjeti »noćnoga gledanja«. Istodobno, zračenje ne smije biti prejako da bi se oko moglo normalno pobuđivati.

Možemo, dakle, pisati:

$$dI = K(\lambda) \cdot dJ.$$

Konstanta razmjernosti $K(\lambda)$, zvana *fotometrijski ekvivalent* zračenja, ovisi o valnoj duljini zračenja jer o tome ovisi osjetljivost oka.

Uvrstimo li u posljednju formulu izraze (7.11) i (7.12) za jakost svjetlosti dI i jakost zračenja dJ , slijedi:

$$i(\lambda) = K(\lambda) \cdot j(\lambda).$$

To vrijedi za točkasti izvor svjetlosti.

Ako je izvor svjetlosti plošno raspoređen, jakost svjetlosti od plošnog elementa dA , koja ima valnu duljinu iz intervala $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, dana je izrazom:

$$d^2I = \frac{d^3\Phi}{d\omega} = I(\lambda) \cdot d\lambda \cdot dA \cos \alpha.$$

Osim toga, jakost zračenja te iste radijacije pokazana je ovako:

$$d^2J = \frac{d^3P}{d\omega} = I_e(\lambda) \cdot d\lambda \cdot dA \cos \alpha.$$

Te su dvije jakosti povezane fotometrijski ekvivalentom,

$$d^2I = K(\lambda) \cdot d^2J,$$

pa odatle neposredno slijedi da su pripadne funkcije razdiobe:

$$I(\lambda) = K(\lambda) \cdot I_e(\lambda).$$

Budući da su luminancija L , odnosno radijancija, gustoća zračenja L_e , dane izrazima:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) \cdot d\lambda$$

$$L_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_e(\lambda) \cdot d\lambda,$$

luminancija je određena izrazom:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K(\lambda) l_e(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Bilo koji napisani izraz u kojemu se nalazi fotometrijski ekvivalent može nam poslužiti za određivanje jedinice te veličine. Pođimo od najjednostavnijega:

$$dI = K(\lambda) \cdot dJ.$$

Iz te formule slijedi:

$$[K(\lambda)] = \frac{[I]}{[J]} = \text{cd} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{sr} = \text{lm} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Kako je već spomenuto, osjetljivost oka je najveća za elektromagnetsko zračenje valne duljine $\lambda_0 = 555 \text{ nm}$. Na osnovi mjerenja na zdravim osobama, za tu je valnu duljinu prihvaćena pripadna maksimalna vrijednost za fotometrijski ekvivalent:

$$K(\lambda_0) = K_m = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}.$$

To vrijedi za danje gledanje.

Sada ćemo naći vezu između fotometrijskog ekvivalenta zračenja $K(\lambda)$ i osjetljivosti oka $V(\lambda)$. Sjetimo se kako je definirana osjetljivost oka. Ako je snaga zračenja $d^2P(\lambda)$ za valnu dužinu λ toliko jaka da izaziva jednako jak osjet vida kao i snaga zračenja $d^2P(\lambda_0)$, onda je:

$$V(\lambda) : V(\lambda_0) = d^2P(\lambda_0) : d^2P(\lambda).$$

U tu se jednakost uvrštava $V(\lambda_0) = 1$, za $\lambda_0 = 555 \text{ nm}$, pa je:

$$V(\lambda) = d^2P(\lambda_0) : d^2P(\lambda).$$

Navedene snage zračenja $d^2P(\lambda)$ i $d^2P(\lambda_0)$ izazivaju jednako jake osjete vida. Dakle, pripadni su tokovi svjetlosti jednako jaki:

$$d^2\Phi(\lambda) = d^2\Phi(\lambda_0).$$

Ako svjetlosni tok izrazimo pomoću jakosti svjetlosti, slijedi:

$$\begin{aligned} d^2\Phi(\lambda) &= dI(\lambda) d\lambda \cdot d\omega \\ &= K(\lambda) dJ(\lambda) d\lambda d\omega \\ &= K(\lambda) d^2P(\lambda) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Na sličan način dobijemo:

$$\begin{aligned} d^2\Phi(\lambda_0) &= K(\lambda_0) d^2P(\lambda_0) \\ &= K_m d^2P(\lambda_0) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ako ta dva svjetlosna toka izjednačimo dobit ćemo:

$$K(\lambda) d^2P(\lambda) = K_m d^2P(\lambda_0),$$

a odavde:

$$K(\lambda) : K_m = d^2 P(\lambda_0) : d^2 P(\lambda).$$

Ako to usporedimo s izrazom za osjetljivost oka $V(\lambda)$, vrijedi:

$$K(\lambda) = K_m V(\lambda).$$

Fotometrijski ekvivalent $K(\lambda)$ za bilo koju valnu duljinu λ dobije se tako da se maksimalni fotometrijski ekvivalent K_m množi s osjetljivošću oka $V(\lambda)$ za tu valnu duljinu.

Uzmemo li u obzir dobiveni rezultat, izraz za luminanciju možemo pisati ovako:

$$L = K_m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) \cdot I_e(\lambda) \cdot d\lambda.$$

PITANJA I ZADACI

1. Kakvim se mjerenjima bavi fotometrija?
2. Opišite termoelektrični stup.
3. Što je bolometar?
4. Što je standardni receptor za svjetlost, tj. za fotometrijska mjerenja?
5. Opišite krivulju osjetljivosti oka.
6. Obrazložite fotometrijske veličine za točkasti izvor svjetlosti.
7. Obrazložite fotometrijske veličine za plošni izvor svjetlosti.
8. Navedite definiciju kande, (SI 1984).
9. Čime se bavi kolorimetrija?
10. Koje su mjerne jedinice u fotometriji, a koje su jedinice energijske veličine zračenja? Kakva je veza između tih veličina?
11. Svjetlo električne svjetiljke jakosti 200 cd pada na radni stol pod kutom 45° . Osvjetljenje iznosi 141 lx. Nađite: a) udaljenost svjetiljke od radnog stola i b) visinu svjetiljke radnog stola.
12. Pri fotografiranju predmet je osvijetljen električnom svjetiljkom udaljenom 2 m od njega. Koliko se puta mora povećati vrijeme ekspozicije, ako ista svjetiljka osvjetljava predmet s udaljenosti 3 m?
13. U sredini kvadratične sobe površine 25 m^2 obješena je svjetiljka. Uz pretpostavku da je svjetiljka točkasti izvor, izračunajte visinu od poda na kojoj se mora nalaziti svjetiljka da osvjetljenje u kutovima sobe bude najveće?
14. Žarna nit električne žarulje jakosti 100 cd zatvorena je u balonu od mat-stakla promjera a) 0,05 m i b) 0,10 m. Odredite osvjetljenje površine i luminaciju za oba slučaja.

8. Kvantna priroda svjetlosti

Već smo razmatrali svojstva elektromagnetskih valova i njihovo širenje kroz prostor. Uvjerili smo se u valnu prirodu svjetlosti i ostaloga elektromagnetskog zračenja i proučavali eksperimentalne činjenice koje potvrđuju valna svojstva elektromagnetskih valova.

Krajem prošlog stoljeća iskršli su mnogi problemi koje nije mogla riješiti klasična fizika. Jedna od takvih pojava je i toplinsko zračenje tijela: eksperimentalni spektar nije u skladu s predviđanjima Maxwellove teorije elektromagnetskog zračenja. Na sastanku Njemačkoga fizikalnog društva 1900. godine Max Planck je prikazao rješenje tog problema pretpostavljajući da atomi imaju kvantizirana energijska stanja, da emitiraju energiju u »*kvantima*«, prelazeći iz jednog stanja u drugo, a ne kontinuirano kao što je pretpostavljala klasična fizika. Taj datum (14. XII. 1900) smatra se rođendanom kvantne fizike.

Malo kasnije (1905) Albert Einstein je protumačio fotoelektrični efekt pretpostavljajući da se elektromagnetski valovi u interakciji s atomima ponašaju kao čestice (korpuskule). Tako se u fizici pojavio *foton*, čestica svjetlosti s čestičnim i valnim svojstvima. Korpuskularnu prirodu još su bolje potvrdili eksperimenti A.H. Comptona (1923), u kojima su se fotoni raspršivali na elektronima po zakonima sudara dvije čestice.

Danas su osim tih poznati i mnogi drugi pokusi koji nedvojbeno potvrđuju da se zračenje ponaša kao čestica u svojoj interakciji s tvari, a kao val, kad se širi kroz prostor. Svjetlost i ostali elektromagnetski valovi imaju dualnu prirodu: valnu i korpuskularnu.

8.1. Toplinsko zračenje

Toplinsko (termičko) zračenje nastaje kada atomi ili molekule tijela, pobuđeni termičkim gibanjem, emitiraju elektromagnetske valove. Užarena tijela zrače elektromagnetske valove uglavnom u infracrvenom području. Upaljena peć grije okolne predmete to jače što joj je temperatura veća. Intenzitet i spektralni sastav izračene toplinske energije nekog tijela uglavnom ovise o njegovoj temperaturi.

Pri nižim temperaturama tijela emitiraju infracrveno zračenje, a ako su temperature veće od oko 800 K, tijela osim infracrvene počinju zračiti i vidljivu svjetlost; pri vrlo visokim temperaturama, osim infracrvene i vidljive, emitira se i ultraljubičasta svjetlost. Iako na visokim temperaturama tijela svijetle, ne smijemo

zaboraviti da vidljiva svjetlost nije jedino zračenje koje ona emitiraju. Emisijski spektri užarenih čvrstih tijela kontinuirani su i sastoje se od svih valnih duljina (od najkraćih, ultraljubičastih, do najdužih, infracrvenih); pritom su neke valne duljine isijavane jače, druge slabije. Raspored energije po pojedinim valnim duljinama bitno ovisi o temperaturi tijela koje zrači.

Infracrveno zračenje (koje često nazivamo i toplinskim zrakama) dio je spektra elektromagnetskih valova valne duljine između $0,75 \mu\text{m}$ i $1000 \mu\text{m}$, dakle između vidljive (crvene) svjetlosti ($0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,75 \mu\text{m}$) i mikroradiovalova ($\lambda > 1000 \mu\text{m}$). Veći dio spektra zračenja tijela na temperaturama manjim od 3000 K pripada infracrvenom području; pri običnoj temperaturi (300 K) cijeli je spektar zračenja u infracrvenom području i proteže se od oko $2 \mu\text{m}$ do $25 \mu\text{m}$, s maksimumom na oko $10 \mu\text{m}$.

Emisijski spektri čvrstih tijela kontinuirani su i sastoje se od svih valnih duljina, od neke minimalne do maksimalne. Osim o temperaturi, oblik spektra i raspored energije po pojedinim valnim dužinama ovisi i o osobinama površine tijela koje zrači.

Crno tijelo. Kada zračenje upada na površinu nekoga neprozirnog tijela, dio upadnog zračenja se odbija, a dio se apsorbira. Omjer apsorbiranoga i upadnog toka zove se faktor *apsorpcije*:

$$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_u} \quad (8.1)$$

a omjer reflektiranoga i upadnog toka je faktor *refleksije*:

$$\varrho = \frac{\Phi_r}{\Phi_u} \quad (8.2)$$

Upadni tok dijeli se na apsorbirani i reflektirani dio, pa stoga vrijedi:

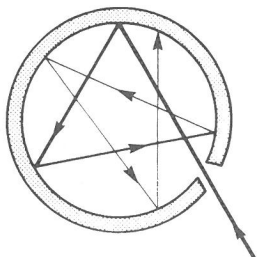
$$\alpha + \varrho = 1 \quad (8.3)$$

Tijelo koje potpuno apsorbira određene valne duljine crno je za to područje spektra; njegov faktor apsorpcije je $\alpha = 1$, a faktor refleksije $\varrho = 0$. Takvo tijelo izgleda crno ako apsorbira vidljivu upadnu svjetlost. Tako čađa ima $\alpha \approx 1$ za vidljivi dio spektra elektromagnetskog zračenja, a za velike infracrvene valne duljine $\alpha < 1$.

Tijelo koje reflektira cijelo upadno zračenje jest *bijelo* tijelo, s faktorom refleksije $\varrho = 1$. Tijelo koje djelomično reflektira sve valne duljine upadnog zračenja podjednako zove se *sivo tijelo*. Faktor refleksije sivog tijela kreće se između 0 i 1 i ne ovisi o valnoj duljini. Općenito, većina tijela nisu siva i faktori refleksije i apsorpcije su im funkcije valne duljine.

Idealno crno tijelo potpuno apsorbira sve upadno zračenje. Idealno crno tijelo u prirodi ne postoji. Ipak, vrlo dobro aproksimacija crnog tijela jest *izotermna šupljina* s malim otvorom. Otvor takve šupljine (sl. 8.1) ponaša se kao crno tijelo jer gotovo potpuno apsorbira sve upadno zračenje koje kroz otvor uđe u šupljinu. Naime, zraka se nakon ulaska u šupljinu mnogobrojnim refleksijama u njoj

potpuno apsorbira i vjerojatnost da dio upadnog zračenja iziđe vrlo je malena. Otvor takve šupljine izgleda sasvim crn.



Slika 8.1. Idealno crno tijelo; reflektirane zrake nacrtane su sve tanje i tanje da bi se istaklo kako se pri svakoj refleksiji dio energije apsorbira

Ukupni energijski tok (energija u jedinici vremena) što ga zrači površina S tijela u sav poluprstor označimo sa Φ_e . Ako tok Φ_e podijelimo površinom tijela S , dobit ćemo gustoću toka energije, tj. intenzitet zračenja I , odnosno energiju koju zrači jedinica površine tijela u jedinici vremena:

$$I = \frac{\Phi_e}{S} \quad (8.4)$$

To je ukupni intenzitet (energijska egzitancija) koji obuhvaća sve valne duljine (frekvencije). Dio dI ukupnog intenziteta I koji crno tijelo izrači s valnim duljinama od λ do $\lambda + d\lambda$ funkcija je valne duljine i temperature:

$$\begin{aligned} dI &= I_\lambda d\lambda \\ dI &= f_{ct}(\lambda, T) d\lambda \end{aligned} \quad (8.5)$$

pri čemu veličinu $f_{ct}(\lambda, T)$ zovemo emisiona moć (spektralna gustoća zračenja) crnog tijela.

Ukupni intenzitet zračenja dobija se integriranjem emisione moći po svim valnim duljinama:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{dI}{d\lambda} d\lambda \\ I &= \int_0^\infty f_{ct}(\lambda, T) d\lambda \end{aligned} \quad (8.6)$$

Emisiona moć $f(\lambda, T)$ bilo kojeg tijela jest snaga toplinskog zračenja određene valne duljine (frekvencije) koju na temperaturi T emitira jedinica površine tijela, pa $f(\lambda, T)$ ovisi o valnoj duljini, temperaturi, materijalu i osobinama površine tijela.

Jedinica ukupnog intenziteta zračenja je $\frac{W}{m^2}$, a jedinica spektralnog intenziteta I_λ , odnosno $f(\lambda, T)$, $\frac{W}{m^3}$ ili $\frac{W}{m^2 \mu m}$, s obzirom na to da se valna duljina obično iskazuje u mikrometrima (μm).

Pri teorijskim razmatranjima često je praktičnije raditi s frekvencijom ν , a pri mjerenju s valnom duljinom λ . Umjesto spektralnih veličina izraženih pomoću λ , možemo upotrijebiti veličine I_ν i $f(\nu, T)$. Budući da je $\lambda = c/\nu$ i $d\lambda = -\lambda d\nu/\nu$, to je

$$I_\lambda = f(\lambda, T) = \frac{\nu}{\lambda} f(\nu, T) \quad (8.7)$$

(Predznak minus nije bitan jer samo pokazuje da se s porastom frekvencije smanjuje valna duljina, i obratno; stoga ga možemo izostaviti i obje veličine, $f(\nu, T)$ i $f(\lambda, T)$, smatrati pozitivnima.)

Dosada smo promatrali crno tijelo. Problem zračenja *sivog tijela* riješit ćemo sljedećim razmatranjem. Neka se u posudi čiji zidovi imaju temperaturu T nalazi crno tijelo. Snaga koju tijelo predaje posudi u ravnoteži je jednaka nuli te je apsorbirani tok energije (koji je za crno tijelo jednak upadnome) jednak emitiranom toku:

$$\Phi_e = \Phi_a = \Phi_u \quad (8.8)$$

Zamijenit ćemo crno tijelo sivim istog oblika. Upadni se tok time ne promijeni, a apsorbirani je tok manji jer se dio $\varrho \Phi_u$ reflektira od sivog tijela:

$$\Phi_a = (1 - \varrho) \Phi_u = \alpha \Phi_u \quad (8.9)$$

Omjer emitiranog toka sivog tijela i crnog tijela pri jednakoj temperaturi $\frac{\Phi_e}{\Phi_e^{ct}} = \varepsilon$ zovemo faktorom emisije. U ravnoteži emitirani je tok jednak apsorbiranome i kombinirajući tu činjenicu s jednadžbom (8.9), dobivamo

$$\Phi_e = \varepsilon \Phi_e^{ct} = \alpha \Phi_e^{ct} \quad (8.10)$$

jer je upadni tok jednak emitiranom toku crnog tijela.

Ovim smo razmatranjem došli do rezultata da je faktor emisije sivog tijela jednak njegovu faktoru apsorpcije. Isti rezultat vrijedi za svaku valnu duljinu posebno. Možemo, naime, zamisliti (bar na papiru) posudu koja emitira samo svjetlost određene valne duljine (boje) – i razmatranje ponoviti. Tada ćemo umjesto (8.10) dobiti relaciju za emisionu moć:

$$f_{st}(\lambda, T) = \varepsilon f_{ct}(\lambda, T) = \alpha f_{ct}(\lambda, T) \quad (8.11)$$

što znači da su emisijski spektri sivoga i crnog tijela po obliku jednaki.

Općenito, tijelo nije sivo pa koeficijenti refleksije $\varrho(\lambda)$ i apsorpcije $\alpha(\lambda) = 1 - \varrho(\lambda)$ ovise o valnoj duljini. Tu činjenicu moramo uzeti u obzir i u (8.11)

$$f(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda) f_{ct}(\lambda, T) = \alpha(\lambda) f_{ct}(\lambda, T) \quad (8.12)$$

Jednakost faktora emisije i faktora apsorpcije:

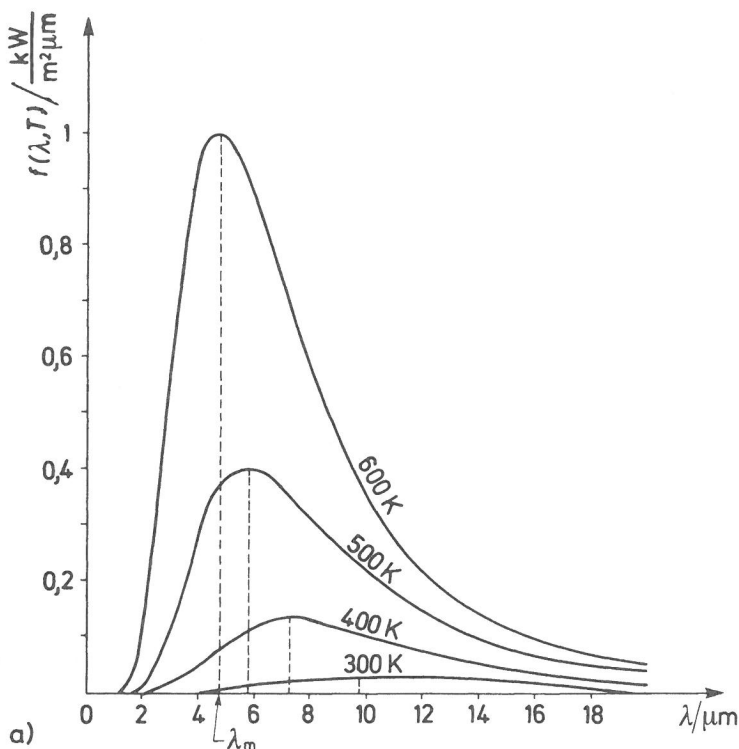
$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad (8.13)$$

zove se *Kirchhoffov zakon*. Budući da je ε funkcija valne duljine, emisijski spektar, općenito, nije više sličan spektru crnog tijela.

8.2. Spektar zračenja crnog tijela

Kada je izotermna šupljina ugrijana na neku temperaturu T , iz njezina otvora izlazi zračenje kontinuirane raspodjele valnih duljina, od neke minimalne do maksimalne. Spektar tog zračenja vrlo je blizak spektru zračenja crnog tijela. Da bi se odredila emisijska moć $f(\lambda, T)$, potrebno je zračenje rastaviti u spektar (npr. pomoću ogibne rešetke) i mjeriti intenzitet dI dijelova spektra $d\lambda$ za razne λ .

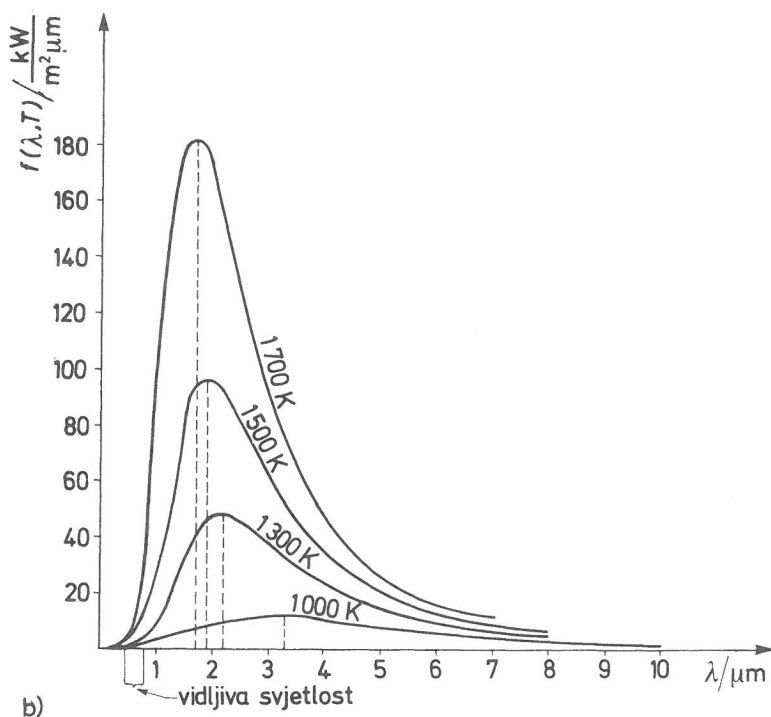
Na slikama 8.2. a i b prikazani su spektri zračenja crnog tijela (tj. emisijska moć kao funkcija valne duljine) za razne temperature.



Slika 8.2. a) Spektri crnog tijela za različite temperature

Iz spektara je vidljivo nekoliko važnih činjenica. Spektar bitno ovisi o temperaturi tijela: što je temperatura veća, to je i ukupna izračena energija veća. (Uočite čete da površina ispod krivulja $f(\lambda, T)$ označava ukupni intenzitet zračenja, tj. ukupnu energiju koju jedinična površina emitira u sekundi.) Svaki spektar ima maksimum na određenoj valnoj duljini (λ_m). Kako temperatura raste, maksimumi se pomiču prema manjim valnim duljinama. To pomicanje maksimuma spektra dobro nam je poznato iz iskustva: npr. bijelo usijano tijelo zrači mnogo više topline od crveno usijanog.

Te osobine spektara uočene su još u prošlom stoljeću i izražene pomoću Stefan-Boltzmannova i Wienova zakona.



Slika 8.2. b) Spektri crnog tijela za različite temperature

Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon. Jožef Stefan* je iz eksperimentalnih spektara zračenja ustanovio da je ukupni intenzitet zračenja, tj. energija koju zrači četvorni metar površine tijela u sekundi, razmjeran četvrtoj potenciji apsolutne temperature crnog tijela.

L. Boltzmann**, neovisno o Stefanu, teorijskim je razmatranjima došao do istog rezultata i odredio izraz za ukupni intenzitet zračenja idealnoga crnog tijela:

$$I = \int_0^{\infty} f(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (8.14)$$

gdje je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ tzv. *Stefan-Boltzmannova konstanta*.

Izraz

$$I = \sigma T^4 \quad (8.15)$$

* Jožef Stefan (1835 – 1893), slovenski fizičar, profesor na Sveučilištu u Beču, poznat po eksperimentalnim radovima iz toplinskog zračenja i teorijskoj obradi difuzije plinova.

** Ludvig Boltzmann (1844 – 1906), austrijski teorijski fizičar, poznat po radovima iz statističke mehanike, termodinamike i kinetičke teorije plinova.

zove se **Stefan-Boltzmannov zakon**.

Iz (8.15) slijedi da ukupna snaga zračenja površine S crnog tijela iznosi:

$$P = S \sigma T^4 \quad (8.16)$$

Za realna tijela faktor emisije ε manji je od jedinice ($0 < \varepsilon < 1$), te Stefan-Boltzmannov zakon glasi:

$$I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (8.17)$$

Ako je crno tijelo temperature T_2 okruženo zidovima temperature T_1 , tijelo će emitirati snagu $S \sigma T_2^4$, ali i apsorbirati snagu $S \sigma T_1^4$, pa je snaga koju tijelo gubi zračenjem jednaka:

$$P = S \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad (8.17a)$$

Iz slike 8.2. jasno se vidi da svaka krivulja na određenoj valnoj duljini λ_m ima maksimum. To je ona valna duljina oko koje se na određenoj temperaturi emitira najviše energije. Maksimumi spektralne gustoće zračenja $f(\lambda, T)$ pomiču se prema kraćim valnim duljinama kada temperatura raste.

Tu činjenicu iskazuje **Wienov* zakon pomicanja**, a kaže da je valna duljina koja odgovara maksimumu izračene energije (λ_m) obrnuto proporcionalna apsolutnoj temperaturi:

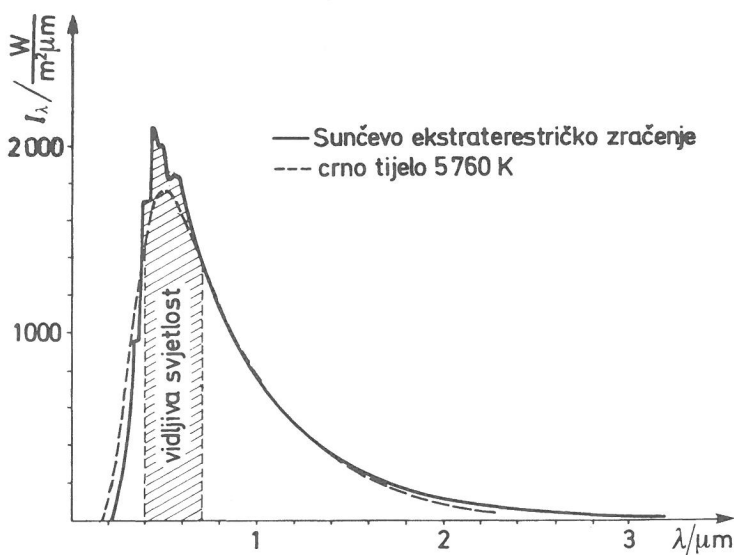
$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K m} \quad (8.18)$$

Tako pri sobnoj temperaturi (300 K) najviše emitirane energije ima valnu duljinu oko 10 μm (infracrveno toplinsko područje), a pri temperaturi 6 000 K maksimum spektra je u području vidljive svjetlosti (oko 0,5 μm).

Na slici 8.3. pokazana je spektralna gustoća toka Sunčeva zračenja, tj. tok Sunčeva zračenja kroz jediničnu površinu okomitu na smjer sunčanih zraka na srednjoj udaljenosti Zemlje od Sunca ali izvan Zemljine atmosfere pa nema slabljenja zbog atmosfere i raspršenja u njoj. To je tzv. *ekstraterestričko zračenje*, a njegova se srednja vrijednost naziva **solarna konstanta**. Spektar Sunčeva zračenja ne razlikuje se bitno od spektra zračenja crnog tijela na temperaturi 5 760 K također prikazanog na slici 8.3, ali normiranog tako da ukupno zračenje bude 1 367 W/m², koliko iznosi solarna konstanta.

Spektar Sunčeva zračenja prije ulaska u atmosferu proteže se od oko 0,12 μm do više od 10 μm , a maksimum je na 0,48 μm . Sastoji se od ultraljubičastoga (0,12 μm – 0,4 μm), vidljivog (0,4 μm – 0,75 μm) i infracrvenog dijela ($\lambda > 0,75 \mu\text{m}$). Spektar praktično završava pri 10 μm jer u njemu ima samo 0,05 % energija valnih duljina većih od 10 μm . Međutim, uglavnom možemo smatrati da se sva energija koja dolazi na Zemljinu površinu nalazi u intervalu valnih duljina od 0,3 μm do 2,5 μm .

* Wilhelm Wien (1864 – 1928) njemački fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku (1911), pronašao je zakon pomicanja i zakon zračenja (1893) te proučavao otklon kanalnih zraka u električnom i magnetskom polju.



Slika 8.3. Spektr Sunčeva zračenja

8.3. Ultraljubičasta katastrofa

Krajem prošlog stoljeća, pošto je izmjeren spektr zračenja crnog tijela, pomoću statističke mehanike i valne teorije svjetlosti pokušao se objasniti oblik krivulja spektra za pojedine temperature i dobiti kvantitativna ovisnost energije zračenja o valnoj duljini.

Mogu li zakoni klasične fizike (mekhanike i elektrodinamike) objasniti toplinsko zračenje? Atome možemo shvatiti kao harmoničke oscilatore koji, kad se pobude, titraju i emitiraju svjetlost. Budući da užarena čvrsta tijela emitiraju kontinuirani spektr, njihovi atomi moraju emitirati sve frekvencije (valne duljine), od neke minimalne do maksimalne.

Neka je materijal od kojega su napravljeni zidovi neke izotermne šupljine (npr. one na slici 8.1) zagrijan na temperaturu T . Elektroni u tim zidovima, uzbuđeni termičkim gibanjem, emitiraju elektromagnetske valove u šupljinu. Tako nastali valovi putuju po šupljini, upadaju na njezine zidove i tu se apsorbiraju. Kada je uspostavljena termička ravnoteža, apsorpcija je jednaka emisiji i cijela je šupljina izotermna.

Da bi objasnili toplinsko zračenje unutar izotermne šupljine, britanski fizičari Rayleigh i Jeans* 1900-tih godina pretpostavili su da se zračenje unutar šupljine volumena V sastoji od stojnih elektromagnetskih valova. Izračunavši broj tih

*John Rayleigh (1842 – 1919) i James Jeans (1877 – 1946) engleski fizičari.

stojnih valova u intervalu frekvencije između ν i $\nu + d\nu$, taj su broj pomnožili prosječnom energijom vala i tako odredili energiju u šupljini. Ako se energija podijeli volumenom šupljine, može se dobiti gustoća energije zračenja, $w_\nu d\nu$, u intervalu frekvencija između ν i $\nu + d\nu$.

Veličina w_λ odnosno w_ν spektralna je gustoća zračenja, pa je

$$w = \int_0^\infty w_\lambda d\lambda = \int_0^\infty w_\nu d\nu \quad (8.19)$$

Očito je zbog veze $\lambda = c/\nu$:

$$w_\lambda = \frac{c}{\lambda} w_\nu \quad (8.20)$$

Iako nećemo detaljno razmatrati Rayleigh-Jeansove proračune, navest ćemo konačne rezultate da bismo bolje razumjeli nemoć klasične fizike da objasni zračenje zagrijanih tijela.

Ako sa dN označimo broj stojnih valova između ν i $\nu + d\nu$, a sa $\bar{E}$ srednju vrijednost energije vala, tada je srednja energija unutar šupljine volumena V :

$$d\bar{W} = \bar{E} dN \quad (8.21)$$

a gustoća energije

$$w(\nu) d\nu = \frac{\bar{E} dN}{V} \quad (8.22)$$

Britanski fizičari Rayleigh i Jeans primijenili su zakone statističke klasične fizike na zračenje u izotermnoj šupljini. Prema zakonu o ekviparticipiji energije (v. Mehanika i toplina str. 245), na svaki stupanj slobode harmonijskog titranja otpada srednja energija $\bar{E} = kT$. To je, dakle, energija koju ima svaki stojni elektromagnetski val unutar šupljine.

Može se izračunati da je broj stojnih elektromagnetskih valova u intervalu frekvencije između ν i $\nu + d\nu$:

$$dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (8.23)$$

gdje je c brzina svjetlosti.

Gustoća energije dw bit će, dakle:

$$dw = \bar{E} \frac{dN}{V} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \bar{E} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT d\nu \quad (8.24)$$

Intenzitet zračenja dI (odnosno emisiona moć $f(\lambda, T)$) emitiran s jedinice površine nekog tijela mjeri se eksperimentalno, a gustoću zračenja dw (energija u jedinici vremena iz jedinice volumena) lakše je razmatrati teorijski. Može se dokazati da je gustoća energije proporcionalna intenzitetu i da ih povezuje relacija:

$$dI = f(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} dw \quad (8.25)$$

odnosno

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4} dw(\nu, T) \quad (8.26)$$

Iz (8.26) i (8.24) slijedi **Rayleigh-Jeansova formula** za zračenje crnog tijela:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 \bar{E} = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k T \quad (8.27)$$

Budući da je $dI = f(\nu, T) d\nu = f(\lambda, T) d\lambda$, to je

$$f(\nu, T) = f(\lambda, T) \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{\lambda^2}{c} f(\lambda, T) \quad (8.28)$$

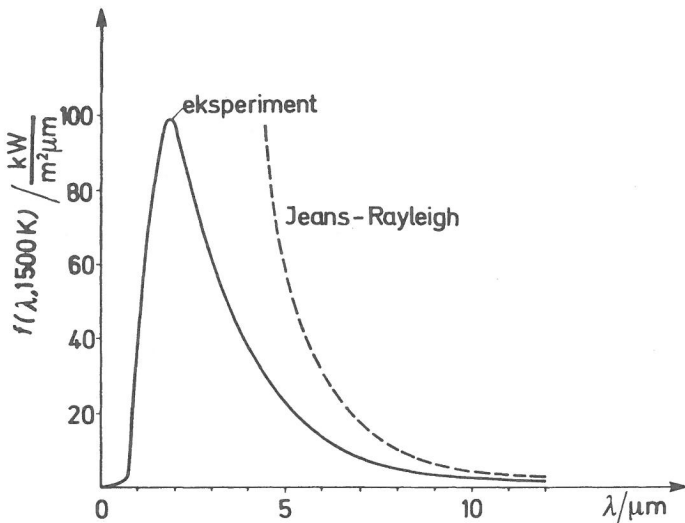
(Predznak minus nije bitan jer samo pokazuje da se s porastom frekvencije valna duljina λ smanjuje, i obratno; stoga ga možemo i izostaviti.)

Iz (8.27) i (8.28) dobivamo Rayleigh-Jeansovu formulu za $f(\lambda, T)$:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \bar{E} = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4} \quad (8.29)$$

Slika 8.4. uspoređuje Jeans-Rayleighovu formulu (8.27) i eksperimentalni spektar za neku temperaturu T . Za velike valne duljine (male frekvencije) Rayleigh-Jeansova se krivulja približava eksperimentalnom spektru, ali za manje valne duljine, pogotovo u ultraljubičastom području, odstupanje je zaista veliko. Ona također (suprotno eksperimentalnoj krivulji) nema maksimum.

Integriranje formule (8.27) po svim frekvencijama dalo bi beskonačno veliku vrijednost za ukupnu izračenu energiju, što, naravno, nije u skladu s eksperimentom.



Slika 8.4. Usporedba Jeans-Rayleighove formule i eksperimentalnog spektra; ultraljubičasta katastrofa

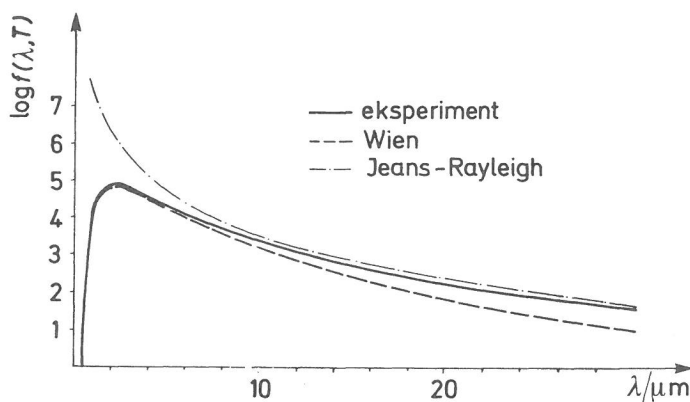
Taj neuspjeh klasične fizike da objasni spektre toplinskog zračenja nazvan je **ultraljubičastom katastrofom**.

Slično je i W. Wien, primjenjujući zakone termodinamike, izveo teorijsku formulu za zračenje izotermne šupljine. Formula koju je pritom dobio nije reproducirala cijeli eksperimentalni spektar, već samo njegov kratkovalni dio. Emisiona moć užarenog tijela prema Wienovu zakonu zračenja iznosi:

$$f(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^5} e^{-\frac{B}{\lambda T}} \quad (8.30)$$

gdje su A i B konstante.

Na slici 8.5. pokazana je eksperimentalna krivulja i Wienova formula. Opaža se slaganje za manje valne duljine i neslaganje za veće.



Slika 8.5. Usporedba Wienove formule i eksperimentalnog spektra

Tako Rayleigh-Jeansova formula (8.29) može približno opisati spektar na velikim valnim duljinama, a Wienova formula dio spektra na kratkim valnim duljinama. Ni jedna ni druga formula ne mogu reproducirati sav spektar.

Jeans-Rayleighov i Wienov rezultat nisu u skladu s eksperimentom, ali ne zato što se u izvodu potkrala neka greška, već zato što klasična fizika svojim zakonima ne može objasniti sve pojave u prirodi, a pogotovo ne u mikrosvijetu atoma i molekula. Klasična fizika ne može na zadovoljavajući način objasniti zračenje crnog tijela, pa su potrebne sasvim nove ideje za objašnjenje fizike mikrosvijeta. To je bila svojevrsna i katastrofa klasične fizike jer se pokazala nemoćnom da objasni emisiju i apsorpciju svjetlosti. Tako se rodilo novo područje fizike s bitno drukčijim idejama i zakonima, tzv. kvantna fizika.

8.4. Planckov zakon zračenja za crno tijelo. Kvanti svjetlosti

Spektralna gustoća zračenja crnog tijela bila je prva pojava koju klasična fizika, kako sada nazivamo fiziku poznatu do 1900, nije uspjela objasniti. Neslaganje rezultata mjerenja (sl. 8.4) s pretkazivanjima klasične fizike (crtkana krivulja na sl. 8.4) očigledno je.

Klasična teorija zračenja polazi od pretpostavke da svjetlost zrače harmonički oscilatori (npr. elektroni u atomima) koji mogu imati bilo koju vrijednost energije.

Spektralnu gustoću zračenja uspješno je objasnio M. Planck* (1900). Došao je, naime, do zaključka da spektralnu gustoću $f_{\text{ct}}(\lambda, T)$ savršeno opisuje izraz:

$$f_{\text{ct}}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (8.31)$$

gdje su c brzina svjetlosti u vakuumu, k Boltzmannova konstanta, a $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js tada novouvedena *Planckova konstanta*. Pri izvodu te formule nužno je pretpostaviti da oscilator koji emitira svjetlost može poprimiti samo određene vrijednosti energije, odnosno, kako kažemo, da je energija kvantizirana. Na taj način oscilator može odjednom izračiti samo jedan cijeli kvant svjetlosne energije, jedan foton čija je energija povezana s frekvencijom ν izrađene svjetlosti:

$$E = h \nu \quad (8.32)$$

Rezultati mjerenja dobro se slažu s vrijednostima koje se dobiju iz Planckova zakona (8.31) što je potvrda njegove valjanosti.

Pogledajmo malo detaljnije formulu (8.31). Prema klasičnoj fizici, srednja energija molekule u čvrstom tijelu jednaka je kT . Energija zračenja proporcionalna je srednjoj energiji molekule.

M. Planck je uvidio da to ne može biti ispunjeno ako želimo dobiti ispravan zakon zračenja crnog tijela. Nastojeći da dobije izraz koji će točno prikazivati eksperimentalne spektre, uočio je da energija koju emitiraju atomi ili molekule ne može biti bilo kakva nego **kvantizirana**. Atom ne može primiti ili emitirati bilo kako malenu količinu energije, već samo neke određene količine (kvante) energije ili višekratnike tog kvanta.

Planck je pretpostavio da se elektromagnetsko zračenje emitira iz atoma u obliku kvanta energije čija je veličina proporcionalna frekvenciji zračenja

$$E = h \nu \quad (8.33)$$

* Max Planck (1858–1947), njemački fizičar, jedan od osnivača moderne fizike, dobitnik Nobelove nagrade (1918), poznat po radovima iz termodinamike i toplinskog zračenja. Pretpostavio je da atom emitira i apsorbira elektromagnetske valove (svjetlost) u konačnim djelićima, kvantima energije i tako započeo modernu kvantnu fiziku.

gdje je koeficijent proporcionalnosti h kasnije dobio naziv **Planckova konstanta**. Njezina je vrijednost eksperimentalno određena i iznosi

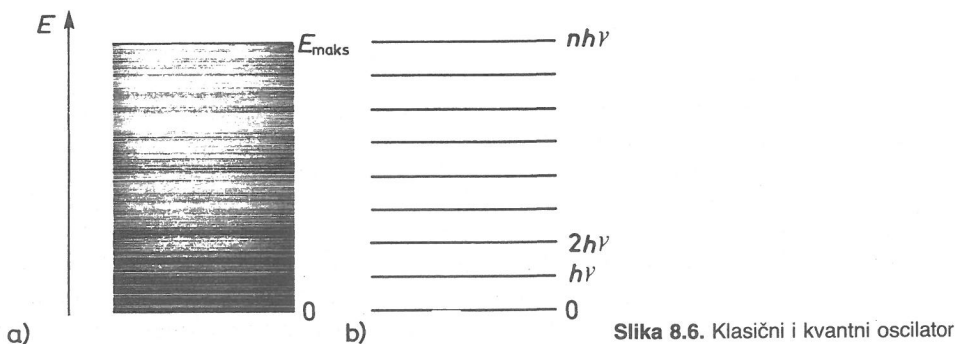
$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

U klasičnoj fizici energija je neprekinuta varijabla i klasični harmonički oscilator koji titra frekvencijom ν može imati bilo koju vrijednost energije od nule do neke maksimalne. Nasuprot tome, *kvantni harmonički oscilator* (atom, molekula i sl.) može imati samo određene diskretne energije $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu$. Slika 8.6.a pokazuje energijski dijagram klasičnog oscilatora koji titra frekvencijom ν , a sl. 8.6.b dopuštena energijska stanja *Planckova oscilatora*.

Prema Planckovoj hipotezi, energija harmoničkog oscilatora ne može se kontinuirano mijenjati (što je pretpostavljeno pri izvodu Jeans-Rayleighove formule) već u višekratnicima elementarnog kvanta E_0 , dakle oscilator može imati energiju $0, E_0, 2E_0, 3E_0 \dots nE_0$. (Oscilator može biti atom koji titra, ali i stojni elektromagnetski val u nekoj šupljini.)

U statičkoj ravnoteži, razna su stanja oscilatora uzbuđena različitom vjerojatnošću proporcionalnom $e^{-nE_0/kT}$ (Maxwell-Boltzmannova statistika). Srednja energija takvog oscilatora je:

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E e^{-E/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E/kT}} = \frac{h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} \quad (8.34)$$



Slika 8.6. Klasični i kvantni oscilator

Zamijenimo li $e^{-h\nu/kT}$ sa x , dobit ćemo

$$\overline{E} = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = h\nu \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} = h\nu x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} \quad (8.35)$$

U nazivniku je beskonačni geometrijski red, a u brojniku derivacija tog reda. Zbroj geometrijskog reda u nazivniku je $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$. Brojnik

je derivacija nazivnika, pa je

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (8.36)$$

a onda:

$$\bar{E} = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (8.37)$$

Tako smo dobili izraz za srednju energiju kvantnog oscilatora. Ta formula prelazi u klasični izraz $\bar{E} = kT$ kada $h \rightarrow 0$, što je u skladu s činjenicom da u klasičnoj fizici energija može primiti neprekinuti niz vrijednosti.

Planckov zakon zračenja. Ako u Rayleigh-Jeansovu formulu (8.27) ili (8.29) uvrstimo izraz (8.37) za srednju energiju kvantnog oscilatora $\bar{E}$ dobit ćemo Planckov zakon zračenja crnog tijela:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (8.38)$$

ili

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (8.39)$$

gdje je: ν frekvencija, λ valna duljina ($\nu = c/\lambda$)

c brzina svjetlosti ($3 \cdot 10^8$ m/s)

k Boltzmannova konstanta ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K)

T temperatura izražena u K

h Planckova konstanta ($6,626 \cdot 10^{-34}$ Js).

Kada se krivulje (8.38) i (8.39) nacrtaju kao funkcije frekvencije (ili valne duljine) za različite temperature, dobivaju se krivulje kao na sl. 8.2. i potpuno slaganje s eksperimentalnim rezultatima. To je i bio najveći uspjeh Planckova zakona. Planckova ideja o kvantiziranosti energije ne može se shvatiti ni opravdati zakonima klasične fizike; ali ona daje ispravan rezultat za zračenje crnog tijela i zato kvantiziranost prihvaćamo kao fundamentalnu činjenicu u prirodi. Planckova formula (8.38) prelazi u Wienovu (8.30) za frekvencije (valne duljine) na jednom kraju spektra, a u Rayleigh-Jeansovu (8.29) na drugom kraju spektra. Zaista kada je $h\nu \ll kT$, tada je $e^{h\nu/kT} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$, pa je $\bar{E} \approx kT$. Stoga formula (8.38) prelazi u:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 kT \quad (8.40)$$

ili

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$$

a to je upravo Rayleigh-Jeansova formula (8.29).

Slično, za $h\nu \gg kT$, $e^{h\nu/kT} \gg 1$ te je $e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT}$ i formula (8.38) prelazi u:

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 e^{-h\nu/kT} \quad (8.41)$$

ili

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{A}{\lambda^5} e^{-\frac{B}{\lambda T}} \quad (8.42)$$

a to je upravo Wienova formula (8.30) za zračenje crnog tijela.

Izvod Wienova i Stefan-Boltzmannova zakona iz Planckova zakona. Pokazat ćemo da Planckov zakon (8.39) sadrži i Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon. Wienov zakon pomicanja određuje mjesto maksimuma krivulje $f(\lambda, T)$. Da bismo odredili vrijednost λ_m , za koju izraz (8.30) ima ekstrem (maksimum), prvu derivaciju $df(\lambda, T)/d\lambda$ moramo izjednačiti s nulom:

$$\frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{-5\lambda^4(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1) - \lambda^5 e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \left(-\frac{hc}{\lambda^2 kT}\right)}{\lambda^{10}(e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} = 0 \quad (8.43)$$

odnosno

$$\frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = 5 \quad (8.44)$$

Zamjenom $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ dobivamo jednadžbu:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5 \quad (8.45)$$

Ta transcendentna jednadžba ima korijen $x = 4,9652$, u što se možemo lako uvjeriti uvrštavanjem.

Dakle:

$$x = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,9652 \quad \lambda_m T = \frac{hc}{4,9652 k} = \frac{6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{4,9652 \cdot 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}}$$

ili

$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} \quad (8.18)$$

a to je upravo Wienov zakon pomicanja.

Iz Planckove formule (8.39) može se izvesti i Stefan-Boltzmannov zakon tako da se integriranjem odredi ukupni intenzitet zračenja za sve valne duljine.

Ukupni intenzitet zračenja je:

$$I = \int_0^{\infty} f(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (8.46)$$

Zamjenom $x = \frac{hc}{kT\lambda}$ integral poprima oblik:

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (8.47)$$

Budući da je određeni integral $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, to je

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot T^4 = \sigma T^4 \quad (8.15)$$

Planckov izraz za emisionu moć crnog tijela (8.38) i (8.39) odlično se slaže s eksperimentalnim krivuljama (sl. 8.2) za sve valne duljine. I Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon posljedice su Planckova zakona i mogu se iz njega izvesti. U tome je i najveća vrijednost Planckova zakona.

Zakoni zračenja mogu se iskoristiti za određivanje temperature užarenih tijela i izračunavanje temperatura zvijezda. Metode tih mjerenja proučava optička pirometrija, a uređaji se zovu *pirometri*.

Primjer

Treba izvesti Planckovu formulu za spektralnu gustoću zračenja pomoću frekvencije, tj. pomoću izraza za funkciju $f(\lambda, T)$ treba dobiti izraz funkcije $f(\nu, T)$, a zatim izračunati frekvenciju ν_m pri kojoj $f(\nu, T)$ ima maksimum.

Odredite koliki je produkt $\lambda_m \cdot \nu_m$, ako je λ_m valna duljina za koju funkcija $f(\lambda, T)$ ima maksimum.

Planckova formula za spektralnu gustoću zračenja je

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Uzmemo li u obzir da je $\lambda = \frac{c}{\nu}$, $d\lambda = -\lambda \frac{d\nu}{\nu}$, dobit ćemo:

$$dI = f(\lambda, T) d\lambda = f(\nu, T) d\nu$$

$$f(\nu, T) = f(\lambda, T) \frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\lambda}{\nu} f(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{c^5/\nu^5} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \frac{c}{\nu^2}$$

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

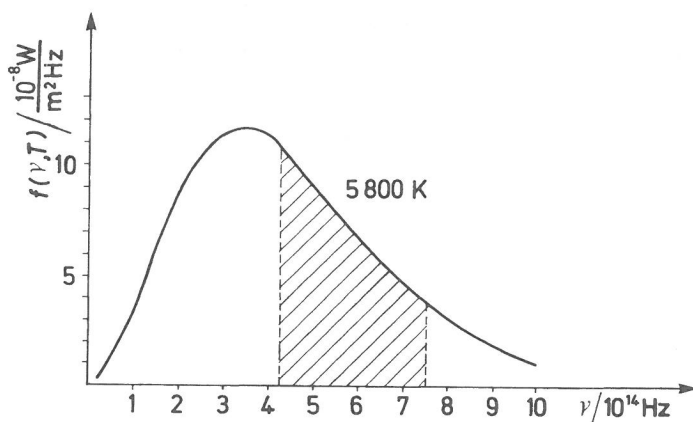
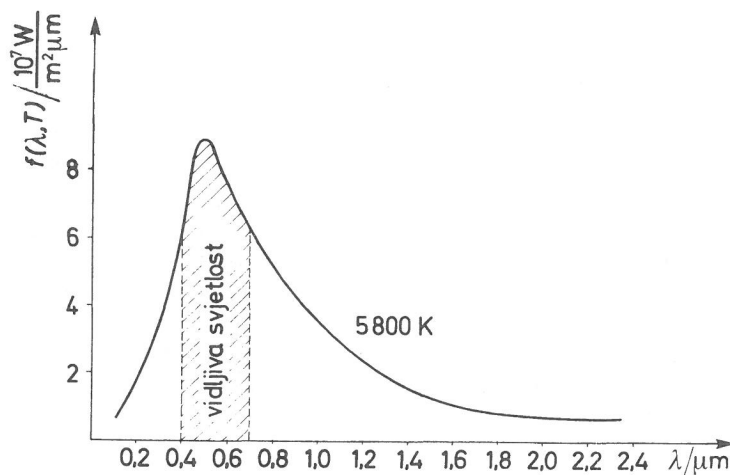
Na slici 8.7 prikazane su funkcije $f(\lambda, T)$ i $f(\nu, T)$ za temperaturu 5800 K.

Da bismo odredili vrijednost frekvencije ν , za koju taj izraz ima maksimum, izjednačit ćemo prvu derivaciju s nulom:

$$\frac{df(\nu, T)}{d\nu} = 0.$$

Odatle dobivamo transcendentnu jednadžbu:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 3,$$



Slika 8.7. Usporedba funkcija $f(\lambda, T)$ i $f(\nu, T)$

gdje je $x = \frac{h\nu}{kT}$. Rješenje te jednadžbe je $x = 2,822$, u što se možemo lako uvjeriti uvrštavanjem. Odatle je:

$$\frac{\nu_m}{T} = 5,874 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K}$$

Produkt $\lambda_m \cdot \nu_m$ dobivamo pomoću Wienova zakona $\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$

$$\lambda_m \cdot \nu_m = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}}{T} \cdot 5,874 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K} \cdot T = 1,71 \cdot 10^8 \text{ m/s}^{-1}$$

Zašto je pogrešno pretpostaviti da je $\nu_m \cdot \lambda_m = c$?

Primjer

Maksimum spektralne gustoće Sunčeva zračenja odgovara svjetlosti valne duljine $0,5 \mu\text{m}$.

a) Kolika je temperatura Sunčeve površine uz pretpostavku da Sunce zrači kao idealno crno tijelo?

b) Koliku snagu zrači četvorni metar Sunčeve površine?

c) Kolika je ukupna snaga koju zrači cijela površina Sunca?

d) Kolika je masa fotona koju površina Sunca emitira u sekundi?

e) Kolika je srednja gustoća energijskog toka koja od Sunca dolazi na Zemljinu površinu?

a) Primjenom Wienova zakona dobivamo temperaturu Sunčeve površine:

$$\lambda_m \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ Km} \Rightarrow T = 5800 \text{ K}.$$

b) Iz Stefan-Boltzmannova zakona slijedi:

$$I = \sigma T^4 = 6,4 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2.$$

c) Ukupna je snaga:

$$P = 4R_s^2 \pi I = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

d) Relativistička masa i energija fotona povezani su relacijom $E = mc^2$? Masa fotona emitiranih u sekundi:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{Pt}{c^2} = 4,3 \cdot 10^9 \text{ kg}.$$

e) Ako sa I_s označimo srednju gustoću energijskog toka koja bi od Sunca došla na Zemljinu površinu kad ne bi bilo gubitaka u atmosferi (tzv. solarna konstanta), tada je ukupna snaga koju emitira Sunce povezana sa srednjom gustoćom energijskog toka I_s relacijom:

$$P = I_s 4r^2 \pi$$

gdje je r polumjer Zemljine putanje. Odatle je:

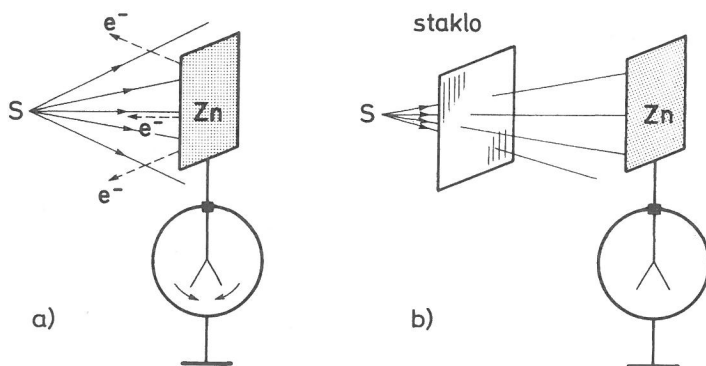
$$I_s = \frac{P}{4r^2 \pi} = \frac{4R_s^2 \pi I}{4r^2 \pi} = \frac{R_s^2}{r^2} I = 1,35 \text{ kW m}^{-2}$$

8.5. Fotoelektrični efekt

U prethodnim smo odjeljcima vidjeli da klasična fizika ne može objasniti toplinsko zračenje. Sada ćemo upoznati još jednu pojavu – **fotoelektrični efekt** – za čije je objašnjenje ponovo potrebna ideja o kvantnoj prirodi svjetlosti.

H. Hertz je 1887. opazio da se intenzitet iskre na metalnom iskrištu povećava ako je negativna elektroda osvijetljena ultraljubičastom svjetlošću. Kasnije je utvrđeno (Hallwachs, 1888) da iz metala obasjanih svjetlošću odgovarajuće valne duljine izlaze elektroni.

Negativno nabijena očišćena cinkova ploča, koja je spojena s elektroskopom (sl. 8.8.a) izbija se ako je obasjamo svjetlošću lučne lampe koja sadrži i ultraljubičasto zračenje. Pri osvijetljavanju kroz staklenu ploču (koja apsorbira ultraljubičasto zračenje) razmak listića elektroskopa se ne mijenja (sl. 8.8.b).



Slika 8.8. Fotoelektrični efekt na cinku

Fotoelektrični efekt na cinku izaziva, prema tome, ultraljubičasta komponenta svjetlosti lučnice, a ne njezin vidljivi dio. Pokusi su također pokazali da za neke druge metale (Na, K, Cs i sl.) fotoefekt nastaje i pomoću vidljive svjetlosti.

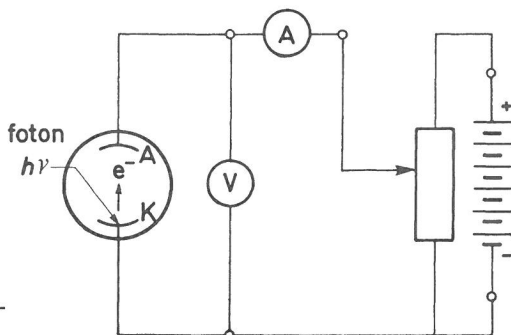
Dakle, pojava da metali zbog utjecaja elektromagnetskih valova (svjetlosti) emitiraju elektrone zove se **fotoelektrični efekt**. Elektromagnetsko zračenje (svjetlost), dakle, u određenim uvjetima oslobađa elektrone iz metala. Neki metali (npr. cink) emitiraju elektrone samo ako se upotrijebi ultraljubičasta svjetlost, a neki drugi (npr. alkalni) metali pokazuju fotoefekt i pri vidljivoj svjetlosti.

Vodljivi se elektroni u metalima manje-više slobodno gibaju unutar kristalne rešetke, ali zbog kulonskih sila ne mogu napustiti površinu metala. Da bi se iz metala izbio elektron, potrebna je određena energija, tzv. *izlazni rad*, W_i . Ako je energija koju elektron dobije od upadne svjetlosti manja od izlaznog rada, elektron neće izaći iz metala; fotoelektrični efekt nastat će samo ako elektroni dobiju energiju veću od izlaznog rada.

Za svaki metal postoji najmanja, granična frekvencija svjetlosti ν_g , ispod koje nema fotoelektričnog efekta ma kako velik bio intenzitet upadne svjetlosti.

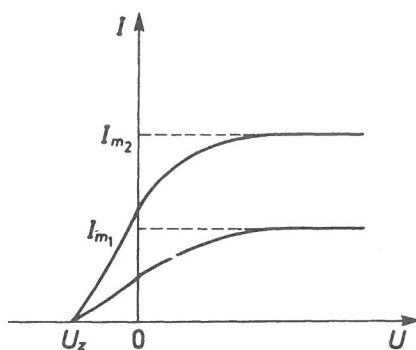
Naprotiv, ako je frekvencija svjetlosti $\nu > \nu_g$, fotoefekt će nastati ma kako malena bila jakost svjetlosti. Jakost svjetlosti utječe samo na broj emitiranih elektrona: što je svjetlosna jakost veća, broj fotoelektrona je veći.

Na sl. 8.9. shematski je pokazan uređaj za ispitivanje fotoelektričnog efekta. U evakuiranome staklenom balonu nalazi se fotoosjetljiva katoda (od materijala koji se ispituje) i anoda. Cijev je preko ampermetra (galvanometra) spojena s izvorom napona.



Slika 8.9. Shema uređaja za mjerenje fotoefekta

Kada katodu obasjamo odgovarajućom svjetlosti, u krugu će poteći električna struja. Pomoću takvog uređaja možemo mjeriti U - I **karakteristiku**, tj. krivulju koja pokazuje ovisnost *fotostruje* I o naponu U između elektroda pri stalnom svjetlosnom toku. Kada je katoda obasjana svjetlošću stalne jakosti, a anodni napon varira, struja se mijenja kao što to pokazuje slika 8.10. Kada se napon na anodi povećava, povećava se i struja sve do zasićenja, kada su svi elektroni emitirani iz katode sakupljeni na anodi. Struja zasićenja osim o karakteristikama cijevi ovisi i o intenzitetu upadne svjetlosti. Tako je na sl. 8.10. struja I_{m1} dobivena s dvostruko manjom jakosti svjetlosti nego I_{m2} .



Slika 8.10. Ovisnost fotostruje o naponu i intenzitetu svjetlosti

Što je jakost svjetlosti veća, to je broj emitiranih elektrona veći, dakle i fotostruja je veća.

Smanjivanjem napona smanjuje se i fotostruja. Kada se napon smanji na nulu, fotostruja ne iščezne, što pokazuje da fotoelektroni izlaze iz katode brzinom različitom od nule.

Ako je anoda pod negativnim naponom, struja se smanjuje i konačno prestaje teći kada napon dosegne vrijednost U_z (napon zaustavljanja). Tada je napon dovoljno negativan da zaustavi i najbrže elektrone oslobođene na fotokatodi:

$$\frac{m v_m^2}{2} = e U_z \quad (8.48)$$

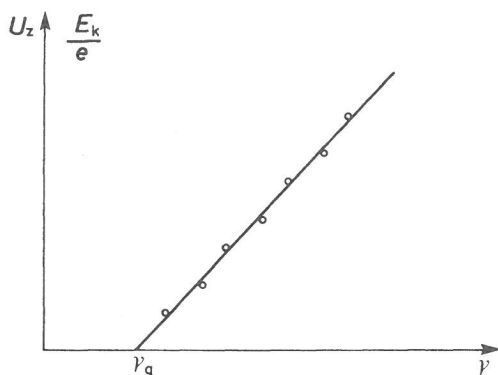
Mjereći napon zaustavljanja, možemo odrediti maksimalnu brzinu i kinetičku energiju fotoelektrona.

Millikan je prvi dokazao da napon zaustavljanja odnosno maksimalna energija oslobođenih elektrona **ovisi samo o frekvenciji svjetlosti** (sl. 8.11). Što je frekvencija veća, elektroni imaju veću energiju, a potreban je i veći negativni napon da ih zaustavi.

Eksperimentom je pokazao da za svaki metal postoji najmanja, tzv. **granična frekvencija** svjetlosti ν_g , takva da se manjom od nje ne može više izazvati fotoelektrični efekt ma kako velika bila jakost upadne svjetlosti.

Naprotiv, ako je frekvencija $\nu > \nu_g$, fotoefekt će nastati ma kako malena bila jakost svjetlosti. Svjetlosna jakost utječe samo na broj emitiranih elektrona: što je jakost svjetlosti veća, broj fotoelektrona je također veći. Ispod granične frekvencije $\nu < \nu_g$ nema elektrona. Ako je $\nu > \nu_g$, kinetička se energija elektrona povećava linearno s frekvencijom:

$$e U_z = \frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 = \text{konst.} \cdot (\nu - \nu_g) \quad (8.49)$$



Slika 8.11. Ovisnost kinetičke energije fotoelektrona o frekvenciji upadne svjetlosti

Relacija (8.49) ustvari je jednadžba pravca na sl. 8.11. Granične frekvencije ovise o vrsti metala. Za većinu metala one su u ultraljubičastom području, a npr. za cezij i kalij su u vidljivom dijelu spektra.

8.6. Einsteinovo objašnjenje fotoelektričnog efekta. Fotoni

Te osobine fotoefekta nemoguće je protumačiti valnom prirodom svjetlosti. Prema klasičnoj valnoj teoriji, energija koju bi elektromagnetski val predao elektronu u metalu morala bi ovisiti o intenzitetu svjetlosti. Eksperiment je, međutim, pokazao da nije tako. Energija ovisi o frekvenciji, a o jakosti svjetla ovisi samo broj fotoelektrona. Postojanje granične frekvencije također nije u skladu s valnom prirodom svjetlosti. Prema valnoj teoriji, fotoefekt bi se morao dogoditi za bilo koju frekvenciju ako je intenzitet elektromagnetskog vala dovoljno velik.

Albert Einstein je 1905. godine objasnio fotoefekt korpuskularnom teorijom svjetlosti, a R.A. Millikan je 1914. eksperimentalno dokazao da postoji granična frekvencija ispod koje nema fotoefekta i tako potvrdio Einsteinovu teoriju.

Prema Einsteinu, iz izvora svjetlosti izlaze kvanti svjetlosti koji se zovu fotoni. Svaki foton ima energiju:

$$E = h \nu \quad (8.50)$$

gdje je h Planckova konstanta, a ν frekvencija svjetlosti.

Fotone možemo smatrati česticama svjetlosti kojima je masa mirovanja nula i koje se gibaju brzinom svjetlosti c . Budući da i za fotone vrijedi Einsteinova relacija $E = mc^2$, masa fotona je:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h \nu}{c^2} \quad (8.51)$$

Dakle, foton, kao i svaka druga čestica, ima određenu masu, brzinu, energiju i količinu gibanja.

Ako svjetlost shvatimo kao roj fotona, lako možemo objasniti sve pojave povezane s fotoefektom.

Kada foton upada na površinu metala, sudara se s elektronom, predaje mu svu svoju energiju ($h \nu$), foton nestaje, apsorbira se, a elektron, ako je dobio dovoljnu energiju, može izaći iz metala.

Dio energije fotona pritom se troši na oslobađanje elektrona iz metala (izlazni rad W_i), tj. na svladavanje potencijalne energije kojom je elektron vezan u metalu, a ostatak se pretvara u kinetičku energiju fotoelektrona:

$$h \nu = W_i + \frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 \quad (8.53)$$

To je poznata Einsteinova relacija za fotoelektrični efekt. Kinetička energija u formuli (8.53) maksimalna je energija koju elektron može imati; naravno, mnogi će elektroni izaći iz metala i manjom kinetičkom energijom jer će prije izlaska iz metala na svom putu kroz metal izgubiti dio svoje kinetičke energije. Zato relaciju (3.53) možemo pisati i ovako:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 \leq h \nu - W_i \quad (8.54)$$

Sve eksperimentalne rezultate fotoelektričnog efekta možemo razumijeti pomoću relacije (8.53). Ako je frekvencija upadne svjetlosti takva da je

$$h \nu < W_i,$$

tada nema fotoefekta jer elektron ne može izaći iz metala. To znači da je granična frekvencija za pojedini metal određena radom izlaza:

$$W_i = h \nu_g \Rightarrow \nu_g = \frac{W_i}{h} \quad (8.55)$$

Rad izlaza, ovisno o metalu, varira između 2 eV i 6 eV, što odgovara graničnim frekvencijama od oko $4,8 \cdot 10^{14}$ Hz (crvena svjetlost) do $1,4 \cdot 10^{15}$ Hz (ultraljubičasta svjetlost).

Koristeći se relacijom (8.55) za rad izlaza, Einsteinovu relaciju za fotoefekt možemo pisati i u obliku:

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{maks}}^2 = h(\nu - \nu_g) \quad (8.56)$$

a to je upravo eksperimentalno dobivena relacija za maksimalnu energiju fotoelektrona (sl. 8.11).

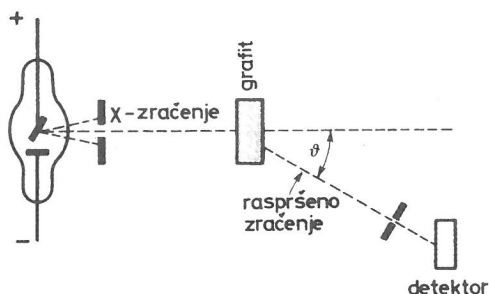
Kako možemo objasniti eksperimentalnu činjenicu da o intenzitetu svjetlosti ovisi broj fotoelektrona? Korpuskularna teorija zračenja objašnjava i tu pojavu. Veći intenzitet u korpuskularnoj slici znači veći broj fotona, a time i veći broj izbačenih fotoelektrona. (Iako svaki foton ne izbaci elektron, ipak je broj fotoelektrona proporcionalan broju upadnih fotona.)

U našim razmatranjima nismo uzeli u obzir zakon održanja količine gibanja pri sudaru fotona i elektrona. Može se uočiti da elektron nije slobodan već da je vezan za atom ili rešetku te se količina gibanja apsorbiranog fotona razdijeli između elektrona i rešetke (atoma). Zbog velike razlike u masi možemo pretpostaviti da elektron pritom dobiva gotovo svu energiju fotona. Dokažite da je zbog zakona održanja količine gibanja fotoefekt na slobodnom elektronu nemoguć.

Tako je fotoelektrični efekt bio još jedan dokaz kvantne prirode svjetlosti. Interferencija, difrakcija i polarizacija elektromagnetskih valova pokazuju njihova valna svojstva, fotoefekt i još neke pojave dokaz su čestične prirode zračenja. Zaključujemo da svjetlost i (ostali elektromagnetski valovi) imaju i valnu i korpuskularnu prirodu.

8.7. Comptonov efekt

Američki fizičar A. H. Compton otkrio je 1923. još jedan efekt koji može objasniti samo kvantna teorija i tako na još jedan način dokazao korpuskularnu prirodu zračenja. Pri raspršenju rendgenskog zračenja (elektromagnetskih valova kratke valne duljine, manje od 10^{-10}m) na elektronima u komadu grafita (sl. 8.12)

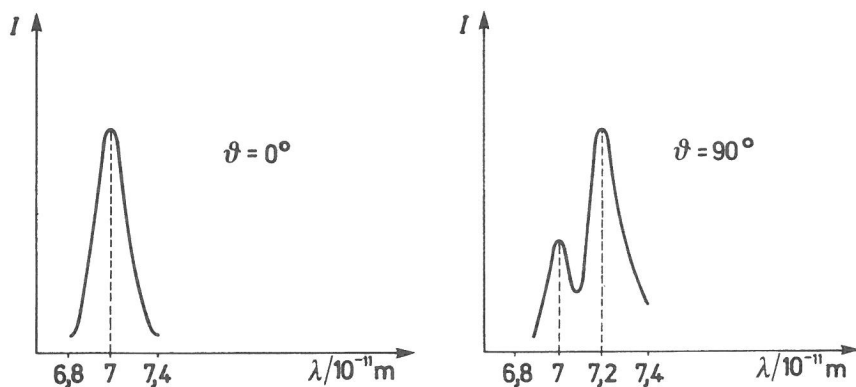


Slika 8.12. Shema uređaja Comptonovog eksperimenta

opazio je da raspršeno zračenje ima dvije komponente: prva ima valnu duljinu kao i upadni snop, a druga malo veću valnu duljinu (sl. 8.13). Razlika valnih duljina tih dviju komponenti ($\Delta\lambda$) ovisi o kutu raspršenja.

Valnom se teorijom ne može objasniti zašto se valna duljina jednog dijela zračenja nakon raspršenja malo povećala. Shvativši zračenje kao roj fotona, tu je pojavu lako objasniti.

Pri sudaru fotona i elektrona, foton izgubi dio svoje energije ($E = h\nu$) i zato mu se smanji frekvencija, a poveća valna duljina.



Slika 8.13. Rezultat Comptonovog eksperimenta

Kvantitativno pogledajmo što se događa kada se foton sudari s elektronom. Neka je masa elektrona m , frekvencija fotona prije sudara ν , a poslije sudara ν' (sl. 8.14). Prije sudara elektron miruje te mu je energija mc^2 .

Iz zakona o očuvanju energije i količinu gibanja slijedi:

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \gamma mc^2 \quad (8.57)$$

$$(\gamma m v)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\vartheta \quad (8.58)$$

(Količina gibanja fotona $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.)

Iz (8.57), nakon dijeljenja s c i kvadriranja, proizlazi:

$$(\gamma m v)^2 = (mc)^2 + 2mh(\nu - \nu') + \frac{h^2}{c^2}\nu^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu' + \frac{h^2}{c^2}\nu'^2 \quad (8.59)$$

Oduzimanjem (8.58) od (8.59) dobivamo:

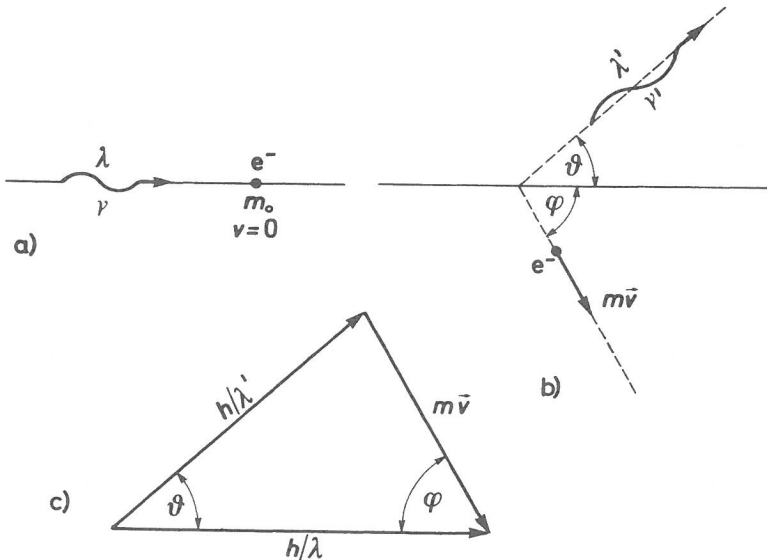
$$\gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu'(1 - \cos\vartheta) + 2mh(\nu - \nu')$$

Budući da je $\gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2$, to je:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad (8.60)$$

Promjena valne duljine relativno je malena, reda veličine Comptonove valne duljine, $\lambda_C = h/mc = 2,42 \cdot 10^{-12}$ m. Tako malu promjenu u vidljivoj svjetlosti ne možemo opaziti, a za rendgenske se zrake može izmjeriti, pogotovo za one tvrđe, tj. one manje valne dužine.

Ako elektron nije slobodan nego vezan za atom, izmjena energije i količine gibanja zbiva se između fotona i atoma kao cjeline. Budući da je masa atoma znatno veća od mase elektrona, to je $\Delta\lambda$ neznatno; tako objašnjavamo činjenicu da u raspršenom snopu postoji komponenta nepromijenjene valne duljine.



Slika 8.14. Raspršenje fotona na elektronu

PITANJA I ZADACI

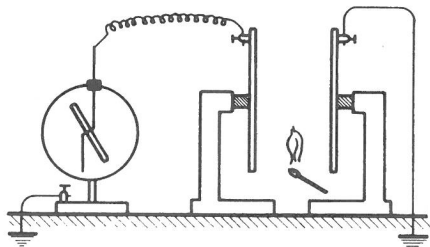
1. Što je idealno crno tijelo? Kakvo je toplinsko zračenje koje emitira crno tijelo?
2. Nacrtajte spektralne gustoće zračenja crnog tijela u ovisnosti o valnoj duljini i o frekvenciji za dvije različite temperature crnog tijela.
3. O čemu govori Štefan-Boltzmannov i Wienov zakon?
4. Definirajte gustoću energije $w(\nu, T)$ u intervalu frekvencija od ν do $\nu + d\nu$. O čemu ona ovisi?
5. Definirajte emisiju moć površine crnog tijela (snagu koju emitira jedinična površina u intervalu frekvencija između ν i $\nu + d\nu$ ili, kako se ponekad zove, intenzitet zračenja dI). Kako je gustoća energije tijela povezana s emisijom moći njegove površine?
6. Izvedite Planckov zakon zračenja. Objasnite Planckovu formulu za spektar zračenja crnog tijela. Napišite je kao funkciju valne duljine i frekvencije.
7. Objasnite »ultraljubičastu katastrofu«. Iz Planckove formule dobijte Jeans-Rayleighovu i Wienovu formulu. Napišite te formule u dva oblika: $f(\lambda, T)$ i $f(\nu, T)$.
8. Objasnite kvantizaciju koju je Planck uveo u fiziku objašnjavajući toplinske spektre. Nailazimo li u klasičnoj fizici na kvantizirane veličine?
9. Što je Planckova konstanta? Dokažite da se ona iskazuje istim jedinicama kao moment količine gibanja.
10. Iz Planckova zakona izvedite Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon.
11. Navedite eksperimentalne činjenice povezane s fotoelektričnim efektom. Mogu li se one objasniti znanjima klasične fizike?
12. Kako je Einstein objasnio fotoelektrični efekt? Objasnite Einsteinovu relaciju koja povezuje energiju fotona i energiju fotoelektrona.
13. Kako se izračuna energija fotona frekvencije ν ? Izračunajte masu i količinu gibanja čestice svjetlosti fotona.
14. Zašto elektroni koje monoenergijski fotoni izbijaju iz metala imaju različite kinetičke energije (brzine)?
15. Kada relaciju za kinetičku energiju elektrona nastalog fotoefektom moramo pisati u relativističkom obliku?
16. Povežite energiju fotona s njegovom količinom gibanja.
17. Struja pri fotoelektričnom efektu proporcionalna je jakosti svjetlosti. Zašto?
18. Objasnite Comptonov efekt.
19. Da li vjerojatnost da se dogodi Comptonovo raspršenje ovisi o materijalu (rednom broju atoma)? Zašto?
20. Je li moguće opisati Comptonov efekt vidljivom svjetlošću? Obrazložite!
21. O čemu ovisi hoće li foton gubiti energiju u materijalu fotoelektričnim ili Comptonovim efektom?
22. Pri kojoj bi temperaturi maksimum spektralne gustoće zračenja crnog tijela bio na valnoj duljini od: a) 240 nm, b) 0,48 μm , c) 9,7 μm ?
23. Koliku snagu emitira 1 m^2 Zemljine površine na temperaturi 27 °C, uz pretpostavku da je Zemlja idealno crno tijelo?
24. Kolika je temperatura crnog tijela koje pri temperaturi okoline 17 °C emitira 64 puta više energije nego što je apsorbira? Zanemarite toplinske gubitke vođenjem i konvekcijom.
25. Ako se temperatura crnog tijela smanji sa 1500 K na 1100 K, koliko se promijeni gustoća energijskog toka i valna duljina koja odgovara maksimumu spektralne gustoće zračenja?
26. Koliko fotona svake sekunde emitira radio odašiljač snage 10 kW koji radi na valnoj duljini 200 m?
27. Izračunajte energiju, količinu gibanja i masu fotona u laserskom svjetlu helij-neonskog lasera kojima je valna duljina $6,328 \cdot 10^{-7}$ m.
28. Nalaze li se u vidljivoj svjetlosti fotoni energije 0,36 eV?
29. Izračunajte omjer spektralne gustoće zračenja Sunca za valnu duljinu $5 \cdot 10^{-7}$ m i $2 \cdot 10^{-6}$ m.
30. Koliki je izlazni rad za cink ako je granična valna duljina za fotoefekt na cinku 295 nm? Rezultat iskazite elektronvoltima.
31. Površina nekog metala obasjana je svjetlošću valne duljine $\lambda_1 = 589$ nm, a zatim valne duljine $\lambda_2 = 405$ nm, i pritom se za napon zaustavljanja dobija vrijednost $U_1 = 0,2$ V i $U_2 = 1,16$ V. Iz tih podataka izračunajte Planckovu konstantu i izlazni rad metala.
32. Metal kojemu je izlazni rad 1,9 eV obasjamo svjetlošću valne duljine 589 nm. Koliki je napon zaustavljanja potreban da bi prekinuo emisiju fotoelektrona iz metala?
33. Kolika je maksimalna energija i brzina elektrona koje iz metala izbacuju gama-zračenje frekvencije $1,23 \cdot 10^{20}$ Hz?
34. Emisija fotoelektrona s neke površine prestaje ako se valna duljina svjetlosti poveća na više od $5,4 \cdot 10^{-7}$ m. Ako tu površinu obasjamo svjetlošću valne duljine $4,36 \cdot 10^{-7}$ m, kolika je maksimalna energija i brzina elektrona? Koliki bismo napon morali upotrijebiti da zaustavimo emisiju elektrona?
35. Izračunajte promjenu valne duljine fotona energije E koji se centralno sudari s mirnim elektronom i odbije natrag tako da je kut raspršenja $\vartheta = 90^\circ$.

9. Električna vodljivost plinova – elektroni i ioni

9.1. Vođenje elektriciteta kroz plinove

Opisat ćemo pokus koji služi umjesto uvoda u problem vođenja elektriciteta kroz plinove. Kondenzator je smješten u zraku normalnog tlaka, srednje vlažnosti i pri sobnoj temperaturi (sl. 9.1). Trenjem staklenog odnosno ebonitnog štapa prenosimo na izoliranu ploču kondenzatora pozitivni odnosno negativni naboj.

Izolirana ploča kondenzatora spojena je s Braunovim elektrometrom. Druga ploča kondenzatora uzemljena je i zbog elektrostatske indukcije (influcije) na njoj se pojavi naboj suprotnog znaka od naboja na prvoj izoliranoj ploči. Kazaljka elektrometra se otklanja i otklonom pokazuje koliki je potencijal izolirane ploče kondenzatora (oko 5 kV). Dakle, između ploča kondenzatora uspostavljeno je električno polje.



Slika 9.1. Vođenje elektriciteta u električnom polju pločastog kondenzatora

Pri odabranim uvjetima to je polje u vremenu približno stalno, jer gotovo da i nema vođenja elektriciteta zrakom između ploča.

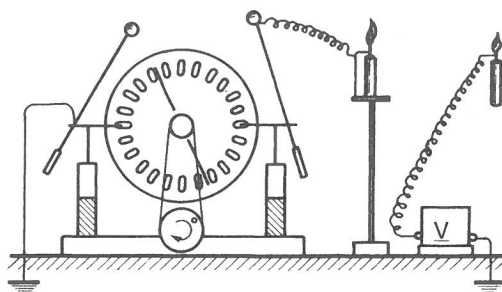
Finija mjerenja pokazuju da i suhi zrak očišćen od prašine slabo vodi električne naboje u električnom polju. Ta se vodljivost objašnjava prisutnošću iona kojih u zraku uvijek ima zbog djelovanja zračenja radioaktivnih tvari i zbog kozmičkog zračenja. Zbog jednog i drugog neutralne se molekule plinova u zraku ioniziraju, rastavljaju na pozitivni i negativni dio. Iz elektronskog omotača molekule plina iz sastava zraka izbija se elektron. Taj se proces zove ionizacija.

Pri ionizacijskim procesima nastaju slobodni elektroni i pozitivni ioni. Slobodni se elektroni mogu, ako za to postoji afinitet, ponovno sjediniti s neutralnim molekulama ili atomima i stvoriti njihove negativne ione (tako nastaju npr. negativni kisikovi ioni).

Vodljivost u zraku može se povećati ako između ploča *nabijenog* kondenzatora unesemo zapaljenu šibicu tako da plinovi izgaranja prolaze između ploča kondenzatora. Igla elektrometra naglo se spušta, što znači da se potencijal izolirane ploče smanjuje, ploče dakle gube naboj. U plamenu šibice nastaju podjednako pozitivni i negativni naboj, koji se gibaju u električnom polju prema pločama kondenzatora. Tako tumačimo izbijanje kondenzatora.

Na slici 9.2. dana je shema pokusa o elektriziranju zraka u sobi pomoću Wimshurstova elektrostatskog stroja i plamena svijeće. U zraku u sobi može se postići prevladavanje samo jedne vrste iona.

Slika 9.2. Difuzija električnog naboja kroz zrak u sobi

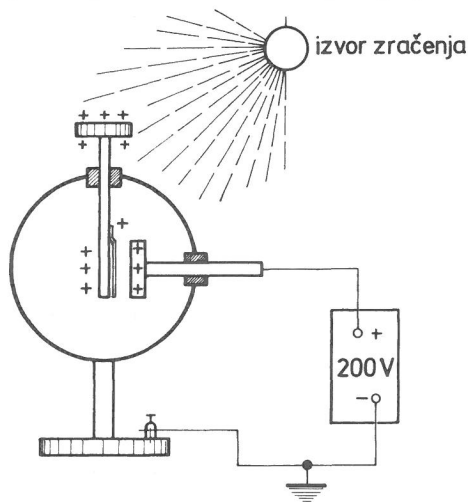


Jednu kuglu stroja uzemljimo, a drugu žicom povežemo s plamenom svijeće. Kada stroj radi, pozitivni odnosno negativni elektricitet s kugle žicom dovodimo u plamen. Iz plamena tada u okolni zrak izlaze električne čestice s nabojem samo jednog znaka. Taj se elektricitet širi zrakom i pomalo se u cijelom prostoru sobe može detektirati. Kao detektor može poslužiti drugi plamen svijeće koji je žicom povezan s jednim krajem elektrostatskog voltmetra. Drugi kraj voltmetra je uzemljen. Svijeća sakuplja naboje iz zraka u sobi i kazaljka voltmetra pokazuje napon između plamena svijeće u atmosferi sobe i tla, tj. zemlje. Zbog prostornog rasporeda naboja u zraku sobe taj se napon povećava ako svijeću odmičemo od zidova i poda prema sredini sobe.

Pokusom pomoću Wulfova elektroskopa može se dokazati ionizacija zraka pomoću radioaktivnog izvora (sl. 9.3). Napon između influencijske pločice i kućišta elektroskopa, koje je uzemljeno, dobiva se iz ispravljača i iznosi oko 200 V. Listić elektroskopa isprva je bez naboja. Ako je influencijska pločica daleko, kad priključimo napon s ispravljača, listić se izboči prema njoj. Ako tada polako približavamo pločicu, listić se sve više izbočuje i konačno dodirne pločicu. Time se listić nabije pozitivno jer je pločica spojena s pozitivnim polom ispravljača. Tada pločica odbije listić i on se nađe uz štapić elektroskopa. Listić, štapić i pločica nabijeni su pozitivno i nalaze se na istom potencijalu kao i pločica jer je listić bio u dodiru s njom.

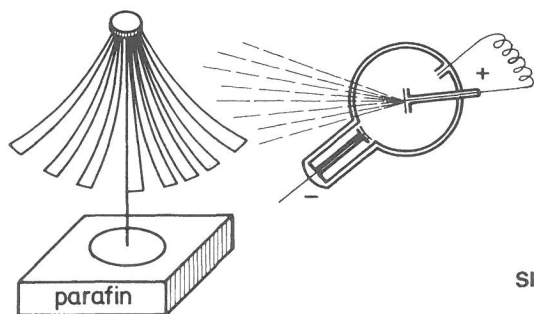
Štapić elektroskopa ima neki napon prema zemlji. To je stanje pokazano na slici 9.3. Štapiću elektroskopa približavamo radioaktivni izvor i zračenje iz tog izvora (v. pogl. 11) ionizira zrak blizu štapića. Štapić privlači negativni naboj i time neutralizira svoj pozitivni naboj. Znači da listić također gubi svoj naboj, pa se počinje približavati influencijskoj pločici. Kad štapić izgubi dovoljno naboja, listić

dodirne pločicu i odmah se odbije natrag prema štapiću, jer je od influencijske pločice primio novi pozitivni naboj. Frekvencija kojom trza listić elektroskopa pokazuje intenzitet ionizacijskog djelovanja radioaktivnog izvora.



Slika 9.3. Pokus o ionizacijskom djelovanju radioaktivnog zračenja

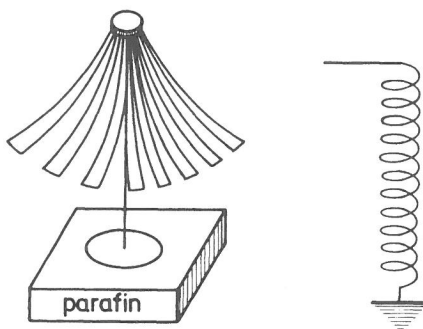
Slično se može pokazati ionizacijsko djelovanje rendgenskog zračenja (v. pogl. 11). Za tu svrhu može poslužiti papirna perjanica postavljena na parafinsku podlogu (sl. 9.4). Perjanicu treba elektrizirati pozitivnim ili negativnim nabojem pomoću staklenog ili ebonitnog štapa i trake perjanice će se razmaknuti. Ako tada elektriziranu perjanicu ozračimo rendgenskim zračenjem ona će se izbiti.



Slika 9.4. Pokus o ionizacijskom djelovanju rendgenskog zračenja

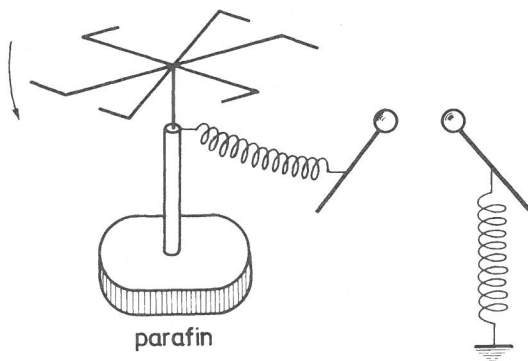
Ako je u zraku električno polje, kao što može biti blizu šiljka, opet će u zraku nastati ionizacija. Naprimjer, elektriziranoj perjanici (slika 9.5), približavamo iglu koju držimo u ruci. Polako i nakon određena vremena trake perjanice se skupe, tj. traka se izbije. To objašnjavamo na sljedeći način. Igla je kroz naše tijelo spojena sa zemljom. Na šiljku igle elektrostatskom indukcijom skupi se električni naboj zbog naboja perjanice. Budući da je površina šiljka malena, gustoća naboja na njemu je velika, pa je stoga oko šiljka jako električno polje. Ono je dovoljno jako da ionizira molekule plinova u zraku, a proizvedeni električni naboj putuje

električnim poljem između perjanice i šiljka. S obzirom na to da se perjanica postepeno izbija, govorimo o *tihom pražnjenju*. Tako djeluje šiljak gromobrana, koji izbija naboj iz nabivenog oblaka iznad sebe i smanjuje vjerojatnost naglog pražnjenja u obliku munje, tj. električne iskre. Tiho pražnjenje preko šiljka nastaje čim polje blizu šiljka dosegne određenu jakost. Zato se u tehnici visokog napona upotrebljavaju elektrode koje su zaobljene, sjajne i bez prašine. I zrno prašine djeluje kao šiljak.



Slika 9.5. Pokus o tihom pražnjenju

Djelovanje šiljka primjenjuje se u reakcionom Wilsonovu kolu. Prekrižene žice na šiljku mogu se okretati (sl. 9.6). Krajevi žice su jednako zavnuti, a kolo je postavljeno na izolirani stalak. Spojen je s jednim polom elektrostatskog stroja a drugi je pol uzemljen. Dok stroj radi, šiljci se električki nabiju i *ioniziraju* okolni zrak. Stoga se počinju odbijati oni s istoimenim nabojem i kolo otpočinje vrtnju. Na tom principu mogla bi funkcionirati ionska raketa.

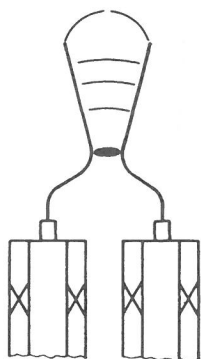


Slika 9.6. Wilsonovo kolo

A kako nastaje električni luk u zraku? Dvije posebno svinute krute žice, elektrode (»rogovi«) priključene su na visokonaponsku sekundarnu stranu transformatora (sl. 9.7). Žice se ne dodiruju, a donjim su dijelom najbliže jedna drugoj. Idući uvis, sve se više udaljavaju. Uspostavi li se na sekundaru napon, električno polje na mjestu gdje su žice najbliže, dovoljno je jako da dođe do naglog vođenja elektriciteta u zraku, do proboja. Uspostavi se *električni luk*, a praćen je svjetlosnim i zvučnim efektima. Pri toj vrsti električnog izboja električna se energija uglavnom pretvara u toplinu, pa se luk podiže, a na mjestima gdje su žice

dovoljno udaljene on se prekida. Zbog topline se i komad papira unesen u luk zapali.

Treba istaknuti da je zrak smjesa plinova: dušika, kisika, plemenitih plinova, ugljik-dioksida i vodene pare. Svaki od tih plinova ima drukčija elektrokemijska svojstva, pa pri finim istraživanjima treba raditi s čistim plinovima. Međutim, načelo vođenja elektriciteta u plinovima uglavnom ostaje jednako kao u zraku. Sve opisane pojave promatraju se u zraku pri normalnom tlaku.



Slika 9.7. Rogati munjovod

U opisanim pojavama, osim kod električnog luka, vođenje elektriciteta bi prestalo kada bi se poništilo djelovanje izvora ionizacije (npr. plamena šibice, rendgenskog zračenja, radioaktivnog izvora). Takvo vođenje elektriciteta u plinovima naziva se *nesamostalni izboj*. Upoznajmo neke njegove osobine.

a) Nesamostalni izboj

Promatramo prostor između ploča pločastog kondenzatora. Neka vanjski izvor ionizacije trajnog djelovanja (npr. radioaktivni izvor) u jedinici volumena i jedinici vremena stvara n_0 ionskih parova. Dok se u prostoru između ploča još ne uspostavi električno polje, stvorit će se u jedinici vremena

$$N_s = Sl n_0 \quad (9.1)$$

ionskih parova:

S je površina ploče kondenzatora, a l njihova međusobna udaljenost.

Ako je n broj ionskih parova u jedinici volumena u nekom trenutku, onda je njihov ukupni broj između ploča kondenzatora:

$$N = Sl n \quad (9.2)$$

Broj pozitivnih iona u jedinici volumena jednak je broju negativnih iona odnosno broju ionskih parova u jedinici volumena

$$n^+ = n^- = n.$$

Dok nema električnog polja, a zanemarili se difuzija naboja, nastaje gubitak iona zbog rekombinacije među njima, tj. pozitivni i negativni naboj se vežu stvarajući neutralne molekule ili atome. Broj takvih veza proporcionalan je broju

pozitivnih i broju negativnih iona, dakle kvadratu broja parova iona, n^2 . Ukupni broj rekombiniranih iona u prostoru između ploča u jedinici vremena odredimo pomoću izraza:

$$N_r = Sl\beta n^2 \quad (9.3)$$

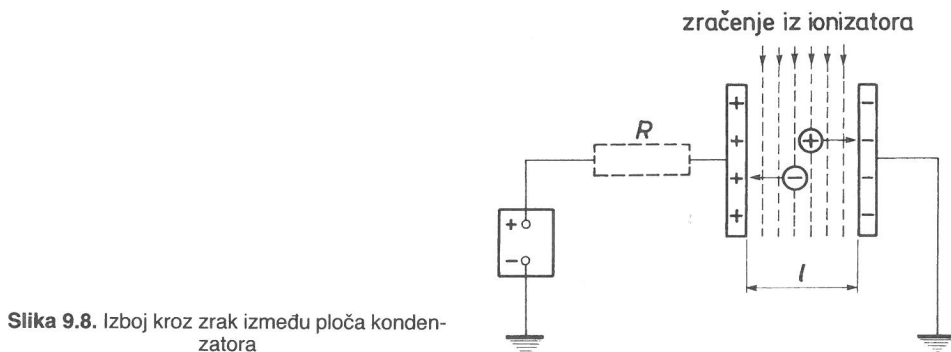
gdje je β koeficijent rekombinacije iona. U tablici 9.1. naznačeni su ti koeficijenti za neke plinove pri temperaturi od 18 °C i normalnom tlaku.

Tablica 9.1. Koeficijent rekombinacije nekih plinova

Plin	$\beta/10^{-12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
zrak	1,67
kisik	1,61
vodik	1,44
ugljik-dioksid	0,86

Kad bismo sada između ploča kondenzatora uspostavili električno polje priključivanjem izolirane ploče na pol izvora istosmjernog napona (sl. 9.8), električna će sila pokrenuti naboje i uspostaviti će se električna struja. Ona je obično malog iznosa, od 10^{-12} A do 10^{-6} A. Ioni koji stignu na ploču neutraliziraju se. U tom je slučaju gutibak iona osim rekombinacijom izazvan i neutralizacijom na pločama kondenzatora. Neka je n_i broj iona u jedinici volumena koji svake sekunde dolazi na ploče. Struja koja teče iznosi:

$$i = q n_i Sl,$$



Slika 9.8. Izboj kroz zrak između ploča kondenzatora

pri čemu je q naboj iona, pa je:

$$n_i = \frac{i}{qSl} = \frac{j}{ql},$$

gdje je j gustoća struje.

Ako teče struja u plinu preko, (9.1), (9.2) i (9.3) vrijedi bilanca iona:

$$Sl \frac{dn}{dt} = Sl n_0 - Sl \beta n^2 - j \frac{S}{q},$$

ili

$$\frac{dn}{dt} = n_0 - \beta n^2 - \frac{j}{ql},$$

pri čemu je:

$$j = qn(\mu_0^+ + \mu_0^-) E.$$

Oznake μ_0^+ i μ_0^- određuje pokretljivosti iona (pozitivnih i negativnih).

U ravnotežnom procesu $n = \text{konst}$, pa je derivacija $\frac{dn}{dt} = 0$, odnosno:

$$n_0 = \beta n^2 + \frac{j}{ql}.$$

Promotrit ćemo dva granična slučaja.

1) Električno je polje slabo, pa je broj iona koji dolaze na elektrode mnogo manji od broja rekombiniranih iona:

$$\frac{j}{ql} \ll \beta n^2.$$

Stoga slijedi da je:

$$n_0 = \beta n^2 \quad \text{ili} \quad n = \sqrt{\frac{n_0}{\beta}}.$$

U tom slučaju izraz za gustoću struje ima oblik:

$$j = q \sqrt{\frac{n_0}{\beta}} (\mu_0^+ + \mu_0^-) E.$$

U dobivenoj formuli veličine q , n_0 , β , μ_0^+ i μ_0^- ne ovise o jakosti električnog polja, pa je gustoća struje proporcionalna jakosti električnog polja. Iz toga zaključujemo da pri slabim električnim poljima vrijedi Ohmov zakon.

2) U slučaju kada je električno polje dovoljno jako da je gustoća struje velika, svi su stvoreni ioni nosioci struje. Rekombinacija je zanemariva u usporedbi s brojem iona koji se neutraliziraju na pločama. Budući da je tada:

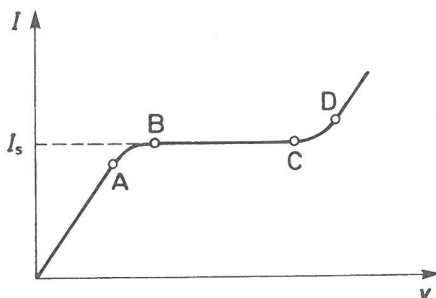
$$\frac{j}{ql} \gg \beta n^2,$$

dobivamo:

$$j = j_s = n_0 q l.$$

Pritom je j_s gustoća struje zasićenja. U tom slučaju gustoća struje ne ovisi o potencijalu izolirane ploče kondenzatora. Gustoća struje zasićenja pri stalnoj udaljenosti l između ploča kondenzatora ima stalnu vrijednost. Međutim, struja prestane teći kad prestane djelovati vanjski izvor ionizacije, pa otuda naziv

nesamostalni izboj. Grafički prikaz opisanih pojava daje slika 9.9. Dio OA odgovara području slabih polja odnosno malih napona na pločama kondenzatora. Pritom vrijedi Ohmov zakon. Na dijelu krivulje od točke A do točke B struja se s naponom mijenja nelinearno. Od točke B do točke C proteže se područje struje zasićenja. Od točke C struja najprije sporo, a zatim vrlo brzo raste. To je područje u kojemu se javljaju novi unutrašnji izvori iona. Ako se u nekoj točki D isključi vanjski izvor ionizacije, izboj se ne prekida. Nesamostalni se izboj zbog formiranja novih iona uzrokovanih unutrašnjim procesima u plinu pretvara u *samostalni električni izboj*. Primjer smo vidjeli u pokusu s rogatim munjovodom.



Slika 9.9. Promjena struje s naponom u izboju kroz zrak između elektroda

b) Samostalni izboj

Međudjelovanje elektrona (a također i iona) s atomima i molekulama može se predložiti sudarima.

Pri elastičnom sudaru elektron se odbije od molekule, kao loptica od zida, ne mijenjajući veličinu brzine. Elastični sudari karakteristični su za nesamostalne izboje.

Elektron veće kinetičke energije može u sudaru pobuditi ili ionizirati atom ili molekulu. U tom je slučaju sudar **neelastičan**. Dio kinetičke energije elektrona utrošit će za energiju pobude* ili ionizacije, tj. na povećanje unutrašnje energije čestice koja se sudari s elektronom. Ti se sudari nazivaju **neelastični sudari prvog reda**. (Atom ili molekula u pobuđenom stanju može u sudaru s drugom česticom, atomom, prijeći u osnovno, nepobuđeno stanje ne emitirajući elektromagnetsku energiju zračenjem, već predajući razliku energije čestici s kojom se sudarila. Takav se sraz naziva **neelastičnim sudarom drugog reda**. Primjer je međudjelovanje atoma helija i neona u He–Ne laseru; točka 10.14.).

Što je masa čestice prema masi atoma ili molekule s kojom se sudari manja, to se veća energija predaje u neelastičnom sudaru. Zato je za pobudu i ionizaciju atoma i molekula neelastičnim sudarom najprikladniji elektron.

Zbog djelovanja električne sile u polju elektroni između dva sudara s molekulama plina prime energiju:

$$W_1 = eE \bar{\lambda},$$

gdje je E jakost električnog polja, a $\bar{\lambda}$ srednji slobodni put elektrona. Povećanjem napona među pločama kondenzatora raste i jakost električnog polja, a time i

* Naprimjer neelastične elektronske pobude atoma žive u pokusu Francka i Hertza.

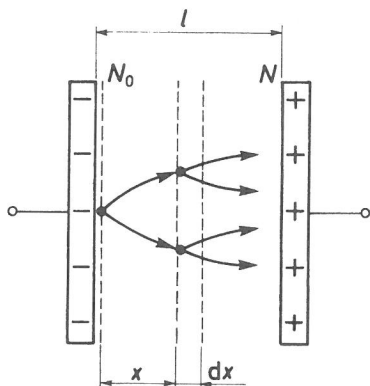
energija elektrona. Za napon veći od neke kritične vrijednosti između točaka C i D na slici 9.9. struja počinje naglo rasti. Tada je ispunjen uvjet:

$$e E \bar{\lambda} > W_i,$$

gdje je W_i energija ionizacije atoma ili molekule. Nastaje ionizacija molekula plina zbog sudara s elektronima.

Zaključujemo: kada energija elektrona (dobivenog pomoću vanjskog izvora ionizacije) u polju postane veća od energije ionizacije, elektron pri sudaru ionizira molekulu. Tako nastaje jedan pozitivni ion i elektron. Umjesto jednog elektrona nakon toga imamo dva. Poslije njihova ubrzavanja u električnom polju oni ioniziraju nove dvije molekule, pa se broj elektrona poveća na četiri. Taj se proces nastavlja, a broj elektrona raste u obliku lavine. Ako s negativno nabijene ploče, katode polazi N_0 elektrona na pozitivno nabijenu ploču, anodu, stiže N elektrona prema sljedećem računu; jedan elektron tvori α novih elektrona na jedinici duljine puta u smjeru djelovanja polja, a N elektrona na duljini puta dx (sl. 9.10) tvori dN novih elektrona:

$$dN = N \alpha dx.$$



Slika 9.10. Lavina između elektroda

Uz pretpostavku da električni naboj ne mijenja jakost vektora električnog polja, sumiranjem rezultata duž cijelog puta od katode do anode:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^l \alpha dx,$$

na anodu stiže:

$$N = N_0 e^{\alpha l}$$

elektrona. Veličina α naziva se prvi Towsendov koeficijent. Towsend je teorijski našao ovisnost koeficijenta α o jakosti električnog polja E i tlaka plina p , odnosno plinske smjese u kojoj nastaje lavina. Nađena funkcija ima oblik:

$$\frac{\alpha}{p} = A e^{-\frac{Bp}{E}}.$$

Konstante A i B karakteristične su za plin za neko područje $\frac{E}{p}$. Tako konstante za zrak iznose:

$$A = 113 \frac{1}{\text{Pam}}, \quad B = 274 \frac{V}{\text{Pam}}$$

$$\text{u području } \frac{E}{p} = (75 - 600) \frac{V}{\text{Pam}}.$$

Te teorijske vrijednosti u promatranom se području dobro slažu s eksperimentalnim vrijednostima iako u pokusu procesi mogu biti složeniji nego u teorijskome modelu. Posljedica oslobađanja elektrona u lavini je istodobno formiranje pozitivnih iona koji se također ubrzavaju u električnom polju. Ako jakost polja nije dovoljna da bi ioni izazvali nove ionizacije molekula, odnosno atoma i ako ne mogu izbiti elektrone iz katode (sekundarna emisija), onda elektroni blizu katode nastaju samo pomoću djelovanja vanjskog izvora ionizacije. Kada se izvor ukloni, izboj u polju se gasi.

Međutim, fizikalna slika izboja potpuno se mijenja kada je električno polje dovoljno jako da pozitivni ioni dobiju dosta energije za nove ionizacije u plinu i izbijanje sekundarnih elektrona s elektroda. Ionizacija se događa u svim dijelovima volumena između elektroda, pa je broj oslobođenih elektrona i iona veći od onoga koji stvara vanjski izvor ionizacije. U tom se slučaju isključivanjem vanjskog izvora ionizacije izboj u plinu nastavlja. Zaključimo da pri dovoljno jakome električnom polju ili, drugim riječima, pri dovoljno visokom naponu između elektroda nesamostalni izboj u plinu prelazi u samostalni.

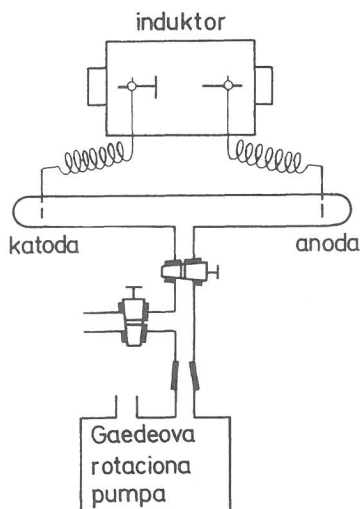
Da se promjena naziva **električni proboj** u plinu i događa se uz odgovarajući **probojni napon**. (Sjetimo se ponovno »rogatog munjovoda«.) Naravno, da bi pri tom naponu nastao proboj, u plinu mora postojati početni broj slobodnoga električnog naboja koji počinju cijeli proces izbijanja. Radioaktivne tvari i kozmičko zračenje praktično uvijek osigurava dovoljno električki nabijenih čestica.

9.2. Električni izboj kroz razrijeđeni zrak

Da bismo mogli promatrati pojave izboja kroz zrak pri tlaku nižem od normalnoga, služimo se izbojnom cijevi s elektrodama (sl. 9.11). Staklena cijev može biti duga oko 80 cm i imati promjer oko 5 cm. Sa svakog je kraja utaljena po jedna aluminijska elektroda. U sredini svake elektrode je mali okrugli otvor. U sredini cijevi utaljena je uža cijev kroz koju se isisava zrak. Ona ima konusni završetak koji se može utaknuti na ulaz Gaedeove rotacione vakuumske pumpe smještene ispod cijevi.

Izvor na koji se spajaju elektrode mali je induktor koji u času prekida može dati vršni napon do približno 100 kV. Na induktoru je iskrište čija je pozitivna elektroda, anoda, šiljak, a negativna elektroda, katoda, pločica. Razmak između

elektroda je oko 4 cm. Napon iz induktora tog polariteta dolazi na mahove i te oznake elektroda odnose se na viši udar napona iz induktora.



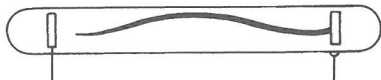
Slika 9.11. Uređaj za promatranje izboja kroz razrijeđeni zrak

NAPOMENA:

Prostor cijevi odijeljen je od pumpe pipcem. Ispod njega je utaljena još jedna cijev s pipcem kojim se pumpa povezuje s atmosferom u sobi. To je nužno, jer se nakon završenog isisavanja pumpa može zaustaviti tek kad je povežemo s atmosferom u sobi. Zato vakuum u ispražnjenoj cijevi neće moći uvući ulje iz pumpe. Ulje u pumpi ne smije isparavati (ono je bez mirisa) da svojim parama ne ispuni evakuirani prostor u cijevi. Konusni su spojevi premazani vakuumskom masti koja također gotovo ne isparava kako bi spojevi bili nepropusni za okolni zrak.

Dok pumpa ne radi a induktor radi, uspostaviti će se izboj kroz zrak na iskrištu induktora. U izbojnoj cijevi u kojoj je zrak normalnog tlaka izolacija između elektroda odviše je dobra da bi tim putem potekla električna struja.

Uz stalni rad induktora pokrene se vakuumaska pumpa, otvori pipac kojim je cijev vezana za pumpu, a drugi je pipac zatvoren. Time počinje isisavanje zraka iz izbojne cijevi i tlak u njoj pada. Iskrište na induktoru ubrzo prestane probijati, a između elektroda se uspostavi izboj. Opaža se nemirna tanka ljubičasta nit koja vijugavo ide od anode prema katodi izbojne cijevi. Kako evakuacija napreduje, nit se smiruje, pojačava joj se sjaj, ostaje uz anodu i ne seže do katode. Na slici 9.12. vidi se izgled niti pri tlaku od 5 000 Pa.

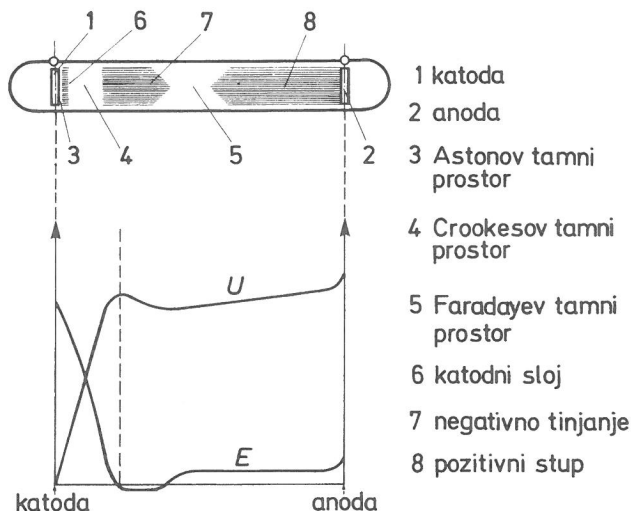


Slika 9.12. Izboj u cijevi kroz razrijeđeni zrak

Pri daljnjoj evakuaciji zraka iz cijevi vrpca se širi i ispuni cijelu širinu cijevi. Osim toga, u smjeru od katode prema vrpci javlja se nekoliko svijetlih i tamnih prostora. To je stanje vrsta *samostalnog izboja* koji se naziva **tinjavi izboj**. Na slici 9.13. pokazana su karakteristična područja tinjavog izboja (tlak 70 Pa):

1. Neposredno uz katodu stvara se vrlo uski tamni prostor koji se naziva

Astonov tamni prostor. Elektroni oslobođeni s katode ubrzavaju se u električnom polju, ali im je kinetička energija premalena da bi pobudili molekule ili atome.



Slika 9.13. Tinjavi izboj; raspored napona U i jakosti električnog polja E između anode i katode

2. Slijedi tanki svijetli prostor nazvan katodni sloj. U tom području elektroni već izazivaju pobudu. Pobudene molekule pri prelasku u normalno stanje (deekscitaciji) emitiraju svjetlost.

3. Katodni sloj prelazi u katodni tamni prostor koji se naziva *Crookesov tamni prostor*. Elektroni koji su bez sudara prošli katodni sloj dovoljno su energični da mogu izazvati ionizaciju, pa se svijetljenje plina naglo smanji. Stvara se prostorni naboj iona koji su znatno slabije pokretni od elektrona.

4. Na kraju *katodnog tamnog prostora* pojavljuje se najsvjetlije područje nazvano **negativno tinjanje**. Spori elektroni dobiveni ionizacijom u katodnome tamnom prostoru prodiru u to područje. Manji broj brzih elektrona s katode, koji se nisu neelastično srazili, ioniziraju molekule u tom području. U njemu je gustoća pozitivnih iona i negativnih elektrona velika. Mjerenja pokazuju da se tu nađe oko 10^{11} cm^{-3} od svake vrste čestica. Koncentracija se smanjuje s povećavanjem udaljenosti od katode. Elektroni nemaju dovoljno energije za ionizaciju, ali pobuđuju molekule koje emitiraju svjetlost prelaskom u normalno stanje. Elektroni se time uspore i rekombiniraju s ionima, što je praćeno rekombinacijskim zračenjem. Pritom je električno polje vrlo slabo, pa se brzina elektrona prema kraju tog područja smanji, zbog čega slabi intenzitet svjetla.

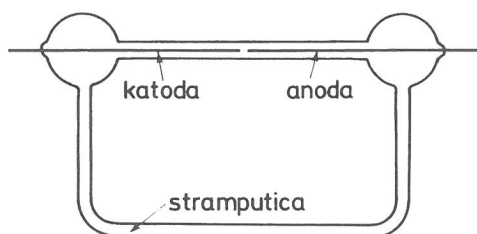
5. Nakon negativnog tinjanja slijedi područje *Faradayeva tamnog prostora*. Elektroni nemaju više dovoljnu energiju za pobuđivanje molekula, a električno polje sporo raste, pa je vjerojatnost rekombinacije malena. Stoga je to područje tamno.

Opisanih pet područja jesu *katodna područja izboja* i u njima nastaju svi procesi nužni za održavanje izboja. To možemo i dokazati pokusom s cijevi sa

»stramputicom«. Na slici 9.14. pokazano je da se izboj uspostavlja kroz dugu stazu stramputice, a ne na mjestu gdje su elektrode međusobno blizu. One su preblizu da bi se u prostoru između njih stvorila katodna područja.

6. Na kraju Faradayeva prostora elektroni dobiju dovoljno energije za pobudu i ionizaciju molekula. Zato se u području koje se naziva *pozitivni stup* javlja svjetlo. S povećanjem razmaka između elektroda i povećanjem tlaka može se povećati duljina pozitivnog stupa. (Upotrebljava se u reklamnim cijevima.) U tom je području jednaka i visoka koncentracija elektrona i iona. To stanje kvazineutrnog plina naziva se **plazma**. Promjena napona, odnosno jakost električnog polja je malena. Elektroni se nalaze u kaotičnome termičkom gibanju pobuđujući i ionizirajući molekule.

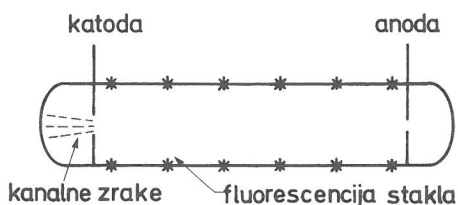
7. Ispred anode nastaje uski anodni tamni prostor iza kojega je anodni svijetli sloj, formiran zbog maloga anodnog pada napona.



Slika 9.14. Cijev sa stranputicom

9.3. Katodne i kanalne zrake

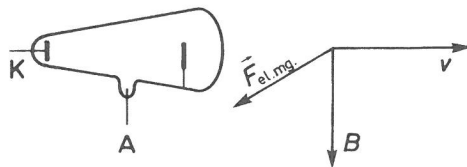
Ako u uređaju kojim smo promatrali izboj kroz razrijeđeni zrak (slika 9.11) zrak iz cijevi evakuiramo do tlaka nižeg od onoga pri kojemu nastaje tinjavo izbijanje, pozitivni se stup raspada na slojeve i povlači prema anodi. Kada se tlak u cijevi spusti ispod 0,3 Pa, sve svjetlosne pojave iz plina između elektroda iščeznu. Samo staklo cijevi pod udarcima katodnih zraka koje izlaze iz katode fluorescira, zeleno, ili modro, ovisno o vrsti stakla. Jedino s unutrašnje strane katode izbijaju nevidljive katodne zrake. U pokusu je katoda aluminijska pločica koja u sredini ima okrugli otvor. S njezine vanjske strane kroz otvor izlazi blijedi tračak ružičaste svjetlosti (sl 9.15). Ona potječe od **kanalnih zaka**. Taj naziv dao im je njihov otkrivač Goldstein jer svjetlo izlazi iz kanala u katodi.



Slika 9.15. Pojave u izbojnoj cijevi pri katodnom vakuumu

Gaedeovom rotacionom pumpom, kojom evakuiramo cijev, ne može se postići veći vakuum u cijevi, tj. tlak niži od 0,13 Pa. Na tim najnižim tlakovima cijev postaje »tvrda« i počinje se ponovno javljati iskra na iskrištu induktora. Tlakovi od 0,27 do 0,13 Pa jesu tlakovi pri kojima se postiže *katodni vakuum*. Svojstva katodnih zraka ispituju se pokusima.

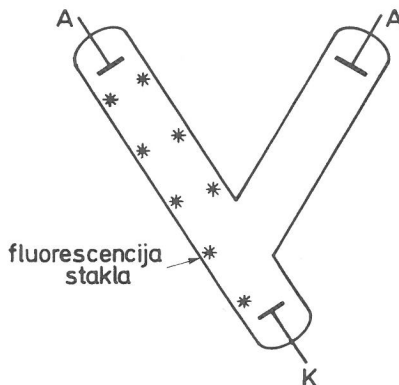
Crookesova je cijev kruškasta oblika (sl. 9.16). Katoda na tanjem kraju cijevi ima oblik pločice. Anoda je metalna kuglica i nalazi se u izbočini na plaštu cijevi. Nasuprot katodi, u širem dijelu cijevi nalazi se zapreka u obliku malteškog križa, koja se može prevaliti nagibanjem cijevi. Zrak u cijevi evakuiran je do katodnog vakuuma. Ako je zapreka uspravna, a cijev stavimo u pogon pomoću malog induktora, na dnu cijevi vidjet ćemo ostru sjenu zapreke. Kada se zapreka prevali, cijelo dno cijevi fluorescira. Osim što izazivaju fluorescenciju stakla, katodne se zrake šire kao zraka svjetlosti, pravocrtno s katode, tvoreći ostru sjenu zapreke na dnu cijevi, bez obzira na to gdje je smještena anoda.



Slika 9.16. Crookesova cijev

To svojstvo katodnih zraka može se također vidjeti pomoću cijevi u obliku slova V (sl. 9.17). Na donjem dijelu cijevi nalazi se pločasta elektroda, katoda, postavljena paralelno s pločicom, anodom, u lijevom kraku cijevi. Druga je pločica u desnom kraku. Cijev se evakuira do katodnog vakuuma, priključi na induktor tako da je katoda trajno vezana, a anoda je jednom elektroda u lijevom kraku, a drugi put elektroda u desnom kraku. Lijevi krak cijevi fluorescira bez obzira na to je li na induktor priključena lijeva ili desna anoda. Može se zaključiti da u oba slučaja katodne zrake izlijeću okomito s katode.

Vratimo se Crookesovoj cijevi. Ako gornjoj strani cijevi približavamo štapićasti magnet (sl. 9.16), na dnu cijevi pomiče se ostra sjena zapreke. Znači da



Slika 9.17. Pokus s katodnim žrakama

magnetsko polje otklanja katodno zračenje elektromagnetskom silom. Za nacrtani položaj cijevi i magneta vektor brzine katodnih zraka $\vec{v}$ položen je slijeva nadesno, a vektor magnetske indukcije $\vec{B}$ djeluje prema dolje. Sjena se otklanja iz ravnine crtnje. Pomoću izraza za elektromagnetsku silu,

$$\vec{F}_{\text{clmg}} = e\vec{v} \times \vec{B},$$

zaključujemo da zračenje pokazuje svojstvo negativnog električnog naboja, e , elektrona. Katodno se zračenje i u električnom polju također otklanja. Goldstein je tvrdio da emisiju katodnog zračenja uzrokuju pozitivni ioni molekula zaostalog plina u cijevi kada je cijev evakuirana do katodnog vakuuma. Pozitivni se ioni ubrzavaju prema katodi, gdje uzrokuju sekundarnu emisiju elektrona, katodno zračenje. Ioni koji u našem pokusu prolaze kroz kanal u katodi daju slabo ružičasto svjetlo. Njega smo upoznali kao *kanalne zrake*. Da te zrake nose pozitivni naboj, može se ustanoviti mjerenjem otklona u magnetskome i električnom polju. Ti su otkloni teže zamjetljivi jer ioni imaju znatno veću masu nego elektroni. Naravno, da budući su kanalne zrake pozitivni ioni, otklon ovisi i o vrsti plina zaostalog u cijevi. Međutim, lako se zamjećuje da otklon katodnih zraka ne ovisi o vrsti materijala od kojega je načinjena katoda, niti o vrsti zaostalog plina. Svojstva čestica koje se gibaju u katodnim zrakama istraživao je J.J. Thomson. Detaljnije ćemo upoznati njegov pokus.

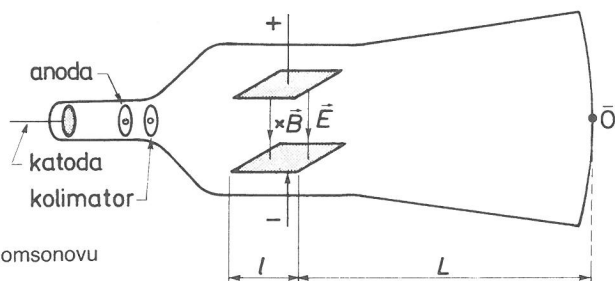
9.4. Određivanje omjera e/m – specifični naboj elektrona

Opisat ćemo uređaj J.J. Thomsona, a zatim izvesti pokus sa Wehneltovom cijevi. Objava se pokusima određuje omjer e/m .

9.4.1. Mjerenja J.J. Thomsona

J.J. Thomson prvi je 1897. godine mjerio otklon katodnih zraka u poznatome električnom i magnetskom polju, s namjerom da odredi kvocijent naboja elektrona i njegove mase, e/m ili, drugim riječima specifični naboj elektrona.

Načelni izgled katodne cijevi kojom je obavljao mjerenja vidi se na slici 9.18. Iz katode se rasprostire katodno zračenje, elektroni koji se u električnom polju ubrzavaju prema anodi. Anoda ima otvor pa se uski snop elektrona neke konačne stalne brzine pojavljuje iza anode. Prolazeći kroz kolimator, zrake ulijeću u homogeno električno polje između dvije pločaste elektrode. Istodobno je, okomito na električno polje, uspostavljeno homogeno magnetsko polje. U električnom polju na elektrone djeluju električna sila, a u magnetskome elektromagnetska sila. Polja su odabrana tako da elektroni istodobno dožive dva suprotno usmjerena otklona.



Slika 9.18. Katodna cijev u J. J. Thomsonovu pokusu

a) Najprije pogledajmo otklon elektrona u **električnom polju**. Prema drugom Newtonovu aksiomu, jednadžba gibanja elektrona u homogenome električnom polju ima oblik:

$$m\vec{a} = e\vec{E} \quad (9.4)$$

odnosno

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \vec{E} \quad (9.5)$$

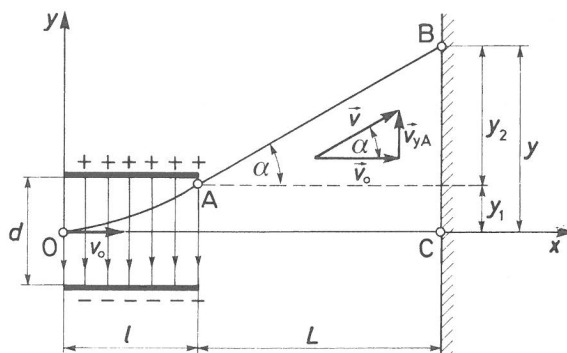
gdje je e negativni naboj elektrona, a $\vec{E}$ vektor jakosti električnog polja.

Iz formule (9.5) vidi se da ubrzanje čestice ovisi o omjeru e/m . Električno polje leži u koordinatnom sustavu (sl. 9. 19) tako da je pozitivna elektroda gore. U času $t = 0$ elektron je u ishodištu i ima početnu brzinu v_x , koja je u smjeru x -osi sustava. U homogenome električnom polju gibanje elektrona analogno je horizontalnom hicu koji izvodi sitno tijelo u homogenome gravitacijskom polju. Brzina u osi x ne mijenja se s vremenom, tj.

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (9.6)$$

a njezina je promjena u smjeru osi y , akceleracija, uzrokovana električnom silom,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m} E \quad (9.7)$$



Slika 9.19. Otklon snopa elektrona u električnom polju

Integracijom jednadžbi (9.6) i (9.7) dobivamo:

$$v_x = \text{konst.} = v_0 \quad (9.8)$$

$$v_y = \frac{e}{m} E t + C'.$$

Konstanta C' određuje se iz početnih uvjeta: $t = 0$, $v_y = 0 = C'$, pa slijedi:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eE}{m} t \quad (9.9)$$

Otklon čestica u smjeru polja dobije se integracijom jednadžbe (9.9),

$$y = \frac{e}{2m} E t^2 + C.$$

Iz početnih uvjeta $C = 0$, jer za $t = 0$ nema otklona, tj. $y = 0$, slijedi:

$$y = \frac{e}{2m} E t^2. \quad (9.10)$$

Pomoću (9.8) dobivamo:

$$x = v_0 t \quad (9.11)$$

Jednadžbe (9.10) i (9.11) jesu parametarske jednadžbe, pa eliminacijom vremena t dobivamo izraz za putanju elektrona u homogenome električnom polju:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2, \quad (9.12)$$

što je parabola s tjemenom u ishodištu.

Ako su ploče elektroda duge l i idealno izvan toga je $E = 0$, za otklon elektrona na osi y sustava dobivamo formulu:

$$y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2} l^2 \quad (x = l) \quad (9.13)$$

Nakon toga elektron napušta električno polje i giba se po pravcu koji je tangenta na parabolu u točki $A(y_1, l)$ (v. sl. 9.19) vektorom brzine $\vec{v}$ koji je stalan. Elektron udara na dno cijevi u točki B, gdje izaziva fluorescenciju.

Kut što ga tangenta u točki A zatvara s osi x , tj. kut otklona elektrona je α i dobiva se iz izraza (9.12) pomoću derivacije $\frac{dy}{dx}$ za $x = l$, tj.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0^2} \quad (9.14)$$

Iz slike 9.19:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2}{L} \quad (9.15)$$

gdje je L udaljenost od kraja električnog polja do dna cijevi na kojoj nastaje fluorescencija.

Iz izraza (9.14) i (9.15) slijedi:

$$y_2 = L \operatorname{tg} \alpha = \frac{eE}{m} \frac{lL}{v_0^2}.$$

Ukupni otklon elektrona $\overline{BC}$ je:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eE}{2mv_0^2} l^2 + \frac{eEL}{mv_0^2} l$$

$$y = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} l + L \right) = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2} l + L \right) \quad (9.16)$$

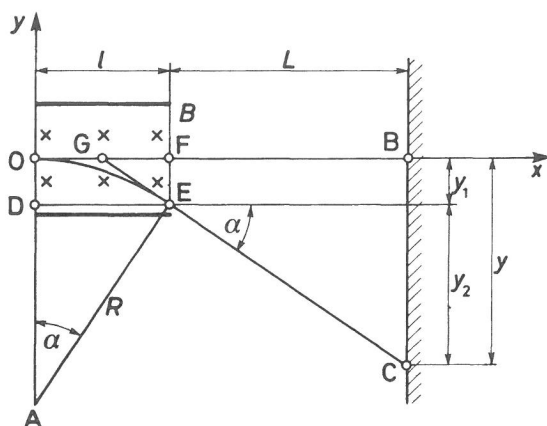
U napisanom izrazu mogu se mjeriti veličine l , L kao geometrijski paramteri uređaja, zatim polje $E = U/d$, pri čemu je U napon na pločama razmaknutim za d i veličina y , a nepoznate veličine su e/m i v_0 . Njih valja odrediti. Iz izraza (9.16) dobivamo:

$$\frac{e}{m} \frac{1}{v_0^2} = \frac{2y}{E(2lL + l^2)} \quad (9.17)$$

b) Promotrimo gibanje elektrona samo kroz **homogeno magnetsko polje** koje je na mjestu električnog polja uređaja sa slike. 9.18. Detalj aparature na slici 9.20. smješten je u koordinatni sustav s vektorom magnetske indukcije $\vec{B}$, koji leži okomito na ravninu crtnje u smjeru osi z . Na elektron koji u magnetsko polje dolazi brzinom $\vec{v}_0$ u smjeru osi x djeluje elektromagnetska sila:

$$\vec{F}_{\text{elmg}} = e (\vec{v}_0 \times \vec{B}).$$

Sila je okomita na ravninu u kojoj leže međusobno okomiti vektori $\vec{v}_0$ i $\vec{B}$, pa se čestica kreće u xy ravnini. Zbog negativnog naboja elektrona otklon je u negativnom smjeru osi y . Taj ćemo otklon pisati u njegovoj apsolutnoj vrijednosti.



Slika 9.20. Otklon snopa elektrona u magnetskom polju

Elektromagnetska sila (za ostvarene uvjete prema iznosu $F_{\text{elmg}} = e v_0 B$) djeluje okomito na pravac gibanja čestice i to je centripetalna sila. Vrijedi:

$$\frac{m v_0^2}{R} = e v_0 B,$$

gdje je R polumjer staze po kojoj se elektron giba u magnetskom polju. Iz formule dobivamo:

$$R = \frac{m v_0}{e B} \quad (9.18)$$

U homogenome magnetskom polju brzina elektrona se ne mijenja po veličini, pa je polumjer stalan, a elektron se u magnetskom polju giba po kružnom luku $\widehat{OE}$. U točki E elektron napušta magnetsko polje i giba se po tangenti na kružnu stazu od točke E do točke C na dnu cijevi uređaja. Pravac zatvara kut α s prvotnim smjerom gibanja elektrona.

Elektron u magnetskom polju doživi otklon $y_1 = FE$.

$$y_1 = R (1 - \cos \alpha) \quad (9.19)$$

a ukupni je otklon čestice iz slike 9.4.13:

$$y = y_1 + y_2 = \left(\frac{1}{2} l + L \right) \operatorname{tg} \alpha \quad (9.20)$$

gdje je:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{OA - OD} = \frac{l}{R - y_1},$$

a zamjenom iz (9.19)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{R - R(1 - \cos \alpha)} = \frac{l}{R \cos \alpha}.$$

Formula (9.20) dobiva oblik:

$$y = \left(\frac{1}{2} l + L \right) \frac{l}{R \cos \alpha}$$

a budući da je

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} l + L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} l + L \right)^2 + y^2}} \quad (9.22)$$

supstitucijom (9.18) i (9.22) u (9.21) dobivamo:

$$\frac{e}{m} \frac{1}{v_0} = \frac{y}{B l \sqrt{\left(\frac{1}{2} l + L \right)^2 + y^2}}$$

Veličine l , L , y , E i B mogu se direktno mjeriti, a veličine e/m i v_0 su nepoznate.

J.J. Thomson je u uređaju za određivanje e/m radio s istodobno uključenim električnim i magnetskim poljem takve jakosti da su se dva suprotno usmjerena otklona elektrona poništavala i snop elektrona pogadao točku $\bar{O}$ na slici 9.18, kao da električnoga i magnetskog polja nema. U tom slučaju sile koje djeluju na snop elektrona održavaju ravnotežu, pa je:

$$eE = ev_0B,$$

odnosno početna brzina elektrona:

$$v_0 = \frac{E}{B}.$$

Ako to uvrstimo u izraz (9.17) za otklon elektrona u električnom polju, za specifičan naboj elektrona dobivamo formulu:

$$\frac{e}{m} = \frac{2Ey}{B^2(2lL + l^2)}.$$

Uz poznate veličine E , y , B , l , i L dobiva se apsolutna vrijednost kvocijenta:

$$\frac{e}{m} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}$$

J.J. Thomson je dobio rezultate koji su u ono doba (kraj 19. st.) bili zapanjujući. Brzine elektrona iznosile su desetinu brzine svjetlosti. To je uzrokovalo grešku od 0,5%, jer je masa elektrona u gibanju poznatom relativističkom formulom povezana s masom mirovanja. Dobivao je podatak da omjer e/m ne ovisi o materijalu katode, a bio je izrazito velik. Tako velik specifični naboj ne može imati nijedno makroskopsko tijelo jer bi se zbog djelovanja elektrostatskih sila raspalo. Atomi najlakšeg elementa vodika imaju masu m_H , a iz elektrolize se može izračunati za vodik:

$$\frac{e}{m_H} = 9,579 \cdot 10^7 \text{ A} \cdot \text{s kg}^{-1}.$$

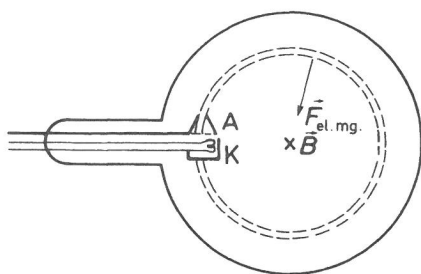
U elektrolizi vodene otopine sumporne kiseline na katodi se izlučuje vodik. Omjer e/m_H dobije se tako da se potrošena količina električnog naboja podijeli masom izlučenog vodika. Budući da atom vodika nosi toliko pozitivnog naboja koliko ima elektron negativnoga, proizlazi, da je masa elektrona 1837 puta manja od mase vodikova atoma. Iz gornjih brojeva slijedi:

$$\frac{e}{m} : \frac{e}{m_H} = \frac{m_H}{m} = 1837.$$

Mjerenja J.J. Thomsona time su pokazala da je u katodnim zrakama, elektronima, riječ o subatomarnim česticama koje su lakše od najlakšeg atoma, atoma vodika. Budući da svojstva katodnih zraka ne ovise o materijalu od kojeg je katoda načinjena, slijedi zaključak da su čestice katodnih zraka, negativni elektroni, prisutne u atomima svake tvari. Elektroni su sastavni dio svakog atoma.

9.4.2. Mjerenje pomoću Wehneltove cijevi

Cijev je staklena i ima oblik kugle promjera oko 0,2 m (sl. 9.21). Sa strane se nalazi elektronski top sastavljen od užarene katode K i anode A u obliku lijevka. Katoda s donje strane ima zaštitu, pa se elektroni emitiraju samo prema anodi.



Slika 9.21. Wehneltova cijev

U prvoj fazi pokusa užari se katoda. Zbog povišenja temperature kovine atomi u kristalnoj rešetci snažnije titraju pa slobodni elektroni, koji već imaju veću energiju, sudarom s atomima iz rešetke mogu dobiti još toliko energije koliki je izlazni rad. Takvi elektroni mogu izaći iz kovine. To je *termionska emisija* elektrona.

U drugoj se fazi između katode i anode uspostavi napon od 100 do 200 V. Izbačeni se elektroni ubrzavaju u električnom polju, a znatan ih dio izlazi kroz otvor anode. U cijevi je vodik pod tlakom od oko 1 Pa zbog dva razloga: snop elektrona koji izlazi iz anode čini vidljivim, kao modri trak svjetlosti, a usto drži elektrone na okupu, pa je uz odgovarajući napon na anodi trak toliko uzak da se može reći da iz anode izlazi zraka elektrona. Ako se tada pomoću struje iz akumulatora koju šaljemo kroz Helmholtzove zavojnice (nisu nacrtane) uspostavi homogeno magnetsko polje smjerom u ravninu crtnje, elektronska se zraka savije u kružnicu. Polumjer kružnice može se mijenjati ako mijenjamo napon U između anode i katode ili ako mijenjamo jakost struje u zavojnicama, čime se mijenja jakost magnetskog polja.

Elektroni ubrzani naponom U dobivaju kinetičku energiju:

$$\frac{mv^2}{2} = eU \quad (9.23)$$

Magnetsko polje indukcije B daje centripetalnu silu koja savija stazu elektrona:

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad (9.24)$$

Iz te dvije formule (dijeljenjem) dobivamo brzinu elektrona:

$$v = \frac{2U}{Br} \quad (9.25)$$

Ako izraz za brzinu (9.25) uvrstimo u formule (9.23) ili (9.24) dobit ćemo **specifični naboj elektrona**,

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \quad (9.26)$$

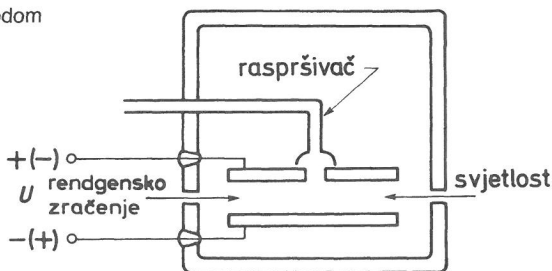
Budući da veličine U , B i r možemo mjeriti, možemo izračunati brzinu elektrona prema (9.25), a specifični naboj elektrona prema (9.26). U pokusu je omjer e/m konstantan jer je riječ o sporim elektronima.

9.5. Millikanov pokus

J.J. Thomson je pokusima odredio samo specifični naboj elektrona, omjer e/m . Iz tih se pokusa nije moglo odrediti koliko je naboj elektrona, a kolika je njegova masa. Poznata su mjerenja R. A. Millikana, koja je izveo 1909. i 1913. god. i kojima je odredio naboj jednog elektrona. Tim je mjerenjima dokazano da postoji najmanja količina elektriciteta koja se može dovesti odnosno oduzeti jednom tijelu, a ta je količina Millikanovim mjerenjima vrlo točno izmjerena.

Opisat ćemo načelo Millikanove metode »kapljice ulja«. Kapljice se dobivaju pomoću raspršivača. One se kroz gornji otvor horizontalne ploče kondenzatora uvode između ploča kondenzatora. Kondenzator je smješten u posebno kućište koje sprečava utjecaj strujanja zraka i promjene temperature (sl. 9.22). Mjerenje se izvodi u dva dijela. U prvom se dijelu određuje polumjer kapljice, a u drugome njezin naboj.

Slika 9.22. Mjerenje naboja elektrona metodom »kapljice ulja«



Da bi se odredio polumjer kapljice, mjerenje se provodi dok ploče kondenzatora nisu priključene na bateriju, tj. kada između ploča nema električnog polja. Kapljice su u pokusu bile toliko malene da se njihov polumjer nije mogao mjeriti izravno optički. Millikan se poslužio vrlo dovrtljivom metodom. Pomoćnim je izvorom svjetlosti obasjao prostor između ploča kondenzatora. Svjetlost se na kapljicama raspršila i one su se kroz mikroskop vidjele kao zvjezdice. Ako tada obratimo pažnju na jednu kapljicu, ustanovit ćemo da se ona giba zbog djelovanja triju sila. To su: njezina težina, sila uzgona i sila trenja. Težinja kapljice G djeluje

prema dolje, a uzgon U i sila trenja T u zraku djeluju prema gore. Silu trenja Stokes je odredio formulom:

$$T = 6\pi\eta r v \quad (9.27)$$

gdje je η koeficijent viskoznosti zraka, a r polumjer sfernog tijela, kapljice koja se giba brzinom v .

Rezultirajuća sila koja djeluje na kapljicu prema dolje iznosi:

$$F = G - U - T.$$

U početku je brzina nula, pa je sila trenja, koja je proporcionalna brzini v , također jednaka nuli. U tom slučaju resultantna sila $(G - U)$ ubrzava kapljicu prema dolje. Brzina kapljice se povećava, zbog čega i sila trenja raste do vrijednosti za koju je rezultirajuća sila jednaka nuli. Kapljica tada pada konstantnom brzinom koja se zove granična brzina v_g . Ta se brzina određuje mjerenjem vremena za koje kapljica prođe između referentnih horizontalnih linija u dalekozoru. Kada je $v = v_g$, a sila $F = 0$, slijedi:

$$G - U = T \quad (9.28)$$

Uz ϱ – gustoću kapljice ulja, ϱ' – gustoću zraka za promatrane sile dobivamo formule:

$$G = mg = V\varrho g = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho g \quad (9.29)$$

$$U = V\varrho'g = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho'g \quad (9.30)$$

gdje je V volumen, m masa, r polumjer kapljice, a g akceleracije slobodnog pada. Uvrstivši formule (9.27), (9.29) i (9.30) u (9.28) dobit ćemo:

$$\frac{4}{3}r^3\pi g (\varrho - \varrho') = 6\pi\eta r v_g.$$

Sve su veličine u jednadžbi poznate osim polumjera, koji se može izračunati:

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v_g}{2g(\varrho - \varrho')}}.$$

Polumjer uljnih kapljica iznosio je oko 10^{-5} do 10^{-4} m.

U drugom dijelu pokusa na ploču kondenzatora se priključi napon koji se može mijenjati. Kapljica se električki nabije trenjem u raspršivaču ili pomoću rendgenskih zraka kojima se obasja prostor između ploča kondenzatora. Tada na kapljicu djeluje dodatna sila:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E},$$

pri čemu je q naboj kapljice. Taj je naboj obično negativan. Ako je gornja ploča pozitivno a donja negativno nabijena, u prostoru između ploča postoji homogeno električno polje. Mijenjajući napon U , možemo dobiti takvu jakost polja da

električna sila koja djeluje prema gore zaustavi negativno nabijenu česticu između ploča kondenzatora (udaljenih d). U tom je slučaju sila trenja jednaka nuli, a ravnoteža sila je:

$$G = U + F_{cl}.$$

S obzirom na to da je

$$qE = q \frac{U}{d},$$

proizlazi:

$$q \frac{U}{d} = \frac{4}{3} r^3 \pi g (\varrho - \varrho'),$$

nakon čega dobivamo formulu za naboj kapljice:

$$q = \frac{4r^3 \pi g d}{3U} (\varrho - \varrho').$$

Ustanovljeno je da je svaka promatrana kapljica ima naboj jednak nekome malom cijelom broju pomnoženom elementarnim nabojem, e , koji se može dodati odnosno oduzeti kapljici,

$$q = ne,$$

gdje je

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Mjerni podaci za vrijednost elementarnog naboja iznose:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As.}$$

Ta količina elektriciteta je naboj jednog elektrona (negativni), odnosno naboj vodikova atoma (pozitivni).

Iz poznatog omjera e/m i pomoću Millikanovih mjerenja naboja elektrona može se izračunati masa elektrona. Ona iznosi:

$$m_0 = 9,107 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

PITANJA I ZADACI

1. Navedite neke primjere električne vodljivosti kroz zrak u normalnim uvjetima.
2. Koja vrsta radioaktivnog zračenja najjače ionizira molekule zraka?
3. Što nazivamo samostalnim izbojem?
4. Objasnite kada u izboju nastaje lavina.
5. Što je prvi Townsendov koeficijent?
6. Koji uvjeti moraju biti ispunjeni da bi nastao samostalni izboj?
7. U našim su pokusima izbojne cijevi bile priključene na induktor. Mogu li se upotrijebiti i drugi izvori napona?
8. Koja je poznata praktična primjena tinjavog izboja?

9. U pokusu J.J. Thomsona elektron se otklanja u magnetskom polju gibajući se po kružnom luku,

pa vrijedi formula: $\frac{e}{m} \frac{1}{v_0} = \frac{y}{Bl \sqrt{\left(\frac{1}{2}l + L\right)^2 + y^2}}$. Za male otklone elektrona u magnetskom

polju kružni se luk može aproksimirati dijelom parabole, pa dokažite da tada vrijedi formula:

$$\frac{e}{m} \frac{1}{v_0} = \frac{y}{Bl \left(\frac{l}{2} + L\right)}.$$

Kolika je greška pri toj aproksimaciji ako je $l = 20$ mm, $L = 100$ mm, $y = 30$ mm i $B = 0,25$ T? (Greška iznosi 3,7%, što je mnogo. U ovom se slučaju ne može govoriti o malim otklonima.)

10. Nađite kut otklona elektrona iz 9. zadatka.

$$\alpha = \arctg \frac{y}{\frac{1}{2}l + L} = 15,26^\circ = 0,08 \pi.$$

11. U Millikanovu pokusu nabijena uljna kapljica, kada nema električnog polja, padajući prijeđe 1 mm za 27,4 s. Ta se kapljica zaustavi u električnom polju $E = 2,37 \cdot 10^3$ V/M.

Koliki višak elektrona ima kapljica? Koeficijent viskoznosti zraka je $\eta = 1,80 \cdot 10^{-5}$ Ns/m². Gustoća ulja je $\rho = 800$ kg m⁻³, a gustoća zraka $\rho' = 1,3$ kg m⁻³. (Granična brzina je:

$$v_g = \frac{l}{t} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{27,4 \text{ s}} = 3,65 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_g}{2g(\rho - \rho')}} = 6,14 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \text{ pa je: } n = \frac{4r^3 \pi g}{3eE} (\rho - \rho') = 2).$$

10. Struktura atoma

10.1. Linijski spektri

Atomi razrijeđenih plinova i para metala, pobuđeni električnom strujom ili grijanjem, emitiraju svjetlost sastavljenu od valova određenih valnih duljina.

Kažemo da se **spektar*** te svjetlosti sastoji od niza *diskretnih spektralnih linija*. **Spektri svjetlosti**, koju emitiraju plinovi u molekularnom stanju, složeniji su. Čvrsta tijela i plinovi pri visokim tlakovima i temperaturama emitiraju svjetlost *kontinuiranih spektara*; njih smo promatrali u prethodnom poglavlju.

Na slici 10. 1. prikazane su spektralne linije vodika a na slici 10.2. spektralne linije u vidljivom dijelu spektra živinih para.

Proučavat ćemo jedan od najjednostavnijih spektara – *linijski spektar vodika*. Taj je spektar opažen još u prošlom stoljeću, a njegovo je proučavanje dovelo do spoznaja o strukturi atoma. Iako se spektar sastoji od mnogo linija u infracrvenome, vidljivom i ultraljubičastom području, one se ipak mogu grupirati u pojedine serije, što bitno olakšava njihovo proučavanje. Švicarski fizičar Johann Balmer prvi je uočio (1885) vezu među pojedinim valnim duljinama vodikova spektra. On je proučavao linije serije koju danas zovemo njegovim imenom. Te se linije nalaze u vidljivom i ultraljubičastom dijelu spektra i prve četiri označavaju se slovima H_α, H_β, H_γ i H_δ. Na slici 10.1. pokazana je *Balmerova serija* linija vodikova spektra; osim četiri linije u vidljivom dijelu spektra, u ultraljubičastom se dijelu pojavljuje mnogo linija koje su sve bliže jedna drugoj i završavaju sa H_∞ (365 nm).

Poznata Balmerova formula daje zakon po kojemu se može izračunati valna duljina ili frekvencija svake linije te serije:

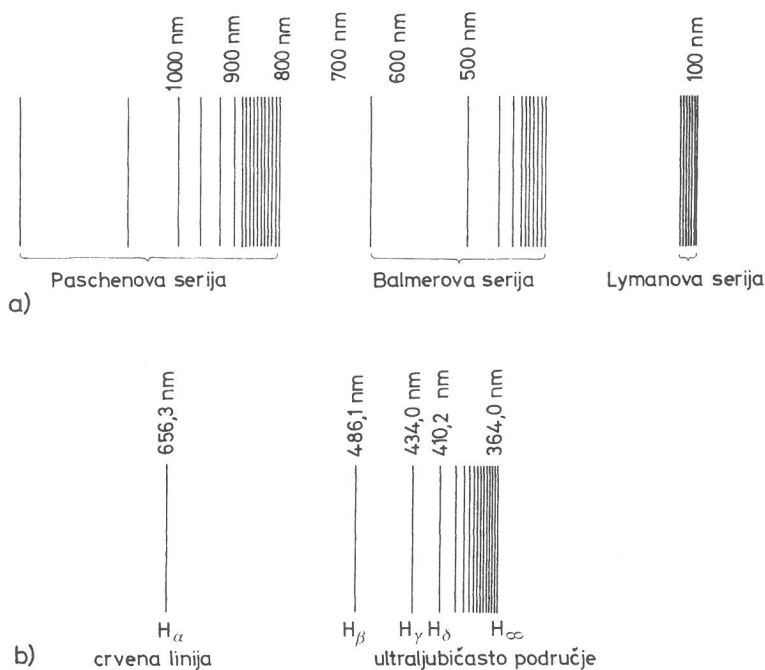
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5 \dots \quad (10.1)$$

Prve četiri linije dobijemo kada uvrstimo $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ i $n = 6$. Za velike n razmak linija tako je malen da ih ne možemo ni razlučiti.

Konstanta R_H u formuli (10.1) zove se **Rydbergova konstanta**,

$$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

* Raspodjela neke veličine po odabranoj varijabli, obično po energiji ili veličini koja je povezana s energijom. U našem slučaju riječ je o raspodjeli toka ili gustoće toka energije po valnoj duljini ili frekvenciji. Obje su jednostavno povezane s energijom fotona.



Slika 10.1. Spektralne linije vodika: a) prve tri serije, b) Balmerova serija



Slika 10.2. Spektralne linije živinih para u vidljivom dijelu spektra

Primjer.

Izračunajte valne duljine triju prvih linija u Balmerovoj seriji vodikova spektra, tj. valne duljine linija H_α , H_β i H_γ . Koja je valna duljina granice Balmerove serije?

$$H_\alpha: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \cdot \frac{5}{36} \Rightarrow \lambda = 656 \text{ nm}$$



$$H_{\beta}: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \frac{3}{16} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 486 \text{ nm}$$

$$H_{\gamma}: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \frac{21}{100} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 434 \text{ nm}$$

$$H_{\infty}: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1,097 \cdot 10^7}{4} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 364 \text{ nm}$$

Usavršavanjem spektrografskih aparata pronađene su i druge serije u infracrvenome i ultraljubičastom dijelu spektra vodika. Općenito se valne duljine računaju po jednostavnim zakonima sličnim formuli (10.1)

1. **Lymanova serija** s ultraljubičastim linijama u području valnih duljina od 122 nm do 91 nm

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4 \dots \quad (10.1.a)$$

2. **Balmerova serija** s vidljivim i ultraljubičastim linijama (od 656 nm do 365 nm)

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5 \dots \quad (10.1)$$

3. **Paschenova serija** u infracrvenom području (od 1 876 nm do 821 nm):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6 \dots \quad (10.1.b)$$

4. **Brackettova serija** s infracrvenim linijama (od 4 053 nm do 1 459 nm):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7 \dots \quad (10.1.c)$$

5. **Pfundova serija** s infracrvenim linijama u području valnih duljina od 7 462 nm do 2 280 nm:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 6, 7, 8 \dots \quad (10.1.d)$$

Vidimo da valne duljine svih serija možemo iskazati jednostavnom formulom, koja se često naziva poopćena Balmerova formula,

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (10.2)$$

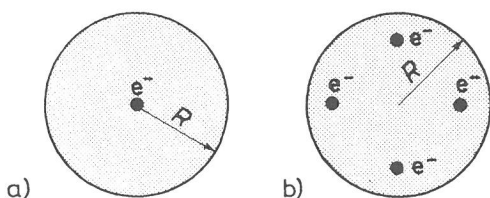
gdje je $m = 1$ za Lymanovu, $m = 2$ za Balmerovu, $m = 3$ za Paschenovu seriju itd., a n poprima sve cjelobrojne vrijednosti veće od m , tj. $m + 1$, $m + 2$, $m + 3 \dots$. Teorijski $n \rightarrow \infty$, pa svaka serija ima beskonačno linija, ali za veće brojeve n linije su tako blizu da se više ne mogu razlučiti.

Klasična fizika ne može objasniti nastanak linijskih spektara atoma; svi pokušaji u tom smislu završili su neuspjehom. Spektre je 1913. objasnio Niels Bohr pomoću kvantne teorije, svojim poznatim modelom vodikova atoma. Ali prije nego što upoznamo *Bohrov model atoma*, pogledajmo kako se razvijala slika o atomima u prošlosti i početkom ovog stoljeća.

10.2. Rutherfordov model atoma

Krajem prošlog stoljeća izmjerena je vrijednost kvocijenta e/m za katodne zrake i nađeno je da su to negativno nabijene čestice, čija je masa oko 2 000 puta manja od najlakšeg atoma, atoma vodika. *Naboj elektrona* u to vrijeme nije još bio točno određen (Millikanov pokus 1911), ali je još Stoney 1874, proučavajući elektrolizu, zaključio da je minimalni naboj nekog iona u elektrolitu oko 10^{-19} C. Taj je najmanji naboj nazvao **elektron**. Tako se oko 1900. pomalo iskristalizirala slika elektrona kao negativno nabijene čestice i sastavnog dijela atoma mase oko 2 000 puta manje od mase najlakšeg atoma. U to je vrijeme također bilo poznato da je promjer atoma oko 10^{-10} m, a elektrona oko sto tisuća puta manji (10^{-15} m). Pokusi su pokazali da je broj elektrona Z (redni broj) svakoga elementa različit i da je približno jednak polovici relativne atomske mase tog elementa.

Thomsonov model. Na osnovi navedenih eksperimentalnih činjenica J.J. Thomson predložio je svoj model atoma. Prema Thomsonu, atom je sferna pozitivna kuglica u kojoj su vrlo sitni elektroni ravnomjerno raspoređeni tako da je takav atom kao cjelina neutralan (sl. 10.3). Budući da su mase atoma mnogo veće od mase elektrona, Thomson je pretpostavio da je glavni dio atomske mase pozitivan. Kako je netko zgodno rekao, taj je model bio sličan okruglom pudingu sa šljivama (ili kolaču s grožđicama) u kojemu se tu i tamo u masi pudinga nađu šljive.

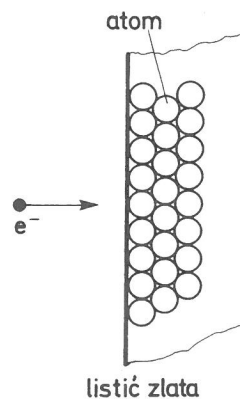


Slika 10.3. Thomsonov model atoma: a) vodika, b) berilija

Prve sumnje u ispravnost Thomsonova modela atoma javile su se pri promatranju raspršenja elektrona na tankoj metalnoj foliji. Kada se snopom elektrona (katodnim zrakama) bombardirao tanki listić metala i mjerio broj elektrona koji izlaze iz takvog listića, opaženo je da većina elektrona neotklonjeno prolazi kroz foliju, kao da je ona uglavnom prazna. To je bio vrlo iznenađujući rezultat, neobjašnjiv Thomsonovim modelom atoma.

Slika 10.4. vrlo shematski pokazuje, kako bi prema Thomsonu izgledala atomska struktura materijala. Prema tome modelu, atomi bi bili vrlo blizu jedan drugome kao gusto pakirane male kuglice i teško je zamisliti da bi elektroni mogli proći kroz nekoliko desetaka tisuća takvih atomskih slojeva, koliko ih ima u jednome tankome metalnom listiću. Elektroni bi morali međudjelovati s atomima, izgubiti energiju i zaustaviti se. Ali pokus je pokazao drukčije rezultate; trebalo je, dakle, mijenjati sliku atoma.

Pomoću Thomsonova modela nije bilo moguće objasniti ni atomske spektre,



Slika 10.4. Struktura listića metala prema Thomsonovu modelu

npr. spektre vodika. Prema tom modelu, elektron je u atomu vezan elastičnom silom

$$F = -eE$$

$$F = -e \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r = -kr.$$

(Polje homogeno nabijene kugle, nabijene nabojem e , unutar kugle dano je izrazom

$$E = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

gdje je R polumjer kugle, a r udaljenost od središta kugle.)

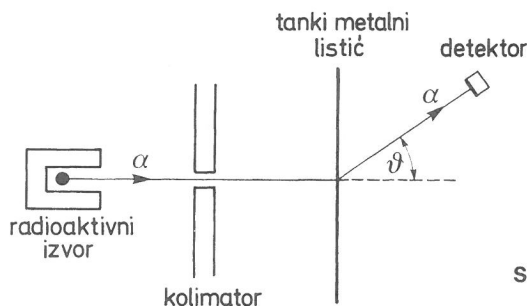
U pobuđenom atomu elektron bi (prema klasičnoj teoriji) titrao oko ravnotežnog položaja frekvencijom ovisnom o polumjeru kugle (sl. 10.3) i tako bi vodikov atom emitirao zračenje samo jedne frekvencije. Eksperimentalno potvrđena činjenica da se vodikov spektar sastoji od mnogo linija u suprotnosti je, dakle, s tim modelom.

Rutherfordovo raspršenje. Da bi preciznije ispitali strukturu atoma i raspodjelu negativnoga i pozitivnog naboja u atomu, Ernest Rutherford i njegovi suradnici H. Geiger i E. Marsden bombardirali su 1909. metalne folije α -česticama i promatrali promjenu njihova smjera pri prolazu kroz folije.

Alfa-čestice čine zračenje nekih radioaktivnih izvora: one su zapravo jezgre ${}^4_2\text{He}$ relativno velike mase i kinetičke energije te mogu, mnogo bolje nego elektroni, poslužiti kao sonda za ispitivanje strukture atoma.

Alfa-čestice su iz radioaktivnog izvora bile kolimirane komadima olova koji su zaustavili sve čestice osim onih u uskom snopu definiranom malom šupljinom u olovu (sl. 10.5). Pošto su prošle kroz tanki listić zlata, alfa-čestice su nalijetale na fluorescentni zastor od cink-sulfida. Svakiput kada bi jedna alfa-čestica udarila o zastor, opazilo bi se slabo svjetlucanje; brojenjem tih svjetalaca bilo je moguće

odrediti broj alfa-čestica koje izlijeću iz metalnog listića pod nekim kutom ϑ i tako odrediti raspodjelu raspršenih alfa-čestica u ovisnosti o kutu ϑ .



Slika 10.5. Shema Rutherfordova eksperimentalnog uređaja

Neka je I_0 broj alfa-čestica koji udara na metu po četvornom metru mete u sekundi. Neke će se od tih čestica interagirirati s atomima mete, a druge će proći neotklonjene.

Broj čestica dI koje su se »sudarile« s atomima mete na putu dx ovisi o broju upadnih čestica I_0 , o koncentraciji atoma u meti (broj atoma n po jediničnom volumenu mete) i o vjerojatnosti σ da se proces dogodi. Nju ćemo nazvati **udarni presjek**:

$$dI = \sigma I_0 n dx \quad (10.3)$$

Udarni presjek σ na neki način označava broj događaja za određenu reakciju u mikrosvijetu s obzirom na jednu jezgru mete i jednu upadnu česticu. To je vjerojatnost da se određeni proces u mikrosvijetu dogodi. Dimenzija od σ je površina i zato se udarni presjek izražava četvornim metrom. Stara jedinica za udarni presjek je *barn*, iznosi 10^{-28} m^2 i još uvijek se susreće u literaturi.

Udarni presjek možemo zamisliti kao efektivni presjek nekog prostora unutar kojega se mora naći alfa-čestica da bi nastala njezina interakcija s atomom.

Mjerenja su pokazala da dosta velik broj alfa-čestica prolazi kroz listić kao da je prazan prostor; na te alfa-čestice zlatni listić ne djeluje, kao da ga i nema; jedan se dio alfa-čestica *rasprši*, i to ne sve jednako. Rutherford je izmjerio broj raspršenih alfa-čestica kao funkciju *kuta raspršenja* ϑ . Na taj je način za svaki kut ϑ odredio vjerojatnost da se alfa-čestica rasprši ili, kako se to u fizici kaže, izmjerio je *udarni presjek za raspršenje* alfa-čestica na zlatu.

Rutherfordov nuklearni model atoma. Thomsonovim se modelom ne mogu objasniti rezultati Rutherfordova raspršenja alfa-čestica. Prema Thomsonovu modelu, pozitivni naboj zauzima sav volumen atoma; račun pokazuje da bi u takvom slučaju odklon alfa-čestica bio vrlo malen. Zato je Rutherford pretpostavio da se atom sastoji od vrlo male jezgre, oko 10^4 do 10^5 puta manje od atoma (promjera oko 10^{-14} m), u kojoj je skoncentrirana uglavnom sva masa atoma. Jezgra elementa rednog broja Z ima pozitivni naboj Ze . Oko jezgre na približnoj udaljenosti 10^{-10} m kruži Z elektrona. Budući da je jezgra oko 10 000 puta manja od atoma i da je u njoj gotovo sva masa atoma (mase elektrona su zanemarive u usporedbi s masom jezgre), velik dio atoma je prazni prostor.

Pomoću takvog modela lako je razumjeti raspršenje alfa-čestica na jezgrama zlata. (Interakciju alfa-čestice s elektronima možemo zanemariti zbog malene mase elektrona; pri sudaru alfa-čestice i elektrona, alfa-čestica se praktički ne otklanja.)

Rutherford je pretpostavio da se alfa-čestice raspršuju na jezgrama zlata zbog odbojne kulonske sile $F = 2e \cdot Ze / (4\pi \epsilon_0 r^2)$, gdje je r udaljenost alfa-čestice od jezgre. Može se pokazati da je veza između kuta raspršenja ϑ i parametra sudara p (sl. 10.6):

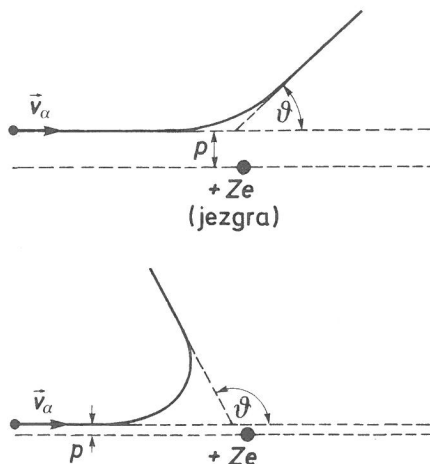
$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi \epsilon_0 m_\alpha v_\alpha^2}{2Ze^2} p \quad (10.4)$$

ϑ – kut raspršenja

m_α, v_α – masa i brzina alfa-čestice

Ze – naboj jezgre – mete

p – parametar sudara.



Slika 10.6. Rutherfordovo raspršenje alfa-čestice

Iz eksperimentalnog podatka da se alfa-čestice raspršuju i pod većim kutovima može se ocijeniti polumjer jezgre. Alfa-čestica najviše se približi jezgri u slučaju čelnog sudara pri čemu se alfa-čestica rasprši pod kutom 180° . Tu minimalnu udaljenost između alfa-čestice i jezgre možemo izračunati iz uvjeta da je početna kinetička energija alfa-čestice $E_{k\alpha}$ jednaka potencijalnoj energiji u momentu zaustavljanja na udaljenosti r_0 od jezgre.

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Ze \cdot 2e}{r_0} \quad (10.5)$$

Uvrštavanjem npr. $Z = 79$, $E_{k\alpha} = 7,7$ MeV dobije se:

$$r_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{E_k} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ m.}$$

Broj alfa čestica koje u jedinici vremena upadaju na jediničnu površinu detektora je:

$$N_\alpha = \frac{N n d r_0^2}{16 r^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (10.6)$$

gdje je N ukupan broj alfa-čestica koje upadaju na listić metala, metu, u sekundi, n je broj atoma po jedinici volumena mete, d debljina mete. Veličina r_0 je:

$$r_0 = \frac{4Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m v^2} = \frac{Z e^2}{\pi \epsilon_0 m v^2} \quad (10.7)$$

gdje su m i v masa i brzina alfa-čestice, ϵ_0 permitivnost vakuumu Z redni broj jezgre mete i e elementarni naboj. Dakle, broj alfa-čestica koje upadaju na jedinicu površine detektora na udaljenosti r od mete je:

$$N_\alpha = \frac{N n d Z^2 e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4 r^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (10.8)$$

Odakle je *diferencijalni udarni presjek* (udarni presjek na jedinicu prostornog kuta):

$$\sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi \epsilon_0)^2 m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (10.9)$$

Broj raspršenih alfa-čestica na raznim kutovima raspršenja obrnuto je proporcionalan sa $\sin^4 \frac{\vartheta}{2}$, što je potvrđeno eksperimentima koje su 1913. godine izveli Geiger i Marsden.

Budući da je Rutherford opazio da se određen broj alfa-čestica rasprši i za velike kutove (čak do 180°), iz takvih je razmatranja zaključio da je polumjer jezgre oko 10^{-14} m, dakle oko 10^4 puta manji od polumjera atoma. Kasnija preciznija razmatranja pokazala su da je polumjer jezgre određen izrazom $r = r_0 \sqrt[3]{A} \approx 1,2 \cdot 10^{-15}$ m $\sqrt[3]{A}$, što za zlato iznosi $r = 6,9 \cdot 10^{-15}$ m.

Nedostaci Rutherfordova modela. Rutherfordovim modelom atoma dosta se dobro objašnjava raspršenje alfa-čestica na jezgrama zlata. Ali tim se modelom ne mogu objasniti atomski spektri. Naime, prema tom modelu elektroni se gibaju oko jezgre po zatvorenim putanjama, naprimjer kružnicama. Iz klasične je elektrodinamike poznato da elektron emitira elektromagnetske valove čim mu se mijenja brzina; stoga bi elektroni u atomu morali neprestano zračiti elektromagnetske valove, time gubiti energiju te se sve više spiralno približavati jezgri i konačno pasti na nju. Smanjivanjem polumjera staze povećavala bi se frekvencija tog zračenja; frekvencija bi se, dakle, kontinuirano mijenjala i atom bi prema klasičnoj teoriji, morao emitirati kontinuirani spektar zračenja a ne linijski koji stvarno emitira. Rutherfordovim se modelom ne može, dakle, objasniti stabilnost atoma ni opaženi atomski spektri.

Naslućujući da su pravilnosti atomskih spektara posljedica unutrašnje strukture atoma, Niels Bohr* je 1913. predložio novi model atoma, Bohrov model,

* Niels Bohr (1885–1962), danski fizičar, dobitnik je Nobelove nagrade za fiziku 1922.

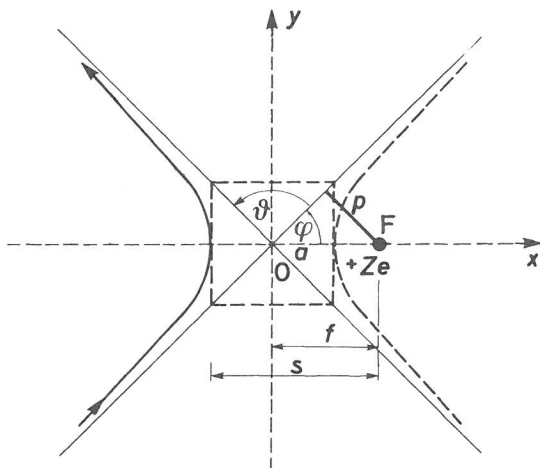
kojim je dobro objašnjena emisija svjetlosti iz atoma. Govoreći o tom velikom otkriću, Bohr je kasnije rekao: »Čim sam vidio Balmerovu formulu, sve mi je bilo jasno.«

Primjer.

Izračunajte kut kulonskog raspršenja alfa-čestica na jezgrama zlata kao funkciju parametra sudara.

Pri gibanju alfa-čestice u kulonskom polju teške jezgre putanja je hiperbola u čijem je fokusu jezgra (sl. 10.7). Okomita udaljenost jezgre i asimptote hiperbole je parametar sudara p a najmanja udaljenost između jezgre i alfa-čestica je $s = a + f = a + \sqrt{a^2 + b^2}$. Ekscentricitet hiperbole je

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$



Slika 10.7. Putanja nabijene čestice u kulonskom polju

Iz slike proizlazi:

$$s = a + f = \frac{p}{\sin \varphi} + \frac{p}{\sin \varphi} \cos \varphi$$

$$s = \frac{p}{\sin \varphi} (1 + \cos \varphi) = p \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \text{ jer je:}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Za to gibanje vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije i zakon očuvanja momenta količine gibanja. Zakon očuvanja mehaničke energije vrijedi zato što je to izolirani sustav u kojemu djeluje konzervativna kulonska sila. Iz njega slijedi:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 s}.$$

Za to gibanje vrijedi zakon očuvanja momenta količine gibanja stoga što pritom djeluje centralna sila koja je funkcija samo radijusvektora r i u smjeru $\vec{r}$. (Zato je

moment sile $\vec{M} = 0$, te je $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, $\vec{L} = \text{konst.}$)

Kad je alfa-čestica daleko od jezgre i približava joj se početnom brzinom v_α , moment količine gibanja $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, pa je $L = m v_\alpha p$. Kad je alfa-čestica za s udaljena od jezgre, moment je $L = m v s$. Ta su dva momenta jednaka,

$$m v_\alpha p = m v s.$$

Iz te dvije jednadžbe slijedi:

$$p^2 = s^2 \left(1 - \frac{4Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v_\alpha^2 r_0} \right) = p^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{4Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v_\alpha^2} p \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

ili:

$$\frac{4Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v_\alpha^2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = p \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) = p \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{4Ze^2}{8\pi \epsilon_0 m v_\alpha^2 p}.$$

Označimo li sa $r_0 = \frac{Ze^2}{\pi \epsilon_0 m v_\alpha^2}$ (to je najmanja međusobna udaljenost alfa-čestice i jezgre pri »čelnom sudaru« za $\vartheta = 180^\circ$), tada je:

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{r_0}{2p}.$$

Budući da je kut raspršenja alfa-čestica $\vartheta = 180^\circ - 2\varphi$, tada je:

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{2p}{r_0}.$$

$$\text{Ako je } m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg, } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}, \quad Z = 79,$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ C, } v_\alpha = 1,63 \cdot 10^7 \text{ m/s, tada je } r_0 = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

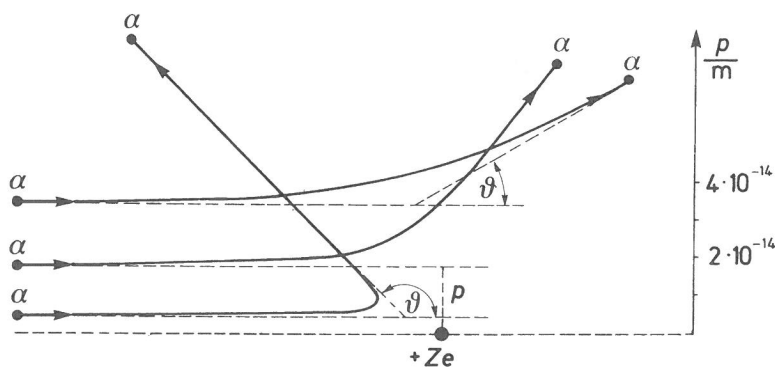
$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = 4,85 \cdot 10^{13} \frac{p}{\text{m}}$$

U tablici 10.1 dani su rezultati proračuna za različite parametre sudara.

Tablica 10.1. Ovisnost kuta raspršenja alfa-čestica o parametru sudara

p/m	10^{-12}	10^{-13}	$5 \cdot 10^{-14}$	$2,7 \cdot 10^{-14}$	10^{-14}	10^{-15}
ϑ	$1,4^\circ$	14°	28°	50°	51°	171°
p/r_0	4	2	1	0,5	0,2	0,1
p/m	$16,4 \cdot 10^{-14}$	$8,2 \cdot 10^{-14}$	$4,1 \cdot 10^{-14}$	$2,05 \cdot 10^{-14}$	$0,82 \cdot 10^{-14}$	$0,41 \cdot 10^{-14}$
ϑ	$14,25^\circ$	$28,1^\circ$	$53,1^\circ$	90°	$136,4^\circ$	$157,4^\circ$
φ	$82,9^\circ$	75°	$63,5^\circ$	45°	$21,8^\circ$	$11,3^\circ$
ϵ	8,07	4,1	4,2	1,4	1,08	1,02
s/m	$18,8 \cdot 10^{-14}$	$10,6 \cdot 10^{-14}$	$6,7 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-14}$	$4,3 \cdot 10^{-14}$	$4,2 \cdot 10^{-14}$

Na slici 10.8. pokazane su putanje za neke od tih primjera.



Slika 10.8. Putanja alfa-čestica za primjer u tekstu

Primjer

Snop alfa-čestica iz radioaktivnog izvora, energije 5,846 MeV, pada okomito na listić zlata debljine 0,001 mm. Detektor čestice površine 1 cm² udaljen je 20 cm od listića zlata. Ako na listić upada 10⁵ alfa-čestica u sekundi, koliki će broj alfa-čestica upasti u detektor svake sekunde, ako je detektor pod kutom a) $\vartheta = 20^\circ$ b) $\vartheta = 90^\circ$ i c) $\vartheta = 150^\circ$ prema upadnom snopu? Gustoća zlata ρ ($^{197}_{79}\text{Au}$) je 19 000 kg/m³.

Broj alfa-čestica koje u jedinici vremena padaju na jedinicu površine detektora na udaljenosti r od mete jest:

$$N_a = \frac{N n d Z^2 e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4 r^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Broj alfa-čestica koje padaju na listić zlata u sekundi je 10⁵ s⁻¹. U 0,197 kg zlata ima $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ atoma, pa će u jednom kilogramu zlata biti $3,06 \cdot 10^{24}$ atoma. U 1 m³ zlata ima $5,81 \cdot 10^{28}$ atoma pa je dakle, $n = 5,81 \cdot 10^{28}$ m⁻³. Redni broj zlata je $Z = 79$, a debljina listića 10⁻⁵ m. Energija alfa čestice je

$$E_k = 5,846 \text{ MeV} = 9,35 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Dakle,

$$N_a = \frac{10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 5,81 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 79^2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^4}{16 \pi^2 \left(8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} \right)^2 \cdot 4 \cdot (9,35 \cdot 10^{-13} \text{ J})^2 \cdot 0,04 \text{ m}^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = 13,75 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Za kutove raspršenja 20°, 90° i 150° bit će broj čestica N_a :

$$\text{a) } \vartheta = 20^\circ, \quad \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = 9,1 \cdot 10^{-4} \quad N_a = 15110 \text{ s}^{-1},$$

$$\text{b) } \vartheta = 90^\circ, \quad \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = 0,25 \quad N_a = 55 \text{ s}^{-1},$$

$$\text{c) } \vartheta = 150^\circ, \quad \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = 0,87 \quad N_a = 16 \text{ s}^{-1}.$$

10.3. Bohrov model atoma

Vidjeli smo da Rutherfordovim modelom ne možemo objasniti stabilnost atoma ni emisiju linijskih atomskih spektara. Niels Bohr je dopunio taj model dvama postulatima i time uspio objasniti strukturu elektronskog omotača i procese *emisije* i *apsorpcije* svjetlosti. Kasniji razvoj moderne fizike opravdao je i razjasnio njegove postulate koji u to vrijeme (1913) još nisu bili razumljivi. Premda uz određena ograničenja Bohrov model još uvijek dosta dobro služi za razumijevanje procesa u atomu.

Bohrovi postulati: Elektron ne može kružiti oko jezgre po bilo kojim već samo po točno određenim *kvantiziranim* stazama. To su tzv. dopuštene ili stacionarne staze; gibajući se po njima, elektron se nalazi u stacionarnom stanju, ne gubi energiju zračeći elektromagnetske valove. Emisija svjetlosti događa se samo pri skoku elektrona s jedne na drugu stacionarnu stazu.

Dopuštene su samo one staze na kojima je orbitalni moment količine gibanja cjelobrojni višekratnik reducirane Planckove konstante, $\hbar = h/2\pi$, tj.

$$L = r_n m_e v_n = n \hbar \quad (10.10)$$

ili

$$2\pi r_n m_e v_n = n h \quad (10.10.a)$$

Tako je Bohr izrazom (10.10) kvantizirao gibanje elektrona u elektronskom omotaču atoma. Prirodni broj $n = 1, 2, 3 \dots$ u relaciji (10.10) naziva se **glavni kvantni broj**.

Iz činjenice da je centripetalna sila zapravo elektrostatska kulonska sila i iz kvantnog uvjeta (10.10) mogu se odrediti *polumjeri* stacionarnih putanja, *brzina* i *frekvencija* gibanja elektrona te *energija* elektrona na određenoj putanji.

Atom zrači ili apsorbira zračenje (kvantne svjetlosti) samo kada njegov elektron prelazi iz jedne staze u drugu, iz jednog stacionarnog stanja u drugo. Ako je prijelaz elektrona iz energijskog stanja E_m u stanje E_n , frekvencija emitiranoeg ili apsorbiranog fotona je:

$$h\nu = E_m - E_n \Rightarrow \nu = \frac{E_m - E_n}{h} \quad (10.11)$$

Kada elektron prelazi iz višeg u niže energijsko stanje ($E_m > E_n$), energijska se razlika $E_m - E_n$ emitira u obliku svjetlosnog kvanta (fotona).

Ako, naprotiv, elektronu dovedemo energiju, on će prijeći iz nižeg (n) u više (m) energijsko stanje, nastat će apsorpcija energije i pobuđivanje ili ekscitacija atoma iz nižeg u viši energijski nivo. Pritom apsorbirana energija ΔE mora biti upravo jednaka razlici energija za stanja m i n ($\Delta E = E_m - E_n$).

Drugi Bohrov postulat, dakle, kaže da se pri skoku elektrona iz stanja energije E_m u stanje energije E_n zrači ili apsorbira foton čija je frekvencija određena izrazom (10.11).

Upotrebljavajući te postulate, Bohr je izračunao valne duljine svjetlosti koju emitira atom vodika.

10.4. Energijska stanja vodikova atoma

Polumjer kvantne staze elektrona i energiju elektrona na n -toj stazi izračunat ćemo onako kako se to radi u većini udžbenika; kulonska je sila pritom centripetalna i primijenit ćemo Bohrov kvantni uvjet za određenost staze (10.10).

Bohr je pretpostavio da su staze elektrona kružnice, a kasnija su istraživanja pokazala da su uz takve staze moguće i *eliptične* (Sommerfeld – Wilsonov eliptični model). Naravno, i Bohrov, a zatim i Sommerfeldov eliptični model samo su klasične slike atoma i imaju dosta nedostataka. Tek se pomoću *valnomehaničkog modela atoma* (Schrödinger, 1926) može dobro objasniti struktura atoma.

Uzevši u obzir da kulonska sila između protona i elektrona uzrokuje centripetalnu silu potrebnu za gibanje po kružnici, dobivamo:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad (10.12)$$

Iz (10.12) i kvantnog uvjeta (10.10) dobivamo polumjere dopuštenih Bohrovih kružnica putanja elektrona:

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.13)$$

Kada je atom vodika u svome osnovnom stanju ($n = 1$), njegov elektron kruži po prvoj stazi. Kada je atom pobuđen, elektron se nalazi u jednoj od udaljenijih staza ($n = 2, 3, \dots$). Uočite da se polumjeri kvantnih staza vodikova atoma odnose kao kvadrati cijelih brojeva,

$$r_n \propto n^2.$$

Iz relacije (10.13) može se odrediti polumjer prve Bohrove kružne staze (*klasični polumjer vodikova atoma*):

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \text{J s}}{\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{C})^2}$$

$$r_1 = 0,053 \text{ nm}.$$

Iz (10.12) i (10.13) može se izračunati *brzina elektrona* u n -toj stazi:

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \quad (10.14)$$

Za osnovno stanje vodikova atoma brzina je

$$v_1 \approx \frac{c}{137}.$$

Energija elektrona. Ukupna energija elektrona sastoji se od kinetičke i potencijalne:

$$E = E_k + E_p \quad (10.15)$$

Kinetička energija elektrona na n -toj stazi je:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v_n^2 \quad (10.16)$$

Pomoću izraza (10.12) i (10.13) kinetičku energiju možemo pisati u obliku:

$$E_k = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (10.17)$$

Potencijalnu energiju elektrona na n -toj kvantnoj stazi možemo odrediti izračunavajući rad pri pomaku elektrona iz beskonačnosti na udaljenost r od jezgre:

$$E_p = \int_r^\infty F dr = \int_r^\infty \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10.18)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za r_n (relacija 10.13), dobivamo:

$$E_p = -\frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (10.19)$$

Ukupna je energija elektrona na n -toj kvantnoj stazi, dakle:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.20)$$

Ukupna je energija negativna i mijenja se sa $1/n^2$. Energija osnovnog stanja ($n = 1$) je:

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2,173 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ E_1 = -13,6 \text{ eV} \quad (10.21)$$

To je **energija vezanja** elektrona u atomu vodika ili energija koju treba uložiti da bi se elektron oslobodio iz atoma i da bi se atom vodika ionizirao. Zato se ona često zove **energija ionizacije**.

Energija prvoga pobuđenog stanja ($n = 2$) je:

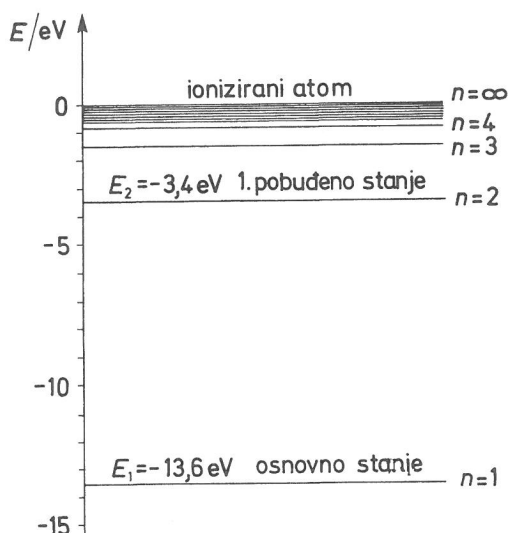
$$E_2 = \frac{E_1}{4} = -\frac{13,6}{4} \text{ eV}$$

$$E_2 = -3,4 \text{ eV}$$

Slično je $E_3 = -13,6 \text{ eV}/9 = -1,5 \text{ eV}$, $E_4 = -13,6 \text{ eV}/16 = -0,85 \text{ eV}$,
 $E_5 = -0,54 \text{ eV}, \dots E_\infty = 0$.

Budući da svaka stacionarna staza odgovara određenoj energiji elektrona, često umjesto o stazama govorimo o dopuštenim energijskim nivoima ili razinama elektrona u atomu. Slika 10.9. pokazuje dopuštene energijske nivoe vodikova atoma. Njihov se razmak smanjuje sa $1/n^2$; kako kvantni broj n raste, energijski su nivoi sve bliži jedan drugome.

Vezani elektron u atomu može imati samo diskretne, negativne energije, a *slobodni elektron*, naravno, može imati bilo koju pozitivnu, kinetičku energiju.



Slika 10.9. Energijske razine vodikova atoma

10.5. Linijski spektar vodika

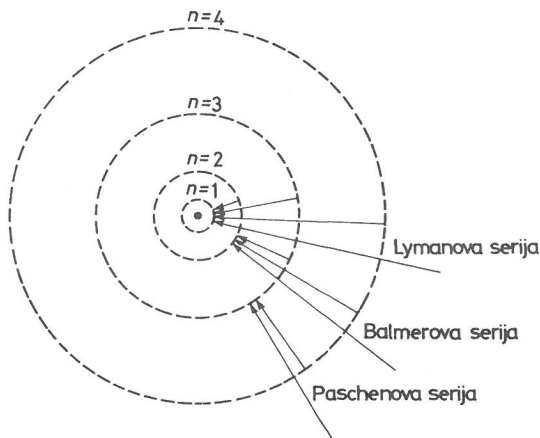
Kada se atom vodika nalazi u osnovnom stanju ($n=1$), atom ne zrači svjetlost. Ako atom eksitiramo, njegov elektron iz osnovnog stanja prelazi u neko više energijsko stanje ($n=2, 3, \dots$). To možemo postići zagrijavanjem, električnom strujom, električnim poljem i sl. U pobuđenom stanju atom ostaje vrlo kratko (oko 10^{-8} s), a zatim se vraća u osnovno stanje zračeći svjetlost.

Pritome se elektron jednim skokom, ili preko nekoliko međustanja može vratiti u osnovno stanje (sl. 10.10.a).

Energija fotona koji se pritome emitiraju dana je drugim Bohrovim postulatom:

$$h\nu = E_m - E_n = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (10.22)$$

gdje su m i n prirodni brojevi, E_m energija višeg nivoa što ga elektron napušta, a E_n energija donjeg nivoa, u koji se elektron smješta.



Slika 10.10. a) Prijelazi u atomu vodika

Ako formulu (10.22) usporedimo s Balmerovom formulom

$$\nu = cR \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

dobivamo Rydbergovu konstantu:

$$R = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6^4 \cdot 10^{-76} \text{ C}^4}{8 (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \text{ C}^2 \text{ N m}^{-2} \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^3 \text{ J}^3 \text{ s}^3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}$$

$$R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Upravo je tolika i eksperimentalno određena vrijednost za Rydbergovu konstantu R .

Slaganje tog jednostavnog modela s mjerenim vrijednostima frekvencija (valnih duljina) linijskih spektara je izvrsno, i to je Bohrovu modelu donijelo veliki uspjeh.

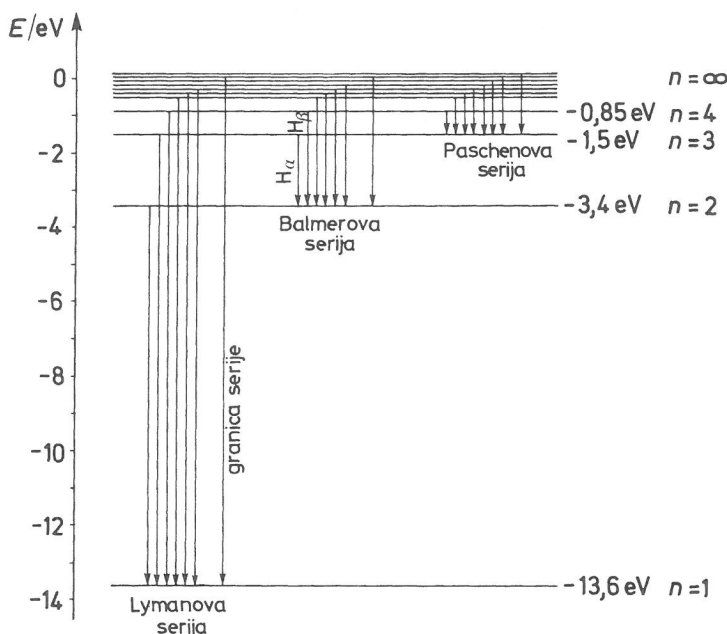
Slika 10.10.b pokazuje energijske nivoe u vodikovu atomu i linije Lymanove, Balmerove i Paschenove serije koje nastaju prijelazom elektrona iz viših na prvi, drugi, odnosno treći pobuđeni nivo.

Pomoću Bohrova modela možemo proračunati i spektre atoma sličnih vodikovu, tj. onih koji su ionizirani tako da im oko jezgre kruži samo jedan elektron (npr. ion He^+). Budući da je naboj jezgre Ze , bit će:

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi Z m_e e^2} \quad E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad (10.23)$$

odnosno frekvencija emitiranog fotona:

$$\nu = \frac{Z^2 m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (10.24)$$



Slika 10.10. b) Nastajanje linijskog spektra vodika

Bohrov model dosta dobro objašnjava grubu strukturu spektara vodika. Međutim, precizna su mjerenja pokazala da se spektralna linija ustvari sastoji od *dvije usko priljubljene linije*, a ne od jedne, kako smo dosada pretpostavljali. Ta se eksperimentalna činjenica (koja se zove **fina struktura spektralnih linija**) ne može objasniti Bohrovim modelom. Ni spektri alkalnih elemenata također se ne mogu objasniti tim modelom. Kasnije ćemo vidjeti kako je Bohrov model modificiran da bi se uklonili ti njegovi nedostaci.

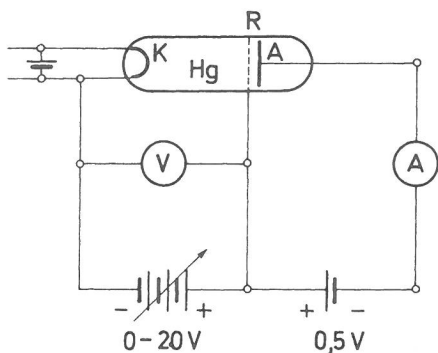
10.6. Franck-Hertzov eksperiment

Franck i Hertz* su 1914. uspjeli eksperimentalno potvrditi da određeni energijski nivoi u atomu postoje i da je, dakle, Bohrova teorija opravdana.

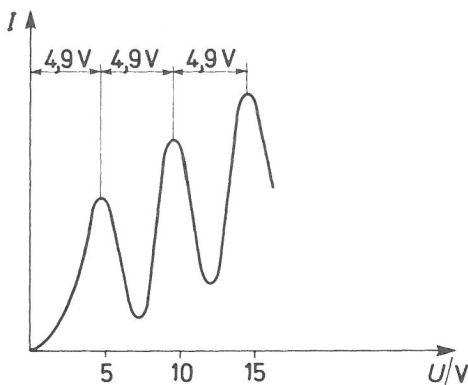
Oni su atome žive bombardirali elektronima. Uređaj se sastojao od triode napunjene razrijeđenim živinim parama (sl.10.11). Iz užarene su katode izlijetali elektroni i ubrzavali se prema anodi. Potencijal rešetke neznatno je pozitivniji (za oko 0,5 V) od potencijala anode, pa su se elektroni energije manje od približno 0,5 eV zaustavljali na rešetki, a ostali su se elektroni veće energije skupljali na anodi.

* James Franck (1882–1964) i Gustav Hertz (1887–1975) njemački su fizičari koji su 1925. ravnopravno podijelili Nobelovu nagradu za fiziku za eksperimentalne radove o sudaru elektrona i atoma.

Mijenjanjem anodnog napona i mjerenjem anodne struje može se izmjeriti U - I karakteristika te triode (sl.10.12). Kada se napon povisi od nule do 4,9 V, anodna struja I naraste jer se elektroni skupljaju na anodi. Kada je napon oko 4,9 V, anodna se struja smanji (a struja rešetke poveća). Kako napon dalje raste, struja ponovo raste sve dok napon ne dosegne vrijednost 9,8 V. Tada se pojavljuje novi minimum anodne struje itd. (sl. 10.12).



Slika 10.11. Franck-Hertzov pokus



Slika 10.12. I , U -karakteristika Franck-Hertzove cijevi

Taj pokus možemo shvatiti samo uz pretpostavku da su energijski nivoi elektrona u atomu žive *kvantizirani*. Kada je anodni napon manji od 4,9 V, elektroni u cijevi **nemaju** dovoljno energije da pobude elektron u atomu žive, već se samo *elastično* sudaraju s atomima, pa im dakle zbog male mase, praktički ne predaju energiju; struja u cijevi raste s naponom jer se elektroni skupljaju na anodi.

Čim energija elektrona dosegne 4,9 eV, to je dovoljno da pobudi atom žive. U takvome *neelastičnom* sudaru elektron izgubi energiju. Tako usporeni elektroni ne uspiju proći kroz rešetku i dosegnuti anodu. Zbog toga anodna struja slabi, a struja rešetke jača. Rešetka, naime, zbog svoga pozitivnog prednapona privuče elektrone koji u sudaru blizu rešetke izgube gotovo svu kinetičku energiju.

Kada napon dalje raste, elektroni sve brže dobivaju energiju potrebnu za neelastični sudar (4,9 eV), pa se on događa već u prostoru između katode i rešetke, sve bliže katodi. Zbog toga elektron, čak nakon sudara, kad dosegne rešetku, uspije dobiti dovoljno energije i da kroz nju prođe. To je razlog što struja raste kada je napon veći od 4,9 V. Kada napon dosegne $2 \cdot 4,9$ V, elektron već ima toliku kinetičku energiju da je sposoban izvršiti čak i dva neelastična sudara, jedan ispred rešetke, a drugi blizu nje. To je uzrok drugom minimumu u U - I karakteristici.

Iz tih se eksperimenata zaključilo da atom žive iz osnovnog stanja može prijeći u pobuđeno primivši samo određeni kvant energije. Prvo takvo pobuđeno stanje atoma žive je 4,9 eV iznad osnovnoga stanja. Sudarom s elektronom čija je energija jednaka ili veća od 4,9 eV, atom žive iz osnovnoga prelazi u prvo pobuđeno stanje, a elektron gubi 4,9 eV energije.

Pobuđeni se atom žive ubrzo vraća u osnovno stanje i prema drugom Bohrovu postulatu zrači svjetlost frekvencije

$$h \nu = E_2 - E_1.$$

U ovom pokusu atomi žive zaista i emitiraju svjetlo čim je anodni napon veći od 4,9 V. To je poznata *ultraljubičasta živina linija* valjne duljine 253,7 nm. Tu istu valnu duljinu predviđa i Bohrova formula:

$$\nu = \left(\frac{E_2 - E_1}{h} \right) = \frac{4,9 \text{ eV}}{h} = 1,19 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 253 \text{ nm}.$$

Taj i drugi slični pokusi pokazali su da se *neelastični* sudari s atomom događaju samo kada postoje određeni iznosi raspoložive energije i da atomi samo u tim slučajevima mogu apsorbirati energiju. Stanja atoma su *kvantizirana*, odnosno u atomu postoje *diskretni energijski nivoi*.

10.7. Princip korespondencije klasične i kvantne fizike

Iako su sve teorije u fizici ograničene na određeno područje, one ne prestaju važiti nenadano nego kontinuirano, dajući rezultate koji se sve manje i manje slažu s eksperimentom. Tako je Newtonova mehanika primjenjiva na male brzine, ali je sve manje točna što su brzine veće i kada brzine postanu uporedive s brzinom svjetlosti c , mora se zamijeniti *teorijom relativnosti*.

Klasična fizika opisuje klasični makrosvijet, naš obični svijet u kojemu živimo, ali se pokazalo vrlo neadekvatnom za pojave u mikrosvijetu, svijetu atoma i elektrona.

Princip korespondencije kaže nam kako su te dvije fizike povezane. Klasična je fizika samo specijalni slučaj kvantne, slično kao što je klasična mehanika samo specijalni slučaj relativističke mehanike. (U *Mehanici* smo vidjeli da su formule i zakoni relativističke mehanike za $v \ll c$ identični klasičnima.) Princip korespondencije kaže da kvantna fizika za velike kvantne brojeve ($n \rightarrow \infty$) prelazi u klasičnu.

Niels Bohr je pokazao kako se iz kvantnih formula i zakona prelazi u klasične. On se služio **principom korespondencije** da bi pokazao vrijednost svojih formula i ideja.

Vodikov je atom vrlo sićušna tvorevina, promjera oko 10^{-10} m, pripada mikrosvijetu i moramo ga opisivati zakonima *kvantne fizike*. Tako je eksperimentalno utvrđeno da frekvencija koju on emitira prelazeći iz prvoga pobuđenog stanja u osnovno ($n = 2$ u $n = 1$) iznosi $24,6 \cdot 10^{14}$ Hz. Pokušajmo izračunati tu frekvenciju pomoću zakona klasične fizike, zamišljajući da se elektron giba oko jezgre po kružnici. Frekvencija

$$\nu_k = \frac{v}{2\pi r} = (e^2/16\pi^3 \epsilon_0 m r^3)^{1/2}$$

ili, ako za r uvrstimo izraz koji je dobio Bohr,

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2},$$

za frekvenciju dobivamo izraz:

$$\nu_k = \frac{2 m e^4}{8 n^3 \epsilon_0^2 h^3} \quad (10.25)$$

Kada po toj formuli izračunamo frekvenciju koju emitira elektron kada se atom vodika nalazi u prvome pobuđenom stanju ($n=2$), dobit ćemo $\nu_k = 8,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, dakle triput manju vrijednost nego što daje mjerenje. Nasuprot tome, kvantna formula $\nu = (E_n - E_m)/h$ daje isti rezultat kao i eksperiment.

Princip korespondencije kaže da se kvantna fizika za velike kvantne brojeve reducira u klasičnu, da kvantne formule postaju identične klasičnima. Taj je princip bio važan u razvoju kvantne fizike jer je svaki novopronađeni izraz morao biti točan u granici prema klasičnoj fizici.

Tako i kvantna formula za frekvenciju zračenja što ga emitira atom vodika kada mu elektron prelazi iz jedne staze u drugu za velike kvantne brojeve mora biti identična navedenoj klasičnoj formuli. Zaista, ako $n \rightarrow \infty$, za prijelaz između dva susjedna stanja vrijedi:

$$\nu = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \frac{m e^4}{8 n^3 \epsilon_0^2 h^3} = \nu_k \quad (10.26)$$

Ako je npr. $n = 25\,000$, frekvencije izračunate pomoću kvantne i klasične formule razlikuju se samo za 0,007 %

Promjena energije među susjednim nivoima za velike kvantne brojeve n vrlo je malena, te energiju možemo smatrati kontinuiranom i primijeniti klasičnu fiziku. Kada je n malen, energija je diskontinuirana veličina i moraju se primijeniti zakoni kvantne fizike.

Granice važnosti klasične fizike određene su veličinom *Planckove konstante*. Za procese u kojima se konstanta h može smatrati vrlo malenom potpuno se mogu primijeniti zakoni klasične fizike. Kada veličine postanu istog reda veličine kao i h , mora se primijeniti kvantna fizika. Svaki bi fizikalni sistem trebalo opisivati kvantnomehaničkim zakonima. Međutim, za velike kvantne brojeve klasični je opis takvih sistema dovoljno točan, to točniji što su kvantni brojevi veći.

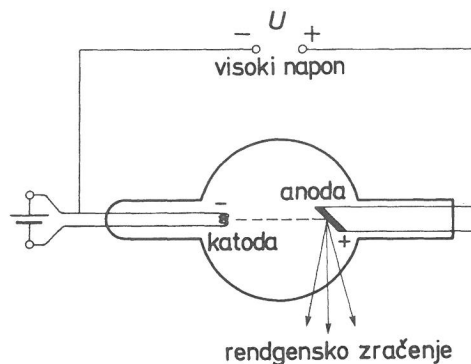
10.8. Rendgensko zračenje

C.W. Röntgen* opazio je 1895. vrlo prodorno nevidljivo zračenje koje nastaje pri izboju u cijevi s razrijeđenim plinom. Te, kako ih je on nazvao *X-zrake*, danas se u njegovu čast zovu rendgenskim zračenjem. (U engleskom govornom području još se i danas često nazivaju *x-zrakama*).

* C.W. Röntgen (1845–1923), njemački fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1901.

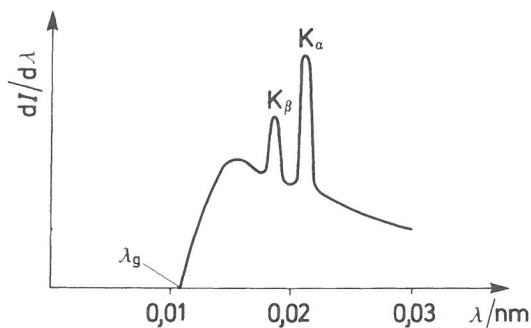
Danas znamo da rendgensko zračenje jesu elektromagnetski valovi valnih duljina mnogo kraćih od onih vidljive svjetlosti: energije fotona su reda veličine od 10^2 do 10^6 eV, a valne duljine od oko 0,001–10 nm.

Rendgensko zračenje nastaje kada brzi elektroni udaraju u neki materijal. Većinom se dobivaju u *rendgenskoj cijevi*, u kojoj elektroni ubrzani visokim naponom (10^4 do 10^6 V) udaraju u anodu od volframa (sl. 10.13).



Slika 10.13. Rendgenska cijev

Spektar rendgenskih zraka iz rendgenske cijevi ovisi o energiji elektrona (o naponu u rendgenskoj cijevi) i materijalu mete u koju elektroni udaraju. Razlikujemo dvije vrste rendgenskih spektara, *kontinuirani* i *linijski* ili *karakteristični spektar* (sl. 10.14). Dok je energija upadnih elektrona malena, javlja se samo kontinuirani spektar, ali, ako je energija elektrona dovoljno velika, nastaje i karakteristično zračenje čiji je intenzitet višestruko veći od intenziteta kontinuiranog dijela.



Slika 10.14. Rendgenski spektri

Kontinuirani spektar nastaje usporavanjem elektrona u meti. Prolazeći pored atoma mete, elektroni mijenjaju smjer gibanja, staza im se svija, usporavaju se i zbog toga zrače elektromagnetske valove. Pritome gube energiju – sve dok se ne zaustave (sl. 10.15.a). To je *zakočno zračenje* (njem. *Bremsstrahlung*). To zračenje predviđa i klasična elektrodinamika, ali ona ne može objasniti zašto u spektru nema duljina kraćih od *granične valne duljine* λ_g .

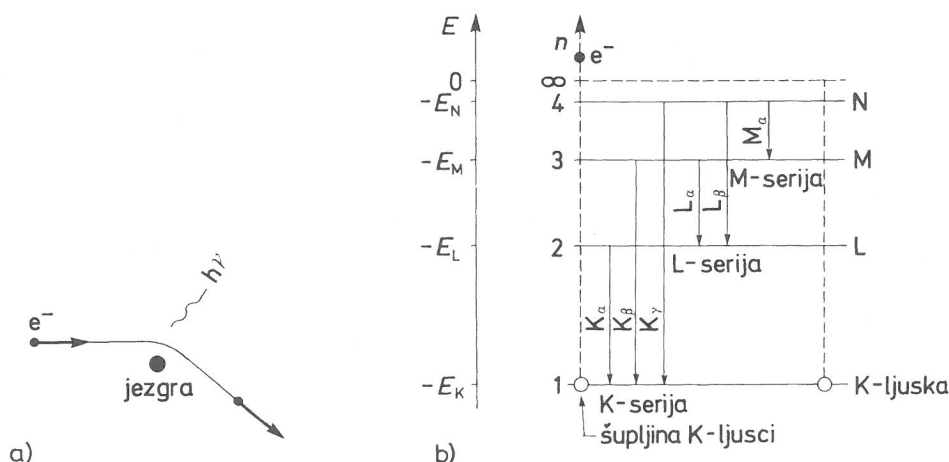
I pri ovoj se emisiji svjetlosti, slično kao i pri apsorpciji svjetlosti u fotoefektu, očituje čestična priroda svjetlosti. Emisiju svjetlosti treba, naime, tumačiti kao rađanje fotona. Granična valna duljina posljedica je činjenice da nastali foton ne može imati veću energiju nego što je kinetička energija upadnog elektrona. Ubrzavajući se u električnom polju između katode i anode (tj. u potencijalnoj razlici U), elektron neposredno prije udara u anodu ima kinetičku energiju eU . U najpovoljnijem slučaju sva se ta energija pretvara u energiju fotona, tako da je:

$$h\nu_g = eU, \quad (10.27)$$

što za graničnu valnu duljinu daje:

$$\lambda_g = \frac{c}{\nu_g} = \frac{hc}{eU} \quad (10.28)$$

Tako je pri naponu cijevi 100 kV granična valna duljina $\lambda_g = 0,012 \text{ nm}$.



Slika 10.15. Shema nastanka rendgenskog spektra: a) kontinuirani spektar, b) karakteristični spektar

Karakteristični linijski spektar nastaje kada upadni elektron izbaci iz atoma jedan od elektrona i tako načini šupljinu u jednoj od unutrašnjih ljuski atoma. Ako npr. upadni elektron izbije jedan elektron iz K-ljuske volframova atoma, u toj će ljusci nastati šupljina. Pritom energija upadnog elektrona mora biti dovoljno velika jer je taj elektron u volframu vezan za jezgru energijom od oko 70 keV. U vrlo kratkom vremenu (oko 10^{-8}s) jedan će elektron iz gornjih ljuski (npr. L-ljuske) popuniti tu šupljinu i pritom emitirati foton energije $h\nu = E_L - E_K$. Šupljinu u L-ljusci, koja je nastala odlaskom tog elektrona, popunit će elektron iz sljedeće ljuske itd. Tako ćemo dobiti liniju K_α u karakterističnome rendgenskom spektru, liniju s najmanjom frekvencijom, koja odgovara prijelazu elektrona na unutrašnju K-ljusku.

Slika 10.14. pokazuje spektar zračenja rendgenske cijevi s anodom od volframa. Na kontinuirani zakaočni spektar superponirane su dvije linije, K_α i K_β . Prva nastaje pri prijelazu elektrona iz druge na prvu stazu, K_β nastaje pri prijelazu iz treće u prvu stazu.

L-serija redgenskih spektara nastaje kada šupljinu u L-ljusci popunjava elektron iz viših staza. Tako L_α -linija nastaje pri prijelazu elektrona iz M-ljuske u L-ljusku. Slično nastaju M-serije i više spektralne serije. Na slici 10.15.b. pokazan je energijski dijagram atoma i prijelazi elektrona pri emisiji karakterističnoga rendgenskog spektra.

Načelno između optičkoga linijskog spektra vodika i spektara težih atoma nema razlike. Linije odgovaraju uvijek prijelazima elektrona s udaljenih na bliže ljuske. Pri prijelazu na K-ljusku za vodik dobivamo Lymanovu seriju u ultraljubičastom području (sl. 10.10). Zbog većeg naboja jezgre za teže su atome energije fotona veće, valne duljine manje, te se tako dobija K-serija rendgenskog spektra (sl. 10.15.b).

Moseleyev zakon za karakteristični rendgenski spektar. Proučavajući rendgenske spektre, G.Y. Moseley je 1913. uočio jednostavnu i vrlo važnu ovisnost valne duljine spektralnih linija *o rednom broju elementa* od kojega je napravljena meta. **Spektri su po svojoj strukturi za sve elemente jednaki, samo se valne duljine pojedinih linija smanjuju s porastom rednog broja.** Moseley je empirički došao do rezultata da je npr. za K_α -liniju (za elemente teže od natrija):

$$\nu = \frac{3}{4} cR (Z - a)^2 = cR (Z - a)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \quad (10.29)$$

odnosno za cijelu K-seriju

$$\nu = cR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) (Z - a)^2 \quad (10.30)$$

Ta je formula slična onoj za Lymanovu seriju vodikova spektra. Razlika je samo u faktoru $(Z - a)^2$ koji naglo raste s rednim brojem elementa. Zato su K-linije vrlo lakih elemenata (npr. vodika) u ultraljubičastom dijelu spektra, a za elemente sa $Z > 10$, u rendgenskom dijelu elektromagnetskog spektra.

Razlika između formule (10.30) i odgovarajuće Balmerove formule za vodikov atom nastaje zbog toga što elektron, koji skače u ispražnjeni energijski nivo težeg atoma, nije privukla samo jezgra, već su ga ujedno **odbili** i susjedni elektroni. Jezgra je *zasjenjena* drugim elektronima, pogotovo onim najbližima. Zato će *efektivni naboj* koji privlači elektron kada skače u K-ljusku (u kojoj se nalazi još jedan elektron) biti $e(Z - 1)$, a ne Ze . Zato u jednadžbi (10.30) dolazi član $(Z - a)^2$, pri čemu je a oko 1.

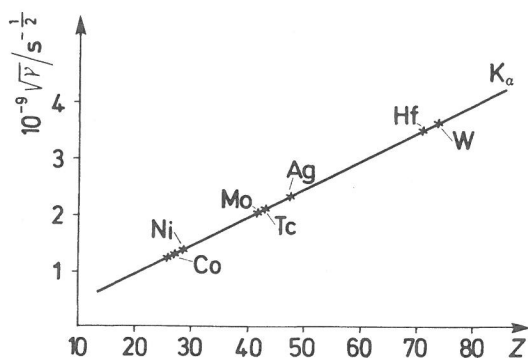
Za L_α -liniju vrijedi slična formula,

$$\nu = cR (Z - a_1)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \approx cR (Z - 7,4)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad (10.31)$$

Kada elektron prelazi iz M-ljuske u L-ljusku nastaje L-linija. Pritom se elektron giba u polju jezgre zasjenjene sa sedam elektrona u L-ljusci i dva

elektrona u K-ljusci, te je efektivni naboj $(Z - 7,4)e$, što su pokazali i Moseleyeva istraživanja.

Moseleyev zakon kaže da je **kvadratni korijen frekvencije linearna funkcija rednog broja Z** ; prikazavši $\sqrt{\nu}$ kao funkciju Z , Moseley je dobio linearnu ovisnost (sl. 10.16.) Pritom je uočio neke nepravilnosti u tadašnjemu periodnom sistemu. U to su vrijeme elementi bili poredani po rastućim relativnim atomskim masama te je npr. nikal ($A = 58,69$) bio ispred kobalta ($A = 58,94$). Vidjevši da je frekvencija K_{α} -linije nikla veća od frekvencije kobalta, Moseley je zaključio da nikal i kobalt moraju zamijeniti mjesta u periodnom sistemu. Tako je Moseley ispravno poredao elemente nikal i kobalt; na sličan je način predvidio postojanje još dotada neotkrivenih elemenata s rednim brojem $Z = 43, 61, 72$ i 75 .

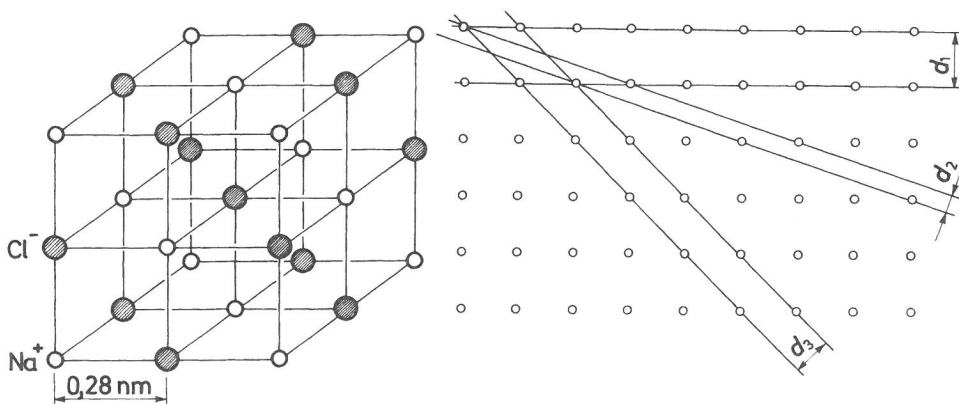


Slika 10.16. Moseleyev zakon

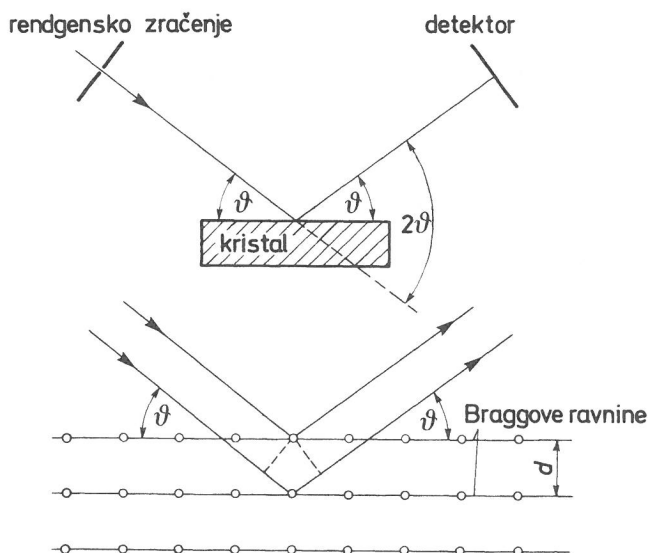
Što je redni broj elementa veći, rendgensko je zračenje »tvrđe«, tj. valna je duljina manja. Pomoću karakterističnih spektara može se analizirati kemijski sastav materijala. Naime, svaki element ima drukčiji karakteristični spektar.

Difrakcija rendgenskog zračenja. Rendgensko zračenje, kao i ostali elektromagnetski valovi, pokazuje interferencijske efekte. Budući da im je valna duljina mnogo kraća od valne duljine vidljive svjetlosti (reda veličine 10^{-10} m), te se pojave ne mogu uočiti na optičkoj rešetki koja je pregruba za tako kratke valove. M.V. Laue prvi je upotrijebio kristale koji zbog svoje pravilne unutrašnje strukture mogu poslužiti kao difrakcijske rešetke za rendgensko zračenje. Atomi u kristalima pravilno su poredani u trodimenzionalnoj kristalnoj rešetki (sl. 10.17.a) čija je »konstanta« dovoljno malena da bismo opazili difrakciju. Gustoća atoma u paralelnim kristalnim ravninama (tzv. *Braggovim ravninama*) veća je nego drugdje u kristalnoj rešetki. Na slici 10.17.b. pokazano je nekoliko takvih paralelnih ravnina međusobno udaljenih za d . (U kristalu ima više skupova takvih ravnina. Svaki skup obilježava njegova konstanta d i orijentacija. Zato kristal ima više konstanti d , ali radi jednostavnosti promatramo samo jedan skup Braggovih ravnina.)

Pretpostavimo da snop rendgenskih zraka pada na te ravnine pod kutom ϑ (sl. 10.18) i na atomima se reflektira pod istim kutom ϑ . (Pritom je kut upada odnosno refleksije kut između zrake i ravnine.) Razlika puta između dvije



Slika 10.17. a) Kristalna rešetka NaCl, b) Bragge ravnine u kristalima



Slika 10.18. Difrakcija rendgenskog zračenja

susjedne ravnine je $2 d \sin \vartheta$. Zrake reflektirane od dvije susjedne Bragge ravnine konstruktivno će interferirati u nekoj dalekoj točki ako je ispunjen uvjet

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (10.32)$$

U tim će smjerovima detektor registrirati maksimum zračenja. To je poznati **Braggov zakon** za difrakciju rendgenskog zračenja na kristalima. Iz poznatog razmaka d za određeni kristal može se odrediti valna duljina rendgenskog zračenja, i obratno: ako je poznat λ , može se odrediti d .

Primjer

Izračunajte valne duljine linija K_α i L_α rendgenskog zračenja srebra ($Z = 47$) i volframa ($Z = 74$). Kolika je razlika energije fotona K_α i L_α ($R = 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$)?

Karakteristično rendgensko zračenje nastaje prijelazom elektrona između pojedinih stacionarnih energijskih stanja na atomu.

K_α -linija nastaje kad elektron preskoči iz L-ljuske u šupljinu u K-ljusci. Pritom se elektron giba u polju naboja Ze pozitivne jezgre i naboja $-e$ jednoga negativnog elektrona u K-ljusci, pa je rezultatno električno polje zapravo ekvivalentno polju naboja $(Z - 1)e$.

Iz Moseleyevih istraživanja slijedi formula za valnu duljinu K_α -linije:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right),$$

a za L_α -liniju:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - 7,4)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

jer je pri prijelazu elektrona iz M-ljuske u L-ljuskju jezgra zasjenjena s ostalih sedam elektrona u L-ljusci i dva elektrona u K-ljusci pa je efektivni naboj $(Z - 7,4)e$.

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti dobivamo:

a) K_α -linija

za srebro: $\frac{1}{\lambda} = 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 46^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 5,74 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

za volfram: $\frac{1}{\lambda} = 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 73^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 2,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

b) L_α -linija

za srebro: $\frac{1}{\lambda} = 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 39,6^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 4,18 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

za volfram: $\frac{1}{\lambda} = 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 66,6^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = 1,48 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Energijska razlika za linije srebra:

$$E = h(\nu_1 - \nu_2) = hc \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 5,227 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 32,67 \text{ keV},$$

Za linije volframa:

$$E = h(\nu_1 - \nu_2) = hc \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 8,64 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 5,4 \text{ keV}.$$

10.9. Valna priroda čestica

Da bi se opisalo stanje čestice potrebno je poznavati njezinu energiju i količinu gibanja. U relativističkoj mehanici to je sadržano u izrazima:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad i \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv.$$

Energija i količina gibanja su povezane relacijom:

$$E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2. \quad (10.33)$$

Za objašnjenje zračenja crnog tijela i fotoelektričnog efekta bilo je potrebno pretpostaviti da je elektromagnetsko zračenje korpuskularne prirode, a elektromagnetski val, prema tome, zamisliti kao snop fotona energije

$$E = h\nu.$$

Kako je foton bez mase to mu se pomoću izraza (10.33) pridružuje količina gibanja

$$p = h\nu/c = h/\lambda \quad (10.34)$$

Elektromagnetski valovi su pojava koja se ne može prikazati poznatim pojavama vala i čestice iz makroskopskog svijeta. Oni su nešto drugo – o čemu nemamo iskustva i što ne možemo zorno predočiti. To »nešto drugo« uspješno opisujemo čas valovima, čas česticama: kada proučavamo širenje zračenja kroz prostor, interferenciju ili difrakciju, zračenje shvaćamo kao val određene frekvencije, odnosno valne duljine; pri objašnjenju emisije i apsorpcije zračenja ili interakcije zračenja s atomima – računamo s fotonima energije $E = h\nu$ i količine gibanja $p = h/\lambda$.

Budući da su elektromagnetski valovi dualne prirode, s pravom se možemo upitati: da li se čestice, pogotovo čestice u svijetu atoma, tj. čestice kao što su elektron, proton i neutron, u nekim okolnostima ponašaju možda kao valovi. Na tu je ideju prvi došao Louis de Broglie^{*}; on je 1924. postavio smjelu hipotezu prema kojoj svaka čestica koja se giba osim čestičnih ima i valna svojstva. Ta je njegova pretpostavka kasnije potvrđena brojim eksperimentima.

Prema de Broglieovim hipotezama možemo materijalnim česticama pripisati i valno svojstvo sljedećim izrazima:

$$\gamma mc^2 = h\nu \quad (10.35)$$

$$\gamma mv = h/\lambda. \quad (10.36)$$

Ovdje je λ de Broglieova valna duljina.

^{*} Louis de Broglie (1892–1987), francuski nobelovac (1929), osnivač valne mehanike.

Materija je, dakle, dualne prirode; kao što svjetlost ima svojstvo vala i čestice, tako i svaka čestica ima valna svojstva. Svaki je elektromagnetski val istodobno i snop čestica (fotona), a svakoj čestici pripada odgovarajući val. Val i čestica dva su načina manifestiranja materije. Dualnost čestica – val osnovna je osobina svijeta atoma.

U nerelativističkoj aproksimaciji de Broglieova valna duljina čestice kinetičke energije E_k je:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} \quad (10.37)$$

gdje je

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Često se za izračunavanje valne duljine sporih (nerelativističkih) elektrona primjenjuje prikrojena relacija dobivena uvrštavanjem vrijednosti za m i h u (10.37):

$$\text{a) } \lambda = \sqrt{\frac{2,41 \cdot 10^{-37}}{E_k}}$$

odnosno

$$\text{b) } \lambda = \sqrt{\frac{150,4}{E_k}} \cdot 10^{-10} \quad (10.38)$$

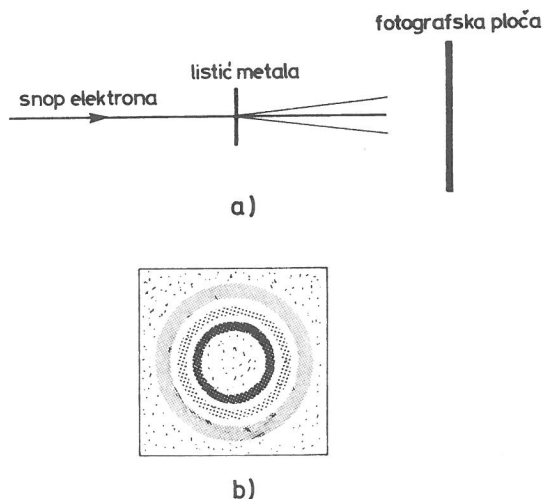
u koju treba uvrstiti kinetičku energiju ili u džulima (a) ili u elektronvoltima (b) da bi se vrijednost λ dobila u metrima.

10.10. Difrakcija elektrona

Tri godine nakon De Broglieove hipoteze Davisson i Germer opazili su difrakciju (ogib) elektrona pri raspršenju niskoenergetskih elektrona na kristalima metala i tako eksperimentalno potvrdili De Broglieovu teoriju o valnim svojstvima materije. Neovisno o njima G.P. Thomson (sin J.J. Thomsona koji je 1897. god. izmjerio specifični naboj elektrona e/m i tako dokazao čestične osobine elektrona) pokazao je da se elektroni na atomima u kristalnoj rešetki kristala raspršuju kao valovi (slično rendgenskom zračenju) i tako dokazao da *elektroni u gibanju* imaju valna svojstva.

G.P. Thomson promatrao je prolaz brzih elektrona kroz vrlo tanke metalne listiće (zlata, bakra...) i na fotografskoj ploči dobio difrakcijske kolobare slične Laueovim kolobarima dobivenim pomoću rendgenskog zračenja. Mjereći polumjere kolobara i poznajući konstantu kristalne rešetke, moguće je odrediti valnu duljinu upadnih elektrona. Thomson je opazio da je ogibna slika koju daju elektroni slična onoj koju bi proizveli valovi (npr. rendgensko zračenje) valne duljine $\lambda = h / (m v)$.

Na slici 10.19.a) dana je shema uređaja, a na slici 10.19.b) difrakcioni kolobari u Thomsonovu eksperimentu.



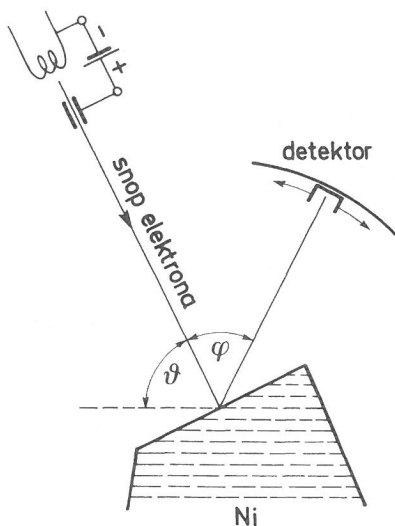
Slika 10.19. Thomsonov eksperiment

Upotrebljavajući elektrone od pedesetak elektronvolta dobivene iz zagrijane katode i ubrzane odgovarajućim visokim naponom, Davisson i Germer opazili su difrakcijske maksimume i minimume u intenzitetu elektrona raspršenih na monokristalu nikla. Slika 10.20. pokazuje shemu njihova eksperimenta.

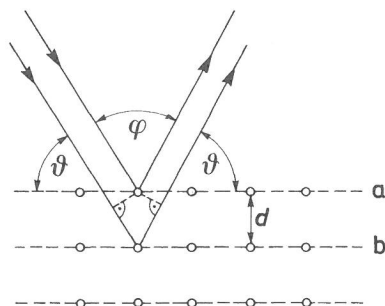
Kao i za rendgensko zračenje, i za elektrone vrijedi Braggov uvjet za maksimume difrakcije. Razlika hoda između dvije zrake raspršene na susjednim atomima (sl. 10.21) je $2d \sin \vartheta$ i konstruktivna će interferencija nastati ako je

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (10.40)$$

Kada je ispunjen taj uvjet, valovi raspršeni na susjednim nizovima atoma su u fazi (nizovi **a** i **b** na sl. 10.21) i opaža se jaki maksimum. Ako uvjet nije ispunjen, nema maksimuma, jer valovi ni u jednu točku prostora ne dolaze u fazi. Pritom je kut upada jednak kutu refleksije: kada bi oni bili različiti, valovi raspršeni na atomima u istom redu (npr. **a**) ne bi bili u fazi i interferencija ne bi bila konstruktivna. Dakle, da bi postojala konstruktivna interferencija svih valova raspršenih na kristalu (jaki maksimum), kut upada mora biti jednak kutu difrakcije, a mora biti ispunjeni i uvjet (10.40).

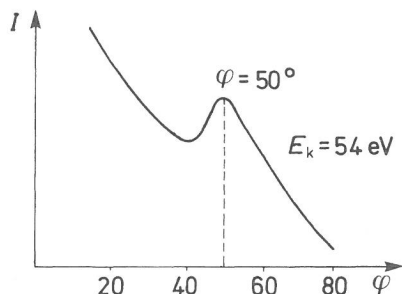


Slika 10.20. Shema Davisson-Germerova eksperimenta



Slika 10.21. Braggov uvjet za elektrone

U jednom Davisson-Germerovu eksperimentu s elektronima energije 54 eV opažen je maksimum u intenzitetu raspršenih elektrona (sl. 10.22) kada su upadni i ogibni snop s odgovarajućom porodicom kristalnih ravnina zatvarali kut $\vartheta = 65^\circ$. Pritom je kut φ bio 50° . Konstanta rešetke za nikal poznata je iz mjerenja X-zrakama i iznosi $d = 9,1 \cdot 10^{-11}$ m. Iz tih podataka možemo izračunati valnu



Slika 10.22. Difrakcija maksimum elektrona

duljinu elektrona raspršenog u ovom eksperimentu.

$$\lambda = \frac{2d \sin \vartheta}{n}$$

$$\lambda = 2d \sin \vartheta = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \sin 65^\circ = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

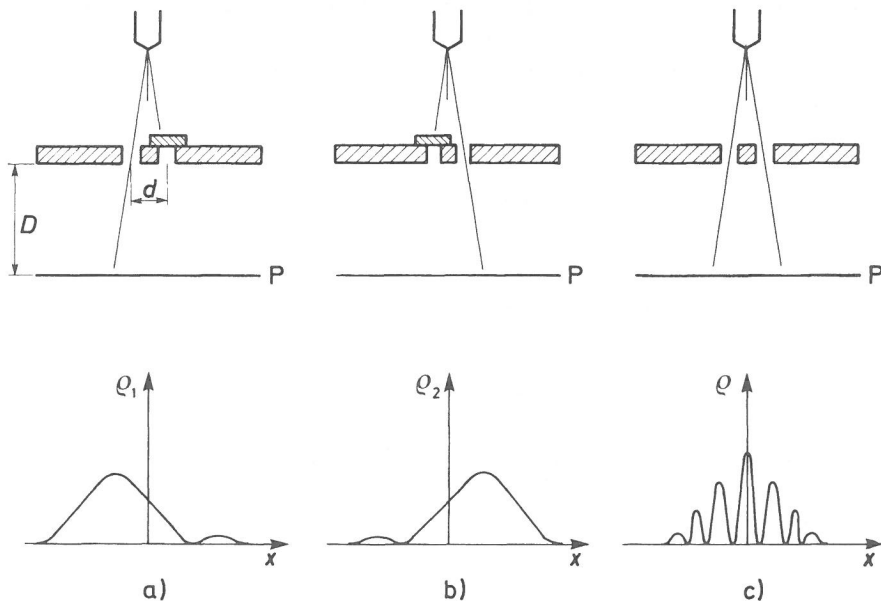
De Broglieova relacije određuje valnu duljinu elektrona od 54 eV:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \sqrt{\frac{150,4 \text{ eV}}{E_k}} \cdot 10^{-10} \text{ m} = \sqrt{\frac{150,4}{54}} \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

što se odlično slaže s eksperimentalno dobivenom vrijednošću. Tako je De Broglieova relacija eksperimentalno potvrđena i svaka je sumnja u njezinu ispravnost odbačena.

Kakav bi bio rezultat interferencije valova elektrona na dvije pukotine? Zamislimo da snop elektrona određene brzine pada na zastor s dvije pukotine (sl. 10.23). Dakle, taj je zamišljeni pokus sličan Youngovu pokusu u optici.

Neka se iza pukotina nalazi fotografska ploča P na kojoj se registriraju elektroni što prođu kroz pukotine. Pri otvorenoj lijevoj ili desnoj pukotini dobiju se raspodjele elektrona kao na sl. 10.23. a. i b). Pri prolazu kroz dvije pukotine slika nije zbroj raspodjela a i b, kao što bismo za makroskopske čestice očekivali, već je sastavljena od interferencijskih pruga (sl. 10.23.c).



Slika 10.23. Interferencija valova elektrona

Pri interferenciji valova zbrajaju se amplitude pojedinih valova koji interferiraju. Polje snopa čestica ne poznajemo i ne možemo ga direktno mjeriti kao npr.

električno polje u elektromagnetskom valu. Gustoća energije elektromagnetskog vala ovisi o kvadratu amplitude električnog polja:

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (10.41)$$

Gustoća fotona energije $\hbar \omega$ povezana je s gustoćom energije vala:

$$\varrho = \frac{\overline{w}}{\hbar \omega} = \frac{\epsilon_0}{2\hbar \omega} E_0^2 \quad (10.42)$$

i proporcionalna kvadratu amplitude električnog polja. Analogno: gustoća elektrona u snopu proporcionalna je kvadratu amplitude materijalnog polja. Ako je riječ o samo jednoj čestici, govorimo o *gustoći vjerojatnosti* da česticu nađemo na pojedinom mjestu. Tada je:

$$\varrho = \Psi^2 \quad (10.43)$$

gdje je Ψ amplituda vjerojatnosti. Ukupna vjerojatnost da se čestica nađe bilo gdje u prostoru jednaka je jedinici, te mora vrijediti:

$$\int_V \varrho dV = \int_V \Psi^2 dV = 1 \quad (10.44)$$

Tim smo uvjetom normirali amplitudu Ψ .

Slično električnom polju u elektromagnetskom valu, i amplituda je funkcija prostornih koordinata. U eksperimentu pokazanom na slici 10.23. zanima nas gustoća i amplituda vjerojatnosti da se elektron nađe na zastoru. Pritom su amplitude vjerojatnosti funkcije samo koordinate x . Kada je otvorena samo lijeva pukotina, gustoća je:

$$\varrho_1(x) = \Psi_1^2(x) \quad (10.45)$$

a kada je otvorena samo desna pukotina, ona je:

$$\varrho_2(x) = \Psi_2^2(x) \quad (10.46)$$

Pri obje se otvorene pukotine javlja interferencija i amplitude se zbrajaju:

$$\varrho(x) = \frac{1}{2} [\Psi_1(x) + \Psi_2(x)]^2 = \frac{1}{2} [\Psi_1^2(x) + \Psi_2^2(x) + 2\Psi_1(x)\Psi_2(x)\cos\delta(x)] \quad (10.47)$$

gdje je $\delta(x)$ razlika u fazi između amplituda. Mijenjanje s koordinatom x uzrokuje oscilacije gustoće na zastoru P tj. pruge interferencije. Slično kao i za obične valove razlika u fazi jednaka je:

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dx}{D} \quad (10.48)$$

i za svaku se prugu mijenja za 2π . Iz razmaka među prugama mogli bismo odrediti *valnu duljinu elektrona*, slično kao što se u optici pomoću interferencije na dvije pukotine mjeri valna duljina svjetlosti.

Opisivanjem snopa čestica valovima možemo, dakle, objasniti interferenciju čestica. Do veze između energije čestice i frekvencije pridruženog vala, odnosno količine gibanja i valne duljine, tj. do De Broglieove relacije, možemo doći ako pretpostavimo da je s česticom mase mirovanja m_0 povezano titranje s frekvencijom ω_0 tako da je:

$$\hbar \omega_0 = E_0 = m_0 c^2 \quad (10.49)$$

To titranje možemo opisati eksponencijalnom funkcijom:

$$\Psi = e^{-i \omega_0 t_0} \quad (10.50)$$

Giba li se čestica s obzirom na referentni sustav brzinom v u smjeru osi x , vlastito vrijeme t_0 transformira se po Lorentzovim transformacijama:

$$t_0 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (10.51)$$

i titranje (10.50) u tom referentnom sustavu izgleda kao val. Uvrstimo li, naime, (10.51) u (10.50), dobit ćemo valnu funkciju koja opisuje taj val:

$$\Psi = e^{-i \omega_0 \gamma (t - vx/c^2)} = e^{i(kx - \omega t)} \quad (10.52)$$

Frekvencija ω pri brzini v veća je od frekvencije kad čestica miruje:

$$\omega = \omega_0 \gamma = \frac{\gamma m_0 c^2}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} = \frac{E}{\hbar} \quad (10.53)$$

i povezana je s ukupnom energijom čestice:

$$\hbar \omega = E \quad (10.53.a)$$

Faktor $\frac{\omega v}{c^2}$ u (10.52) zamijenili smo valnim brojem k :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega v}{c^2} \\ k &= \frac{\hbar \omega v}{\hbar c^2} = \frac{mc^2 v}{\hbar c^2} \\ k &= \frac{mv}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \end{aligned} \quad (10.54)$$

Budući da je valni broj povezan s valnom duljinom relacijom $\frac{2\pi}{\lambda}$, tim smo razmatranjem došli do De Broglieove relacije:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (10.35)$$

Što bi se dogodilo kad bismo, umjesto elektrona, eksperiment opisan na sl. 10.23. pokušali izvesti s projektilima (puščanim mecima) npr. mase 10 g i brzine 900 m/s? Valna duljina

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 7 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

toliko je malena – a time su i maksimumi interferencije toliko blizu jedan drugome – da je interferencijska slika u tim makroskopskim dimenzijama potpuno neprijetljiva; zato u klasičnoj fizici i ne govorimo o valnim svojstvima makroskopskih predmeta.

Kada se elektromagnetski val širi kroz vakuum (tj. kad nema disperzije), *grupna i fazna brzina jednake* su brzini svjetlosti.

Valovi čestica uvijek imaju disperziju, te su im *grupna i fazna brzina različite*. Navest ćemo – bez dokaza – da je grupna brzina jednaka brzini čestice v , što je u skladu s našom početnom pretpostavkom (10.49).

Valna svojstva elektrona praktično se primjenjuju u elektronskome mikroskopu. Poznato je da *granica rezolucije* (moć razlučivanja) optičkih sistema ovisi o valnoj duljini: ako je udaljenost između dvije točke koje promatramo mikroskopom manja od oko pola valne duljine svjetlosti kojom se služimo, nikakvim povećanjem nećemo uspjeti razlučiti te dvije točke. *Moć razlučivanja* mikroskopa možemo povećati smanjenjem valne duljine. Pomoću elektronskih leća (električnih ili magnetskih polja) snop brzih elektrona u elektronskome mikroskopu usmjeruje se kao svjetlosne zrake u običnome mikroskopu. Budući da je valna duljina elektrona manja od 0,1 nm (npr. 0,01 nm pri 15 000 V), i moć razlučivanja *elektronskog mikroskopa* biti će mnogo veća nego ona običnog mikroskopa.

10.11. Bohrov model i valovi elektrona

Prvi Bohrov postulat koji nije fizikalno protumačen u odjeljku 10.3. može se razumjeti pomoću valne prirode elektrona. Ako je elektron val koji putuje oko jezgre, on će moći postojati samo na onim stazama na kojima se interferencijom ne poništava, tj. kada je duljina staze (opseg kružnice) jednaka cjelobrojnom višekratniku valnih duljina:

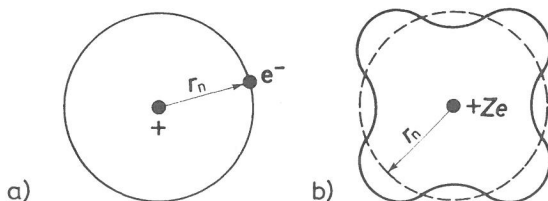
$$2 r_n \pi = n \lambda \quad (10.55)$$

Ako taj uvjet nije ispunjen, elektronski će se val interferencijom poništiti i na takvoj ga stazi neće biti. Dopusnene su one staze na kojima postoji stojni val elektrona (sl. 10.24). Prema De Broglieovoj formuli, valna je duljina određena količinom gibanja $\lambda = h/p$. Kada to uvrstimo u (10.55) dobivamo:

$$2 r_n \pi = n \frac{h}{p} \quad \text{ili} \quad p r = L = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar,$$

a to je upravo uvjet kvantizacije koji je Bohr izrekao u svome prvom postulatu.

Time smo donekle zorno obrazložili prvi Bohrov postulat i izborno pravilo za polumjere stacionarnih putanja, tj. vidjeli fizikalni smisao prvog Bohrova postulata.



Slika 10.24. Valovi elektrona i Bohrov model: a) staza elektrona u Bohrovu modelu, b) stojni val elektrona oko jezgre

Valna slika elektrona poslužila je Schrödingeru kao polazna točka u stavaranju valne mehanike koja je zamjena Bohrove i Sommerfeldove stare kvantne teorije. Putanju elektrona u atomu nemoguće je odrediti: ona je posljedica valno-čestične prirode materije. Da bismo odredili putanju pojedinog elektrona u atomu, morali bismo ga »osvijetliti« svjetlošću valne duljine usporedive s dimenzijama elektrona, tj. morali bismo, upotrijebiti gama-zračenje. No foton gama-zračenja ima veliku energiju i količinu gibanja, pa bi se pri sudaru elektrona i fotona promijenilo gibanje elektrona (v. Comptonov efekt). Ta bi promjena za svaki sudar mogla biti drukčija pa takvim mjerenjem, kad bi čak bilo i izvedivo, ne bismo mogli izmjeriti putanju elektrona u atomu. Bohrova teorija danas ima uglavnom povijesno značenje. Najslabija njezina točka jest njezina logička kontradikcija: to nije ni konzistentna klasična ni konzistentna kvantna teorija. To je bio samo prijelazni korak u stvaranju konzistentne teorije atomskih pojava. Kako je lijepo rekao jedan autor, Bohrov model je samo »prva aproksimacija istine«. Međutim, Bohrova teorija daje sliku (odnosno pseudosliku) pomoću koje je moguće zorno predočiti što se događa. Zornost tog modela (uz upozorenje na ograničenja) čini ga i danas vrlo korisnim. Zato gotovo svi udžbenici obrađuju Bohrov model i dijelove stare kvantne teorije.

10.12. Kvantni brojevi

U strogoj kvantnoj fizici kvantni se brojevi pojavljuju pri rješavanju Schrödingerove jednadžbe i određivanju valnih funkcija elektrona u atomu. Pokazuje se da su za opisivanje kvantnog *stanja elektrona* u atomu potrebna četiri kvantna broja. Budući da detaljno rješavanje Schrödingerove jednadžbe prelazi opseg ovog udžbenika samo ćemo se ukratko osvrnuti na kvantne brojeve i njihovu ulogu u opisivanju strukture atoma, i na kraju kratko spomenuti kako oni proizlaze iz rješenja Schrödingerove jednadžbe za vodikov atom.

Glavni kvantni broj n . Kvantni broj n susreli smo proučavajući Bohrov model atoma. To je tzv. glavni kvantni broj koji određuje energiju elektrona u atomu. Tako je za vodikov atom (odnosno atome koji u jezgri imaju Z protona ali su ionizirani tako da u elektronskom omotaču imaju samo jedan elektron, npr. He^+ i dr.) ukupna energija u n -toj ljusci:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \quad (10.56)$$

Svi elektroni istog kvantnog broja n pripadaju istoj ljusci. Zbog povijesnih razloga prva se ljuska ($n = 1$) označava slovom K, druga ($n = 2$) slovom L, zatim M, N itd.:

Kvantni broj n	1	2	3	4	5	...
oznaka ljuske	K	L	M	N	O	...

Najjednostavniji, vodikov atom ima jedan elektron koji se nalazi u prvoj, K-ljusci ($n = 1$). Tako aluminij $_{13}\text{Al}$, ima 13 elektrona: 2 u prvoj, K-ljusci, 8 u drugoj, L-ljusci, i 3 u trećoj, M-ljusci; kalij $_{19}\text{K}$, ima 2 K-elektrona, 8 L-elektrona i 8 M-elektrona itd.

Kasnije ćemo vidjeti kako se u određenom atomu elektroni raspoređuju u ljuske i koliko elektrona može imati pojedina ljuska.

Orbitalni kvantni broj l : Detaljnija ispitivanja vodikova spektra, a pogotovo atoma s većim brojem elektrona, pokazala su da je Bohrov model kružnih putanja prejednostavan i da se njime ne može objasniti fina struktura spektralnih linija ni utjecaj električnog polja na linijske spektre, tj. Starkov efekt, odnosno utjecaj magnetskog polja na spektre, tzv. Zeemanov efekt.

Sommerfeld je 1916. proširio Bohrov model pretpostavivši da se elektron istog kvantnog broja n može gibati oko jezgre na više načina. Tako je nastao *eliptički model atoma*. Sommerfeldov model atoma sličan je planetarnom sustavu; slično gibanju planeta oko Sunca, elektroni se oko jezgre gibaju po elipsama u čijem je fokusu jezgra. Velika poluos elipse jednaka je polumjeru Bohrove kružnice r_n a mala je os također kvantizirana. Tako za svaki kvantni broj n postoji n elipsa različitog ekscentriciteta, jedna od njih je, naravno, kružnica.

Premda je uvođenje eliptičkih putanja i uzimanje u obzir relativističkih efekata pomoglo u opisivanju spektara vodika, pojavile su se druge teškoće i konačno se ustanovilo da ta, tzv. stara kvantna mehanika **ne može** potpuno riješiti strukturu spektralnih linija ni objasniti složenije atome. Probleme je riješila *valna mehanika* odnosno kvantna fizika u kojoj je napuštena klasična slika elektrona i planetarni model atoma. Međutim, zbog složenosti kvantne mehanike i matematičkih metoda koje su za to potrebne još se uvijek upotrebljava Bohrov način opisivanja pojava u atomu.

Moment količine gibanja atoma, uz energiju, jedna je od najvažnijih osobina atoma i vezan je s magnetskim momentom elektrona i ponašanjem atoma u magnetskom polju. Stoga je za opisivanje momenta količine gibanja potrebno uvesti *kvantni broj*, kao što je za opisivanje energije uveden kvantni broj.

Već je Bohr u svome modelu atoma *kvantizirao* moment količine gibanja relacijom

$$L = n \hbar,$$

gdje kvantni broj n može poprimiti vrijednosti 1, 2, 3, ...

Kasniji razvoj kvantne fizike i valne mehanike pokazao je da je kvantizacija momenta količine gibanje elektrona u vodikovu atomu malo drukčija i opisana je **orbitalnim kvantnim brojem** l . Točnu ovisnost možemo dobiti jedino rješavanjem Schrödingerove valne jednačbe za vodikov atom. Pritom dobijemo da je moment količina gibanja:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (10.57)$$

gdje orbitalni kvantni broj l može (za određeni glavni kvantni broj n) poprimiti ove vrijednosti:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Dok glavni kvantni broj n određuje energiju vodikova atoma, orbitalni kvantni broj l određuje njegov moment količine gibanja.

Za prvu, K-ljusku ($n=1$), jedina moguća vrijednost orbitalnoga kvantnog broja jest $l=0$, te je i moment količine gibanja $L=0$. (To je teško zorno predočiti jer bi u tom slučaju elektron morao titrati kroz jezgru. Naša naivna slika o kružnim i eliptičkim stazama ne može nam uvijek objasniti rezultate *kvantnomehaničke teorije atoma*.) Kada se elektron nalazi u drugoj ljusci, $n=2$, l može poprimiti vrijednosti 0 i 1, a moment količine gibanja je $L=0$, odnosno $L=\sqrt{2} \hbar$. Općenito, za dani glavni kvantni broj n postoji n vrijednosti orbitalnoga kvantnog broja l , odnosno n mogućih vrijednosti momenta količine gibanja L .

Zbog isključivo povijesnih razloga stanja koja odgovaraju određenim vrijednostima orbitalnoga kvantnog broja l , označavaju se ovako:

$l=0$, slovom s (od engl. riječi sharp)

$l=1$, slovom p (principal)

$l=2$, slovom d (diffuse)

$l=3$, slovom f (fundamental)

$l=4$, slovom g

$l=5$, slovom h itd. (po abecedi).

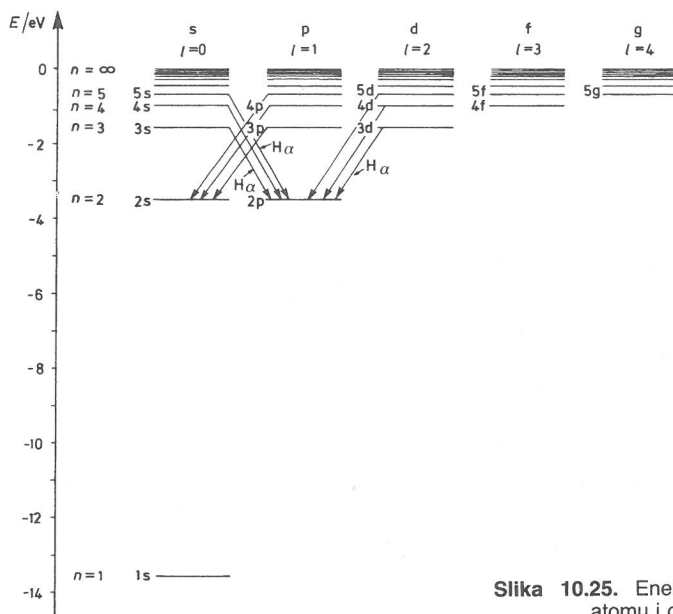
Dakle, razlikujemo 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f itd., stanja koja elektron može imati u vodikovu atomu. Osnovno stanje atoma je ono kad je elektron u najnižemu, tj. 1s stanju; kada je atom uzbuđen, elektron se nalazi u jednom od ostalih stanja.

Energija elektrona u vodikovu atomu uglavnom je određena kvantnim brojem n :

$$E_n = -\frac{m e^4}{8n^2 \epsilon_0^2 h^2} \quad (10.58)$$

Kada se uzmu u obzir *relativistički efekti*, tj. – ovisnost mase elektrona o brzini koju smo u Bohrovu modelu zanemarili, može se pokazati da energija, osim o kvantnom broju n , sasvim malo ovisi i o kvantnom broju l .

Slika 10.25 pokazuje energijski dijagram za vodik, tj. *kvantna stanja elektrona* s obzirom na energiju i moment količine gibanja. Za $n = 1$ postoji jedno stanje (1s), za $n = 2$ dva stanja (2s i 2p), za $n = 3$ tri stanja (3s, 3p i 3d) itd. Budući da energija elektrona u vodikovu atomu uglavnom ovisi o glavnome kvantnom broju n (a vrlo malo o l), stanja istoga glavnog kvantnog broja n i različitog l crtana su na istoj visini jer je razlika njihovih energija vrlo malena.



Slika 10.25. Energijska stanja u vodikovu atomu i dopušteni prijelazi

Pri emisiji fotona elektron prelazi iz stanja više energije E_m u stanje niže energije E_n . Zakon očuvanja energije zahtijeva da bude ispunjen uvjet:

$$h\nu = E_m - E_n.$$

Može se dokazati da nisu mogući svi prijelazi već samo oni za koje je promjena orbitalnoga kvantnog broja jednaka $+1$ ili -1 , tj.

$$\Delta l = \pm 1 \quad (10.59)$$

To izborno pravilo povezano je sa zakonom očuvanja momenta količine gibanja. Na slici 10.25 nacrtani su neki dopušteni prijelazi u Balmerovoj seriji. Vidi se da pojedine linije iste valne duljine mogu nastati na više načina. Tako $H\alpha$ -linija nastaje prijelazima $3s \rightarrow 2p$, $3p \rightarrow 2s$ i $3d \rightarrow 2p$. Spomenimo i to da je pri proučavanju energijskih stanja elektrona i spektara potrebno uzeti u obzir i **spinski moment količine gibanja**, što ćemo učiniti kasnije.

10.13. Magnetski moment elektrona

Elektron koji se giba oko jezgre čini zatvorenu strujnu petlju određenoga **magnetskog momenta**. Radi jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je staza kružnica polumjera r . Elektron se giba brzinom v i napravi $v/2r\pi$ okreta u sekundi. Količina naboja koji prođe **kroz danu točku** i u jedinici vremena, tj. ekvivalentna struja, je:

$$I = e \frac{v}{2r\pi} \quad (10.60)$$

Magnetski moment* jednak je umnošku jakosti struje i površine petlje, dakle:

$$\mu = IS = \frac{ev}{2r\pi} \cdot r^2\pi = \frac{em_e v r}{2m_e} = \frac{e}{2m_e} L \quad (10.61)$$

ili, pisano vektorski,

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (10.62)$$

gdje je $\vec{L}$ moment količine gibanja elektrona. (Predznak je negativan jer je smjer struje suprotan smjeru gibanja elektrona te magnetski moment i moment količine gibanja elektrona imaju suprotne smjerove).

Faktor proporcionalnosti u (10.62) (omjer μ/L) zove se **giromagnetski omjer** i za orbitalno gibanje elektrona iznosi $\frac{e}{2m_e}$. Premda smo tu relaciju dobili pomoću

klasične fizike, ona vrijedi i u kvantnoj fizici za bilo koje gibanje s momentom količine gibanja $\vec{L}$. Zamjenom $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ dobivamo:

$$\mu = \frac{e}{2m_e} \sqrt{l(l+1)}\hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \quad (10.63)$$

gdje je

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,79 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} (= 9,26 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}})$$

Bohrov magneton. Bohrov je magneton μ_B zapravo orbitalni dipolni moment elektrona koji kruži oko protona po Bohrovoj kružnici.

Kada se magnetski dipol nalazi u vanjskome magnetskom polju $\vec{B}$, on dobiva potencijalnu energiju $E_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Budući da svaki elektron koji se giba oko jezgre ima određeni magnetski moment (ponaša se kao magnetski dipol), atom će

* Obično se magnetski dipolni moment u atomskoj fizici označava sa μ , istim znakom, kao i permeabilnost sredstva. Zato treba paziti da ne nastane zabuna pri upotrebi formula u kojima se pojavljuju te veličine.

u vanjskome magnetskom polju dobiti dodatnu energiju i energijski će se nivoi atoma zbog toga promijeniti. Ako je energija elektronskoga gibanja kada nema polja E_n , u polju će ta energija biti $E_n + E_B$, pri čemu je:

$$E_B = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} L_B B \quad (10.64)$$

gdje smo sa L_B označili projekciju vektora $\vec{L}$ na smjer magnetskog polja.

Ako je vanjsko polje u smjeru osi z , energija ovisi o projekciji L_z momenta količine gibanja:

$$E_B = \frac{e}{2m_e} B L_z \quad (10.65)$$

Prema klasičnoj fizici, orbitalni bi moment količine gibanja mogao imati bilo koju projekciju L_z , od $+L$ do $-L$, a u kvantnoj je mehanici projekcija L_z također kvantizirana.

Dokazuje se da je:

$$L_z = m_l \hbar \quad (10.66)$$

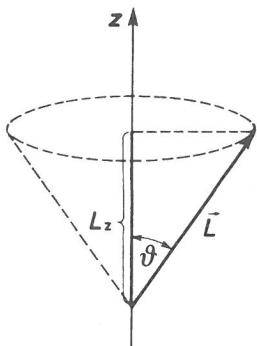
gdje je m_l treći, tzv. **magnetski kvantni broj**. Za određeni l magnetski kvantni broj može poprimiti samo $2l + 1$ cjelobrojnih vrijednosti između $-l$ i $+l$, tj.

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (10.67)$$

Maksimalna vrijednost m je l pa najveća dopuštena projekcija orbitalnog momenta L iznosi $L_z = l\hbar$.

Projekcija magnetskog momenta elektrona na smjer osi z je

$$\mu_{l,z} = -\mu_B m \quad (10.68)$$

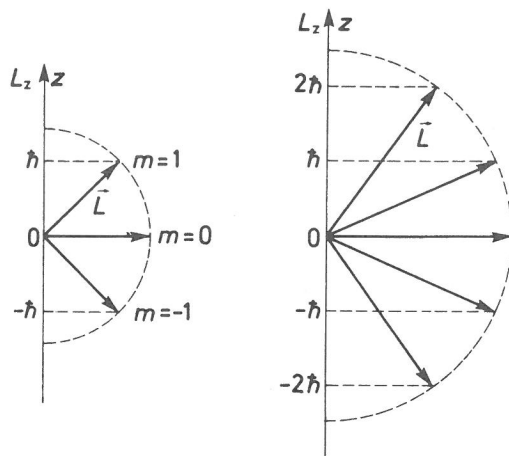


Slika 10.26. a) Vektorski model atoma

Na slici 10.26.a dan je moment količine gibanja atoma kao vektor određenog iznosa, $\sqrt{l(l+1)}\hbar$, koji leži u smjeru izvodnice stošca odnosno koji precesira oko osi z i sa osi z , koja je os stošca, zatvara kut ϑ . Kut ϑ je kvantiziran i ovisi o projekciji L_z odnosno o orbitalnome i magnetskome kvantnom broju l i m_l . Minimalni kut ϑ nije nula, kao što bi bio prema klasičnoj fizici, već ovisi o l . Na

slici 10.26.b pokazane su tri moguće orijentacije za $l = 1$ i $m = 1, 0$ i -1 ($\vartheta = 45^\circ$; 90° ; 135°) te za $l = 2$, $m = 2, 1, 0, -1, -2$ ($\vartheta = 35,3^\circ$; $65,9^\circ$; 90° ; $114,1^\circ$; $144,7^\circ$).

Sličnim se crtežima može predložiti i magnetski moment atoma. Taj tzv. *vektorski model* atoma može se upotrijebiti i pri zbrajanju momenata količine gibanja u rezultatni moment.



Slika 10.26. b) moguće orijentacije momenta količine gibanja za $l = 1$ i $l = 2$

10.14. Spin elektrona

Eksperimenti su pokazali da elektron ima vlastiti moment količine gibanja, tzv. spin, koji nastaje zbog vrtnje elektrona oko svoje osi. Ta vrtnja uzrokuje i vlastiti magnetski dipolni moment elektrona μ_s .

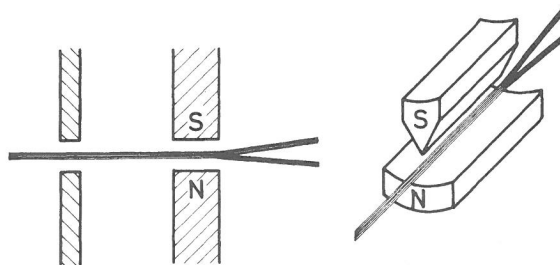
Pri proučavanju spektra natrijeve svjetlosti spektrometrima dovoljno velike rezolucije opaža se da je karakteristična žuta D-linija* zapravo dublet dviju usko priljubljenih linija (589 nm i 589,6 nm). Slično vrijedi i za druge linije. Atom natrija, kao što ćemo vidjeti, ima jedan elektron u vanjskoj, M-ljusci, a ostalih deset njegovih elektrona popunjava K-ljusku i L-ljusku. Tih deset elektrona čvrsto su vezani za jezgru a jedanaesti, valentni elektron u vanjskoj je ljusci i slabije je vezan. Zato je atom natrija donekle sličan atomu vodika i ima slične energijske nivoe i spektre. D-linija nastaje prijelazom elektrona iz 3p-stanja u 3s-stanje.

Tu *finu* strukturu spektralnih linija (kao i još neke eksperimentalne činjenice) ne možemo objasniti već spomenutim kvantnim brojevima n , l i m_l pa je potrebno uvesti i četvrti kvantni broj tzv. **kvantni broj spina elektrona**.

Poznati Stern-Gerlachov eksperiment (1924) također je jedna od izravnih potvrda postojanja spina elektrona.

* Naziv D-linija zadržan je zbog povijesnih razloga: to je jedna od tzv. Fraunhoferovih linija u Sunčevu spektru.

O. Stern i N. Gerlach promatrali su gibanje atoma srebra u nehomogenom magnetskom polju. U evakuiranoj su cijevi isparavanjem srebra dobili snop atoma koji su propuštali kroz nehomogeno magnetsko polje okomito na smjer gibanja atoma (sl. 10.27).



Slika 10.27. Stern-Gerlachov pokus

Atom srebra $_{47}\text{Ag}$ ima 47 elektrona, i to 2 elektrona u K-ljusci, 8 elektrona u L-ljusci, 18 elektrona u M-ljusci (odnosno u podljuskama 4s, 4p, i 4d) i elektron u O-ljusci, u stanju 5s. Ljuske K i L, kao i podljuska 4s, 4p i 4d, popunjene su (v. odjeljak 10.16) i magnetski se momenti tih 46 elektrona u ljuskama K, L, i M poništavaju. Rezultantni moment količine gibanja atoma srebra uzrokovan je gibanjem zadnjega, 5s-elektrona iz O-te ljuske. Budući da je on u s-stanju ($l = 0$), i njegov je orbitalni moment jednak nuli, pa je, dakle, *ukupni orbitalni moment atoma srebra jednak nuli*. Zato nema ni magnetskog momenta uzrokovanog orbitalnim gibanjem elektrona u atomu srebra.

Eksperiment je pokazao da se snop cijepa u dva simetrična snopa, kao što se vidi na crtežu: jedan je snop usmjeren prema gore, u smjeru rastućeg polja, a drugi prema dolje, u smjeru padajućeg polja.

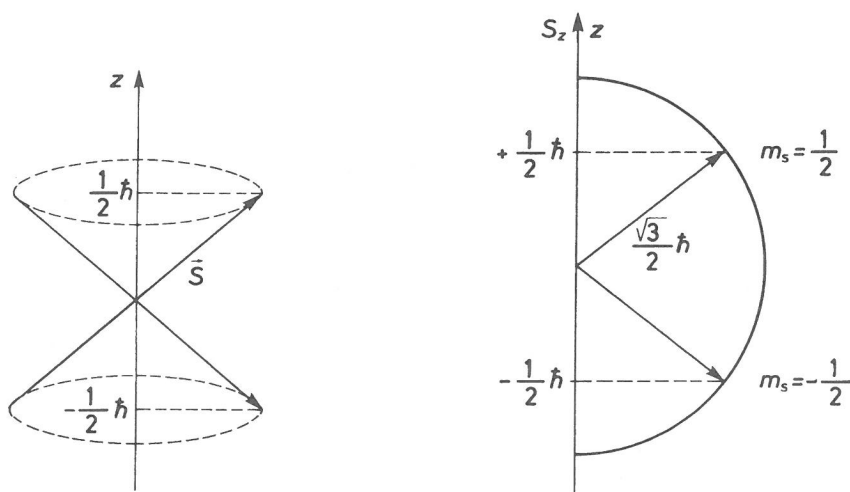
To dokazuje da je atom srebra *magnetski dipol* i da je dipolni moment uzrokovan *spinskim gibanjem elektrona*. Sila na dipol u nehomogenome magnet-

skom polju ($F = \mu \frac{dB}{dz} \cos \vartheta$) djeluje u smjeru rastućeg polja ako su $\vec{\mu}_m$ i $\vec{B}$ paralelni i obratno, ako su ta dva vektora antiparalelna ($\vartheta = 180^\circ$).

Magnetski moment μ_s povezan je sa *spinom* elektrona. Stern-Gerlachov pokus pokazuje da je magnetski moment koji nastaje zbog spina elektrona kvantiziran i da može poprimiti samo dvije orijentacije u magnetskom polju.

Godine 1925. G. Uhlenbeck i S. Goudsmit pretpostavili su da elektron ima svoj moment količine gibanja $\vec{S}$ i nazvali su ga spinom. U svojim zornim predodžbama elektron često zamišljamo kao kuglicu koja se vrti oko svoje osi i oko jezgre, slično gibanju Zemlje oko svoji osi i oko Sunca. U toj naivnoj slici lako razlikujemo spin $\vec{S}$ (vlastiti moment količine gibanja) i orbitalni moment količine gibanja $\vec{L}$. Ipak treba uvijek imati na umu da je to samo naša zorna slika i da je spin unutrašnja osobina elektrona koju ne možemo zorno predočiti.

Slično orbitalnome momentu količine gibanja, i spin je određen spinskim kvantnim brojem s , koji za elektrone, protone i neutrone iznosi $1/2$. Osim tih čestica sa spinom $1/2$, koje se nazivaju **fermioni**, postoje čestice čiji je spin jednak nuli, **bozoni**.



Slika 10.28. Spinski moment količine gibanja i njegova projekcija

Fotoni imaju spinski kvantni broj $s = 1$.

Iznos vektora spina elektrona je:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{1\left(1+1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (10.69)$$

Komponenta vektora spina u zadanom smjeru može poprimiti samo dvije vrijednosti (sl. 10.28): $\frac{1}{2}\hbar$ i $-\frac{1}{2}\hbar$. Spinski magnetski kvantni broj $m_s = \frac{S_z}{\hbar}$ (koji se često kratko zove i spinski kvantni broj) može poprimiti samo dvije vrijednosti:

$$m_s = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad m_s = -\frac{1}{2}.$$

Eksperimenti su pokazali da je veza između vlastitoga magnetskog momenta elektrona i njegova spina:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_s &= -2\left(\frac{e}{2m_e}\right)\vec{S} = -\frac{e}{m_e}\vec{S} = 2\mu_B\vec{S} \\ \mu_s &= -2\mu_B\sqrt{s(s+1)} \end{aligned} \quad (10.70)$$

Kao što se vidi iz relacija (10.70) i (10.63), giromagnetski omjer dvaput je veći za spinsko nego za orbitalno gibanje. Vlastita »rotacija« elektrona (spin) dvaputa je efektnija u magnetskim pojavama nego orbitalno gibanje elektrona.

Projekcija vlastitoga magnetskog momenta μ_{sz} može poprimiti dvije vrijednosti:

$$\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e}S_z = -\frac{e}{m_e}m_s\hbar \quad (10.71)$$

$$\mu_{sz} = \mp \frac{e \hbar}{2m_e} = \mp \mu_B$$

($\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ J/T – tzv. Bohrov magneton).

Spin elektrona direktno proizlazi i iz *relativističke kvantne mehanike*. Engleski fizičar Paul Dirac ustanovio je da je spin **kvantnomehanička i relativistička osobina elementarnih čestica** i napisao relativističku kvantnomehaničku jednadžbu za elektron iz koje se dobiva spin i giromagnetski omjer za spin.

Ukupni moment količine gibanja atoma. Svaki elektron u atomu ima orbitalni $\vec{L}$ i spinski $\vec{S}$ moment količine gibanja. Stanje svakog elektrona karakterizirano je kvantnim brojevima n , l , m_l i m_s . Atomi, međutim (osim vodikova), imaju više elektrona. Elektroni u atomu međusobno integriraju i s jezgrom atoma, tako da energiju i moment količine gibanja atoma treba razmatrati kao cjeline. Posebno je važan **ukupni moment količine gibanja atoma** koji je rezultat orbitalnoga i spinskog momenta količine gibanja svih elektrona u atomu. Označit ćemo ga sa $\vec{J}$. Iznos i projekcija ukupnog momenta količine gibanja atoma definirani su relacijom:

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad (10.72)$$

a njegova projekcija

$$J_z = m_j \hbar$$

gdje je $m_j = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \pm j$. Te su relacije, naravno, analogne relacijama (10.57) i (10.66) za orbitalni moment količine gibanja $\vec{L}$.

Obično se orbitalni momenti svih elektrona u atomu zbrajaju u ukupni orbitalni moment količine gibanja,

$$\vec{L}_{uk} = \sum_i \vec{L}_i \quad (10.73)$$

Slično se **ukupni spin atoma** dobiva kao zbroj spinskih momenata količine gibanja svih elektrona u atomu,

$$\vec{S}_{uk} = \sum_i \vec{S}_i \quad (10.74)$$

Ukupni moment količine gibanja atoma $\vec{J}$ jednak je:

$$\vec{J} = \vec{L}_{uk} + \vec{S}_{uk} \quad (10.75)$$

To je tzv. $\vec{L}$ - $\vec{S}$ - vezanje ili *Russell-Saundersovo vezanje* momenta količine gibanja elektrona. Međutim, moguće je i drukčije vezanje momenata količine gibanja elektrona u atomu u ukupni moment. Njega srećemo u nekih (težih) atoma. Za **svaki elektron** u takvom atomu zbraja se njegov orbitalni moment $\vec{L}_i$ i spinski moment $\vec{S}_i$ u ukupni moment količine gibanja elektrona $\vec{J}_i$ ($\vec{J}_i = \vec{L}_i + \vec{S}_i$). Tako je ukupni moment količine gibanja atoma jednak zbroju ukupnih momenata količine gibanja elektrona $\vec{J}_i$:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i \quad (10.76)$$

U takvim atomima *interakcija* spinskoga i orbitalnog momenta dovoljno je jaka pa je stanje svakog elektrona opisano kvantnim brojevima n, l, j i m_j umjesto brojevima n, l, m_l i m_s , kao što je slučaj u prvom načinu vezanja. Zato se takvo vezanje još naziva *jj-vezanjem*.

U kvantnoj se mehanici pokazuje da se spin elektrona u odnosu prema orbitalnome momentu količine gibanja **može orijentirati samo na dva načina**: paralelno i antiparalelno. Spin se, dakle, dodaje ili oduzima od orbitalnog momenta količine gibanja.

Za $l = 0$ kvantni broj j (kojim je iznos ukupnog momenta elektrona određen relacijom $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$) ima samo jednu vrijednost, $j = \frac{1}{2}$.

Za $l \neq 0$, j ima dvije vrijednosti: $j = l + \frac{1}{2}$ i $j = l - \frac{1}{2}$.

Giromagnetski omjer ukupnoga magnetskog momenta μ_j i ukupnog momenta količine gibanja J označimo sa g_j . On ovisi o L, S i J i nije kolinearan sa J (kao što je to bio slučaj za orbitalni i spinski magnetski moment količine gibanja).

U kvantnoj se mehanici pokazuje da je:

$$\mu_j = -\mu_B g \sqrt{j(j+1)} \quad (10.77)$$

gdje je g (tzv. *Lande-faktor*)

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (10.78)$$

Ako je $s = 0$, tada je $j = l$, $\mu_j = \mu_l$, te je $g = 1$, što proizlazi i iz relacije (10.77)

$$\mu_{l,z} = -\mu_B m_l \quad (10.79)$$

Ako je $l = 0$, tada je $j = s$, $g = 2$, te je $\mu_{s,z} = -2\mu_B m_s$, što smo vidjeli već prije u relaciji (10.71).

Primjer

Izračunajte ukupni moment količine gibanja $\vec{J}$ atoma vodika. Navedite kvantne brojeve za stanja vodikova atoma u 3d-orbitali.

Orbitalni moment količine gibanja $\vec{L}$ zbraja se sa spinskim momentom količine gibanja $\vec{S}$ pridruženom intrinzičnom spinskom gibanju elektrona u ukupni moment:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Projekcija J_z na z -os je:

$$\vec{J}_z = m_j \hbar,$$

gdje m_j može poprimiti vrijednosti $-j, -(j-1) \dots + (j-1), j$. Budući da $\vec{L}$ i $\vec{S}$ mogu imati različite orijentacije, imamo više mogućih vrijednosti za $\vec{J}$.

Spin elektrona može imati samo dvije orijentacije, »paralelnu« i »antiparalelnu« s

obzirom na z-os, tj. kvantni broj koji odgovara komponenti S_z može imati dvije vrijednosti,

$$m_s = +\frac{1}{2} \text{ i } m_s = -\frac{1}{2}.$$

Projekcija orbitalnog momenta određena je kvantnim brojem m_l , koji može poprimiti vrijednosti

$$-l, -(l-1) \dots (l+1), l.$$

Kvantni broj j , definiran izrazom

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar,$$

može poprimiti vrijednosti

$$l+s, l+s-1 \dots l-s.$$

Budući da je $s = \frac{1}{2}$, bit će moguće samo dvije vrijednosti od j , i to:

$$l + \frac{1}{2} \text{ i } l - \frac{1}{2}$$

One odgovaraju paralelnoj i antiparalelnoj orijentaciji. S obzirom na orbitalni moment količine gibanja, spin elektrona može, dakle, imati **samo dvije moguće orijentacije**.

U s-stanju i $l = 0$ kvantni broj j ima samo jednu vrijednost,

Tablica 10.2. Kvantni brojevi u 3d-podljuski

n	l	m_l	m_s		n	l	j	m_j
3	2	2	$\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	2	2	$-\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	2	1	$\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	2	1	$-\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3	2	0	$\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
3	2	0	$-\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
3	2	-1	$\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	2	-1	$-\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	2	-2	$\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3	2	-2	$-\frac{1}{2}$		3	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$$j = \frac{1}{2},$$

i tada je $\vec{J}$ identičan sa spinom elektrona $\vec{S}$. Takvo stanje elektrona označavamo simbolom $s_{1/2}$.

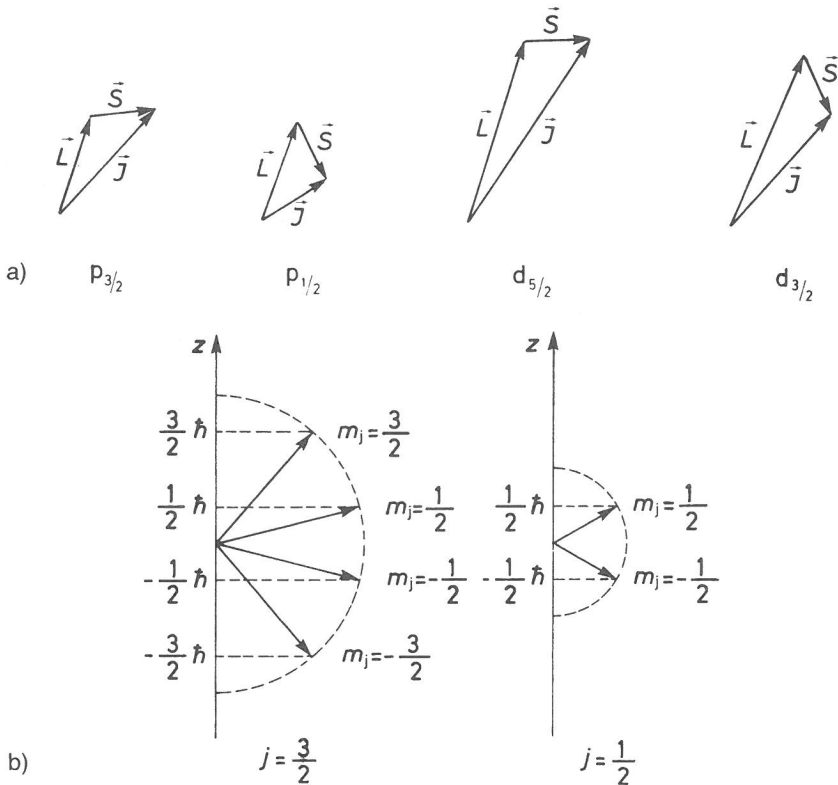
Za p-stanje, $l = 1$, moguće su dvije vrijednosti za j :

$$j = l + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad j = l - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ta stanja označavamo sa $p_{1/2}$ i $p_{3/2}$.

Slično, d-stanje, $l = 2$, ima dva »podstanja«, $d_{3/2}$ i $d_{5/2}$.

Na slici 10.29.a, pokazane su moguće relativne orijentacije vektora $\vec{L}$ i $\vec{S}$ kada je $l = 1$ i $l = 2$, a na slici 10.29.b moguće orijentacije J_z za stanja sa $l = 1$. Sličan bi se crtež mogao nacrtati i za stanja $d_{3/2}$ i $d_{5/2}$. Broj stanja u 3d-podljusci je $2(2l + 1) = 10$, a kvantni su brojevi dani, u tablici 10.2. Broj stanja u podljusci, naravno, ne ovisi o tome kojim kvantnim brojevima (n, l, m_l, m_s ili n, l, j, m_j) opisujemo ta stanja.



Slika 10.29. a) Moguće relativne orijentacije vektora $\vec{L}$ i $\vec{S}$ kada je $l = 1$ i $l = 2$, b) ukupni moment količine gibanja $\vec{J}$ za: $j = 1/2$ i $j = 3/2$

10.15. Zeemanov efekt

Utjecaj magnetskog polja na svjetlost Faraday je predvidio još 1862, ali zbog nepreciznih uređaja nije uspio i opaziti te pojave. Nizozemski fizičar Pieter Zeeman* opazio je 1896. cijepanje spektralnih linija kada se atomi koji emitiraju svjetlost nalaze u magnetskom polju. Promatrajući spektre natrijevih para, opazio je da od linija koje su u slučaju nepostojanja magnetskog polja jednostruke, nastaje više usko priljubljenih linija kada postoji magnetsko polje. Ta se pojava zove **Zeemanov efekt**.

Zeemanov se efekt objašnjava magnetskim momentom atoma μ_j . U vanjskome magnetskom polju $\vec{B}$ atom dobiva dodatnu energiju:

$$E_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B \quad (10.80)$$

gdje je μ_z projekcija magnetskog momenta na smjer polja (koje je u smjeru osi z). Budući da je $\mu_z = -m_j g \mu_B$, to je:

$$E = \mu_B m_j g B \quad (10.81)$$

Tako stanje $p_{3/2}$ bez vanjskoga magnetskog polja ima određenu energiju, međutim u vanjskome magnetskom polju to će se stanje cijepati u $2j + 1$, tj. na četiri jednako udaljena, usko priljubljena energijska nivoa. Prije uključenja vanjskoga magnetskog polja stanja različitog m_j imala su jednaku energiju ili, kako se kaže, stanja su bila *degenerirana*. Magnetsko je polje uklonilo degeneraciju po m_j .

Cijepanje energijskih nivoa u vanjskome magnetskom polju uzrokuju cijepanje spektralnih linija tj. Zeemanov efekt. (Opaženo je također cijepanje energijskih nivoa, tj. spektralnih linija kada se atomi nalaze u vanjskome električnom polju. Ta pojava se naziva *Starkov efekt*.)

Naprimjer, poznati se natrijev dublet, koji se sastoji od dvije spektralne linije, 589 nm i 589,6 nm, u vanjskome magnetskom polju cijepa na više bliskih linija. Spektralna linija od 589,6 nm, koja nastaje prijelazom $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$, cijepa se na četiri linije, a linija od 589 nm, koja nastaje prijelazom $3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ cijepa se na šest linija (sl. 10.30). Cijepanje natrijeva dubleta detaljnije je obrađeno u primjeru na str. 446.

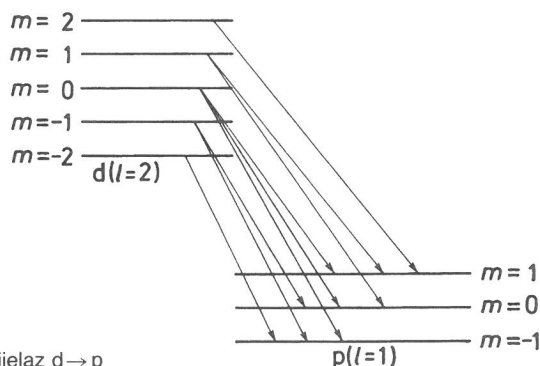
Zeemanov efekt dokaz je *prostorne kvantizacije*; njime je dokazano da projekcija momenta količine gibanja mora biti kvantizirana.

Primjer

Promatrajmo prijelaz između d-stanja i p-stanja, tj. stanja određenog kvantnim brojem $l = 2$ u stanja sa $l = 1$ u vanjskome magnetskom polju $B = 1 \text{ T}$.

U magnetskom se polju d-stanje cijepa u pet nivoa, a p-stanje u tri nivoa (sl. 10.30).

* Pieter Zeeman (1865–1943) dobio je 1902, zajedno sa H.A. Lorentzom, za ta proučavanja Nobelovu nagradu.



Slika 10.30. Zeemanov efekt za prijelaz $d \rightarrow p$

U vanjskome magnetskom polju atom zbog svoga magnetskog momenta μ dobiva dodatnu energiju:

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B},$$

Stoga se energija svakog stanja mijenja ovisno o tome kolika je projekcija L_z u smjeru vanjskog polja (pretpostavili smo da je spin atoma u promatranim stanjima jednak nuli).

Od petnaest različitih prijelaza moguće ih je samo devet, i to onih koji zadovoljavaju izbornu pravilo

$$\Delta m = 0, \pm 1.$$

Energijska razlika dvaju susjednih nivoa ($\Delta m = 1$) je:

$$\Delta E = \frac{ehB}{4\pi m_e} = \mu_B B,$$

gdje je $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$ Bohrov magneton.

Dakle,

$$\Delta E = 5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

ako je $B = 1 \text{ T}$.

Umjesto jedne linije, u magnetskom će se polju pojaviti tri usko priljubljene linije valne duljine $\lambda - \Delta\lambda$, λ i $\lambda + \Delta\lambda$ gdje je:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{v^2} \Delta v = \frac{c}{v^2} \frac{\Delta E}{h} = \frac{c}{v^2} \frac{ehB}{4\pi m_e h} = \frac{eBc}{4\pi m_e v^2}.$$

Ako je npr. $v = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (vidljiva svjetlost), tada je $\Delta\lambda \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

Primjer

Objasnite nastajanje natrijeva dubleta i način na koji vanjsko magnetsko polje utječe na natrijev dublet.

Natrij ima 11 elektrona. Njegov vanjski i valentni elektron je u $3s_{1/2}$ – stanju (v. odjeljak 10.16) i ima kvantne brojeve

$$n = 3, l = 0, J = \frac{1}{2}.$$

Kada u pobuđenom atomu natrija elektron prelazi iz viših pobuđenih 3p-stanja u $3s_{1/2}$ -stanje nastaje poznata žuta dvostruka spektralna linija valnih duljina

$$\lambda_1 = 588,995 \text{ nm i } \lambda_2 = 589,592 \text{ nm}$$

Za 3p-stanje kvantni su brojevi

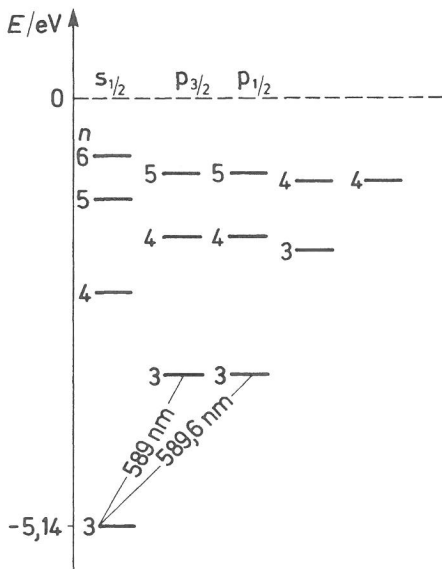
$$n = 3, l = 1 \text{ i } j = \frac{1}{2} \text{ (} 3p_{1/2}\text{-stanje)}$$

ili

$$n = 3, l = 1, j = \frac{3}{2} \text{ (} 3p_{3/2}\text{-stanje)}.$$

Stanja $3p_{3/2}$ i $3p_{1/2}$ razlikuju se po energiji, pa će prijelazom elektrona iz tih stanja u $3s_{1/2}$ -stanje nastati dvije spektralne linije (sl. 10.31) jedna prijelazom

$$3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2} (\lambda_1 = 588,995 \text{ nm}),$$



Slika 10.31. Natrijev dublet

a druga prijelazom

$$3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2} (\lambda_2 = 589,592 \text{ nm}).$$

Razlika valnih duljina vrlo je malena:

$$\Delta\lambda = 0,597 \text{ nm}, \Delta\nu = 5,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

jer je razlika energijskih stanja vrlo malena

$$\Delta E = h\Delta\nu = 3,42 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 2,13 \cdot 10^{-3} \text{ eV}.$$

Razmatrajmo utjecaj vanjskoga magnetskog polja $\vec{B}$ na natrijev spektar, posebno na natrijev dublet.

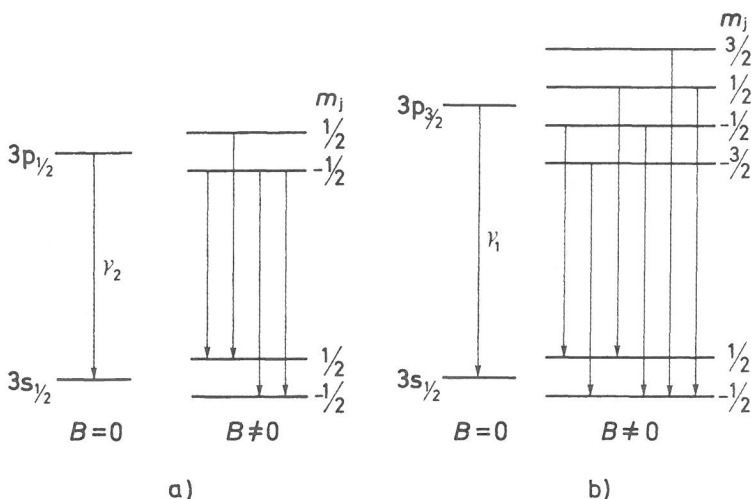
Zbog vanjskoga magnetskog polja $3s_{1/2}$ -stanje cijepa se u dva energijska stanja jer stanja

$$m_j = \frac{1}{2} \text{ i } m_j = -\frac{1}{2}$$

imaju različitu energiju. Slično se $3p_{1/2}$ -stanje cijepa u dva, a $3p_{3/2}$ -stanje u četiri stanja (sl. 10.32).

U vanjskome magnetskom polju energijsko stanje atoma mijenja energiju

$$\text{od } E \text{ do } E - \mu_z B,$$



Slika 10.32. Zeemanov efekt za natrijev dublet*

odnosno

$$\text{od } E \text{ do } E - g m_j \mu_B B$$

te ovisi o kvantnom broju m_j i faktoru g . Tako za $3p_{1/2}$ -stanje u natrijevu atomu m_j može biti

$$+\frac{1}{2} \text{ i } -\frac{1}{2}, \quad g = \frac{2}{3}, \quad \text{te } m_j g \text{ iznosi } \frac{1}{3} \text{ odnosno } -\frac{1}{3}.$$

Za $3p_{1/2}$ -stanje $g = 4/3$ te $m_j g$ iznosi $\frac{6}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{3}$, a za $3p_{1/2}$ -stanje $g = 2$, te $m_j g$ iznosi $+1$ i -1 .

Energija $p_{1/2}$ -stanja u magnetskom polju mijenja se i poprima vrijednost

$$E_p - \frac{1}{3} \mu_B B \text{ i } E_p + \frac{1}{3} \mu_B B$$

a $s_{1/2}$ -stanje cijepa se u dva stanja energije $E_s - \mu_B B$ i $E_s + \mu_B B$.

* Zeemanov efekt upravo za natrijeve atome jedan je od primijenjenih efekata pri laserskom hlađenju.

Uvažavajući izborno pravilo $\Delta m_j = 0$ i ± 1 za prijelaz $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ umjesto jedne linije, kad nema magnetskog polja dobivamo četiri linije u magnetskom polju. Slično se može pokazati da pri uključivanju magnetskog polja u prijelazu $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ od jedne linije nastaje šest linija (sl. 10.32 b).

10.16. Elektronski omotač atoma. Periodni sustav elemenata

Gibanje elektrona u atomu određeno je četirima kvantnim brojevima.

1. Glavni kvantni broj $n = 1, 2, 3 \dots$ određuje veliku poluos eliptične putanje, odnosno ljusku u kojoj se nalazi elektron. Svi elektroni u istoj ljusci imaju otprilike jednaku energiju.

2. Orbitalni kvantni broj l određuje ekscentricitet (malu poluos) eliptične putanje i moment količine gibanja elektrona na toj putanji, $L = l\hbar$, ili, točnije kako to zahtijeva stroga kvantna mehanika $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$. Za određeni glavni kvantni broj n , kvantni broj l može poprimiti n vrijednosti: $0, 1, 2, \dots, n-1$.

3. Kvantni broj m , tzv. magnetski kvantni broj, određuje orijentaciju momenta količine gibanja $\vec{L}$ s obzirom na smjer vanjskoga magnetskog polja, dakle veličinu komponente L_z . Magnetski kvantni broj m pokazuje prostornu orijentaciju putanje elektrona. Za određeni l , kvantni broj m može imati $(2l+1)$ vrijednosti, ili: $m = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm l$.

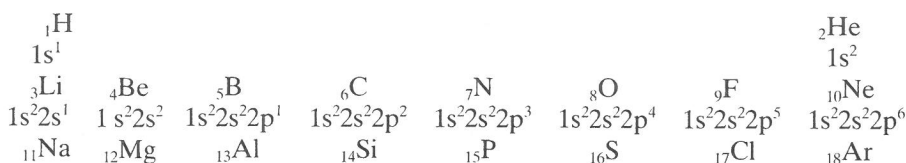
4. Kvantni broj spina m_s može poprimiti dvije vrijednosti: $+\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. Kada je spin elektrona orijentiran paralelno s orbitalnim momentom količine gibanja (odnosno vanjskim magnetskim poljem), projekcija spina je $+\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$; kada je spin orijentiran antiparalelno, tada je projekcija spina $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. To zorno predočujemo tako da zamislimo da jedna vrijednost spina odgovara vlastitoj vrtnji ulijevo, a druga vrtnji udesno.

Kvantni broj n , l , m i m_s jednoznačno određuju stacionarno stanje elektrona u atomu.

U elektronskom omotaču pojedinih atoma elektroni su po ljuskama raspoređeni po tzv. Paulijevu* principu isključenja. Taj princip kaže da dva elektrona u atomu ne mogu imati sva četiri kvantna broja jednaka.

Svaki elektron mora imati bar jedan od četiri kvantna broja različit od drugih elektrona. Na osnovi tog principa i činjenice da se stanja niže energije brže popunjavaju, može se razumjeti struktura elektronskih omotača i sistematika kemijskih elemenata u periodnom sustavu.

* W. Pauli (1900–1958), švicarski fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1945.



Slika 10.33. Dio periodnog sustava

U periodnom sustavu atomi su poredani prema rastućemu rednom broju Z , tj. prema broju protona u jezgri, odnosno elektrona u elektronskom omotaču.

Na početku periodnog sustava nalazi se vodik ${}^1_1\text{H}$ ($Z = 1$) s jednim elektronom na prvoj (najnižoj) putanji. Taj elektron ima najmanje kvantne brojeve, $n = 1$ i $l = 0$. Vodikova elektronska konfiguracija označava se simbolom



čitaj: jedan es jedan što znači da ima jedan elektron u stanju $1s$.

Atom helija ($Z = 2$) ima dva elektrona. Drugi helijev elektron također je u stanju $1s$ ($n = 1$, $l = 0$), ali mu se spinski broj razlikuje od spinskog broja prvog elektrona. Kvantni brojevi elektrona u atomu helija jesu:

$$n = 1, l = 0, m = 0, m_s = +\frac{1}{2}$$

$$n = 1, l = 0, m = 0, m_s = -\frac{1}{2}$$

Helij, dakle, u $1s$ -stanju ima dva elektrona, dakle konfiguracija mu je



Time je, prema Paulijevu principu, prva ljuska popunjena. Zato je helij kemijski inertan i ponaša se kao plemeniti plin.

Treći elektron u atomu litija ($Z = 3$) nalazi se u drugoj ljusci ($n = 2$) i ima kvantne brojeve $n = 2$, $l = 0$. Elektronska je konfiguracija litija



Zadnji, $2s$ -elektron slabije je vezan za jezgru i zato je litij jednovalentan i dobar vodič elektriciteta.

Četvrti elektron u beriliju ($Z = 4$) ima tri kvantna broja, kao i treći elektron ($n = 2$, $l = 0$, $m = 0$), samo mu je spin suprotno orijentiran. Elektronska konfiguracija berilija je



U beriliju je podljuska $2s$ popunjena, te se u sljedećem elementu, boru, peti elektron nalazi u $2p$ -podljusci. Ta podljuska može primiti šest elektrona i njezinim popunjavanjem dobivamo elemente od bora do neona. Pritom treba uzeti u obzir tzv. **Hundovo** pravilo koje kaže da osnovno stanje atoma uvijek ima najveću moguću vrijednost spina. Zato će u osnovnom stanju atoma ugljika ${}^{12}_6\text{C}$ i dušika ${}^{14}_7\text{N}$ dva $2p$ -elektrona odnosno tri $2p$ -elektrona imati paralelne spinove, u ${}^{16}_8\text{O}$, tri elektrona u $2p$ -podljusci imat će paralelne, a jedan antiparalelan spin itd.

Plemeniti plin neon $_{10}\text{Ne}$, ima obje ljuske ($n = 1$ i $n = 2$) popunjene, s konfiguracijom $1s^2 2s^2 2p^6$, i to, kao i kod helija, utječe na njegova kemijska svojstva. Natrij ($Z = 11$) ima svoj zadnji elektron u M-ljusci, 3s-podljusci.

Tako bismo mogli nastaviti razmatranje strukture elektronskih omotača složenijih atoma; pritom bi maksimalni broj elektrona u pojedinoj ljusci uvijek bio $2n^2$, a u podljusci $2(2l + 1)$. Tablica pokazuje elektronsku konfiguraciju prvih trideset elemenata periodnog sustava.

Tablica 10.3. Elektronska konfiguracija prvih trideset elemenata periodnog sustava

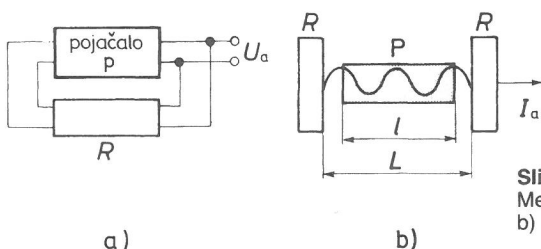
		K		L		M					K		L		M			N		
Z		1s	2s	2p	3s	3p	3d			Z		1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d
1	H	1						16	S	2	2	6	2	4						
2	He	2						17	Cl	2	2	6	2	5						
3	Li	2	1					18	Ar	2	2	6	2	6						
4	Be	2	2					19	K	2	2	6	2	6			–	1		
5	B	2	2	1				20	Ca	2	2	6	3	6				–	2	
6	C	2	2	2				21	Sc	2	2	6	2	6	1		1	2		
7	N	2	2	3				22	Ti	2	2	6	2	6	2		2	2		
8	O	2	2	4				23	Y	2	2	6	2	6	3		2	2		
9	F	2	2	5				24	Cr	2	2	6	2	6	5		5	1		
10	Ne	2	2	6				25	Mn	2	2	6	2	6	5		5	2		
11	Na	2	2	6	1			26	Fe	2	2	6	2	6	6		6	2		
12	Mg	2	2	6	1			27	Co	2	2	6	2	6	7		7	2		
13	Al	2	2	6	2	1		28	Ni	2	2	6	2	6	8		8	2		
14	Si	2	2	6	2	2		29	Cu	2	2	6	2	6	10		10	1		
15	P	2	2	6	2	3		30	Zn	2	2	6	2	6	10		10	2		

10.17. Fizikalne osnove lasera

Nakon pokusa izvedenih 1888. god., kojima je H. Hertz dokazao postojanje elektromagnetskih valova, pojavio se problem kako dobiti koherentne elektromagnetske valove visoke frekvencije. U razvoju bitnom za rješenje tog problema važno je otkriće cijevnog pojačala s triodom (1906) L. de Foresta i R. V. Liebena, te A. Meissnerovo otkriće (1913) principa povratne veze. Taj princip omogućuje gradnju generatora visokih frekvencija (oscilatora) s valovima duljine reda veličine metra ili većima (radio-valovi). Primjena tog principa na valove centimetarskog područja (mikrovalove) stvarala je ozbiljne teškoće. Na temelju teorijskog rada J. Webera, objavljenog 1953. god., godinu dana kasnije J. P. Gordon, H. J. Zeiger i C. H. Townes konstruirali su generator koji je radio u mikrovalnom području na frekvenciji od $2,39 \cdot 10^{10}$ Hz. Kao aktivni materijal za pojačanje iskoristene su molekule amonijaka, a generator je dobio naziv **maser**, akronim na engleskome, **microwave amplification by stimulated emission of radiation**. U teorijskom radu A. L. Schawlow i C. H. Townes (1958) razmatrali su mogućnost da se princip masera primijeni na valove optičkog područja. Jednaku mogućnost istodobno je razmatrao i A. M. Prohorov. T. H. Maiman je 1960. izradio generator na frekvenciji od $4,32 \cdot 10^{14}$ Hz. Kao aktivni materijal za pojačanje upotrijebio je rubin i, analogno maseru, taj svjetlosni oscilator nazvao **laserom**.

Na slici 10.34. prikazana je a) usporedba principa povratne veze generatora visoke frekvencije prema Meissneru i b) usporedba principa povratne veze lasera. U prvom se slučaju pojačanje postiže *elektronskim cijevima* ili *tranzistorima*, a u drugome *atomima i molekulama*.

Povratna veza je u prvom slučaju izvedena električki (oznaka R na slici a), a kod lasera refleksijom svjetlosti na zrcalima (R na slici b).



Slika 10.34. Princip povratne veze prema A. Meissneru: a) generatora visokih frekvencija, b) lasera. U oba slučaja P je pojačalo a R povratna veza.

10.17.1. Rad lasera

Elektroni u atomu mogu biti samo u stanjima određenih energija. Vanjski elektron elektronskog omotača pridruženog jezgri odgovoran je za spektar. Ako atome osvjetljavamo taj vanjski elektron može apsorbirati odgovarajuću energiju fotona, pa prijeći iz nižeg energijskog nivoa energije E_1 u viši nivo energije E_2 . Kažemo da je došlo do pobude, ekscitacije atoma. Pritom je foton predao elektronu atoma energiju $h\nu_{12}$ (h je Planckova konstanta, a ν_{12} frekvencija upadne svjetlosti). Vrijedi izraz:

$$\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

Elektron se vraća s tog pobuđenog stanja u niže energijsko stanje na dva načina. Jedan od njih je spontana emisija fotona energije $h\nu$. Kada će doći do takve emisije, određeno je statistikom i leži u vremenskom intervalu određenom *srednjim trajanjem života* pobuđenog stanja. Takve spontane emisije izvor su *nekoherentne svjetlosti* koja se širi na sve strane.

Pri izvodu Planckova zakona zračenja Einstein je pretpostavio i drugu vrstu emisije – **prisilnu emisiju** ili, kako se češće naziva, **stimuliranu emisiju**.

Dok je elektron atoma u pobuđenom stanju energije E_2 on zbog inducirajućega vanjskog zračenja može emitirati energiju. Elektron prelazi iz višega pobuđenog stanja na niže zračenjem energije i to zračenja koje je koherentno vanjskome i ima jednaku frekvenciju. Pri usmjerenome vanjskom zračenju ovo će stimulirano zračenje imati jednak smjer širenja u prostoru kao i vanjsko zračenje.

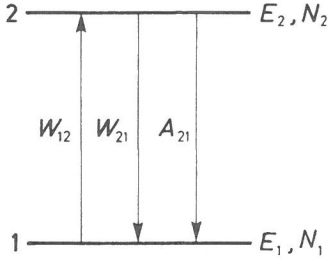
Promatramo jednostavni sustav od dva energijska nivoa 1 i 2 s energijama E_1 i E_2 te gustoćama naseljenosti N_1 i N_2 (slika 10.35). Pod gustoćom naseljenosti misli se na broj atoma u jedinici volumena čiji su elektroni u stanjima 1 i 2. U odabranom sustavu fotonska pobuda znači da elektron apsorbira foton i prelazi iz nižeg energijskog nivoa 1 u viši nivo 2. Broj atoma koji dožive takav prijelaz ovisi o gustoći naseljenosti nižeg nivoa, tj.

$$n_A = W_{12} N_1,$$

gdje je W_{12} vjerojatnost apsorpcije. Broj atoma koji se *spontanom* emisijom vraćaju u niže energijsko stanje n_{SE} prikazan je izrazom:

$$n_{SE} = A_{21} N_2,$$

gdje je A_{21} vjerojatnost spontane emisije.



Slika 10.35. Sustav od dva energijska nivoa

Drugu moguću emisiju, *stimuliranu* emisiju, doživi broj atoma n_{IE} određen izrazom:

$$n_{IE} = W_{21} N_2,$$

gdje je W_{21} vjerojatnost stimuliranog prijelaza s nivoa 2 na nivo 1.

Iz statističkog razmatranja poznato je da je odnos broja atoma na dva promatrana nivoa određen Boltzmannovom raspodjelom, tj.:

$$\frac{N_2}{N_1} \propto e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

što zbog $E_2 - E_1 = h\nu_{12}$ daje

$$\frac{N_2}{N_1} \propto e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}},$$

gdje je k Boltzmannova konstanta, T apsolutna temperatura, a ν_{12} frekvencija apsorbirane svjetlosti. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je u napisanom izrazu koeficijent proporcionalnosti 1. Tada se vidi da je na višim energijskim nivoima gustoća naseljenosti manja. Einstein je dokazao da za vjerojatnosti vrijedi jednakost $W_{12} = W_{21}$, pa uz činjenicu da je $N_2 < N_1$ slijedi da je $n_A > n_{IE}$. Znači da je apsorpcija veća od stimulirane emisije.

Možemo zaključiti sljedeće: da bi sustav odašiljao pretežno stimuliranu emisiju, treba da je $N_2 > N_1$, pa se tada kaže da je postignuta *inverzija gustoće* naseljenosti a to je osnovni uvjet za postizanje laserskog efekta.

Energija emitirana iz promatranoga jednostavnog sustava, koji je aktivni laserski materijal, ovisi o duljini puta koji val prijeđe u tome materijalu. Da bi proces koherentnog zračenja, tekao djelotvorno, aktivni se materijal postavlja u optički rezonator. Kod masera je riječ o *centimetarskim* valovima i rezonatori su dimenzija tog reda veličine. Za lasere to nije moguće ostvariti, jer je riječ o valnim duljinama iz *optičkog područja*.

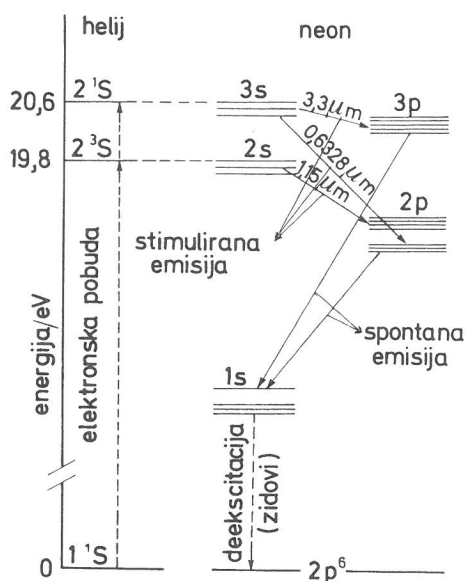
U ovom se slučaju aktivni materijal ograniči dvama paralelno postavljenim zrcalima tako, da se val kreće odbijajući se od jednoga do drugoga. Duljina puta koju val prewali u tome materijalu povećat će se onoliko puta koliko je bilo refleksija na zrcalima. Razmak l među zrcalima ne može biti bilo kakav. Za određenu valnu duljinu λ , l mora biti tako odabran da je ispunjen uvjet za stvaranje stojnog vala među zrcalima tj.:

$$n\lambda = 2l,$$

gdje je n cijeli broj. Tom uvjetu odgovara rezonator tipa Fabry-Pérot. Jedno zrcalo reflektira svu svjetlost, a drugo propušta oko 1% ukupnog intenziteta svjetlosti (I_a na slici 10.34) u prostor.

Spomenut ćemo neke metode dobivanja inverzije gustoće naseljenosti energijskih nivoa. Prvi, rubinski laser, koristi se metodom poznatom pod nazivom *optičko pumpanje*. Posredstvom upadnog svjetla iz bljeskalice atomi se dovedu u pobuđeno stanje s kojega se obavlja stimulirana emisija na niže energijsko stanje. Atomi se mogu dovoditi u pobuđeno stanje i izravnom elektronskom pobudom izvana.

Ovdje ćemo, međutim, detaljnije opisati metodu utemeljenu na neelastičnom sudaru atom-atom, tj., na sudaru drugog reda. Taj je način upotrijebljen u plinskom HeNe-laseru kojim izvodimo pokuse. Omjer komponenata plinske smjese helija i neona iznosi 10:1. Na priloženom term-dijagramu (sl. 10.36) vide se atomi helija u pobuđenim stanjima 2^1S i 2^3S . Oni sami od sebe ne mogu prijeći



Slika 10.36. Djelomični term-dijagram atoma helija i neona

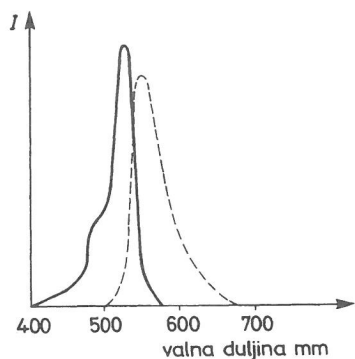
u osnovno stanje 1^1s jer su pobuđena stanja *metastabilna*. Kako su stanja neona $3s$ i $2s$ u neposrednoj energijskoj blizini pobuđenih stanja helija, to je vjerojatan proces u kojemu pobuđeni atomi helija prenose energiju na atome neona u osnovnom stanju $2p^6$. Time se atomi helija vraćaju u osnovno stanje, a atomi neona ulaze u pobuđena stanja $3s$ i $2s$. S tih stanja postoje tri stimulirana prijelaza. To su prijelazi valnih duljina $3,3\mu\text{m}$, $1,15\mu\text{m}$, te $0,6328\mu\text{m}$. Valnu duljinu od $0,6328\mu\text{m}$ dobivamo iz spomenutog lasera. Laser se pobuđuje istosmjernim ili visokofrekventnim električnim poljem.

Posebnu grupu lasera čine **molekularni laseri**, od kojih je najpoznatiji CO_2 -laser. U njemu se molekule ugljik-dioksida nalaze u smjesi s helijem i dušikom. Laserski efekt nastaje emisijom pobuđenih molekula CO_2 . Laser emitira infracrvenu svjetlost valne duljine $10,6\mu\text{m}$. Ima veliku snagu zračenja i visoki koeficijent pretvorbe uložene električne energije u energiju zračenja a iznosi do 20%.

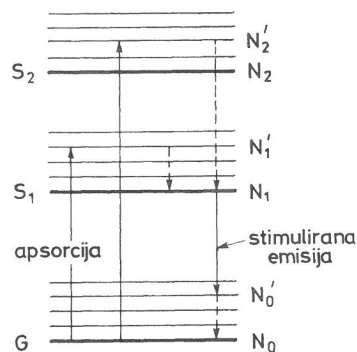
Valja istaknuti da veći broj *poluvodičkih* materijala pokazuje *elektroluminiscenciju* uzrokovanu rekombinacijom elektrona i šupljina u PN-spojevima, što se iskorištava za dobivanje stimulirane emisije. Posebno je poznat GaAs-laser koji zrači lasersku svjetlost u infracrvenom području valne duljine $0,84\mu\text{m}$.

Sredinom šezdesetih godina pojavili su se laseri s bojom (dye lasers). U to je doba već bilo poznato nekoliko stotina laserski aktivnih materijala. Tom vrstom lasera može se postići ugađanje, tj. odabir laserske linije iz uređaja u širokom području frekvencija, odnosno valnih duljina. Sorokin i Laukord (1966) prvi su primijetili stimuliranu emisiju organske komponente aktivnoga laserskog materijala. Ubrzo su valne duljine te vrste lasera obuhvatile cijeli vidljivi spektar, i proširile se u blisko ultraljubičasto i infracrveno područje. U upotrebi su razni materijali ali su najprikladnije otopine organskih boja.

Nasuprot atomskim linijskim spektrima, spektri molekula organskih boja su kontinuirani. To su široke *vrpce* čiji spektar obično pokriva nekoliko desetaka nanometara.



Slika 10.37. Relativni intenzitet apsorpcionog spektra i fluorescentnog spektra otopine rodamina 6G u etanolu

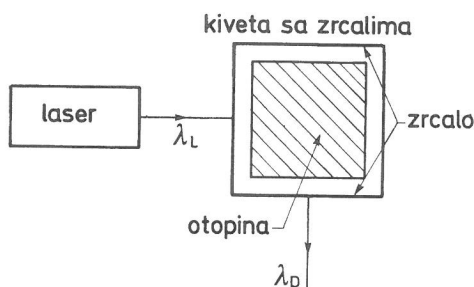


Slika 10.38. Shematski dijagram energijskih nivoa jednostavnih molekula

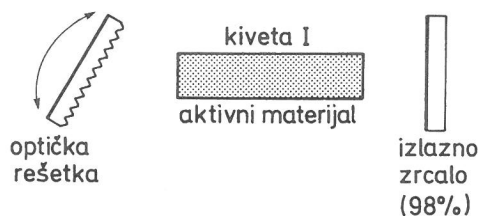
Energije vanjske pobude koje molekule mogu apsorbirati iz širokog su pojasa valnih duljina. Po pravilu, fluorescentni je emisijski spektar pri deekscitaciji molekule zrcalno simetričan apsorpcijskom spektru. Primjer je pokazan na slici (10.37).

Na slici 10.38 shematski je dan dijagram energijskih nivoa za jednostavnu molekulu kod koje je moguća stimulirana emisija za lasersku akciju. Zračenje, koje molekula apsorbira vodi molekulu iz osnovnog stanja gustoće naseljenosti N_0 u jedan od nivoa viših (vibracijskih) stanja S_1 ili S_2 gustoće naseljenosti N'_1 ili N'_2 . Molekula se vrlo brzo vraća u najniži nivo stanja S_1 . Stoga se stimulirana emisija događa s najnižeg nivoa stanja S_1 na jedan od viših nivoa stanja G . Ti se prijelazi međusobno neznatno razlikuju u valnim duljinama. Molekula ubrzo ulazi u najniži nivo stanja G .

Vanjska pobuda molekula lasera s bojom, obavlja se bljeskalicom ili laserskim svjetlom. Aktivni materijal, otopina u kojoj se odvija laserska akcija, smješten je u kivetu koja je ujedno optički rezonator sa zrcalima. Na prikazanoj slici pobudno svjetlo valne duljine λ_D i svjetlo iz otopine duljine λ_L u postavu uređaja stoje pod pravim kutom (sl. 10.39).



Slika 10.39. Shematski prikaz jednostavnog lasera s obojenom svjetlošću



Slika 10.40. Laser s obojenom svjetlošću i ugrađenom optičkom rešetkom

U kasnijim konstrukcijama optičkog rezonatora samo je jedno zrcalo, a umjesto drugoga je postavljena optička rešetka koja radi na principu refleksije i može se okretati oko osi okomite na optičku os rezonatora. Na taj način optička rešetka u nekom položaju omogućuje pojačanje samo željene valne duljine. Ovakvim je konstrukcijama postignuto područje namještanja širine oko 45 nm.

Laseri se primjenjuju u gotovo svakoj grani nauke i tehnike. Detaljnije ćemo obraditi njihovu primjenu u **holografiji**. Treba također istaknuti primjenu lasera u *telekomunikacijama*, gdje se informacija prenosi *moduliranim laserskim svjetlom*. Za to su osobito pogodni *poluvodički laseri*. Istražuju se prikladni materijali za svjetlovođe koji mogu prenositi laserske zrake na velike udaljenosti, bez atmosferskih smetnji i uz što manje gubitke. Modulirano lasersko svjetlo služi za prijenos TV-programa, telefonskih razgovora i podataka iz računala.

PITANJA I ZADACI

1. Koji su nedostaci Thomsonova modela atoma?
2. Kako je Rutherford zamišljao strukturu atoma i koji su ga pokusi doveli do takvog modela?
3. Zašto se pri Rutherfordovu raspršenju može zanemariti utjecaj elektrona u atomu?
4. Koju je veličinu Bohr kvantizirao u svome modelu atoma?
5. Koji su Bohrovi postulati za gibanje elektrona u atomu?
6. Izračunajte polumjer putanja i energiju elektrona u Bohrovu modelu.
7. Opišite i objasnite linijske spektre vodika.
8. Ako vodikov atom na miru emitira foton, frekvencije ν i količine gibanja $p = \frac{h\nu}{c}$, što se pritom dogodi s atomom? Kolika je njegova kinetička energija?
9. Kakva je razlika između Balmerove formule za ion helija, He^+ , i atom vodika, H ?
10. Zašto se energija ionizacije deuterija i tricija razlikuje od energije ionizacije vodika?
11. Objasnite Franck-Hertzov pokus.
12. Koliko je najmanje energije potrebno elektronu da bi u pokusu sličnom Franck-Hertzovu uzbudio atom vodika od stanja s glavnim kvantnim brojem $n = 1$ do stanja kvantnog broja $n = 2$?
13. Što znate o valnoj prirodi elektrona?
14. Protumačite načelo rada lasera.
15. Objasnite nastajanje rendgenskih zraka. Protumačite princip rendgenske analize.
16. Koje je fizikalno značenje glavnoga kvantnog broja n i orbitalnoga kvantnog broja l ?
17. Što je magnetski kvantni broj?
18. Što je Zeemanov efekt?
19. Objasnite Stern-Gerlachov pokus.
20. Što je spin elektrona? Koje je fizikalno značenje kvantnog broja spina?
21. Koje je značenje kvantnih brojeva i Paulieva principa uređenja periodnog sustava?
22. Atom vodika nalazi se u prvome uzbuđenom stanju. Pretpostavivši Bohrov model, izračunajte polumjer putanje, brzinu, moment količine gibanja, količinu gibanja, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju.
23. Balmerova serija linija vodika spektra nastaje prijelazom elektrona iz viših energijskih stanja u prvo uzbuđeno stanje. Izračunajte valnu duljinu prve i zadnje linije u Balmerovoj seriji.
24. Koje se spektralne linije mogu pojaviti u spektru vodika kada atom prelazi iz stanja $n = 4$ u osnovno stanje?
25. Kolika je najmanja energija koju može apsorbirati vodikov atom ako se nalazi u osnovnom stanju? Nadite frekvenciju i valnu duljinu pripadnog zračenja te odredite kojem dijelu elektromagnetskog spektra pripada to zračenje.
26. Kolika je energija ionizacije atoma vodika koji se nalazi u osnovnom stanju, tj. kolika je minimalna energija potrebna da se elektron otrgne iz vodikova atoma? Izračunajte frekvenciju i valnu duljinu tog zračenja, te odredite kojem dijelu spektra pripada to zračenje.
27. Odredite izraze za polumjer n -te staze elektrona i za energijske razine stanja u Bohrovu modelu za jednoelektronski atom koji u jezgri ima 2 protona.
28. Sudarivši se s elektronom, atom žive iz osnovnoga prijede u pobuđeno stanje koje se energijski razlikuje od osnovnog za 4,9 eV. Kolika je valna duljina svjetlosti koju atom žive emitira pri prijelazu u osnovno stanje?
29. Foton frekvencije $3,7 \cdot 10^{15}$ Hz izbaci elektron iz osnovnog stanja atoma vodika. Kolika je kinetička energija tog fotoelektrona?
30. Izračunajte kratkovalnu granicu ($\lambda_{\min}$) kontinuiranog spektra rendgenskog zračenja u rendgenskoj cijevi koja je priključena na izvor napona 100 kV.
31. Bombardiranjem nekog materijala brzim elektronima opažene su K-linije valne duljine $1,46 \cdot 10^{-10}$ m. Koji se element nalazi u tom materijalu?
32. Kolika je najveća energija fotona u K-seriji rendgenskih zraka koje nastaju kada se antikatoda prekrivena molibdenom bombardira elektronima?
33. Koji je minimalni napon potreban da bi se u rendgenskoj cijevi s antikatodom od volframa dobile sve linije K-serije?
34. Kolika je valna duljina De Broglievih valova elektrona kojima je brzina a) 2 km/s, b) $0,9c$?
35. Kolika je De Broglieova valna duljina pušcanog taneta mase 10 g i brzine 800 m/s?
36. Kolika je valna duljina elektrona u osnovnom stanju vodikova atoma?

11. Atomska jezgra

11.1. Svojstva i struktura jezgre

Rutherfordovi i drugi eksperimenti pokazali su da se atom sastoji od jezgre, malene prema dimenzijama atoma, ali s gotovo svom masom atoma. Jezgra je sastavljena od protona i neutrona, a zajednički ih zovemo nukleonima.

Proton je jezgra vodikova atoma. Pozitivno je nabijen nabojem čiji je iznos jednak naboju elektrona, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Neutron je električki neutralan. Neutroni i protoni imaju spinski kvantni broj $1/2$ (spin jednak $\frac{1}{2}\hbar$) i zato pripadaju grupi čestica koje nazivamo *fermionima*. Spinski magnetski momenti protona i neutrona jesu $\mu_p = 2,7927 \mu_n$ i $\mu_n = 1,9131 \mu_n$, pri čemu je μ_n nuklearni magneton, $\mu_n = e\hbar/2m_p = 5,051 \cdot 10^{-27} \text{ A m}^2$.

Najvažnije osobine jezgre su njezina masa i naboj. Naboj jezgre Ze određen je brojem protona Z , a ukupni broj protona i neutrona određuje maseni broj jezgre A .

Broj protona Z zove se redni broj elementa. Broj neutrona $N = A - Z$ donekle može varirati a da se pritom kemijska svojstva elementa ne mijenjanju. Jezgre koje imaju jednaki Z i N pripadaju određenom *nuklidu*. Nuklid se obilježava simbolom kemijskog elementa s oznakom masenog broja, npr. ^{12}C , ^{16}O , ^{197}Au , ^{238}U ; ponekad se eksplicite napiše i redni broj: $^{12}_6\text{C}$, $^{16}_8\text{O}$ i sl. Pojedini elementi mogu imati više izotopa. **Izotopi** su nuklidi koji imaju jednak broj protona, Z , ali različit broj neutrona, N , a time i različit maseni broj A . Tako su nuklidi ^1_1H , ^2_1H i ^3_1H tri izotopa vodika.

Izobari su nuklidi jednakog broja nukleona, npr. ^3_1H i ^3_2He .

Masa nuklida praktički je jednaka masi atoma jer je masa elektronskog omotača zanemariva. U tablicama su uvijek navedene mase atoma, a ne mase nuklida, te je za preciznije proračune od te mase potrebno odbiti masu elektronskog omotača. Atomske mase iskazuju se *atomske jedinice mase*:

$$u = \frac{1}{12} \times \text{masa atoma } ^{12}_6\text{C}$$
$$u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Unificirana atomska masena konstanta je

$$m_u = u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Upotrebom relacije $E = mc^2$ energijski se ekvivalent unificirane atomske masene konstante može izraziti džulima ili elektronvoltima, npr.:

$$1 m_u c^2 = 931,478 \text{ MeV}.$$

Masa mirovanja protona i neutrona su

$$m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u,$$

što je ekvivalentno energiji 938,26 MeV, odnosno 939,55 MeV.

Jezgra je oko 10^4 do 10^5 puta manja od atoma. Uz pretpostavku da je jezgra sferična, njezina se veličina može izraziti polumjerom. Eksperimentalno (npr. raspršenjem nukleona na jezgrama) dokazalo se da polumjer jezgre raste s povećanjem masenog broja prema izrazu:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (11.1)$$

gdje r_0 poprima vrijednosti od 1,2 fm ($1,2 \cdot 10^{-15}$ m) do 1,5 fm. Volumen jezgre je $\frac{4}{3} \pi r_0^3 A \approx 7 \cdot 10^{-45} A \text{ m}^3$, te je srednja gustoća nuklearne tvari oko $2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ vrlo velik broj, 10^{14} puta veći od gustoće materijala i neovisan o vrsti nuklida.

11.2. Energija vezanja jezgre

Proučavajući energiju vezanja nukleona u jezgri, saznat ćemo više o jačini nuklearnih sila među nukleonima u jezgri. Energija vezanja je energija potrebna da se nukleoni vezani u jezgri razdvoje. Može se lako vidjeti da je masa nuklida manja od zbroja mase protona i neutrona od kojih je nuklid sastavljen. Razlika ukupne mase protona i neutrona $Zm_p + Nm_n$ i mase nuklida m_A zove se defekt mase:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_A \quad (11.2)$$

Naprimjer, za jezgru ${}^4_2\text{He}$ iznosi

$$m_A = 4,002603 u,$$

a

$$2m_p + 2m_n = 4,03298 u,$$

te je **defekt mase**

$$\Delta m = 0,03038 u.$$

Pri spajanju nukleona u jezgru oslobodila bi se energija Δmc^2 ; da bismo jezgru rastavili na sastavne nukleone, tu energiju moramo utrošiti. Zato je energija vezanja:

$$E_b = \Delta mc^2 \quad (11.3)$$

što u spomenutom primjeru za ${}^4_2\text{He}$ iznosi 28,3 MeV ili oko 7 MeV po nukleonu.

Za jezgru mase m_A , sastavljenu od A nukleona, od kojih je Z protona i $A-Z$ neutrona, energija vezanja, tj. energija potrebna za odvajanje svih nukleona iz jezgre jest:

$$E_b = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_A]c^2 \quad (11.3a)$$

Ako se u relaciji (11.3a) uvrste vrijednosti masa atoma, tada je energija vezanja:

$$E_b = [Zm_H + (A-Z)m_n - m'_A]c^2 \quad (11.3b)$$

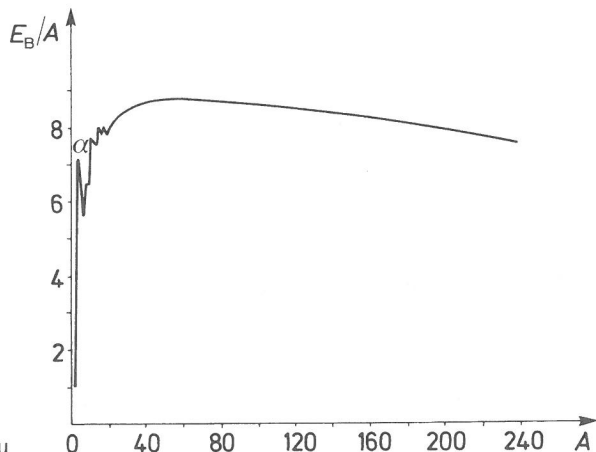
gdje je m'_A masa atoma promatrane jezgre.

Često se radije govori o *energiji vezanja po nukleonu* E_b/A jer upravo taj podatak upućuje na stabilnost jezgre. Na slici 11.1. prikazana je energija veze po nukleonu E_b/A kao funkcija masenog broja A . Prosječna energija vezanja po nukleonu iznosi oko 8 MeV. Za vrlo lake jezgre ($A < 10$) energija vezanja po nukleonu relativno je malena. Izuzetak je ${}^4_2\text{He}$, vrlo stabilna alfa-čestica. Za $A > 10$ ta energija polako raste, postiže maksimum za $A \approx 60$, a zatim lagalno slabi. Zato se pri spajanju lakših jezgri u težu, tzv. *fuziji*, kao i pri cijepanju teške jezgre u dvije srednje teške, tzv. *fisiji*, *oslobađa energija*, dakle *nuklearna energija*.

C. V. Weiszäcker izveo je 1935. empirijski izraz za energiju veze:

$$E_b = a_1A - a_2A^{2/3} - a_3(Z-1)ZA^{-1/3} - a_4(A-2Z)^2A^{-1} + a_5\delta \quad (11.4)$$

gdje je $\delta = A^{-3/4}$ za neparno-neparne, $\delta = 0$ za parno-neparne i neparno-parne jezgre i $\delta = A^{-3/4}$ za parno-parne jezgre, dok su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 empirijski određeni koeficijenti.

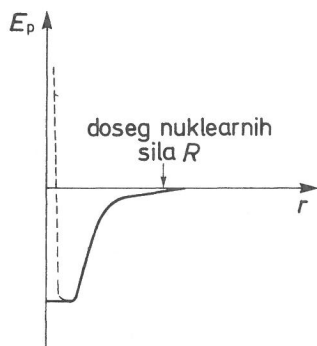


Slika 11.1. Energija veze po nukleonu

Prvi član vezan je za, tzv. volumeni efekt: E_b/A približno je konstantno, pa je E_b proporcionalna broju nukleona odnosno volumenu jezgre.

Nukleoni na površini jezgre slabije su vezani nego u unutrašnjosti i to uzima u obzir drugi član. Treći član potječe od kulonskog odbijanja protona u jezgri, četvrti član iskazuje utjecaj asimetrije u broju protona i neutrona na energiju vezanja, a posljednji član uzima u obzir sparivanje nukleona.

Nuklearne sile koje drže nukleone u jezgri vrlo su jake, što je vidljivo i iz energije vezanja jezgri. Nuklearne su sile kratkog doseg, tj. djeluju samo kad su čestice vrlo blizu, recimo oko 10^{-15} m daleko, a na većim su udaljenostima zanemarive. Neovisne su o naboju, a to znači da su sile između dva protona, neutrona i protona ili dva neutrona u biti jednake. Za većinu problema nuklearna se potencijalna energija može prikazati kao na slici 11.2, dakle potencijalnom jamom širine R , mada se zna da je na udaljenostima manjim od $0,4 \cdot 10^{-15}$ m sila odbojna (crtkana krivulja na slici).



Slika 11.2. Nuklearna potencijalna energija

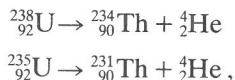
Nuklearni se problemi ne mogu sasvim egzaktno rješavati jer nije poznat točan matematički oblik nuklearne sile odnosno potencijalne energije, ali ono što je o silama poznato, uglavnom je dovoljno za razumijevanje nuklearnih procesa i strukture jezgre. Većina informacija o strukturi jezgre i nuklearnim silama dobiva se iz prirodnih i umjetno izazvanih nuklearnih transformacija o kojima ćemo nešto reći u sljedećim odjeljcima. Istraživanja u nuklearnoj fizici bila su naročito intenzivna posljednjih tridesetak godina, ali su mnoga pitanja u tom dijelu fizike još uvijek otvorena.

11.3. Radioaktivnost

Iako u prirodi postoje samo 92 kemijska elementa (i još 12 umjetno proizvedenih), poznato je oko 1500 različitih nuklida, od kojih je 340 prirodnih, a oko 1100 umjetno proizvedenih. Većina nuklida (oko 1200) nestabilni su, radioaktivni. Neutroni u jezgri donekle ublažuju elektrostatsko odbijanje protona. Broj neutrona u lakšim jezgrama približno je jednak broju protona, a u težim je jezgrama broj neutrona malo veći od broja protona. Pogodna kombinacija protona i neutrona čini jezgru stabilnom i čim je drukčija, jezgra se nastoji izbacivanjem odgovarajućih čestica približiti stabilnoj konfiguraciji. Već je pri kraju prošlog stoljeća opaženo da radioaktivni materijali emitiraju alfa-čestice i beta-čestice pretvarajući se pritom u druge elemente.

Mnogi izotopi elemenata sa $A > 200$ prirodno su radioaktivni. Tako nuklid ^{238}U emitira alfa-čestice, ^{234}Th beta-čestice, ^{214}Bi alfa-čestice i beta-čestice i sl.

Alfa-čestice su helijeve jezgre ${}^4_2\text{He}$ i nastaju pri radioaktivnom alfa-raspadu. Kada nestabilna jezgra emitira alfa-česticu, maseni joj se broj smanji za četiri, a redni broj za dva, npr.:



ili, općenito:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}^4_2\text{He} \quad (11.5)$$

A. Gamov je 1928. teorijski obradio i izračunao vjerojatnost za alfa-raspad.

Beta-čestice su brzi elektroni (${}^0_{-1}e$), čestice s nabojem $-e$ i masom 1838 puta manjom od mase nukleona. Kada radioaktivna jezgra emitira β^- -česticu, redni joj se broj povećava za jedan a maseni joj se broj ne mijenja. Taj se proces može prikazati shemom:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + e^- + \bar{\nu} \quad (11.6)$$

gdje je $\bar{\nu}$ antineutrino, čestica koja se uz elektron emitira u beta-raspadu, npr.:



Takav se raspad događa kada u jezgri ima previše neutrona, pa se jedan od njih transformira u proton i tako jezgra poprima stabilniju konfiguraciju:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^{A-1}Y + e^- + \bar{\nu} \quad (11.7)$$

Elektroni i antineutrini nastali pri tom raspadu odmah napuštaju jezgru. Elektrone je lako detektirati, ali je antineutrino, čija je masa mirovanja nula, a i neutralan je, detektiran tok mnogo godina nakon objašnjenja β -raspada i pretpostavke o njihovom postojanju.

Neke nestabilne jezgre (koje nemaju dovoljno neutrona) emitiraju pozitivne čestice mase jednake masi elektrona, ali naboja $+e$, pa tako povećavaju omjer N/Z i postaju stabilnije. To je β^+ -raspad, pri kojemu se jedan proton pretvara u neutron, a iz jezgre izlaze pozitroni (β^+) i neutrini,

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^{A-1}Y + \beta^+ + \nu. \quad (11.8)$$

Shemu β^+ -raspada pišemo ovako:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + \beta^+ + \nu. \quad (11.9)$$

Naprimjer:



Neke se jezgre mogu pretvoriti u druge, stabilnije, nuklearnom pretvorbom koja se naziva *uhvat elektrona*. Jezgra rednog broja Z zahvati jedan elektron iz elektronskog omotača svog atoma i pritom se transformira u jezgru čiji je redni broj $Z-1$:

$${}_Z^AX + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^AY \quad (11.10)$$

Dok se proton u jezgri može raspasti u neutron, slobodni je proton stabilan. Međutim, slobodni se neutron raspada na proton, elektron i antineutrino prema relaciji (11.7).

Gama-raspad je emisija elektromagnetskog zračenja (γ) iz jezgre atoma koja pritom prelazi iz jednoga energijskog stanja u drugo. Energije tog zračenja znatno su veće nego pri prijelazima elektrona u atomu. Gama-zračenje je elektromagnetsko zračenje vrlo kratkih duljina. Pri emisiji gama zračenja ne mijenjaju se redni broj ni masa jezgre:



gdje je ${}^A_ZX^*$ pobuđeno stanje jezgre X.

Radioaktivni alfa-raspadi i beta-raspadi gotovo su uvijek praćeni i gama-emisijom.

Osim gama-raspadom, jezgra može iz pobuđenog stanja prijeći u niže i tako da energiju preda jednom od elektrona u elektronskom omotaču atoma (unutrašnja konverzija). Pritom se emitira karakteristično X-zračenje.

11.4. Zakon radioaktivnog raspada

Radioaktivni raspad je *statističke prirode*. Iako ne možemo predvidjeti kada će se određena radioaktivna jezgra raspasti, ipak možemo izračunati vjerojatnost tog procesa. Vjerojatnost da se jezgra raspadne ne povećava se s vremenom čekanja da se ta jezgra raspadne, već je, za bilo koji promatrani vremenski interval, jednaka. Brzina kojom se radioaktivni materijal raspada $-dN/dt$, zove se **aktivnost** i ovisi o prirodi radioaktivnog materijala. Ona je u svakom trenutku proporcionalna broju N nestabilnih jezgri u uzorku:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (11.12)$$

gdje je λ **konstanta raspada**, karakteristika pojedinoga radioaktivnog nuklida.

Iz (11.12) integriranjem dobijemo eksponencijalni *zakon radioaktivnog raspada*:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (11.13)$$

gdje je N_0 početni broj jezgri (u vrijeme $t = 0$), a N broj neraspadnutih jezgri preostao nakon vremena t . Vremenski zakon radioaktivnog raspada dan je na slici 11.3.

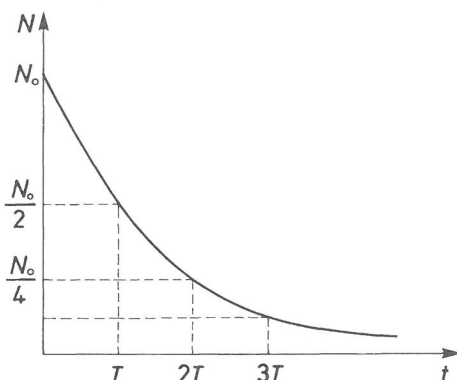
Aktivnost kao što je iz definicije očito, izražava se jedinicom bekerel, ($\text{Bq} = \text{s}^{-1}$)*.

* Do 31. XII. 1980. aktivnost se iskazivala jedinicom kiri: $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Upotreba Ci više nije zakonita.

Ako je $\left(-\frac{dN}{dt}\right)_0$ početna aktivnost uzorka, tada je aktivnost nakon vremena t :

$$\begin{aligned} -\frac{dN}{dt} &= \lambda N \\ -\frac{dN}{dt} &= \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \left(-\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (11.14)$$

te, dakle, slabi po istom eksponencijalnom zakonu (11.13)



Slika 11.3. Zakon radioaktivnog raspada

Vrijeme poluraspada (poluživot) $T_{1/2}$ onaj je vremenski interval u kojemu se raspadne polovina jezgara radioaktivne tvari. Uvrstivši $t = T_{1/2}$ i $N = \frac{N_0}{2}$ u (11.13) dobivamo:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (11.15)$$

Postoje radioaktivni nuklidi s vremenom poluraspada duljim od bilijun godina, ali i do 10^{-9} s. Naprimjer, vrijeme poluraspada $^{238}_{92}\text{U}$ je $4,51 \cdot 10^9$ god. za $^{235}_{92}\text{U}$ je $7,7 \cdot 10^8$ god., za neutron je 12 min itd.

Srednje vrijeme života τ jezgre računa se pomoću izraza:

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t dN}{\int_0^\infty dN} = \frac{\int_0^\infty N_0 \lambda t e^{-\lambda t} dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} \quad (11.16)$$

Iz zakona radioaktivnog raspada (11.13) vidimo da je τ vrijeme potrebno da se početni broj jezgri smanji za faktor e . Ako je $t = \tau$, tada je $N = N_0/e$.

11.5. Nuklearne reakcije

Nuklearna je reakcija proces interakcije jezgre s elementarnom česticom ili drugom jezgrom, koji vodi transformaciji jezgre. Procesi prirodne radioaktivnosti spontane su nuklearne reakcije. Radi proučavanja jezgre i dobivanja novih nuklida, često se proizvode umjetne nuklearne reakcije.

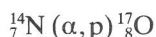
Najčešći je oblik nuklearne reakcije:



ili, kako se još skraćeno piše:



gdje je X jezgra meta, a upadna čestica (projektil), te Y i b reakcijom nastale jezgra i lagana čestica (neutron, proton, deutron, alfa-čestica, gama-foton i sl.), npr.



(prva nuklearna reakcija, koju je 1919. ostvario E. Rutherford), ${}^{27}_{13}\text{Al}(n, \alpha){}^{24}_{11}\text{Na}$, ${}^7_3\text{Li}(p, \alpha){}^4_2\text{He}$ i sl.

Zanimljiva je nuklearna reakcija koja se u prirodi događa djelovanjem neutrona iz kozmičkog zračenja i dušika:



Jezgra ugljik ${}^{14}_6\text{C}$ koja pritom nastaje je β^- – radioaktivan, a njezin poluživot je oko 5 600 godina. U procesu fotosinteze atom ${}^{14}_6\text{C}$ veže se u biljkama i sudjeluje u cirkulaciji tvari u prirodi. Raspadanje ugljika ${}^{14}_6\text{C}$ u živoj tvari uravnoteženo je nastajanjem novoga, i koncentracija ${}^{14}_6\text{C}$ konstantna je s obzirom na ostali ugljik. U trenutku smrti organizma proces dopunjavanja cirkulacijom tvari u prirodi se prekida i koncentracija ${}^{14}_6\text{C}$ u običnom ugljiku počne se smanjivati po zakonu radioaktivnog raspada. Na osnovi mjerenja koncentracije preostalog ${}^{14}_6\text{C}$ u ostacima organizma (u drvetu, kostima), može se odrediti vrijeme njihove smrti.

Zakon očuvanja energije primijenjen na nuklearnu reakciju daje:

$$m_a c^2 + E_{ka} + m_x c^2 + E_{kx} = m_b c^2 + E_{kb} + m_y c^2 + E_{ky} \quad (11.19)$$

gdje su m_x , m_y , m_a i m_b mase mirovanja jezgara i čestica, a E_k njihove kinetičke energije.

Energija koja se oslobodi ili apsorbira u nuklearnoj reakciji

$$Q = (m_x + m_a) c^2 - (m_y + m_b) c^2 = (E_{kb} + E_{ky}) - (E_{ka} + E_{kx}) \quad (11.20)$$

naziva se Q -vrijednost reakcije. Ako je ona pozitivna, reakcije su egzoergične, tj. u njima se oslobađa energija na račun smanjenja mase mirovanja. Ako je Q -vrijednost negativna, reakcija je endoergična i da bi nastala, projektil a mora imati određeni iznos energije, tzv. *energiju praga reakcije*.

Vjerojatnost nuklearne reakcije iskazuje se **udarnim presjekom** σ . Ako je debljina mete Δx , površina S i ako materijal sadrži n jezgara po jedinici volumena, tada je:

$$\sigma = \frac{\Delta N}{nN \Delta x} \quad (11.21)$$

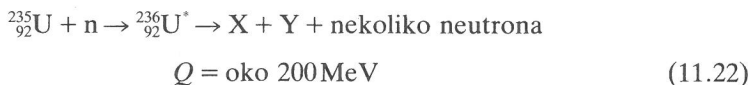
pri čemu je ΔN broj reakcija (odnosno izlaznih čestica b), N broj upadnih čestica koje prođu kroz metu.

Budući da udarni presjek ima dimenziju površine, jedinica je m^{2*} . Udarni presjek zorno možemo predočiti kao površinu koju jezgra X izlaže projektilima, a reakcija se događa kad projektil pogodi tu površinu.

Osim o reakciji, udarni presjek ovisi i o energiji upadne čestice. Tako su udarni presjeci za fisiju nuklida ^{235}U sporim neutronima i do 1000 puta veći nego za neutrone visokih energija.

11.5.1. Fisija

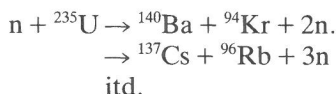
Fisija je proces cijepanja teške jezgre na dva približno jednaka fragmenta, uz oslobađanje energije. U uranu i sličnim jezgrama fisija se najčešće izaziva neutronima: kad neutron uđe u jezgru i veže se za ostale nukleone, oslobođena energija vezanja pobuđuje jezgru iznad one minimalne energije potrebne za fisiju (tzv. *praga fisije*) i jezgra se raspada. Jedan od najpoznatijih takvih procesa je fisija jezgre ^{235}U nakon uhvata sporog neutrona:



gdje su X i Y fragmenti fisije, srednje teške jezgre. Fragmenti u svakoj fisiji ne moraju biti jednaki, ali zbroj masa X i Y mora biti otprilike jednak masi složene jezgre ($^{236}_{92}\text{U}$).

Pri fisiji $^{235}_{92}\text{U}$ najčešće nastaju fragmenti masenog broja 96 i 140.

Neke od mnogobrojnih reakcija fisije ^{235}U jesu:



Prosječni broj fisijskih neutrona ovisi o energiji neutrona koji je uzrokovao fisiju. Za ^{235}U taj broj za *spore* (termičke) neutrone iznosi 2,43. Budući da jedan dio apsorbiranih neutrona ne uzrokuje fisiju, **neutronski se prinos** definira kao broj fisijskih neutrona koji se proizvede po jednome apsorbiranom neutronu. Neutronski prinos manji je, dakle, od prosječnog broja fisijskih neutrona.

Mehanizam nuklearne fisije može se shvatiti usporedbom jezgre s kapljicom tekućine. Nakon apsorpcije neutrona nastaje složena pobuđena jezgra koja titra

* Prijašnjih se godina kao jedinica udarnog presjeka koristio barn, $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$.

oko ravnotežnog položaja produžujući se i skraćujući, slično kapljici tekućine. Ako je uzbuda dovoljno jaka, deformirana se jezgra može prekinuti po sredini i razdvojiti u dvije jezgre.

Energija vezanja po nukleonu najveća je za srednje teške jezgre (oko 8,5 MeV), a za one vrlo teške, kakva je i jezgra urana, zbog elektrostatskog se odbijanja smanjuje i iznosi oko 7,6 MeV. Budući da su fragmenti X i Y (recimo $A = 96$ i 140) vezani sa $E_b/A \approx 8,5$ MeV, a jezgra ^{235}U sa 7,6 MeV, energija oslobođena fisijom bit će jednaka razlici tih energija vezanja:

$$\begin{aligned} E &\approx 8,5 \text{ MeV} \cdot (96 + 140) - 7,6 \text{ MeV} \cdot 236 \\ E &\approx 212 \text{ MeV} \end{aligned}$$

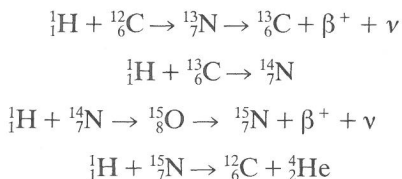
Od te se energije oko 85% oslobodi u obliku kinetičke energije fragmenata, a ostatak kao kinetička energija neutrona, alfa-čestica i beta-čestica, neutrina i gama-zračenja. Pri fisiji 1 kg urana ^{235}U dobiva se oko $8 \cdot 10^{13}$ J (23 GWh) energije.

Pri svakoj fisiji ^{235}U sporim neutronima oslobodi se od 1 do 3 (prosječno 2,5) neutrona, što pokazuje da se ta reakcija u povoljnim uvjetima može nastaviti sama od sebe, kao **lančana reakcija**. Ako, naime, nakon svake fisije prosječno jedan nastali neutron uzrokuje novu fisiju, nastat će proces koji sam sebe održava. To se upravo i događa u nuklearnom reaktoru, u kojemu se kontroliranim lančanom reakcijom oslobađa nuklearna energija. Ako, naprotiv, više od jedan neutron nastao fisijom proizvede nove fisije, broj fisija će se eksponencijalno povećavati, lančana će reakcija biti nekontrolirana i nastat će nuklearna bomba.

Za održavanje lančane reakcije potrebna je **kritična masa goriva**. Ako je masa goriva manja od kritične, mnogo će neutrona proći kroz gorivo i pobjeći van bez izazivanja fisija. Ako je masa veća od kritične, neutroni se brzo umnožavaju, reakcija se zbiva u vrlo kratkome vremenskom intervalu uz oslobađanje vrlo velike količine energije, što ima karakter eksplozije. To je princip nuklearne bombe.

11.5.2. Fuzija

U određenim se uvjetima lake jezgre mogu spojiti u težu, uz oslobađanje energije. Taj se proces zove nuklearna fuzija. Zbog elektrostatskih odbojnih sila jezgre koje sudjeluju u fuziji moraju imati veliku kinetičku energiju da bi svladale kulonsku barijeru i došle u međusobni dodir. Toliko velike kinetičke energije mogu se postići ubrzavanjem u akceleratorima ili zagrijavanjem do visokih temperatura. Upravo je fuzija na Suncu i zvijezdama izvor energije. Evo jednoga od važnih fuzijskih procesa na Suncu:



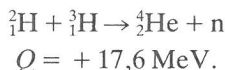
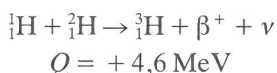
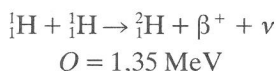
što je ekvivalentno fuziji četiri protona u alfa-česticu, uz oslobađanje 267 MeV

energije. Fuzijom vodika u helij na Suncu se oslobađa snaga od $3,7 \cdot 10^{25}$ W, od čega na Zemlju stiže oko 10^{14} W.

Budući da je za fuziju potrebna visoka temperatura, tako oslobođena energija zove se *termonuklearna energija*. Kontrolirane termonuklearne reakcije vjerojatno će biti važan izvor energije u budućnosti, ali dosada nije riješen problem postizanja visokih temperatura (10^7 K).

Ulažu se golema sredstva i naponi učenjaka da se istraži nuklearna fuzija, pa se čak izvode pokusi nuklearne fuzije pomoću lasera.

Evo nekoliko jednostavnih reakcija fuzije:



Termonuklearno gorivo ${}^1_1\text{H}$ i ${}^2_1\text{H}$ (deuterij) nalazi se u prirodnom vodik u relativno je jeftino. Fuzija manje zagađuje čovjekovu okolinu nego fisija, pa će možda postati jednim od izvora energije budućnosti.

Visoku temperaturu na Zemlji, potrebnu za termonuklearnu reakciju, možemo postići lančanom reakcijom koja se posljedica fisije. To je iskorišteno za hidrogensku bombu (prvi put 1952. god.). Naime eksplozijom atomske bombe kao detonatora nastaju uvjeti (temperatura 10^7 K) za termonuklearnu reakciju.

11.6. Elementarne čestice

Za bolje razumijevanje podjele i svojstava elementarnih čestica najprije pogledajmo osnovne sile koje se pojavljuju u prirodi.

To su:

1. jaka sila (jako međudjelovanje, jaka interakcija),
2. elektromagnetska sila,
3. slaba sila,
4. gravitacijska sila.

To su četiri osnovne sile i sve su ostale sile njihova posljedica. Valja, međutim, naglasiti da je nedavno (1967. godine) dokazano da su elektromagnetska i slaba sila zapravo dvije manifestacije iste sile, tzv. elektroslabe sile. To je otkriće nastavak *Einsteinove ideje o ujedinjenju (unifikaciji)* svih sila u prirodi u jedinstvenu silu.

Jake sile (npr. nuklearna sila između protona i neutrona u jezgri) najjače su sile, ali su kratkog doseg i pojavljuju se među teškim i srednje teškim elementarnim česticama. Elektromagnetske su sile i do sto puta slabije od jakih, a javljaju

se između nabijenih čestica. Slabe su sile do 10^{12} puta slabije od prvih sila, kratkog su dosega i uzrokuju npr. beta-raspad. Specifične su i po tome što narušavaju neke fundamentalne simetrije u prirodi (npr. zrcalnu simetriju). Gravitacijske sile, koje su do 10^{39} puta slabije od prvih dviju sila, u nuklearnoj su fizici zanemarive i mjerljive su samo u makrosvijetu.

Današnja fizika elementarnih čestica razlikuje tri vrste **elementarnih** čestica: **kvarkove**, **leptone** i prijenosnike sila, tzv. **baždarske bozone**, od kojih je najpoznatiji foton, prijenosnik elektromagnetske sile. Sve ostale danas poznate »elementarne« čestice (proton, neutron, pion tj. pi-mezon, lambda, ksi itd.) izgrađene su od kvarkova ili su doista elementarne (elektron, pozitron, neutrino itd.).

Tablica 11.1. Elementarne i sastavljene čestice (m_e – masa elektrona, e – naboj elektrona)

Čestica	Znak	Omjer masa (m/m_e)	Naboj (q/e)	Antičestica
foton	γ	0	0	γ
elektron	e	1	1	e^+
gornji (u-) kvark	u	~ 6	$2/3$	$\bar{u}$
mion	μ	207	1	$\bar{\mu}$
pion	π	273	1	$\bar{\pi}$
kaon	K	966	1	$\bar{K}$
proton	p	1 836	1	$\bar{p}$
neutron	n	1 839	0	$\bar{n}$
lambda	λ	2 183	0	$\bar{\lambda}$

Kvarkovi su najprije teorijski predviđeni a poslije su eksperimentalno dokazani kao elementarne čestice i kao sastavni dijelovi čestica.

Postoji nekoliko vrsta (»okusa«) kvarkova: **u** (»up«), **d** (»down«), **s** (»strange«) itd., pa je proton npr. izgrađen od tri kvarka (uud), pi-mezon π^0 od kombinacije kvark-antikvark ($u\bar{u} + d\bar{d}$), itd.

Leptoni ili lake čestice su elektron i (njegov) neutrino, mion i (njegov) neutrino itd.

Prijenosnici sila u prirodi jesu foton (prenosi elektromagnetsku silu), W-bozon i Z-bozon (za slabu silu), gluoni (od engl. glue = ljepilo – za jaku silu) i graviton (još neotkrivena čestica – gravitacijska sila). Zanimljivo je da su W-bozon i Z-bozon otkriveni relativno nedavno (1983. godine u evropskom centru za nuklearna istraživanja – CERN), da su vođe timova zaslužnih za njihovo otkriće dobili Nobelove nagrade za fiziku (C. Rubia i Van der Meer), a da su te čestice teorijski pretkazane sedamdesetih godina. Na njihovo je otkriće trebalo čekati jer nije bilo dovoljno jakih akceleratora da ih »proizvedu«.

Mi smo se dosada sreli s protonom, neutronom, elektronom, pozitronom, neutrinom i fotonom. Proton i neutron čine jezgru, pozitroni i elektroni se javljaju pri raspadima jezgre ili težih čestica. U akceleratorima visokih energija (reda veličine 1 GeV) proizvedene su još mnoge druge čestice, od kojih su neke navedene u tablici.

Svaka čestica ima svoju antičesticu. Čestica i njezina antičestica uvijek imaju jednaku masu mirovanja i jednak spin, ali suprotan naboj (ako su električki nabijene) i magnetski moment. Antičestice se uglavnom označuju potezom iznad

slova (vidi tablicu 11.1). Neke su čestice (foton, pion itd.) identične svojim antičesticama.

Čestica i antičestica međusobno se »anihiliraju«, tj. pri međudjelovanju čestice i antičestice obje iščezavaju i umjesto njih nastaju druge čestice. Najpoznatija je pretvorba para elektron-pozitron u dva fotona,

$$e^- + e^+ = 2\gamma.$$

Pri toj pretvorbi mora biti zadovoljan zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije. Ako su prije međudjelovanja elektron i pozitron mirovali u laboratorijskom sustavu, ukupna je količina gibanja nula. Prema zakonu očuvanja količine gibanja, zbroj količine gibanja nastalih fotona također mora biti nula. To je ispunjeno samo ako nastanu dva jednaka fotona emitirana u suprotnom smjeru.

Masi mirovanja elektrona odnosno pozitrona odgovara energija $m_0c^2 = 0,511$ MeV, te će, prema zakonu o očuvanju energije, svaki nastali foton imati energiju.

$$E = h\nu = m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}.$$

Čim pozitroni oslobođeni beta-plus-raspadom prođu kroz tvar, zaista se opažaju fotoni energije 0,511 MeV.

Slično međudjeluju i druge čestice sa svojim antičesticama, samo su procesi često složeniji. Tako se proton i antiproton anihiliraju u nekoliko drugih čestica, pri čemu je broj čestica koje nastaju u pojedinim procesima različit:

$$p + \bar{p} = 2\pi + 2\pi + \pi$$

$$p + \bar{p} = 4\pi + 4\pi + \text{nekoliko } \pi$$

itd.

Pri anihilaciji jedan se oblik energije (tvari) (npr. elektron i pozitron) pretvara u drugi (foton).

Proces suprotan anihilaciji je nastajanje para čestica-antičestica. Tako iz fotona blizu neke jezgre može nastati par elektron-pozitron:

$$\gamma + \text{jezgra} = e^+ + e^- + \text{jezgra}.$$

Pritom energija fotona mora biti jednaka ili veća od

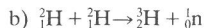
$$2m_0c^2 = 2 \cdot 0,511 \text{ MeV} = 1,02 \text{ MeV}.$$

Da bi zakoni očuvanja bili zadovoljeni, proces se mora dogoditi u polju jezgre, i to je vjerojatniji što je naboj jezgre (redni broj) veći.

Elementarne se čestice stalno istražuju, grade se sve veći akceleratori, pronalaze nove čestice i razjašnjavaju zakonitosti na tom području znanosti. U modernoj se fizici elementarnih čestica došlo do spoznaja koje omogućuju neke odgovore i na najfundamentalnija pitanja o postanku svemira i o kozmologiji, te su tako premoštene goleme razlike između dimenzija mikrosvijeta i veličine svemira.

PITANJA I ZADACI

1. Kako biste izračunali gustoću nuklearne tvari u jezgri?
2. Iz poznate mase vodikova atoma i mase neutrona izračunajte energiju vezanja jezgre ^{12}C . (Masa atoma ^{12}C prema definiciji je točno 12,0 u.)
3. Radioaktivna jezgra ^{60}Co raspada se beta-minus – raspadom i pritom emitira dva gama fotona energije 1,17 MeV i 1,33 MeV. Ako je jezgra prije raspada mirovala, kolika joj je brzina nakon raspada?
4. Zašto se pri emisiji beta-čestica iz jezgre koja miruje jezgra počne gibati u suprotnom smjeru?
5. Nuklid ^{137}Cs ima vrijeme poluraspada 30 godina. Kolika masa tog nuklida ima aktivnost 1 000 Bq?
6. Određeni se nuklid može raspasti na dva načina: dio jezgri emitira pozitrone a drugi dio jezgri zahvaća jedan elektron iz prve staze svog atoma i uvlači ih u jezgru (tzv. K-zahvat). Napišite nuklearnu pretvorbu za oba načina.
7. Izotop ^{40}K nalazi se u prirodnom kaliju (uz stabilni izotop ^{39}K) i ima ga 0,01%. Vrijeme poluraspada ^{40}K je $1,3 \cdot 10^9$ godina. Kolika je aktivnost 1 g kalij-klorida (KCl)?
8. Pri interakciji elektrona i pozitrona nastaju dva gama-fotona. Kolika je energija tih fotona ako su čestice prije interakcije imale zanemaruju brzinu?
9. Slobodni π^0 -mezon raspada se reakcijom $\pi^0 = \gamma + \gamma$. Kolika je energija svakog gama-fotona ako je mezon prije raspada mirovao? (Masa π^0 -mezona je $264 m_e$.)
10. U nuklearnom reaktoru »izgori« 0,04 g ^{235}U za sat. Ako energija oslobođena fisijom jedne jezgre ^{235}U iznosi 200 MeV, kolika je snaga reaktora?
11. U reaktoru s neutronske tokom 10^{16} n/m²s ozračivana je folija ^{59}Co mase 1 g u toku 5 h. Koliko je jezgri ^{60}Co nastalo reakcijom $^{59}\text{Co} + n \rightarrow ^{60}\text{Co}$ ako je udarni presjek za tu reakciju $20 \cdot 10^{-24}$ cm²? Kolika je aktivnost folije nakon vađenja iz reaktora? (Vrijeme poluživota ^{60}Co je 5,26 godina.)
12. Neutroni se često detektiraju tako da se apsorbiraju u jezgrama ^{10}B , pri čemu se oslobađa alfa-čestica koju je relativno lako detektirati. Napišite tu nuklearnu reakciju. Pronađite atomske mase nuklida u literaturi i izračunajte Q-vrijednost te reakcije.
13. K-zahvat nastaje kada jezgra zahvati jedan elektron iz K-ljuske vanjskoga elektronskog omotača; pritom se jedan proton u jezgri pretvara u neutron. Izračunajte atomsku masu radioaktivnog izotopa ^{41}Ca koji se raspada elektronskim zahvatom uz oslobađanje 0,427 MeV energije.
14. Izračunajte Q-vrijednost reakcije $^{12}\text{C}(n, \alpha)^9\text{B}$.
15. Izračunajte Q-vrijednost reakcija



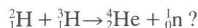
Kolika se energija oslobađa pri dobivanju 1 g tricija odnosno helija u tim reakcijama?

16. Koliko se energije oslobodi pri fuziji triju alfa-čestica u jezgru ^{12}C ?
17. Uz pretpostavku da se na Suncu oslobađa energija fuzijom četiriju protona u alfa-česticu reakcijom



izračunajte kolika se energija oslobodi po 1 kg utrošenog vodika. Ukupna snaga Sunca je $3,7 \cdot 10^{26}$ W. Koliko se vodika svake sekunde na Suncu pretvori u helij?

18. Apsorpcijom sporog neutrona jezgra ^{235}U raspada se na dvije srednje teške jezgre (fisijska fragmenta) i nekoliko neutrona, uz oslobađanje energije. Kolika se energija oslobodi ako pri fisiji jezgra ^{235}U nastanu jezgre ^{139}La i ^{95}Mo i dva neutrona?
19. Ako se pri svakoj fisiji ^{235}U oslobodi energija od 200 MeV, kolika se energija dobije potpunom fisijom 1 kg, a kolika fisijom 1 mola tog izotopa?
20. Koliko bi se kilovatsati energije dobilo pri nastajanju 1 μg helija u nuklearnoj reakciji



Kolika je Q-vrijednost te reakcije?

21. Intenzitet elektromagnetskog zračenja nakon prolaska kroz apsorber debljine d iznosi $I = I_0 e^{-\mu d}$, pri čemu je μ ukupni linearni koeficijent apsorpcije. Kolika je debljina olova ($\mu = 500 \text{ m}^{-1}$) koja 10 puta smanji intenzitet gama-zraka?

Važnije konstante

Brzina svjetlosti u vakuumu	c	299 792 458 m/s
elementarni električni naboj	e	$1,602177 \cdot 10^{-19}$ C
dielektrična konstanta (permitivnost) vakuuma	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,8541878 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilnost vakuuma	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A ²
Newtonova gravitacijska konstanta	G	$6,6726 \cdot 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Planckova konstanta	h	$6,626076 \cdot 10^{-34}$ J s = $= 4,1356692 \cdot 10^{-15}$ eVs
reducirana Planckova konstanta	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,054573 \cdot 10^{-34}$ J s = $= 6,582122 \cdot 10^{-16}$ eVs
Boltzmannova konstanta	$k = \frac{R}{N_A}$	$1,38066 \cdot 10^{-23}$ J/K
plinska konstanta	R	$8,3145$ J mol ⁻¹ K ⁻¹
Avogadrova konstanta	N_A	$6,022137 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
Faradayeva konstanta	F	96485,31 C/mol
molni volumen idealnog plina	V_m	22414,1 cm ³ mol ⁻¹
Loschmidtova konstanta	$N_A/V_m = n_0$	$2,68676 \cdot 10^{25}$ m ⁻³
Stefan-Boltzmannova konstanta	σ	$5,6705 \cdot 10^{-8}$ W m ⁻² K ⁻⁴
Rydbergova konstanta	R_∞	10973731,53 m ⁻¹
Masa elektrona	m_e	$9,109389 \cdot 10^{-31}$ kg = $= 5,485799 \cdot 10^{-4}$ u
omjer mase elektrona i protona	m_e/m_p	$5,44617 \cdot 10^{-4}$
specifični naboj elektrona	$\frac{e}{m_e}$	$1,75882 \cdot 10^{11}$ C/kg
konstanta fine strukture	$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2h}$	$7,297353 \cdot 10^{-3}$
Bohrov radius	r_o	$0,529177 \cdot 10^{-10}$ m
Comptonova valna duljina	$\frac{h}{m_e c} = \lambda_C$	$2,4263 \cdot 10^{-12}$ m
magnetski moment elektrona	μ_e	$928,477 \cdot 10^{-26}$ J/T
Bohrov magneton	$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e}$	$9,274015 \cdot 10^{-24}$ J/T
nuklearni magneton	$\mu_n = \frac{e \hbar}{2m_p}$	$5,050787 \cdot 10^{-27}$ J/T
masa protona	m_p	$1,672623 \cdot 10^{-27}$ kg = $= 1,0072765$ u
omjer mase protona i elektrona	m_p/m_e	1836,153
specifični naboj protona	$\frac{e}{m_p}$	$9,57883 \cdot 10^7$ C/kg
magnetski moment protona	μ_p	$1,41061 \cdot 10^{-26}$ J/T
masa neutrona	m_n	$1,674928 \cdot 10^{-27}$ kg = $= 1,0086649$ u

omjer mase neutrona i protona	$\frac{m_n}{m_p}$	1,001378
magnetski moment neutrona	μ_{nt}	$0,96624 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$
masa deuterona	m_d	$3,343586 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
elektron volt	eV	$1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
atomska jedinica mase	u	$1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
standardna akceleracija sile teže	g_n	$9,80665 \text{ m/s}^2$

Prema E. R. Cohen, B. N. Taylor, Fundamental Physical Constants, Physics Today, August 1987.

LITERATURA

- Alonso, M., E. J. Finn, *Fundamentals of University Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1969.
- Beiser, A., *Modern Technical Physics*, Cummings Publ. Co., 1966.
- Betts, J. E., *Physics for Technology*, Reston Publ. Comp., Reston, 1976.
- The Berkeley Physics Course*, I – V, McGraw Hill, New York, 1973.
- Bergmann-Schaeffer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, WdeG, Berlin, 1974
- Bergmann-Schaeffer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 3 Optik, Siebente Auflage, Walter de Gruyter, Berlin 1993.
- Bergman, L., Schaefer, C., *Lehrbuch der Experimentalphysik* 4. Bestandteile der Materie, Gruyter, Walter de, GmbH, Berlin, 2003.
- Bormann, M., *Experimentalphysik* Bd. 3 Optik, Atomphysik, 5. Auflage, Studienverlag Dr. N. Brockmeyer, Bochum 1983.
- Born, M., E., Wolf, *Principles of Optics*, Fourth Edition, Pergamon Press, 1970.
- Bosanac, T., *Teoretska elektrotehnika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- Božin, S., i dr., *Fizika*, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 1972.
- Bueche, F., *Introduction to Physics for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
- Burns, D. M., S. G. G. MacDonald, *Physics for Biology and Pre-Medical Students*, Addison-Wesley Publ., London, 1975.
- Cindro, N., *Fizika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- Cindro, N., *Fizika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- Dobrinski, P., G. Krakau, A. Vogel, *Physik für Ingenieure*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1970.
- Dransfeld, K., et al., *Physik I* Oldenburg, München, 1974.
- Freier, G. D., *University Physics*, Meredith Publ. Comp., New York, 1965.
- Friš, S. E., A. V. Timorjeva, *Kurs opšte fizike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1969.
- Furić, M., *Moderne eksperimentalne metode i tehnike mjerenja u fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
- Grimshl, G., *Lehrbuch der Physik II*, Teubner, Leipzig, 1963.
- Gartenhaus, S., *Physics, Basic principle*, Holt, Rienhart and Wiston, New York, 1977.
- Halliday, D., Resnick, R., *Fundamentals of Physics*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.
- Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., *Fundamentals of Physics*, extended, sixth edition, J. Wiley and Sons, Inc., USA, 2001.
- Hondl, S., *Fizika*, Treće izdanje, Naklada školskih knjiga, Zagreb, 1940.
- Horvat, D., *Fizika – odabrana poglavlja*, Hinus, Zagreb, 1999.

- Kaminski, Z., R.A. Gilas, *Physics*, London Ilife Books Ltd., 1968.
- Körner, W., et. al., *Physik-Fundament der Technik*, VEB Fachbuch Verlag, Leipzig, 1973.
- Kuchling, H., *Physik*, Buch und Zeit Verlags, Köln, 1972.
- Kulišić, P., Lopac, V., *Elektromagnetske pojave i struktura tvari*, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2003.
- Kunze, H. J., *Physikalische Messmethoden*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- Landsberg, G. S., *Optika* (s ruskog preveo D. Popović), Naučna knjiga, Beograd, 1967.
- Lindner, H., *Physik für Ingenieure*, Vieweg, Braunschweig, 1973.
- Lopašić, V., *Predavanja iz fizike*, Sveučilište u Zagrebu, 1966.
- Lopašić, V., V. Henč-Bartolić, *Predavanja iz fizike*, IV dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1986.
- Lopašić, V., *Predavanja iz fizike*, III dio, Sveučilište u Zagrebu, 1962.
- Marković, B., A. Peršin, *Plinski zakoni*, Elektrotehnika, 2 (82–96) 1965.
- Melissionos, A. C., F. Lobkowicz, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders Comp., Philadelphia, 1975.
- Michels, W. C. Et al., *Foundations of Physics*, D. Van Nostrand Comp. Inc., Princeton, 1968.
- Milojević, A. B., *Talasna optika*, Beograd, 1971.
- Morgan, J., *Introduction to University Physics*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1969.
- Newton, I., *Optics*, Dover Publications, Inc. 1952.
- Paić, M., *Osnove fizike IV. Dio*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1983.
- Petković, T., *Eksperimentalna fizika i spoznajna teorija*, u tisku, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- Picek, I., *Fizika elementarnih čestica*, Hinus, Zagreb, 1997.
- Platiša, M., *Kurs opšte fizike, Elektromagnetizam i elementi atomske fizike*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
- Pohl, R. W., *Optik und Atomphysik*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- Recknagel, A., *Physik*, VEB Verlag, Berlin, 1957.
- Resnik, R., *Basic Concept in Relativity and Early Quantum Theory*, J. Wiley and Sons, New York, 1972.
- Savelev, I. V., *Physics, A general Course*, Mir Publisher, Moscow, 1977.
- Sears, F. W., M.W. Zemansky, *University Physics*, Addison-Weseley Publ. Co., Reading, Mass, London, 1967.
- Stuart, H. A., G. Klages, *Kurzes Lehrbuch der Physik*, Springer Verlag, Berlin, 1979.
- Tarasov, L. V., *Laser Age in Optics* (Translated from the Russian by V. Kisin) Mir Publisher, Moscow, 1984.
- Vučić, V., D. Ivanović, *Fizika*, Naučna knjiga, Beograd, 1962.
- Weidner, R. T. And R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1967.

Kazalo

- Adijabat ki proce i, 83, 112
 - i brzina zvuka, 83, 112
 - koeficijent stlačivosti plina, 12
- akromat, 233, 235
- akceleracija pri harmoničkom titranju, 15
- akceleracija sile teže, mjerenje reverzionim njiham, 32
- aktivnost uzorka, 462, 463
- alfa-čestice, 401
- alfa-raspad, 460
- Amicijeva prizma, 236, 339
- Ampèreov zakon, 144
 - poopćeni, 146
- amplituda titranja, 16
 - matematičkog njihala, 26
 - prisilnog oscilatora, 49
 - sfernog vala, 85
- amplituda tlaka, 11
- amplituda vala,
 - pri refleksiji, 99
 - pri transmisiji, 99
- amplituda vjerojatnosti 129
- amplituda zvučnog vala
 - i prag čujnosti, 121
- anihilacija 469
- anizotropnost, 3
- antičestice, 468
- antineutrino, 460
- antiproton, 469
- aperiodično titranje, 43
- apsorpcija svjetlosti, 189, 191, 308, 408
 - i indeks loma sredstva, 192, 311
 - i anomalna disperzija, 192
 - koeficijent apsorpcije, 308, 311
- Arago, D. F. i ogib svjetlosti, 245
- Aragoov pokus, 142
 - i vrtnja ravnine polarizacije, 303, 334
 - i induciranje vrtložnih struja, 142
- atom
 - kao magnetski dipol, 437
 - i moment količine gibanja, 408, 432, 440
 - struktura, 397
 - u nehomogenom magnetskom polju, 438
- atomska jedinica mase, 457
- atomska jezgra, 457
- atomske modeli, 390
 - Bohrov, 404, 408
 - Rutherfordov, 402, 404
 - Sommerfeldov eliptični, 409
 - Thomsonov, 400
 - valno-mehanički (Schrödingerov), 431
- Barn, 402, 465
- Balmer, Johan, 397
- Balmerova formula, 397, 412
- Balmerova spektralna serija, 397
- baždarski bozoni, 468
- beta čestice, 461
- beta raspad, 461
- bekerel, 462
- bijelo tijelo, 347
- Bohr, Niels, 404
- Bohrov atomski model, 404, 408
- Bohrov magneton, 435
- Bohrov radius atoma, 409
- Bohrovi postulati, 408
- boja
 - svjetlosti, 334
 - tona, 107
- boje
 - primarne, 336, 338
 - trikromatski koeficijenti, 337
- bolometar, 321, 322
- Boltzman, Ludvig, 351
- bozoni 437
 - baždarski bozoni, 468
- Bracketova serija, 399
- Bragg
 - zakon difrakcije rendgenskog zračenja, 420, 421, 425
 - i ravnine u kristalnoj rešetci, 420
- bremstrahlung, 417
- Brewsterov kut, 197
 - i polarizacija em. valova, 197
- Brewsterov zakon polarizacije, 288
- Brinellov broj, 13
- de Broglie Louis, 423
- de Broglievi valovi, 424
- de Broglieva relacija, 423

- valna duljina, 423
- eksperimentalna potvrda, 425
- brzina
 - elektromagnetskih valova, 180
 - elektrona u atomu, 409
 - pri harmoničkom titranju, 15
- brzina svjetlosti, 180, 280, 285
 - astronomska metoda određivanja, 282
 - po Michelsonu, 284
 - pomoću lasera, 285
 - u vodi i CS_2 , 285
- brzina valova, 78, 81
 - longitudinalnih, 80, 82, 109
 - transverzalnih, 82, 89
 - fazna, 84, 113, 193
 - grupna brzina, 193, 286
 - zvučnih v., 83
- brzina zvuka, 112, 113
 - u plinovima, 83, 112, 113, 116
 - u tekućinama, 113

Cauchyeva formula, indeks loma, 189
 cirkulacija vektora, 143
 Compton, A. H., 369
 Comptonov efekt, 369
 crno tijelo, 347
 Crookesova cijev, 385
 Curie Pierre i Jacques, 124

Čvor stojnog vala, 102

Davisson, 425
 Davisson-Germerov eksperiment, 425
 defekt mase, 458
 decibel, 121
 deformacija čvrstog tijela, 3

- linearna, 5
- tlačna i vlačna, 5
- elastična, 5
- kutna, 9
- plastična, 5
- rezidualna, 5

degenerirana stanja, 444
 dielektričnost, 310

- vode
- i brzina elektromagnetskih valova, 181, 285
- i indeks loma, 188

diferencijalna jednadžba
 harmoničkog oscilatora, 18
 nehomogena, 50
 stacionarno rješenje, 51
 vala, 89

difrakcija rendgenskog zračenja, 420
 difrakcija elektrona, 425
 difuzno svijetljenje, 330

dioptrija, 228
 dipolni moment, 309
 Dirac, Paul, 440
 disperzija svjetlosti, 192, 194, 233

- anomalna disperzija, 192

diskretne valne duljine, 106
 diskretni energijski nivoi u atomu, 405
 divergencija vektora, 152
 D-linija, 234
 Doppler, Ch., 126
 Dopplerov efekt, 126

- za elektromagnetske valove, 128

duga, 237

- kut devijacije primarne i sekundarne duge, 242

dvolom svjetlosti, 289

- redovna zraka, 289
- izvanredna zraka, 289
- jednoosni kristali, 290
- dvoosni kristali, 290

dvolomni kristali, 289

Einstein, A., 366

- i fotoelektrični efekt, 366
- i stimulirana emisija, 451

ekstraterestičko zračenje, 352
 elastična sila, 2, 7, 14
 elastična deformacija, 5

- i električna polarizacija, 124

elastičnost materijala, 3
 elastooptika, 300
 električna lučnica kao izvor svjetlosti, 327
 električna polarizacija, 190
 električna susceptibilnost,

- i indeks loma, 188

električna vodljivost plinova, 372
 električni dipol, 309
 električni titrajni krug, 159, 173

- frekvencija, 161
- otvoreni titrajni krug, 173
- Thomsonova formula, 161

električni izboj u zraku, 372
 u razrijeđenom plinu, 381
 električni proboj, 381
 elektromagnetsko polje dipola, 173

- elektromagnetski val dipola, 175

elektromagnetska indukcija, 137
 elektromagnetska sila, 148

- inducirana elektromotorna sila, 136

elektromagnetski valovi, 173, 317

- brzina, 180
- energija, 185
- nastajanje, 173
- lom, 187
- refleksija, 187

- elektromagnetski titraciji, 160, 170
 - prigušeni, 162
 - prisilni, 165
- elektromagnetski spektar, 176, 319
- elektron,
 - masa, 395
 - Millicanov pokus, 393
 - naboj elektrona, 395
 - orbitalni moment elektrona u atomu, 399
 - specifični naboj, 391, 393
- elektron u atomu
 - brzina, 409
 - energija, 408, 410
 - energija vezanja, 402
 - magnetski moment elektrona, 435
 - spin, 437
- elementarne čestice, 467
- eliptički model, 409
- elongacija, 14, 84
- emisija svjetlosti, 408
- emisiona moć, 348
- energija
 - električnog polja, 155
 - elektrona u atomu, 408, 410
 - ionizacije, 410
 - magnetskog polja, 157
 - mehaničkih valova, 118
 - praga reakcije, 464
 - titranja, 34
- energija elektromagnetskog vala, 185
- energija vezanja elektrona, 408
- energija vezanja po nukleonu, 458
- energijska egzitancija, 348
- energijska stanja atoma, 403, 411
- energijski tok, 119, 348
- Eulerova relacija, 18

- Faktor apsorpcije, 347
- faktor dobrote (kvalitete), 42
- faktor emisije, 349
- faktor, prigušenja, 41, 42
 - refleksije, 192, 347
 - transmisije, 192
- Faraday, M., 137, 304
- Faradayev efekt, 304
 - magnetsko polje i svjetlost, 306
- Faradayev zakon indukcije, 137, 139
- Faradayevo staklo, 304
- faza vala,
 - promjena faze pri refleksiji, 100
 - i halogram, 276, 277
- fazna brzina, 78, 84, 90, 95, 180
 - elektromagnetskih valova, 180
- fazna i grupna brzina, 18, 193, 430

- fazor, 34
- fermioni, 437
- Fermatov princip, 199
 - i zakon refleksije, loma, 199
- fina struktura spektralnih linija, 413, 437
- Fizeau, H., 282
- fisija, 459, 465
- fisijski neutroni, 465
- fizikalno njihalo, 29
 - reducirana duljina, 29
 - središte titranja, 29
- Focaaltove vrtložne struje, 142
 - i određivanje brzine svjetlosti, 282
- Fourier, J. B. J., 246
- fon, 122
- foton, 369
- fotoelektrični efekt, 364, 366
 - Einsteinovo tumačenje, 366
 - fotostruja, 365
 - granična frekvencija, 367, 364
 - napon zaustavljanja, 366
 - nelinearna optika, 313
 - višekvantni fotoefekt, 316
- fotometri
 - Ulbrichtov, 328
- fotometrija, 321
 - plošnih izvora svjetlosti, 328
 - luminancija, 329
 - svijetljenje, 330
 - točkastog izvora svjetlosti, 325
- fotostruja, 365
- Fourierov red, 65, 66, 107
- Fourierova analiza valnog gibanja, 95, 96
- Fourierovi koeficijenti, 65
- Franck, J., 413
- Franck-Herzov pokus, 413
- Fraunhofer, 268
 - linije, 237
 - optička rešetka, 269
- frekvencija, 1, 15
 - kružna, 15, 18
 - osnovna, 65, 107
 - prigušenog titranja, 41
 - rezonantna, 49
 - udara, 59
 - vlastita, 41, 107
- Fresnel, Augustin, 195
 - dvolom, 291
 - biprizma, 249
- Fresnelove jednadžbe, 195
- fuzija, 459, 466

- Gabor, Denis, 276
- Gaborova metoda za snimanje holograma, 276
- Galileo, Galilei, 280

gama raspad, 462
 gama zračenje, 462
 Gaussov zakon
 – za električno polje, 134
 – za magnetsko polje, 136
 i prva Maxwellova jednačba, 134
 geometrijska optika, 198
 Gerbach, N., 438
 Germer, 425
 giromagnetski omjer, 435, 441
 glavni kvantni broj, 408, 432, 448
 glasnoća zvuka, 122, 128
 gluon, 468
 Goudsmit, S., 438
 gradijent tlaka, 110
 granica elastičnosti, 5, 6
 – linearnosti, 5
 granična frekvencija fotoefekta, 364
 granična napetost, 6
 granična valna duljina zakona zračenja, 417
 grupna brzina, 78, 95
 gustoća energijskog toka, 119, 348
 gustoća energije vala 1, 118
 gustoća energije zračenja, 355
 gustoća naseljenosti energijskog stanja, 452
 gustoća svjetlosnog toka, 327
 gustoća struje, 378
 gustoća struje zasićenja, 378
 gustoća vjerojatnosti, 428

Harmonički val, 85
 – ravni, 177
 harmoničko titranje, 1, 13
 Hertz, Heinrich, G., 174, 413
 Hertzov oscilator, 174
 hidrogenska bomba, 467
 holografija, 275
 – izvanosna, 276
 Hooke, R., 6
 Hookeov zakon, 6, 11, 82, 109
 Hundtovo pravilo, 449
 Huygens, Christian, 93, 245
 i valna priroda svjetlosti, 245
 i dvolom, 290
 Huygensov princip, 93, 271
 herotar, (polaroid), 293

Indeks loma svjetlosti, 189, 191, 199, 310
 i frekvencija svjetlosti, 187
 i prozirne tvari, 199
 i susceptibilnost, 190, 310
 i vlastita frekvencija elektrona, 191
 infracrveno zračenje, 317, 346
 infrazvuk, 108

inducirana elektromotorna sila, 139
 smjer (Lenzovo pravilo), 134, 142
 inducirano električno polje, 141
 infracrveno zračenje, 346
 interferencija, 63, 91
 – destruktivna, 63, 91, 92
 – konstruktivna, 63, 91, 92
 – svjetlosti, 246
 – valova iz dva izvora, 91
 inverzni piezoelektrični efekt, 124
 ionizacija u plinu, 372, 376
 – koeficijent rekombinacije iona, 377
 – pokretljivost iona, 378
 – vođenje elektriciteta, 372
 intenzitet, vala, 119
 – zračenja, 348
 interferencija, elektrona, 427
 – svjetlosti, 246
 – Pohllov pokus, 253
 – na tankim listićima, 256
 inverzija gustoće naseljenosti, 452
 izlazni rad, 347, 364
 izobari, 457
 izotermna šupljina, 347
 izotopi, 457
 izotropnost, 3
 izvor svjetlosti, 325
 – plošni, 328, 341
 – točkasti, 325, 341

Jakost zvuka, 120, 121
 Jeans, J., 353
 Jeans-Rayleighova formula, 355
 jednačba fizičkog njihala, 29
 jednačba gibanja prisilnog oscilatora, 48
 jednačba harmoničkog titranja, 14
 jednačba stojnog vala, 102
 jednačba sfernog vala, 185
 jednoosni kristali, 290
 jednostavno harmoničko titranje, 1, 13
 jezgra atoma, 457
 – radius, 458
 j-j vezanje, 441

Kalcit
 – jednoosni kristal islandski, dvolomac, 289
 kanalne zrake, 384
 kandela, 333
 karakteristični spektar rendgenskog zračenja, 418
 – Moseleyev zakon, 419
 K α -linija, 418
 K-serija rendgenskog zračenja, 418
 katodne i kanalne zrake, 384, 385
 Keer, J., 306
 Keerov efekt, 306

- Kirchoffov zakon, 349
 kiri, 462
 klasični polumjer vodikova atoma, 409
 Klemenčić, J., 288
 koeficijent stlačivosti, 13, 82, 83
 koherentna duljina, 251
 koherentnost izvora svjetlosti, 252
 – uvjeti koherencije, 251
 kolorimetrija, 339
 komplementarna svjetlost, 334
 konstanta opruge, 2
 konstanta raspada, 462
 korpuskularna priroda zračenja, 346
 kristalna rešetka, 420
 kritična masa, 466
 kritično gušenje, 44
 kromatska aberacija kod leća, 232
 kružna frekvencija, 15
 kuglasti val, 119
 kut torzije, 11
 kutna deformacija, 9
 Kundt, August, 115
 Kundtova cijev, 115
 kvant, 346, 351
 kvantizacija, 357
 kvantizirane staze, 408
 kvantizirani energijski nivoi, 414
 kvantna fizika, 356, 415
 kvantna teorija svjetlosti, 368
 kvantna stanja elektrona u atomu, 408
 kvantni broj, 431
 – glavni, 408, 432, 448
 – orbitalni, 432, 448
 – magnetski, 436, 448
 – spina, 437, 448
 kvantni oscilator, 358
 kvarc, 291, 315
 i vrtnja ravnine polarizacije, 302
 kvarkovi, 468
- Lambert, J.H., 327
 Lambertov kosinusni zakon za osvijetljenje, 327
 Lande faktor, 441
 lančana reakcija, 466
 laseri, 450
 – He-Ne laser, 453
 – molekularni, 453
 – rubinski, 450
 i holografija, 276, 455
 – modulacija snopa pomoću polaroida, 296
 – kao točkasti izvor svjetlosti, 325
 leća,
 – jakost, 228
 – lom svjetlosti, 226
 – pogreške, 231, 232
 – povećanje, 231
 – tanka, 226, 231
 Leith, 276
 Lenz, E.H., 139
 Lenzovo pravilo, 139, 142
 Leonardo da Vinci, 245
 leptoni, 468
 linearno polarizirana svjetlost, 287, 289, 296
 linijski spektar, 397
 – vodika, 397, 412
 – živinih para, 398
 Lissajous, J.A., 70
 Lissajousove krivulje, 70
 lokalizirane pruge interferencije, 257
 lom elektromagnetskih valova, 187
 lom svjetlosti, 199, 202
 i granični kut loma, 210
 – kroz planparalelnu ploču, 214
 – kroz prizmu, 215
 – na sfernoj granici sredstava, 220
 – Newtonov oblik zakona loma na sfernoj granici, 225
 lomni kut prizme, 215
 logaritamski dekrement titranja, 42
 longitudinalni val, 108
 – brzina, 109, 110
 – u plinu, 111
 – u štapu, 108
 – u tekućini, 108
 Lorentzova sila, 148
 luks, 333
 lumen, 333
 – fotometrijski ekvivalent, 343, 344, 345
 luminancija, 329, 333, 339, 344, 345
 – jedinica nit, 333
- Maiman, T.H., 450
 i svjetlosni oscilator, laser, 450
 magnetostrikcija, 124
 magnetski dipol, 437
 magnetski kvantni broj elektrona, 436
 magnetski moment elektrona u atomu, 435
 Malus, 289
 Malusov zakon, 289, 294
 – polarizacija svjetlosti, 289, 294
 Marsden, 394
 maser, 449, 450
 matematičko njihalo, 25
 Maxwell, J.C., 132
 i osjet vida, 336
 Maxwell-Boltzmannova statistika, 358
 Maxwellove jednačbe, 150, 155
 – jednačbe u diferencijalnom obliku, 150
 – jednačbe u integralnom obliku, 147
 – 1. jedn., osnovni zakon elektrostatičke, 135

- 2. jednadžba, 137
- 3. jednadžba, Faradayev zakon indukcije,
- 4. jednadžba, Gaussov zakon za magnetsko polje, 146
- Meissner, 450
- metar, 285
 - i određivanje brzine svjetlosti, 285
 - Michelsonov interferometar, 259
 - metoda rotirajućeg zrcala za određivanje c , 284
- Millikan, R. A., 366, 393
- Millikanov pokus, 393
- modul, elastičnosti, 7, 12
 - kompresije, 7
 - smicanja, 9
 - torzije, 11
- moment količine gibanja, 408, 432, 440
- Moseley, G. Y., 419
- Moseleyev zakon, 419
 - karakteristični spektar X-zračenja, 419
- Naboj elektrona, 395
 - određivanje, 393
- napetost (naprezanje), 3
 - kidanja, 6
 - okomita i tangencijalna, 4
 - smicanja, 8
- naprezanje, 3
 - tlačno i vlačno, 5
- neelastični sudari
 - prvog reda, 379
 - drugog reda, 379, 453
 - i He-Ne laser, 453
- nekoherentna svjetlost, 447
- nelinearna optika, 313
- nesamostalni električni izboj, 376
- nelokalizirane pruge interferencije, 251, 256
- neutrino, 460
- neutroni, 454, 462
 - fisijski, 465
 - spori, 465
- neutronske prinos, 465
- Newton, I., 233
 - i disperzija svjetlosti, 3
 - i duga, 237
 - i teorija boja, 335
- Newtonova stakla, 257
 - i lokalizirane pruge interferencije, 257
- Newtonovi kolobari, 258
- Nicol, 292
 - i polarizatori, 292
- Nicolova prizma, 292
- nit, 333
- nivo buke, 121
- nuklearna energija, 459, 466
 - nuklearna potencijalna energija, 460
 - nuklearna bomba, 466
 - nuklearne reakcije, 464
 - nuklearne sile, 460
 - nuklearni magneton, 457
 - nuklearni reaktor, 466
 - nuklid, 457
- Njihalo
 - matematičko, 25
 - fizikalno, 29
 - reverziona, 32
 - Oberbeckovo, 56
 - torziona, 33
- Oberbeckovo njihalo, 56
- ogib, 93
- ogib elektrona, 425
- ogib rendgenskog zračenja, 420
- ogib svjetlosti na pukotini, 261
 - Fresnelov ogib, 261
 - Fraunhoferov ogib na pukotini, 261
 - na dvije pukotine, 265
- ogib valova na pukotini, 93
 - svjetlosti, 260
- oko, 335
 - danje gledanje, 325, 335
 - krivulja osjetljivosti, 325
 - noćno gledanje, 325, 335
 - osjetljivost oka, 324, 344
 - spektralna osjetljivost (Judd), 336
- optička prizma, 215
 - devijacija upadne zrake, 215
 - indeks loma, 219
 - lomni kut, 215
 - ukupna devijacija, 215
- optička razlika u hodu, 255, 256
- optička rešetka, 267
 - Fraunhoferova, 268
 - Rowlandova, 269
 - moć razlučivanja, 274
 - i spektralna analiza, 270
- optički aktivne tvari, 303
- optički izotropni kristali, 290
 - i polarizacija, 290
- optički put svjetlosnog vala, 201
- optičko pumpanje i laser, 453
- orbitalni kvantni broj elektrona, 432
- orbitalni moment elektrona, 408, 432, 440
- oscilacije tlaka, 111
- oscilatori, vezani, 56
- osjet vida, 335, 336
 - i fotometrijski ekvivalent, 344, 345
- osvijetljenost, 327

- Paschenova serija, 399
 Pauli, W., 448
 Pauliev princip isključenja, 448
 period titranja, 1
 periodična funkcija, 64
 periodni sistem elemenata, 448
 Pfundova serija, 399
 piezoelektrični efekt, 124
 i ultrazvuk, 124, 274
 i ultrazvučna rešetka za ogib, 274
 pilasta krivulja, 66
 piroelektrični detektori, 322
 pirometri, 361
 Planck, M., 357
 Planckov zakon toplinskog zračenja, 359, 360
 Planckova konstanta, 357, 416
 i princip korespondencije, 411
 Planckov oscilator, 358
 ploha svijetljenja, 327
 pobuđeno stanje jezgre, 462
 Pohlov pokus, 253
 Poissonov broj, 7, 9, 12
 i smicanje, 10, 11
 Poissonova svijetla mrlja, 246
 polarizacija svjetlosti, 286
 prolazom kroz kristale, 289
 refleksijom, 286
 – linearno polarizirani val, 289
 – Tindalov efekt, 311
 polarizatori, 292
 polarizacija elektromagnetskog vala, 197
 i Brewsterov kut, 288
 polaroid, 293
 poluvodički laseri, 454
 i primjena, 456
 poluživot, 463
 pomak, 14
 poprečna kontrakcija, 7
 poremećaj (puls), 77
 Porro-sustav prizmi, 212
 pozitron, 461
 Poyntingov vektor, 185, 186, 249
 prigušeno titranje, 40
 prag čujnosti, 121
 prag fisijske, 465
 princip korespondencije klasične i kvantne fizike, 411
 prirodna radioaktivnost, 460
 prisilno titranje, 48
 prizma, 215
 – Amicijeva, 236
 – devijacija zrake svjetlosti, 215-219
 – disperzija svjetlosti, 233
 – određivanje indeksa loma, 219
 prekidna čvrstoća, 6
 prekidno rastezanje, 6
 probojni napon, 381
 prostorna kvantizacija, 444
 proton, 457
 provodna struja, 146
 puls, valni paket, 77
 Q-faktor, 42
 Q-vrijednost reakcije, 464
 Radioaktivni nuklidi, 460
 rad, izlaza, 364, 367
 radioaktivnost, 460
 radiometar, 261
 rastezanje, dijagram, 5
 ravni val, 79
 ravnina polarizacije, 288
 – vrtnja ravnine polarizacije, 302, 306
 raspršenje rendgenskog zračenja, 370
 raspršenje alfa čestica, 402
 rasvjeta, (osvijetljenost), 327
 – lux, 333
 razina buke, 121
 razdioba svjetlosne jakosti, 339
 Rayleigh, 312
 i raspršenje svjetlosti, 312
 reducirana duljina fizikalnog njihala, 29
 refleksija elektromagnetskih valova, 187
 refleksija valova, 98
 relativni indeks loma svjetlosti, 189
 relativistička kvantna mehanika, 440
 rekombinacija iona i
 vođenje struje u plinovima, 376
 rendgenska cijev, 417
 rendgenski spektar, 417
 – karakteristični, 417, 418
 – kontinuirani, 417
 – linijski, 417
 rendgensko zračenje, 416
 restituciona konstanta, 2
 reverziona njihala, 32
 rezonancija, 51, 168
 naponska (serijska), 167
 strujna (paralelna), 169
 rotacija vektora, 154
 rotirajući vektor, 34
 Römer, Olaf, 281
 Rontgen, Wilhelm Conrad, 416
 Rubens, H., 322
 rubni uvjeti, 105
 Russel-Sandersovo (L-S) vezanje, 440
 Rutherford, Ernest, 401
 Rutherfordov atomski model, 402, 404
 Rutherfordovo raspršenje, 402
 Rydbergova konstanta, 397, 412

- Samostalni električni izboj, 379
- serijski spoj opruga, 17
- sferna aberacija leće, 231
- sferna granica optičkih sredstava,
 - i lom svjetlosti, 220
- sferni val, 79
- sferno zrcalo, 204
 - jednadžba, 207
 - Newtonov oblik jednadžbe, 208
 - povećanje, 209
- sila opruge, 7
- sile, osnovne u prirodi, 467
- sivo tijelo, 336, 347
- skok u fazi, 100
- slobodni elektron, 411
- smicanje, 8
 - modul, 9
- snaga vala, 119, 120
- snaga zračenja, 321, 322, 340, 341
- solarna konstanta, 352
- Snellov zakon, 184, 199
 - i granični upadni kut, 210
 - dvolom, 289
- Soleil, N., 303
 - zakretanje ravnine polarizacije, 303
- Soleilejeva pločica (kvarca), 303, 304
- Sommerfeld-Wilsonov eliptični atomski model, 400
- specifični naboj elektrona, 386, 391, 393
- spektar elektromagnetskih valova, 176, 319
- spektar Sunčevog zračenja, 352
- spektar svjetlosti, 397
 - diskretni, 397
 - kontinuirani, 397
 - vodika, 398
- spektar rendgenskog zračenja, 416
- spektar titranja, 66
- spektar frekvencija, 108
- spektar zračenja crnog tijela, 350
- spektralna analiza periodične funkcije, 66
- spektralna gustoća zračenja crnog tijela, 348, 354, 357
- spektroskop, 236
- spin atoma, 448
- spin elektrona, 437, 439
- spinski moment količine gibanja, 427
- spinski kvantni broj, 437
- središte titranja, 30
- srednje vrijeme života, 463
- Starkov efekt, 444
- Stefan, J., 301
- Stefan-Boltzmannov zakon, zračenja, 351, 360
- Stefan-Boltzmannova konstanta, 351
- Stern-Gerlachov pokus, 437
- stigmatična slika, 205
- stimulirana emisija zračenja, 452
- stlačivost, (kompresibilnost), 7
- stojni val, 100
 - longitudinalni, 115
 - na žici, 105
 - transferzalni, 100
 - u svirali, 116
- struja pomaka, 144
- struktura atoma, 397
- Sunčev spektar, 352
- superpozicija valova, 90
- susceptibilnost
 - električna, 188, 310
 - magnetska, 188
- svijetljenje, 330
 - jedinica, 334
- svirala, 116
- svjetlost,
 - kao elektromagnetski val, 287
 - disperzija, 233
 - lom, 199, 202
 - određivanje brzine u vodi, 285
 - polarizacija, 286
 - refleksija, 199
- svjetlosna zraka, 198
- svjetlosni tok, 326, 328, 330, 333
 - gustoća svjetlosnog toka, 327
- Šara
 - aditivno miješanjem spektralnih boja, 338
- šiljak
 - i tiho električno pražnjenje, 375
- Tenzor, 4
- termionska emisija elektrona, 392
- termoelektrični stup, 321, 340
 - i mjerenje snage zračenja, 321, 322
- termonuklearna reakcija, 467
- Thompson, J. J., 400
 - Thomsonov atomski model, 400
 - određivanje omjera e/m , 386
 - odklon katodnih raka u el. i mag. polju, 387, 389
- Thompson, G. P., 425
- Thomsonova formula, 161, 168, 170
- Thomsonov eksperiment (ogib elektrona), 425
- tiho električno pražnjenje, 375
- Tindalova pojava, 311
- titranje, 1
 - eliptički polarizirano, 78
 - faza titranja, 1
 - frekvencija, 1
 - harmoničko, 1
 - neharmoničko, 59

- prigušeno, 40
- prisilno, 48
- protufazno, 58
- u fazi, 58
- titrajni krug, 159, 173
- točkasti izvor svjetlosti,
 - i fotometrijski ekvivalent, 343
 - i funkcija razdiobe svjetlosne jakosti, 339
- tok električnog polja točkastog naboja, 132, 134
- tok magnetskog polja, 135, 136
- tok svjetlosti, v. svjetlosni tok, 323, 326, 328, 333, 339, 344
- toplinsko zračenje tijela, 346
- torzija, 8
 - torziona konstanta, 33
 - štapa, 10
- torziona njihalo, 33
- totalna refleksija, 210
- transverzalni poremećaj, 80
- transverzalni valovi, 75
 - svjetlosti, 287
- trbuh stojnog vala, 102
- trenje, 40
 - faktor, 40
- trikromatski koeficijent, 337
- tvrdoća materijala, 13

Udari, 59, 64, 129

udarni presjek, 402, 465

- diferencijalni, 404

uhvat elektrona, 461

ukupni moment količine gibanja atoma, 440

ukupni spin atoma, 440

Ulbrichtov integralni fotometar, 328

ultrakratki elektromagnetski valovi, 172, 317

- i polarizacija, 317

ultraljubičasta katastrofa, 355

ultrazvuk, 108, 124

- primjena, 124

ultrazvučna rešetka, 274

Uhlenbeck, G., 438

unificirana masena konstanta, 457

univerzalna plinska konstanta, 112

unutrašnja konverzija, 462

Uptanicks, 276

Val, 75

- brzina vala, 78
- harmonički, 77
- kuglasti, 79
- longitudinalni, 75, 76
- mehanički, 75
- neharmonički, 77
- progresivni, 76
- ravni, 79

- stojni, 76
- transverzalni, 77
- valna, duljina, 77, 248
 - elektrona, 423, 425
- valna fronta, 79
- valna funkcija, 429
- valna jednadžba, 89
 - za tlak, 111
- valna jednadžba za elektromagnetske valove, 176, 179
- valna priroda čestica, 423
 - Huygensova teorija, 281
- valna zraka, 79
- valni broj, 79, 85
- valni paket, 7, 96
- valnomehanički model atoma, 409
- veber, 136
- vektorski model atoma, 437
- Verdetova konstanta, 306
- vezani elektron, 411
- vezani oscilatori, 56
- vidljiva svjetlost, 319
- virtualna slika predmeta, 204
- višequantni fotoelektrični efekt, 316
- viši harmonici, 65
- vlačno naprezanje, vlak, 5
- vlastita frekvencija, 107
- vodič svjetlosti, 213
- vodikov atom, 409
 - energijska stanja, 400
 - energijske razine, 410
 - klasični polumjer vodikova atoma, 409
- volumni modul elastičnosti, 12, 112, 82
- virtložne struje, 142

Wb, 136

Weber, Wilhelm, 136

Weiszacker, 459

Wien, W., 352, 360

Wienov zakon pomicanja, 352, 356

Young, 250

Youngov modul elastičnosti, 6, 9, 12

Youngov pokus, 249, 427

Zakočno zračenje u rendgenskoj cijevi, 417

- granična valna duljina zakočnog zračenja, 417

zakon loma svjetlosti, 199, 202

- Snellov zakon, 199

- u Möbiusovu obliku, 220

- kroz tanku leću, 227

- na sfernoj granici, 222

zakon odbijanja ili refleksije, 199, 201

zakon pravocrtnog širenja svjetlosti, 198
 zakon protjecanja, 144
 zakon radioaktivnog raspada, 462
 zakretanje ravnine polarizacije, 302, 304, 306
 i djelovanje magnetskog polja (Faradayev
 efekt), 304
 Zeeman, Pieter, 444
 Zeemanov efekt, 444
 zračenje crnog tijela, 356
 zvuk,
 – boja tona, 107
 – brzina zvuka, 111
 – jakost zvuka, 120
 – prag čujnosti, 121
 zvučni val, 108
 Žarišna daljina
 – predmetna, 207, 223, 228
 – slikovna, 207, 223, 228
 žarišta sferne granice, 223
 žuta natrijeva linija, 437
 X-zračenje, v. rendgensko zračenje

Periodni sustav elemenata

s orbitale				d orbitale																p orbitale (osim H, He)																
IA				IIA		IIIA		IVA		VA		VIA		VIIA		VIII		IB		IIB		IIIB		IVB		VB		VIB		VIIB		0				
1	1	H	1,008	3	Li	6,941	11	Na	22,99	19	K	39,10	37	Rb	85,47	55	Cs	132,9	87	Fr	(223)	20	Ca	40,08	38	Sr	87,62	56	Ba	137,3	88	Ra	(226)	2	He	4,003
2	2	Be	9,012	4	Be	9,012	12	Mg	24,31	21	Sc	44,96	39	Y	88,91	57	La	138,9	89	Ac	(227)	22	Ti	47,90	40	Zr	91,22	58	Hf	178,5	90	Th	(232)	3	Ne	20,18
3	3	Ne	20,18	5	Ne	20,18	13	Ne	20,18	27	Co	58,93	45	Rh	102,9	77	Ir	192,2	79	Au	197,0	29	Cu	63,53	47	Ag	107,9	81	Tl	204,4	83	Bi	209,0	5	Ar	39,95
4	4	Ar	39,95	6	Ar	39,95	14	Ar	39,95	28	Ni	58,70	46	Pd	106,4	78	Pt	195,1	80	Hg	200,6	30	Zn	65,38	48	Cd	112,4	82	Pb	207,2	84	Po	(209)	6	Kr	83,80
5	5	Kr	83,80	7	Kr	83,80	15	Kr	83,80	25	Mn	54,94	43	Tc	(97)	75	Re	186,2	76	Os	190,2	26	Fe	55,85	44	Ru	101,1	74	W	183,9	73	Ta	180,9	72	Hf	178,5
6	6	Xe	131,3	8	Xe	131,3	16	Xe	131,3	35	Br	79,90	51	Sb	121,8	53	I	126,9	54	Xe	131,3	36	Kr	83,80	50	Sn	118,7	82	Pb	207,2	84	Po	(209)	7	Rn	(222)
7	7	Rn	(222)	9	Rn	(222)	17	Rn	(222)	34	Se	76,96	62	Te	127,6	84	Po	(209)	85	At	(210)	33	As	74,92	52	Sb	121,8	83	Bi	209,0	85	At	(210)	8	Ne	20,18

ŠKOLSKA KNJIGA, d.d.
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
ANTE ŽUŽUL, prof.

Tisak dovršen u kolovozu 2004.